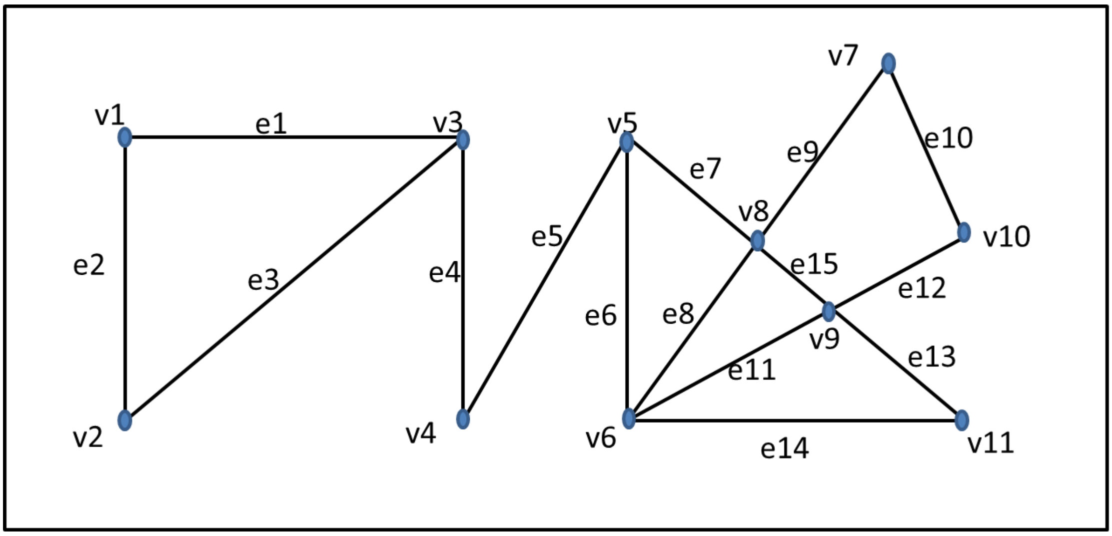
Teoria dos Grafos – Atividade da Aula 20 – Resolução – Prof. Calvetti

1. Dado o grafo **G**, apresentado na forma gráfica, defina os conjuntos **V** e **E** que o constituem:



$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \}$ → Conjunto de vértices

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14} \}$ → Conjunto de Arestas

2. Considerando o grafo **G** da questão 1, há arestas **paralelas** no Grafo? **Justifique**.

Se duas ou mais arestas de G tem os mesmos vertices-extremidade, essas arestas são chamadas arestas PARALELAS. No grafo G dado NÃO existe nenhuma aresta paralela.

3. Considerando o Grafo **G** da questão 1, há vértices **isolados** no Grafo? **Justifique**.

Um vértice de G que não é extremidade de qualquer aresta é chamado vértice ISOLADO. No grafo G dado NÃO existe nenhum vértice isolado.

4. Qual o conjunto vizinhança dos vértices **v6** e **v9** do Grafo **G** da questão 1?

$N(v_6) = \{ v_5, v_8, v_9, v_{11} \}$

$N(v_9) = \{ v_6, v_8, v_{10}, v_{11} \}$

5. O grafo **G** da questão 1 é simples? **Justifique**.

Sim, pois um grafo é chamado simples se não tiver arestas paralelas.

6. Defina o **grau** de todos os vértices do grafo **G** da questão 1.

$d(v_1) = 2$	$d(v_5) = 3$	$d(v_9) = 4$
$d(v_2) = 2$	$d(v_6) = 4$	$d(v_{10}) = 2$
$d(v_3) = 3$	$d(v_7) = 2$	$d(v_{11}) = 2$
$d(v_4) = 2$	$d(v_8) = 4$	

7. Defina a **sequência** dos **Graus** do Grafo **G** da questão1.

Ordem crescente:

$$s = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4)$$

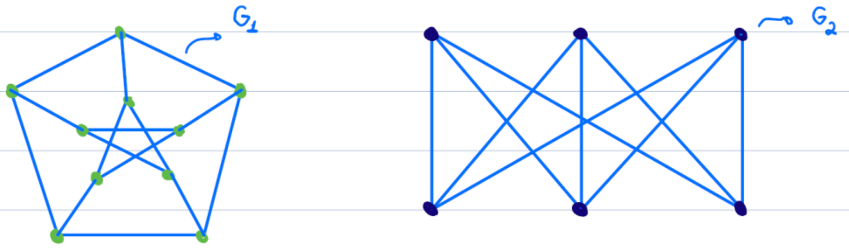
$v_1 \quad v_2 \quad v_4 \quad v_7 \quad v_{10} \quad v_{11} \quad v_3 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_8 \quad v_9$

8. O grafo **G** da questão 1 é regular? **Justifique**.

Não, pois um grafo regular consiste em todos os vertices tendo o MESMO grau.

9. Mostre graficamente, dois grafos **G1** e **G2 cúbicos**.

Um grafo cúbico é um grafo REGULAR no qual todos os vértices têm grau 3.



10. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5 ? **Justifique**.

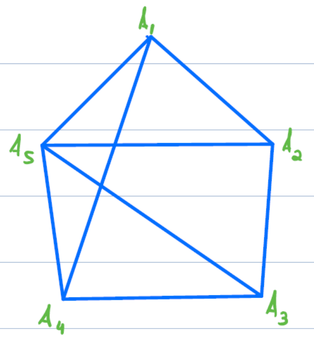
Não. O grau desse grafo seria $15 \times 5 = 75$, que é um número ímpar. Sabe-se que o grau de qualquer grafo deve ser um número PAR.

11. Pode haver um grafo simples com 10 vértices, cada um com grau 3 ? **Justifique**.

Sim. O grau desse grafo seria $10 \times 3 = 30$, que é um número PAR.

12. O grafo de intersecção de uma coleção de conjuntos **A1**, **A2**, ... , **An** é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma intersecção não vazia. Construa o grafo de **intersecção** para a seguinte coleção de conjuntos:

A1 = { 0, 2, 4 , 6, 8 }
A2 = { 0, 1 , 2 , 3, 4 }
A3 = { 1, 3, 5, 7, 9 }
A4 = { 5, 6, 7, 8, 9 }
A5 = { 0, 1, 8, 9 }



$A_1 \cap A_2 = \{0, 2, 4\}$ $A_2 \cap A_3 = \{1, 3\}$ $A_3 \cap A_4 = \{5, 7, 9\}$ $A_4 \cap A_5 = \{8, 9\}$

$A_1 \cap A_3 = \emptyset$ $A_2 \cap A_4 = \emptyset$ $A_3 \cap A_5 = \{1, 9\}$

$A_1 \cap A_4 = \{6, 8\}$ $A_2 \cap A_5 = \{0, 1\}$

$A_1 \cap A_5 = \{0, 8\}$

13. Considere dois grafos **G1**, com 10 vértices e **G2** com 11 vértices. Os grafos **G1** e **G2** podem ser **isomorfos**? **Justifique**.

