

# Resoluções dos Exercícios de Teoria dos Grafos

Pedro Wilian Palumbo Bevilacqua - 23.01307-9

October 23, 2025

## Exercícios

### Exercício 1

1.  $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11\}$
2.  $E = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, e13, e14\}$

### Exercício 2

Não, pois não há arestas que compartilham os mesmos vértices de início e fim.

### Exercício 3

Não, pois todos os vértices possuem pelo menos uma aresta incidente.

### Exercício 4

Vizinhança de  $v6$ :  $\{v5, v8, v11\}$ . Vizinhança de  $v9$ :  $\{v8, v10, v11\}$ .

### Exercício 5

Sim, o grafo é simples pois não possui laços nem arestas paralelas.

### Exercício 6

Grau de cada vértice:  $d(v1) = 2, d(v2) = 2, d(v3) = 3, d(v4) = 2, d(v5) = 3, d(v6) = 4, d(v7) = 2, d(v8) = 4, d(v9) = 4, d(v10) = 2, d(v11) = 2$ .

### Exercício 7

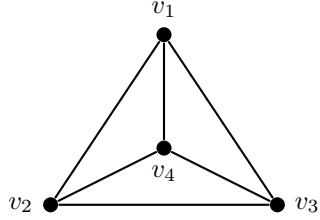
Sequência de graus:  $(2, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 2, 2)$ .

### Exercício 8

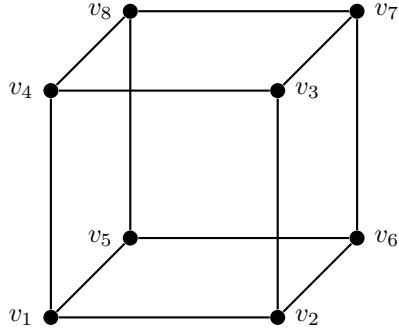
Não, o grafo não é regular pois os graus de seus vértices não são todos iguais.

### Exercício 9

Grafo Cúbico G1: Um tetraedro (grafo completo  $K_4$ ).



Grafo Cúbico G2: O grafo de um cubo ( $Q_3$ ).



### Exercício 10

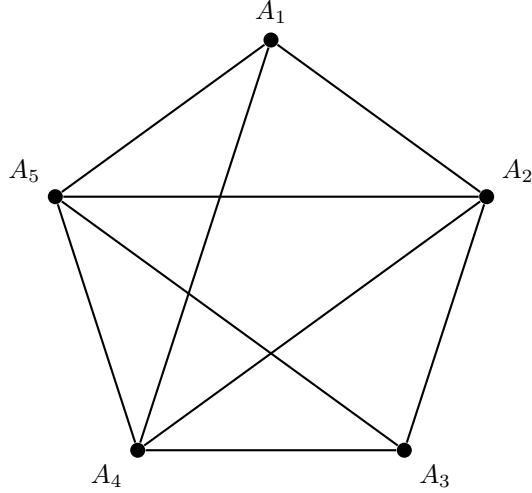
Não. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus de todos os vértices em um grafo é igual a duas vezes o número de arestas. A soma dos graus é  $15 \times 5 = 75$ , que é um número ímpar. Isso é uma contradição, portanto, tal grafo não pode existir.

### Exercício 11

Sim. A soma dos graus é  $10 \times 3 = 30$ , que é um número par. Portanto, é possível existir um grafo simples com 10 vértices, cada um com grau 3.

### Exercício 12

O grafo de intersecção terá 5 vértices, um para cada conjunto. As arestas conectarão vértices cujos conjuntos correspondentes têm uma intersecção não vazia. As arestas são:  $(A_1, A_2), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, A_5), (A_3, A_4)$ .



### Exercício 13

Não. Grafos isomorfos devem ter o mesmo número de vértices. G1 tem 10 vértices e G2 tem 11 vértices, portanto, não podem ser isomorfos.

### Exercício 14

Não. Grafos isomorfos devem ter o mesmo número de arestas. G1 tem 5 arestas e G2 tem 6 arestas, portanto, não podem ser isomorfos.

