# Grafos Eulerianos

Exemplos Visuais com TikZ

Resumo com exemplos práticos

13 de novembro de 2025

## Como usar este material

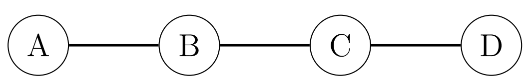
Cada conceito do slide "Grafos Eulerianos" aparece abaixo com um exemplo visual em TikZ. Compile com pdfLaTeX ou XeLaTeX.

## 1 Passeio, Trilha e Caminho

### 1.1 Passeio $W$

**Definições (do slide):** Um passeio é uma sequência $W = v_0e_1v_1e_2 \dots e_kv_k$, alternando vértices/arestas, onde cada aresta $e_i$ incide em $v_{i-1}$ e $v_i$. Pode ser *aberto* ($v_0 \neq v_k$) ou *fechado* ($v_0 = v_k$).

**Exemplo:** Passeio aberto $W = A, B, C, D$ (com repetições *permitidas*).

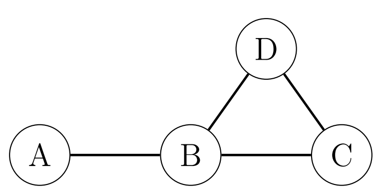



*Ex.:* $W = A{-}B{-}C{-}D$ *(comprimento* $k = 3$*).*

### 1.2 Trilha

**Definição (do slide):** Trilha é um passeio em que *nenhuma aresta* se repete (pode repetir vértices). Uma trilha fechada é um *circuito*.

**Exemplo corrigido (trilha *aberta* com repetição de vértice, mas *sem repetir aresta*):** $W = A{-}B{-}D{-}C{-}B$. As arestas usadas são $AB, BD, DC, CB$ — todas distintas; o vértice $B$ aparece duas vezes (permitido).

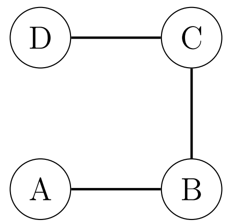



*Nenhuma aresta repetida;* $B$ *repetido.*

### 1.3 Caminho

**Definição (do slide):** Caminho é uma trilha em que *nenhum vértice* se repete (exceto a possibilidade $v_0 = v_k$ no caso fechado, chamado *ciclo*).

**Exemplo:** Caminho $A - B - C - D$ (aberto). Um ciclo seria $A - B - C - A$.




*Sem repetição de vértices.*

# 2 Comprimento e "todo passeio contém um caminho"

## 2.1 Comprimento

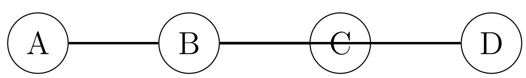
**Definição (do slide):** O comprimento de um passeio é o número de arestas $k$.

**Exemplo:** No passeio $W = A - B - C - B - D$, $k = 4$.

## 2.2 Teorema (do slide): passeio contém caminho

**Enunciado:** Dado um passeio $u - v$, ao eliminar repetições de vértices/arestas de forma apropriada, obtemos um *caminho* $u - v$.

**Exemplo (visual):** Removendo o "voltar" por $C \to B$ no passeio abaixo, sobra um caminho $A - B - C - D$.



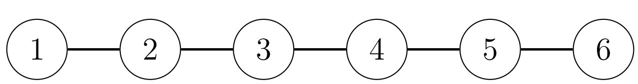

*Eliminar repetição $C \to B$.*

# 3 Trilha Euleriana e Grafo Euleriano

## 3.1 Trilha Euleriana

**Definição (do slide):** Trilha que *contém todas as arestas* do grafo. Pode ser aberta ou fechada.

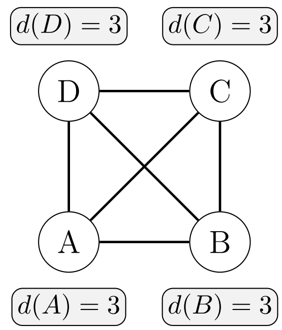
**Exemplo:** No grafo em caminho estendido abaixo, a sequência $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$ percorre todas as arestas (trilha Euleriana aberta).