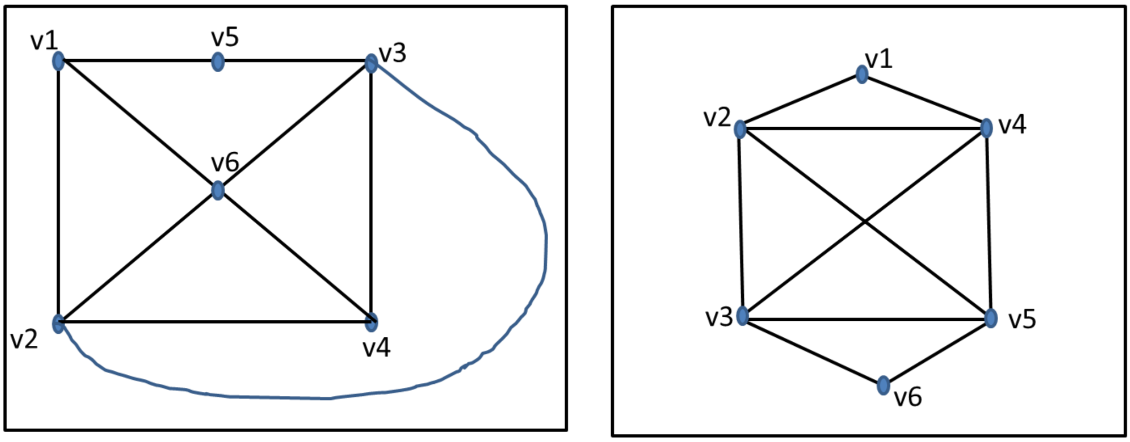
Não, pois para 2 grafos serem isomorfos eles precisam ter o MESMO número de vértices e arestas.

14. Considere dois grafos **G1**, com 5 arestas e **G2** com 6 arestas. Os grafos **G1** e **G2** podem ser **isomorfos**? **Justifique**.

Não, pois para 2 grafos serem isomorfos eles precisam ter o MESMO número de vértices e arestas.

15. Considere os grafos **G1** e **G2** da figura abaixo:

G1 G2



G1 e **G2** são **isomorfos**? **Justifique**.

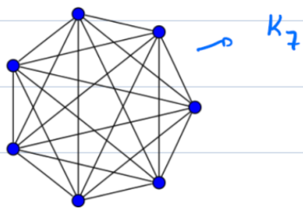
Apesar de G1 e G2 terem o mesmo número de vértices e arestas, G1 tem vértices de grau 3, e G2 não tem vértices de grau 3. G1 e G2 não são isomorfos.

A condição de que 2 grafos para serem isomorfos devam ter o mesmo número de vértices, mesmo número de arestas e igual número de vértices com determinado grau é condição necessária, mas não suficiente.

16. Quantas arestas tem o grafo **K7**? **Justifique**.

Um grafo completo é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices.

K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

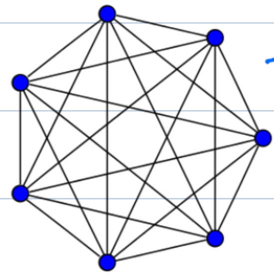


K_7 tem $\frac{7(7-1)}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ arestas

17. Quantas arestas tem o grafo **K10** ? **Justifique**.

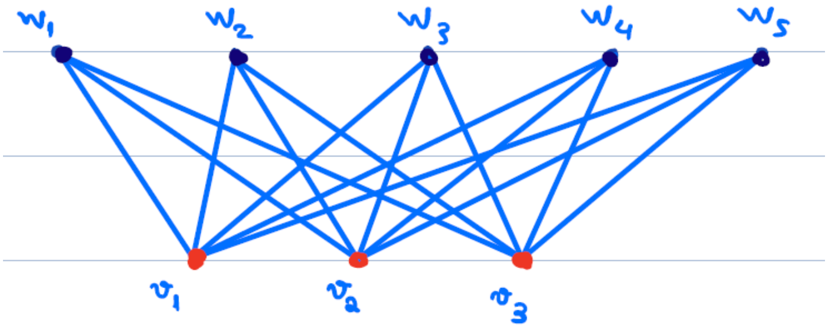
K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

K_7 tem $\frac{7(7-1)}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ arestas

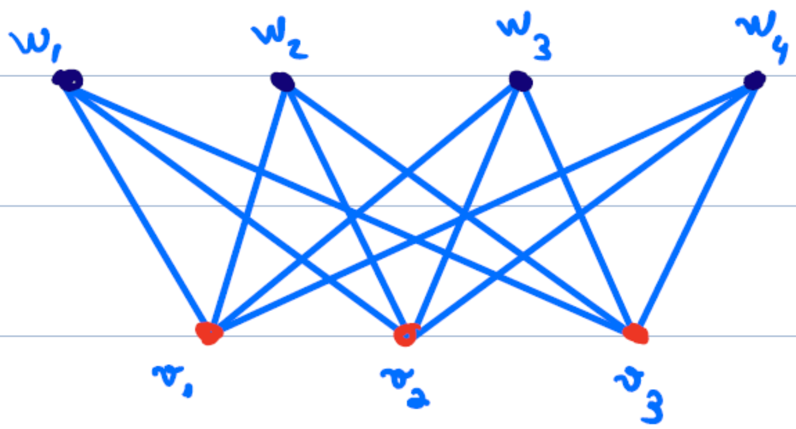


$\rightarrow K_7$

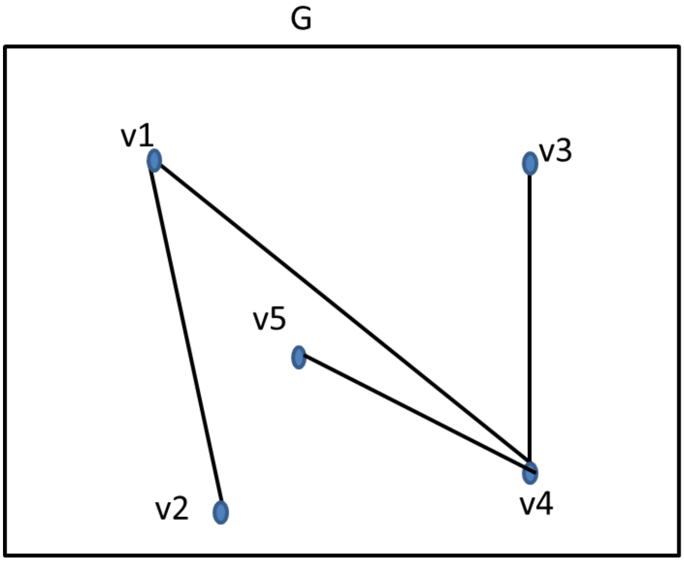
18. Desenhe o grafo **K3,5**.