### Exercício 15

Sim, G1 e G2 são isomorfos. Ambos os grafos têm 6 vértices e 9 arestas. Ambos são regulares de grau 3. É possível encontrar uma bijeção entre os vértices que preserva a adjacência.

### Exercício 16

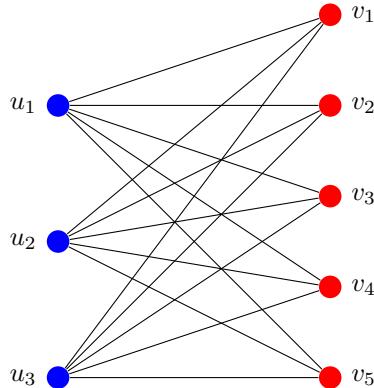
O grafo completo  $K_7$  tem 7 vértices. O número de arestas é dado por  $C(7, 2) = (7 \times 6)/2 = 21$ .

### Exercício 17

O grafo completo  $K_{10}$  tem 10 vértices. O número de arestas é dado por  $C(10, 2) = (10 \times 9)/2 = 45$ .

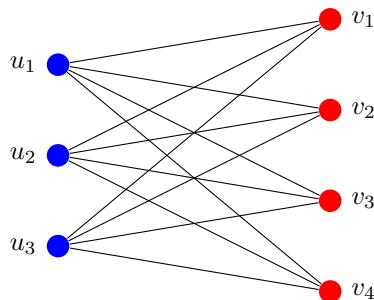
### Exercício 18

O grafo bipartido completo  $K_{3,5}$  tem dois conjuntos de vértices, um com 3 e outro com 5. O número de arestas é  $3 \times 5 = 15$ .



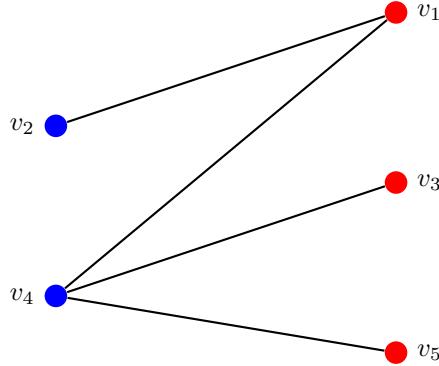
### Exercício 19

O grafo bipartido completo  $K_{3,4}$  tem dois conjuntos de vértices, um com 3 e outro com 4. O número de arestas é  $3 \times 4 = 12$ .



## Exercício 20

Sim, o grafo G é bipartido. Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos,  $\{v_2, v_4\}$  e  $\{v_1, v_3, v_5\}$ , de modo que toda aresta conecta um vértice de um conjunto a um vértice do outro conjunto.



## Exercício 21

Um supergrafo de G é um grafo  $G'$  tal que G é um subgrafo de  $G'$ . Isso significa que  $G'$  contém todos os vértices e arestas de G, e pode ter vértices e/ou arestas adicionais.

## Exercício 22

Um subgrafo de G é um grafo  $G'$  tal que  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $E(G') \subseteq E(G)$ , e para cada aresta  $(u, v)$  em  $E(G')$ ,  $u$  e  $v$  estão em  $V(G')$ .

## Exercício 23

Considerando o grafo G da questão 23:

- A) Passeio aberto:  $v1 - e1 - v2 - e2 - v3 - e3 - v5$ . (Não começa e termina no mesmo vértice)
- B) Passeio fechado:  $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$ . (Começa e termina no mesmo vértice)
- C) Trilha aberta:  $v1 - e1 - v2 - e2 - v3 - e4 - v4$ . (Todas as arestas são distintas, vértices podem se repetir, não começa e termina no mesmo vértice)
- D) Circuito:  $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$ . (Trilha fechada, todas as arestas distintas)
- E) Caminho aberto:  $v1 - e1 - v2 - e2 - v3$ . (Todos os vértices e arestas distintas, não começa e termina no mesmo vértice)
- F) Ciclo:  $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$ . (Caminho fechado, todos os vértices e arestas distintas, exceto o inicial e final)

## Exercício 24

Um grafo é Euleriano se todos os seus vértices têm grau par. No grafo da questão 24, todos os vértices têm grau 2 ( $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ). Portanto, o grafo é Euleriano.

