Grafos Hamiltonianos

Resumo com exemplos visuais (TikZ)

Baseado no material da Unidade 18

13 de novembro de 2025

Como usar

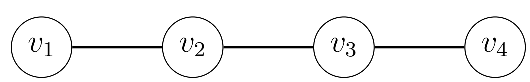
Cada conceito vem com uma **definição curta** e um **exemplo desenhado**. Compile com pdfLaTeX ou XeLaTeX.

1 Definições básicas

1.1 Caminho e Ciclo Hamiltoniano

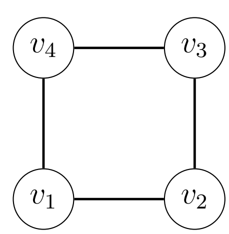
Definições: *Caminho Hamiltoniano* visita *todos* os vértices (V) exactamente uma vez; *Ciclo Hamiltoniano* é um ciclo que visita *todos* os vértices. Um grafo com um ciclo Hamiltoniano é *Hamiltoniano.*

Exemplo (caminho Hamiltoniano, mas sem ciclo):



Caminho Hamiltoniano $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$; sem aresta v_4v_1, não há ciclo.

Exemplo (ciclo Hamiltoniano):

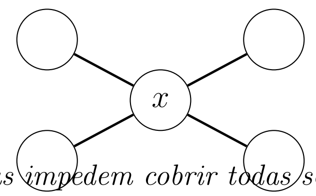


Ciclo Hamiltoniano $v_1v_2v_3v_4v_1$.

2 Exemplos tipo "o grafo tem?"

2.1 Sem caminho Hamiltoniano

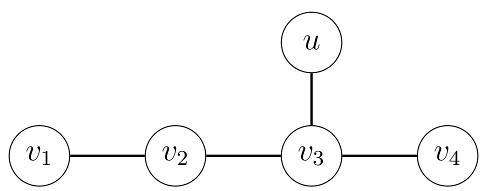
Ideia: Folhas (grau 1) excessivas podem impedir um caminho que passe *uma vez* por todos os vértices.



Muitas folhas impedem cobrir todas sem repetir x.

2.2 Com caminho Hamiltoniano, mas sem ciclo

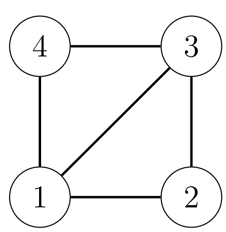
Exemplo: Um "caminho com rabicho" ainda pode ter caminho Hamiltoniano, mas não ciclo.



$v_1 - v_2 - v_3 - u - v_4$ *é caminho Hamiltoniano; não há aresta* $v_4 v_1$.

2.3 Com ciclo Hamiltoniano

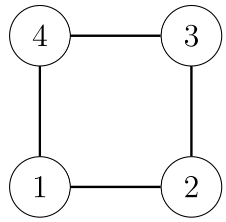
Exemplo: Quadrado com uma diagonal extra continua Hamiltoniano.



Ciclo Hamiltoniano $1-2-3-4-1$.

3 Supergrafo mantém Hamiltonicidade

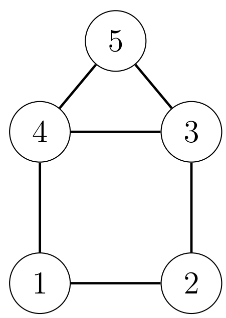
Observação: Se G é Hamiltoniano, qualquer supergrafo G (obtido adicionando arestas) também é Hamiltoniano, pois o mesmo ciclo ainda existe.



G é Hamiltoniano; em G adicione $(1,3)$ e $(2,4)$.

4 Não hamiltoniano maximal

Definição: G não é Hamiltoniano, mas *qualquer* aresta nova entre não adjacentes torna-o Hamiltoniano.

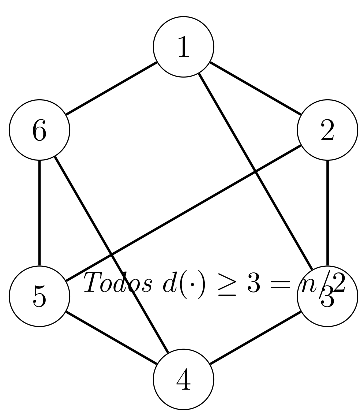


Sem ser Hamiltoniano; adicionando $(1,3)$ ou $(2,4)$ *vira Hamiltoniano.*

5 Critérios clássicos

5.1 Teorema de Dirac

Seja G simples com $n \geq 3$. Se $d(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, então G é Hamiltoniano.
Exemplo (n=6): Se todos têm grau ≥ 3, o grafo é Hamiltoniano.

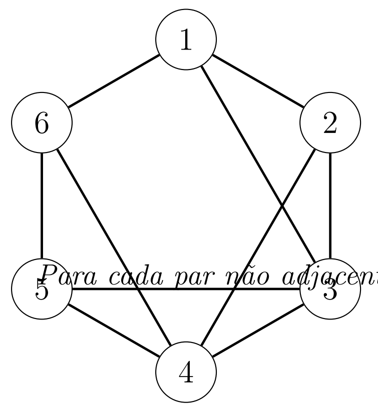


Todos $d(\cdot) \geq 3 = n/2 \Rightarrow$ Hamiltoniano.

5.2 Teorema de Ore

Seja G simples com $n \geq 3$. Se para todo par não adjacente u, v vale $d(u) + d(v) \geq n$, então G é Hamiltoniano.

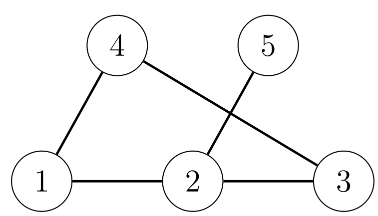
Exemplo (n=6): Mostre um par não adjacente qualquer e verifique as somas de grau ≥ 6.



Para cada par não adjacente, $d(u) + d(v) \geq n$.

6 Fechamento de Bondy–Chvátal

Fechamento $c(G)$: Enquanto houver u, v não adjacentes com $d(u) + d(v) \geq n$, adicione a aresta uv.
Teorema de Bondy: G é Hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $c(G)$ é Hamiltoniano. Corolário: se $c(G) = K_n$, então G é Hamiltoniano.



Aplicar $d(u) + d(v) \geq n$ e ir fechando até $c(G)$.

7 Ligação com o Caixeiro Viajante (TSP)

Modelagem: vértices são cidades; arestas ponderadas são estradas diretas; ciclo Hamiltoniano $\Rightarrow$ rota que visita todas uma vez e volta à origem. O TSP busca o *ciclo Hamiltoniano de custo mínimo*. Problema é *NP-difícil*; usa-se heurísticas (Christofides, vizinho mais próximo, 2-opt, etc.) para instâncias grandes.

Checklist: Procure ciclo que cubra todos os vértices. Se difícil, verifique Dirac/Ore ou use o fechamento $c(G)$. Se $c(G)$ é completo, acabou: G é Hamiltoniano.