19. Desenhe o grafo **K3,4**.

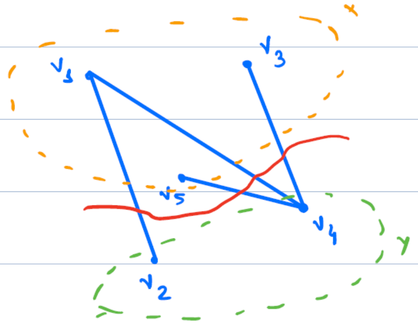


20. Considere o grafo **G** abaixo:



G é **Bipartido**? Justifique.

Sim G é bipartido.



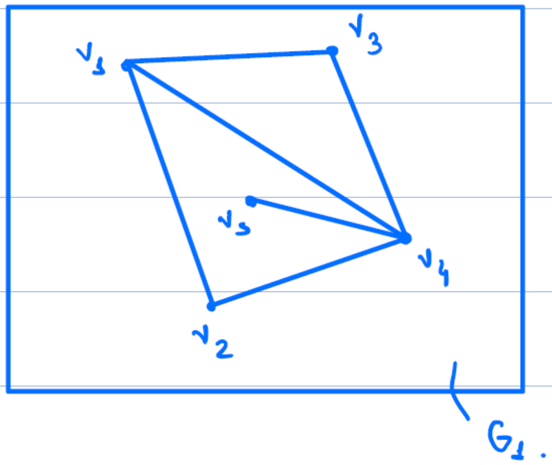
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$X = \{v_1, v_3, v_5\}$

$Y = \{v_2, v_4\}$

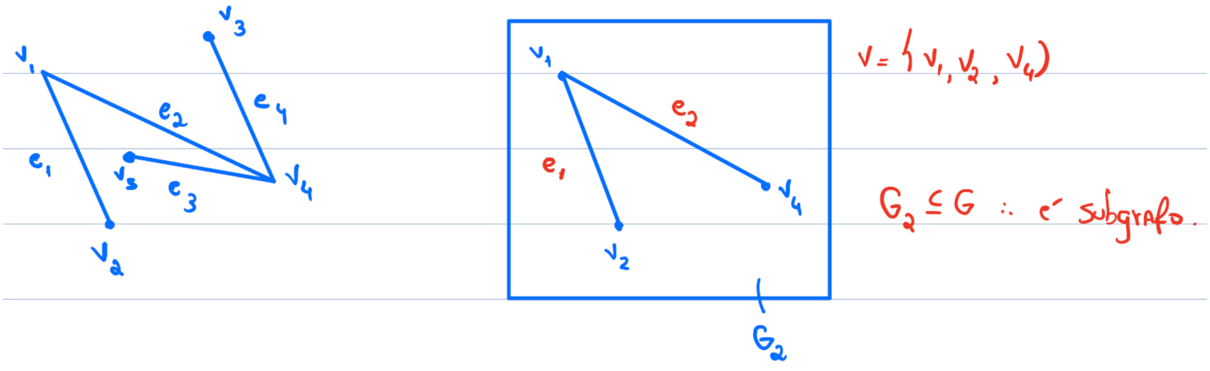
$\boxed{X \cap Y = \emptyset \checkmark \quad X \cup Y = V \checkmark}$

21. Considere o grafo **G** da questão 21. Defina um **supergrafo** de **G**.

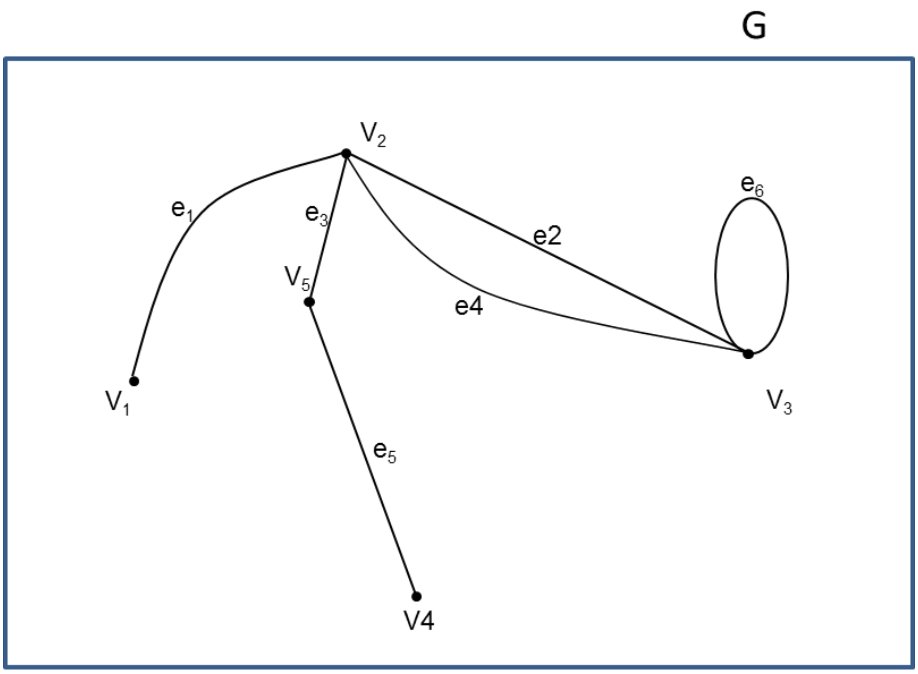


G_1 é supergrafo de G.

22. Considere o grafo **G** da questão 21. Defina um **subgrafo** de **G**.



23. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:



A) Defina, se possível, um **passeio aberto** no Grafo **G**;

B) Defina, se possível, um **passeio fechado** no Grafo **G**;

C) Defina, se possível, uma **trilha aberta** no Grafo **G**;

D) Defina, se possível, um **circuito** no Grafo **G**;

E) Defina, se possível, um **caminho aberto** n Grafo **G**;

F) Defina, se possível, um **ciclo** no Grafo **G**.

A) $\omega_1 = \{ v_1\, e_1\, v_2 \}$ → passeio aberto.

B) $\omega_2 = \{ v_2\, e_4\, v_3\, e_2\, v_2 \}$ → passeio fechado.