## Exercício 25

Para o grafo da questão 25, precisamos verificar o grau de cada vértice. Há vértices com grau 3 e 4. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

### **Exercício 26**

Para o grafo da questão 26, precisamos verificar o grau de cada vértice. Este é um grafo bipartido completo  $K_{3,3}$ . Todos os vértices têm grau 3. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

### **Exercício 27**

Para o grafo da questão 27, precisamos verificar o grau de cada vértice. Há vértices com grau 4 e 5. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

### **Exercício 28**

Um grafo é Hamiltoniano se contém um ciclo Hamiltoniano (um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez). No grafo da questão 28, é possível encontrar um ciclo Hamiltoniano, por exemplo:  $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_1$ . Portanto, o grafo é Hamiltoniano.

### **Exercício 29**

O grafo completo  $K_8$  tem 8 vértices. O número de arestas é dado por  $C(8, 2) = (8 \times 7)/2 = 28$ .

### **Exercício 30**

O grafo bipartido completo  $K_{6,3}$  tem  $6 + 3 = 9$  vértices. O número de arestas é  $6 \times 3 + 3 \times 6 = 36$ .

### **Exercício 31**

O grafo ciclo  $C_5$  tem 5 vértices e 5 arestas.

### **Exercício 32**

O grafo Cubo  $Q_5$  tem  $2^5 = 32$  vértices. O número de arestas é  $5 \times 2^{(5-1)} = 5 \times 16 = 80$ .

### **Exercício 33**

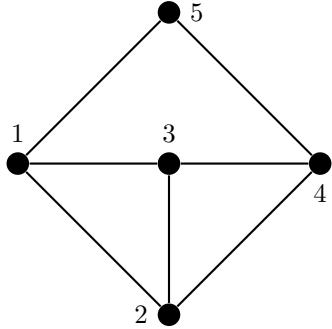
O grafo Roda  $W_4$  tem  $4 + 1 = 5$  vértices (o vértice central mais os 4 vértices do ciclo). O número de arestas é 4 (do ciclo) + 4 (do vértice central) = 8.

### **Exercício 34**

A soma dos graus é  $5 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$ . O número de arestas é a soma dos graus dividida por 2, ou seja,  $14/2 = 7$ . É possível desenhar um grafo com esses graus.

### **Exercício 35**

Sim, a soma dos graus é  $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$ , que é par. É possível desenhar um grafo simples com esses graus.



Graus dos vértices:  $d(1) = 3, d(2) = 3, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 2$ .

### Exercício 36

Não, a soma dos graus é  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ , que é ímpar. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus deve ser par. Portanto, não existe tal grafo.

### Exercício 37

Não, a soma dos graus é  $1 + 2 + 3 + 4 + 4 = 14$ , que é par. No entanto, um grafo simples com 5 vértices e grau máximo 4 significa que um vértice pode estar conectado a todos os outros 4 vértices. Se houver um vértice de grau 1, ele deve estar conectado a um dos outros vértices. É possível desenhar um grafo simples com esses graus.

### Exercício 38

Não, a soma dos graus é  $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 17$ , que é ímpar. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus deve ser par. Portanto, não existe tal grafo.