### 3.2 Grafo Euleriano

**Definição (do slide):** Um grafo é *Euleriano* se possui *um circuito Euleriano*, isto é, uma trilha Euleriana *fechada* (começa e termina no mesmo vértice).

**Exemplo:** Ciclo quadrado e diagonais; compare graus.

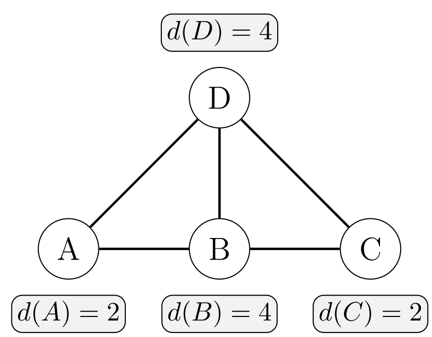



*Todos ímpares ⇒ não Euleriano.*

# 4 Critério de Euler (do slide)

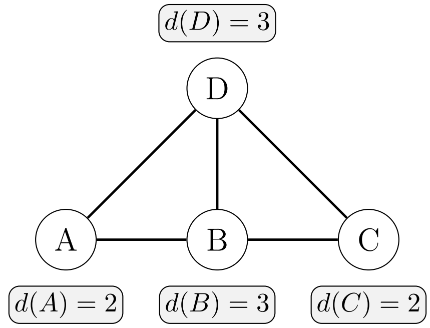
**Teorema de Euler:** Um grafo *conexo* é Euleriano *se, e somente se*, todos os seus vértices têm grau *par*.

**Exemplo A (Euleriano):** Todos os graus pares.




*Existe circuito Euleriano.*

**Exemplo B (Não Euleriano):** Há vértices de grau ímpar.

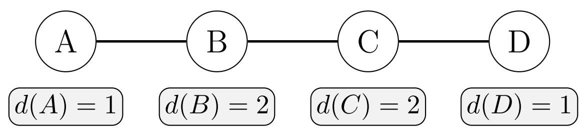



*Graus ímpares ⇒ não Euleriano.*

# 5 Trilha Euleriana (caso aberto)

**Fato clássico:** Um grafo *conexo* tem *trilha Euleriana aberta* (sem ser circuito) se e somente se *exatamente dois* vértices têm grau *ímpar* (eles serão início e fim).

**Exemplo (corrigido):** Caminho $A - B - C - D$ simples. Graus: $d(A) = 1$, $d(B) = 2$, $d(C) = 2$, $d(D) = 1$ (exatamente dois ímpares: $A$ e $D$).

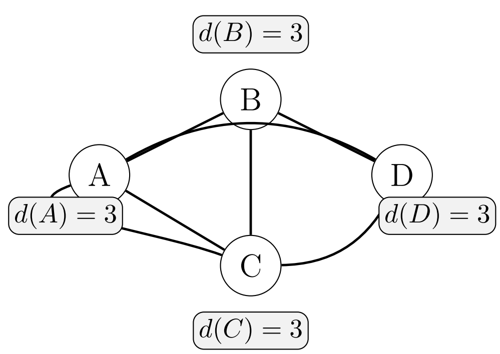



*Trilha Euleriana aberta existe (inicia em $A$ e termina em $D$).*

# 6 Problema das Pontes de Königsberg (motivação histórica)

**Ideia (do slide):** Não existe passeio que cruze cada ponte exatamente uma vez.

**Exemplo esquemático:** Quatro "ilhas" $A, B, C, D$ ligadas por 7 pontes (graus ímpares em todos).




*Todos os graus ímpares ⇒ sem trilha/circuito Euleriano.*

# 7 Checklist prático

- **É Euleriano (circuito Euleriano)?** Verifique: grafo *conexo* e *todos os graus pares.*
- **Tem trilha Euleriana aberta?** Verifique: grafo *conexo* e *exatamente dois* graus ímpares.
- **Caso contrário:** não há trilha que use todas as arestas sem repetir.
- Para **construir** um circuito/trilha Euleriana, use variações do algoritmo de Hierholzer.

*Dica de prova:* Liste os graus de todos os vértices; conte os ímpares; verifique conexão do grafo. Se todos pares $\Rightarrow$ Euleriano. Se 2 ímpares $\Rightarrow$ trilha Euleriana aberta.