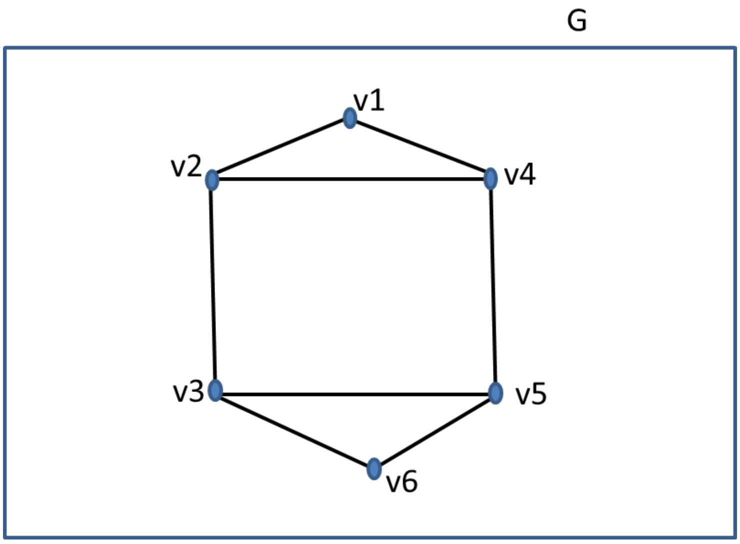
C) $\omega_3 = \{ v_1\, e_1\, v_2\, e_2\, v_3\, e_6\, v_3 \}$ → trilha aberta.

D) $\omega_4 = \{ v_2\, e_4\, v_3\, e_6\, v_3\, e_2\, v_2 \}$ → trilha fechada ou circuito.

E) $\omega_5 = \{ v_1\, e_1\, v_2\, e_3\, v_5\, e_5\, v_4 \}$ → Caminho aberto

F) $\omega_6 = \{ v_2\, e_4\, v_3\, e_2\, v_2 \}$ → ciclo ou caminho fechado

24. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:



O grafo **G** é **Euleriano**? **Justifique**.

Pelo teorema de Euler:

Se todo o Grau do vértice de G for PAR ele é euleriano.

$d(v_1) = 2$ $\quad$ $d(v_4) = 3$ ×

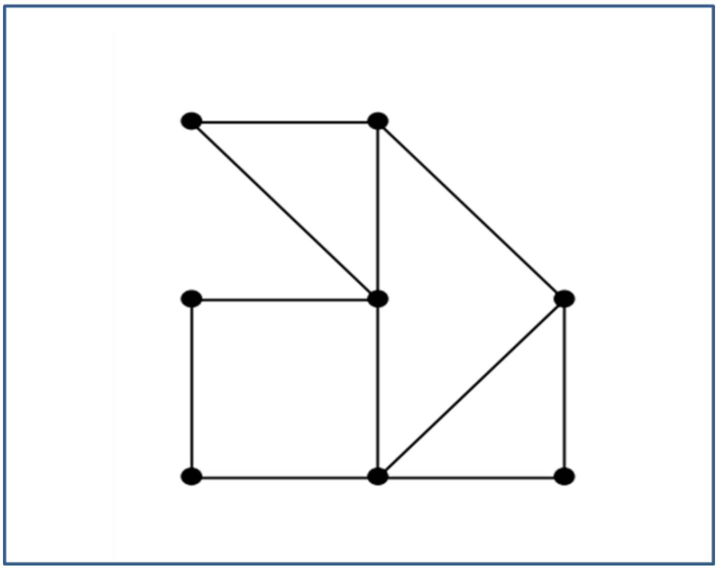
$d(v_2) = 3$ × $\quad$ $d(v_5) = 3$ ×

$d(v_3) = 3$ × $\quad$ $d(v_6) = 2$

$\therefore$ o Grafo G Não é Euleriano

25. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:

G



O grafo **G** é **Euleriano**? **Justifique**.

Pelo teorema de Euler:

Se todo o Grau do vértice de G for PAR ele é euleriano.

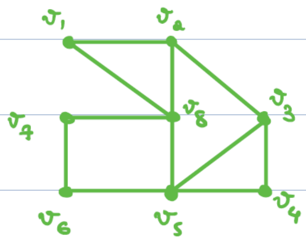
$d(v_1) = 2$ $\quad$ $d(v_5) = 3$ ×

$d(v_2) = 3$ × $\quad$ $d(v_6) = 2$

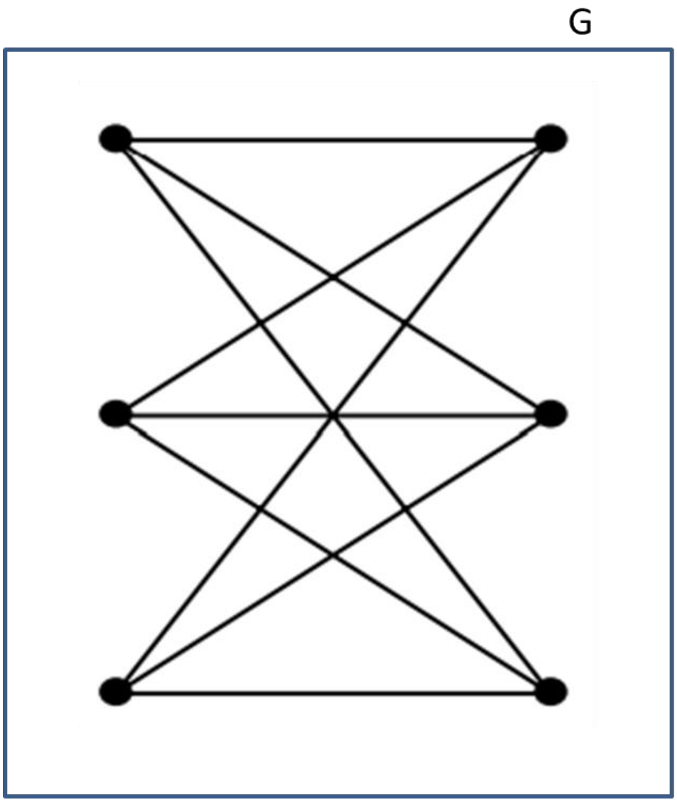
$d(v_3) = 3$ × $\quad$ $d(v_7) = 2$

$d(v_4) = 2$ $\quad$ $d(v_8) = 4$

$\boxed{\therefore \text{ o Grafo G não é Euleriano}}$



26. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:



O grafo **G** é **Euleriano**? **Justifique**.

Pelo teorema de Euler:

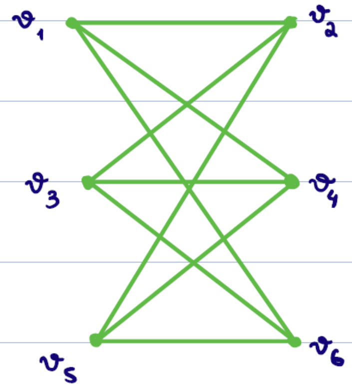
Se todo o Grau do vértice de G for PAR ele é euleriano.

$d(v_1) = 3$ × $d(v_4) = 3$ ×

$d(v_2) = 3$ × $d(v_5) = 3$ ×

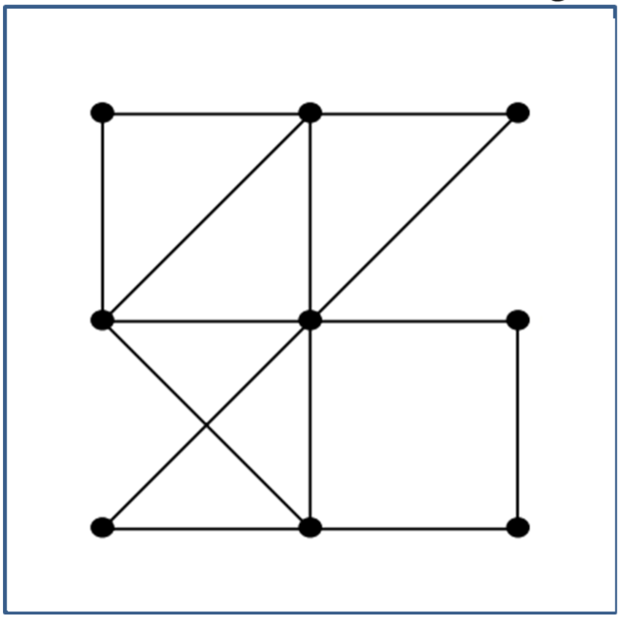
$d(v_3) = 3$ × $d(v_6) = 3$ ×

∴ o Grafo G Não é Euleriano



27. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:

G



O grafo **G** é **Euleriano**? **Justifique**.

Pelo teorema de Euler:

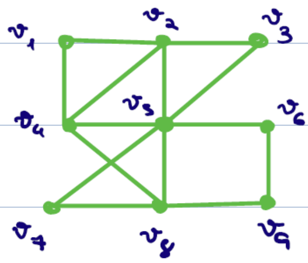
Se todo o Grau do vértice de G for PAR ele é euleriano.

$d(v_1) = 2$ $d(v_5) = 6$ ∴ o Grafo G é Euleriano

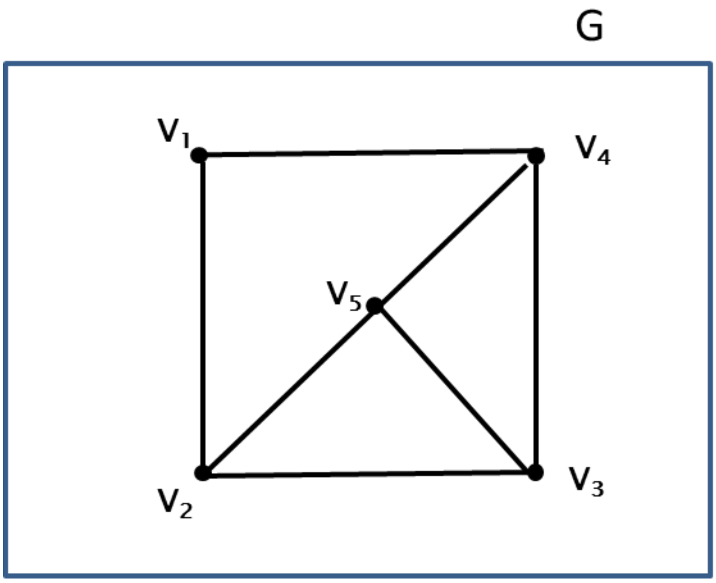
$d(v_2) = 4$ $d(v_6) = 2$

$d(v_3) = 2$ $d(v_7) = 2$ $d(v_9) = 2$

$d(v_4) = 4$ $d(v_8) = 4$

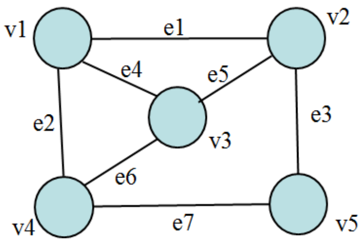


28. Considere o grafo **G**, da figura abaixo:



O grafo **G** é **Hamiltoniano**? **Justifique**.

O grafo pode ser desenhado, conforme abaixo:



d(v1) + d(v5) = 3 + 2 >= 5
d(v2) + d(v4) = 3 + 3 >= 6
d(v3) + d(v5) = 3 + 2 >= 5
d(v4) + d(v2) = 3 + 3 >= 5
d(v5) + d(v3) = 2 + 3 >= 5
d(v5) + d(v1) = 2 + 3 >= 5

O Teorema de **Ore** é atendido!

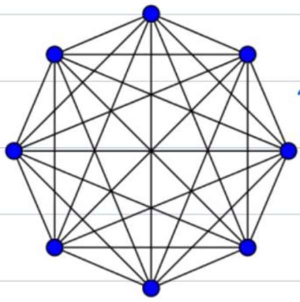
Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

- ✓ O ciclo **v1**e4v3e6v4e7v5e3v2e1**v1** é **hamiltoniano**. Logo, o grafo é **hamiltoniano**!

29. Quantos **vértices** e **arestas** têm o grafo **K8**? Justifique.

Um grafo completo é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices.

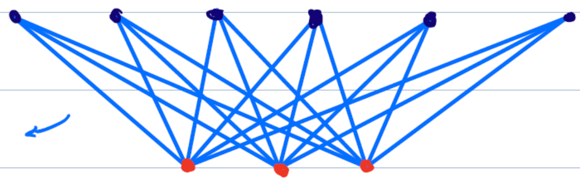
K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas.



K_8

K_8 tem $\frac{8.(8-1)}{2} = \frac{8\times 7}{2} = 28$ arestas

30. Quantos **vértices** e **arestas** tem o grafo **K6,3**? **Justifique**.



$K_{6,3}$

Deve satisfazer as propriedades: $\nexists\ i,k = 1,2 \ldots m \wedge$

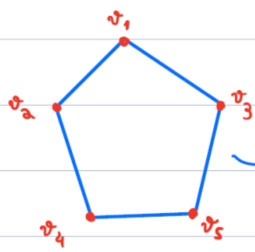
$\nexists\ j;\ k = 1,2 \ldots n$

$\therefore$ 9 vértices

$3 \times 6 = 18$ arestas

31. Quantos **vértices** e **arestas** tem o grafo **ciclo C5** ? **Justifique**.

Um grafo ciclo C_n, $n \geq 3$ é um grafo simples com n vértices e arestas v_1v_2, $v_2v_3 \ldots v_{n-1}v_n$, v_nv_1.



C_5

O grafo ciclo C5 tem: 5 vértices

5 arestas

32. Quantos **vértices** e **arestas** tem o grafo **Cubo Q5** ? **Justifique**.

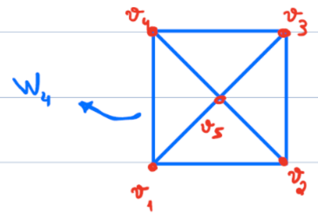
Um grafo Cubo-n de 2^n vértices, denominado Q_n é um grafo Simples que representa os 2^n Strings de n bits. 2 vertices são adjacentes se os strings que eles representam diferem em exatamente uma posição.

$\therefore$ $Q_5 = 2^5$ vertices $= 32$

5×2^4 arestas $= 80$

33. Quantos **vértices** e **arestas** tem o grafo **Roda W4** ? **Justifique**.

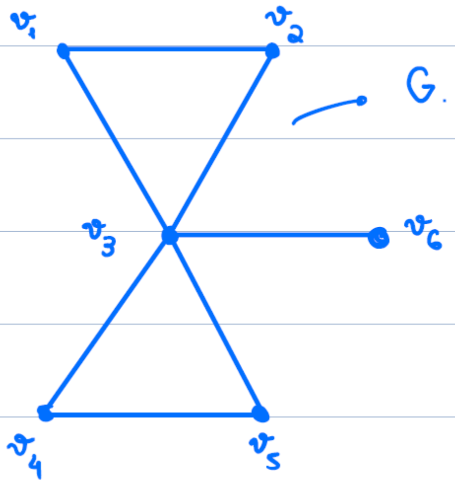
Um grafo roda, denominado W_n, é um grafo Simples com $n+1$ vértices que é obtido acrescentando um vértice ao grafo ciclo C_n, $n \geq 3$, e conectando este novo vértice a cada um dos n vértices de C_n.



Vértices = 5

Aréstas = 8

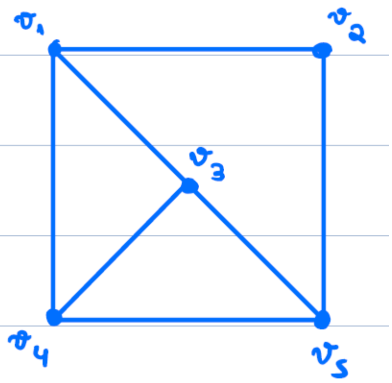
34. Quantas **arestas** tem um grafo com vértices de Graus **5, 2, 2, 2, 2, 1** ? Desenhe, se possível, o grafo.



O grafo G tem 7 arestas.

35. **Existe** um grafo simples com **5** vértices com os seguintes graus: **3, 3, 3, 3, 2** ? Desenhe, se possível o grafo.

Sim.

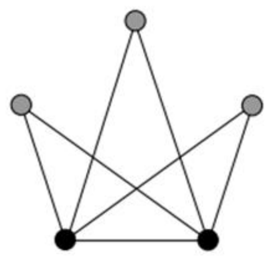


36. **Existe** um grafo simples com **5** vértices com os seguintes graus: **1, 2, 3, 4, 5** ? Desenhe, se possível o grafo.

Não existe. Grau total = 15.

37. **Existe** um grafo simples com **5** vértices com os seguintes graus: **1, 2, 3, 4, 4** ? Desenhe, se possível o grafo.

Resposta:
O grafo tem um grau total de $1+2+3+4+4 = 14$. No entanto, como existem dois vértices com grau 4, todos os vértices devem ter pelo menos grau 2, como mostrado na figura abaixo. Como supostamente existe um vértice com grau 1, não é possível existir tal grafo.



38. **Existe** um grafo simples com **5** vértices com os seguintes graus: **3, 4, 3, 4, 3** ? Desenhe, se possível o grafo.

Resposta:
O grafo tem um grau total de $3+4+3+4+3 = 17$. Isso não é possível.

39. Quantos **subgrafos** com pelo menos um vértice tem **K3** ? **Justifique**.

Resposta:

São os subgrafos com um, dois e três vértices. Temos, então, três casos:

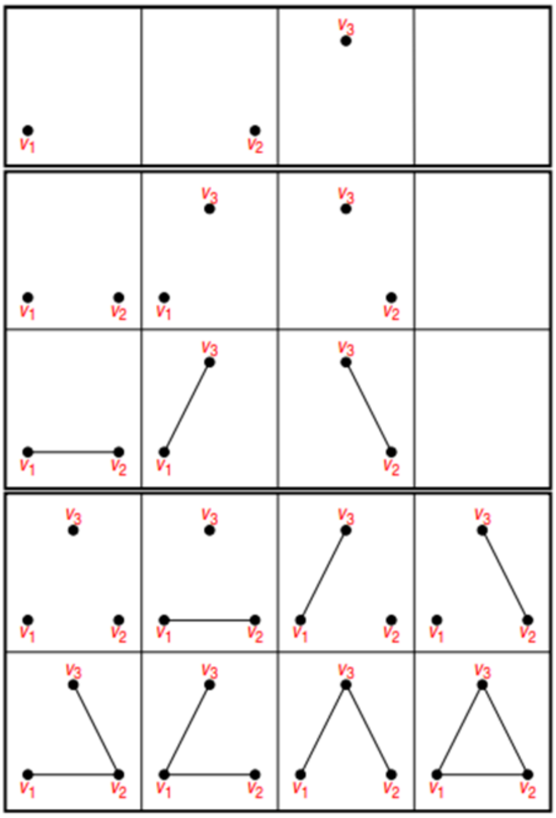
(a) Um vértice: existem três subgrafos com um vértice e, consequentemente, nenhuma aresta;

(b) Dois vértices: existem $C(3, 2) = 3$ possibilidades de escolher subgrafos com dois vértices (de um conjunto com três vértices, devemos escolher dois). Para cada possibilidade, podemos incluir ou não a aresta, i.e., $3 \times 2 = 6$ subgrafos com dois vértices;

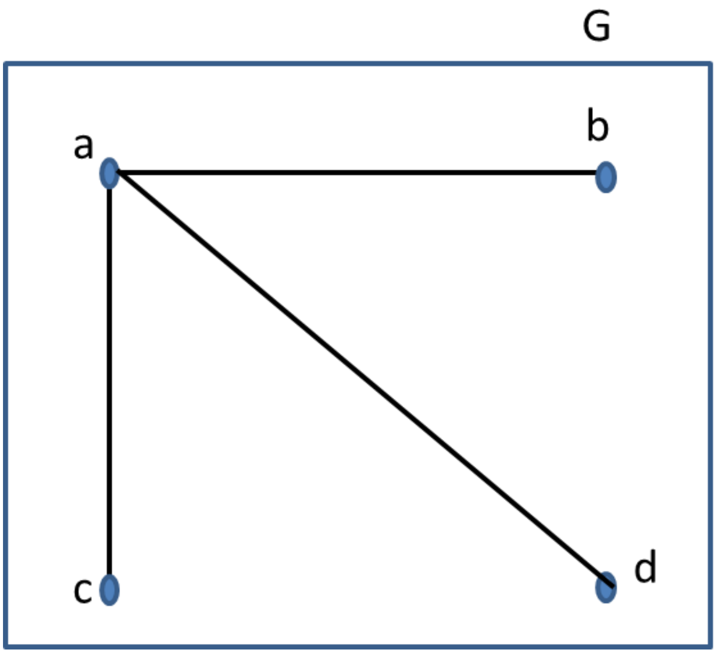
(c) Três vértices: neste caso, para uma das três arestas que podemos ter, podemos incluí-la ou não, ou seja, para cada aresta temos duas possibilidades. Assim, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades. Uma outra forma de analisarmos este caso é que temos um conjunto E com três arestas. O conjunto potência de E nos dá todos os subconjuntos de aresta que podemos escolher. Assim, temos $2^3 = 8$ possibilidades de subconjuntos distintos.

Assim, a quantidade total de subgrafos com pelo menos um vértice é a soma de $3 + 6 + 8 = 17$.

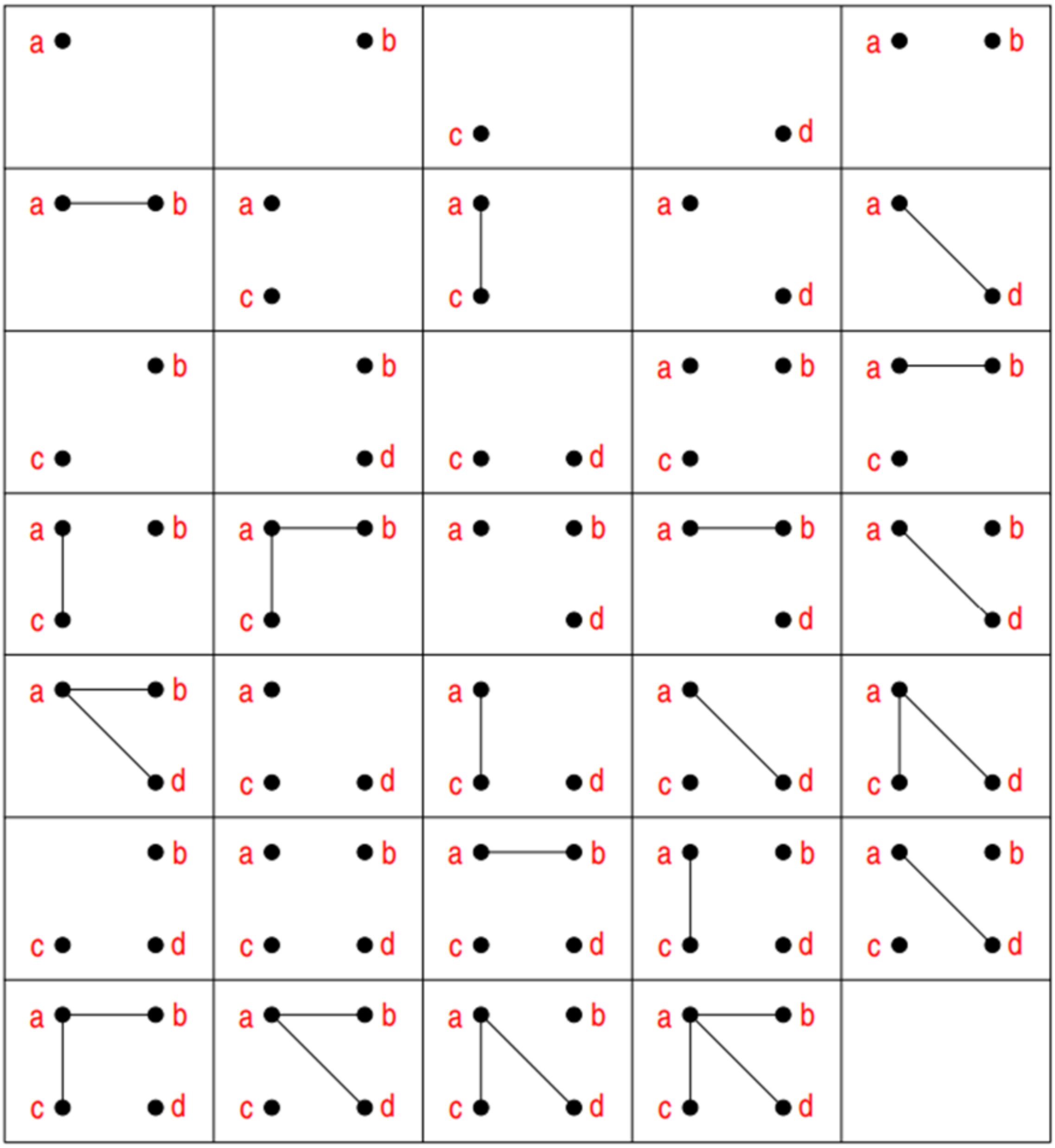
A figura abaixo mostra todos esses subgrafos.



40. Desenhe todos os **subgrafos** do grafo **G** abaixo:



Resposta:



41. Para que valores de **n**, os grafos **Kn** são **regulares**? **Justifique**.

O grafo K_n é regular para todos os valores de $n \geq 1$ já que o grau de cada vértice é $n-1$.

42. Para que valores de **n**, os grafos **Cn** são **regulares** ? **Justifique**.

O grafo C_n é regular para todos os valores de $n \geq 3$ já que o grau de cada vértice é sempre 2.

43. Para que valores de **n**, os grafos **Wn** são **regulares** ? **Justifique**.

No grafo roda o grau do centro é n e dos vertices no ciclo é 3. Assim o W_n é regular apenas para $n = 3$.

44. Para que valores de **n**, os grafos **Qn** são **regulares** ? **Justifique**.

Resposta:
O grafo ciclo Q_n é regular para todos os valores de $n \geq 0$, já que o grau de cada vértice é sempre n.

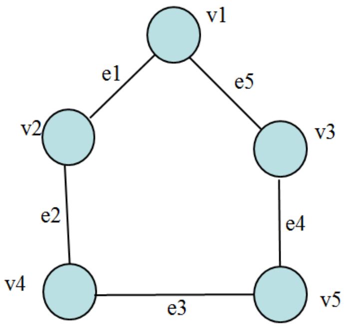
45. A condição imposta pelo **Teorema de Dirac** é **suficiente** ou **necessária**? **Justifique**.

Teorema de Dirac – Observação 2

✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, **n ≥ 3**. Se para todo vértice **v ε V**, **d(v) ≥ n/2**, então **G** é **Hamiltoniano**.

✓ A condição imposta pelo **Teorema de Dirac** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!


✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição d(v) >= n/2. Exemplo:



d(v1) = 2 < 5/2
d(v2) = 2 < 5/2
d(v3) = 2 < 5/2
d(v4) = 2 < 5/2
d(v5) = 2 < 5/2

O Teorema Dirac ÑÃO é atendido!

Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5v1 é ciclo hamiltoniano ! Logo, o Grafo é hamiltoniano!

46. A condição imposta pelo **Teorema de Ore** é **suficiente** ou **necessária**? **Justifique**.

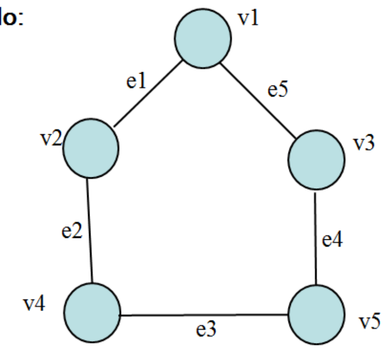
Teorema de Ore – Observação

✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, |V| = **n ≥ 3**. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , **u ε V** e **v ε V**, **d(u) + d(v) ≥ n**, então **G** é **Hamiltoniano**.

✓ A condição imposta pelo **Teorema de Ore** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!

✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição d(u) + d(v) >= n, sendo u e v vértices quaisquer não adjacentes.

emplo:



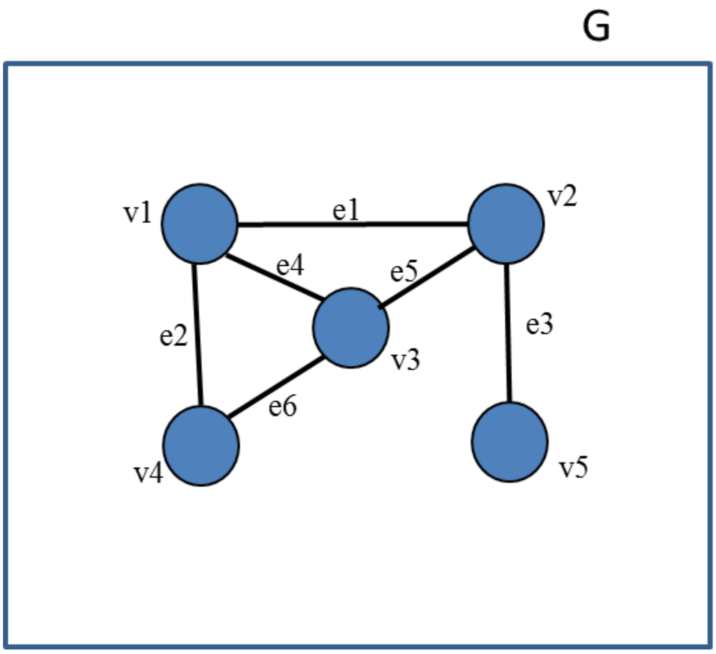
d(v1) + d(v4) = 2 + 2 < 5

O Teorema Ore **NÃO** é atendido!

Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5**v1** é ciclo hamiltoniano !
Logo, o Grafo é hamiltoniano!

47. Considere o grafo **G** abaixo:



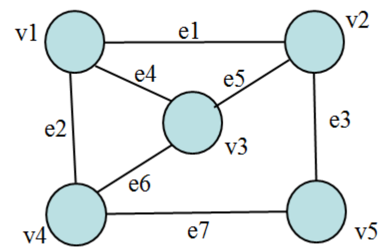
O grafo **G** é **Hamiltoniano** ? **Justifique**.

O grafo **G** é **Euleriano** ? **Justifique**.

✓ Corolário do Teorema de Dirac;

✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, |V| = **n ≥ 3**. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , **u ε V** e **v ε V**, **d(u) + d(v) ≥ n**, então **G** é **Hamiltoniano**.

Exemplo:



$d(v1) + d(v5) = 3 + 2 >= 5$
$d(v2) + d(v4) = 3 + 3 >= 6$
$d(v3) + d(v5) = 3 + 2 >= 5$
$d(v4) + d(v2) = 3 + 3 >= 5$
$d(v5) + d(v3) = 2 + 3 >= 5$
$d(v5) + d(v1) = 2 + 3 >= 5$

O Teorema de **Ore** é atendido!

Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

✓ O ciclo **v1**e4v3e6v4e7v5e3v2e1**v1** é **hamiltoniano**. Logo, o grafo é **hamiltoniano**!

Teorema de Euler

✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

O grau de v1 é ímpar, logo, pelo Teorema de Euler, o grafo não é Euleriano.

48. O que significa dizer que um **problema** tem **complexidade NP Completo**? O que significa dizer que um **problema** tem **complexidade P** ?

A complexidade **Polinomial** representa o divisor de águas dentre as classes de Algoritmos;

Algoritmos **polinomais** são considerados **tratáveis**;

Algoritmos com complexidades superiores às polinomiais são **intratáveis**;

Exemplo: Caixeiro Viajante – **TST** – Travelling Salesman Problem.

49. Descreva o **Teorema de Berge** para o Problema do **Emparelhamento** de **Grafos**. Qual a importância deste teorema para o Problema do **Emparelhamento** de Grafos ?

✓ Graças ao Matemático francês Claude **Berge**, pode-se determinar se há um emparelhamento maior (com mais arestas) que o já encontrado.

Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.

Vértice Livre

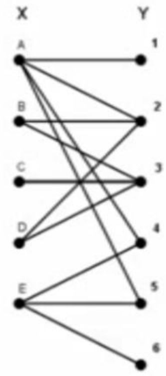
Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M.

50. Descreva o **Teorema de Hall** para o Problema do **Emparelhamento** de **Grafos**. Qual a importância deste teorema para o Problema do **Emparelhamento** de **Grafos** ?

Porém, dessa vez estávamos à procura da existência de um Emparelhamento Completo.

Emparelhamento Completo

É um emparelhamento que cobre (ou satura), em um grafo bipartido, todos os vértices do conjunto X, onde X representa o conjunto dos elementos que devem ser alocados.



Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo G bipartido com partição (X, Y), existe um emparelhamento completo se e somente se, $|N(s)| \geq |s|$, para todo subconjunto S de X.