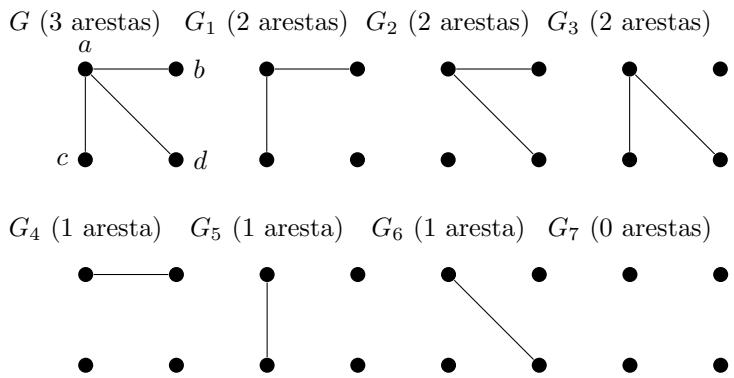
### Exercício 39

O grafo  $K_3$  tem 3 vértices e 3 arestas. O número de subgrafos com pelo menos um vértice é  $2^{\text{número de arestas}} \times 2^{\text{número de vértices}} - 1$ . No entanto, esta fórmula não é para subgrafos induzidos. Para  $K_3$ , os subgrafos são: 3 vértices e 3 arestas (o próprio  $K_3$ ), 3 vértices e 2 arestas (3 opções), 3 vértices e 1 aresta (3 opções), 3 vértices e 0 arestas (1 opção), 2 vértices e 1 aresta (3 opções), 2 vértices e 0 arestas (3 opções), 1 vértice e 0 arestas (3 opções). Total:  $1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 = 17$  subgrafos com pelo menos um vértice.

### Exercício 40

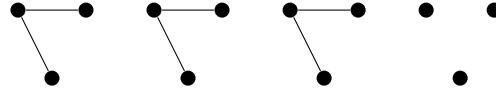
O grafo  $G$  tem 4 vértices  $\{a, b, c, d\}$  e 3 arestas  $\{(a, b), (a, c), (a, d)\}$ . Todos os subgrafos possíveis são:

#### Subgrafos com 4 vértices:



**Subgrafos com 3 vértices:**

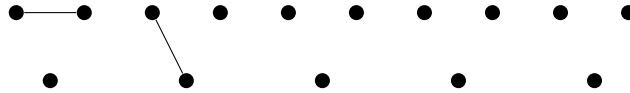
$\{a, b, c\}$  (2 arestas) (2 arestas) (2 arestas) (0 arestas)



$\{a, b, c\}$  (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta)



$\{a, c, d\}$  (1 aresta) (1 aresta) (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas)



**Subgrafos com 2 vértices:**

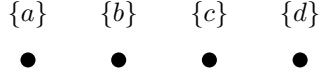
$\{a, b\}$  (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta) (0 arestas) (0 arestas)



$\{a, d\}$  (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas)



**Subgrafos com 1 vértice:**



Total de subgrafos (excluindo o conjunto vazio): 38 subgrafos

### Exercício 41

Os grafos completos  $K_n$  são regulares para todo  $n \geq 1$ . O grau de cada vértice em  $K_n$  é  $n - 1$ .

### Exercício 42

Os grafos ciclo  $C_n$  são regulares para todo  $n \geq 3$ . O grau de cada vértice em  $C_n$  é 2.

### Exercício 43

Os grafos roda  $W_n$  são regulares apenas para  $n = 3$ . Em  $W_n$ , o vértice central tem grau  $n$ , e os vértices do ciclo têm grau 3. Para ser regular,  $n$  deve ser igual a 3.

### Exercício 44

Os grafos cubo  $Q_n$  são regulares para todo  $n \geq 1$ . O grau de cada vértice em  $Q_n$  é  $n$ .

### Exercício 45

A condição imposta pelo Teorema de Dirac é **suficiente**, mas não necessária. Se um grafo satisfaz a condição de Dirac, ele é Hamiltoniano, mas um grafo pode ser Hamiltoniano sem satisfazer a condição de Dirac.

## Exercício 46

A condição imposta pelo Teorema de Ore é **suficiente**, mas não necessária. Se um grafo satisfaz a condição de Ore, ele é Hamiltoniano, mas um grafo pode ser Hamiltoniano sem satisfazer a condição de Ore.

## Exercício 47

Considere o grafo G da questão 47:

- Sim, é possível encontrar um ciclo Hamiltoniano, por exemplo,  $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 - v_1$ . Portanto, é Hamiltoniano.
- Para ser Euleriano, todos os vértices devem ter grau par. No grafo da questão 47, todos os vértices têm grau 2, que é par. Portanto, o grafo é Euleriano.

## Exercício 48

Um problema tem complexidade **NP Completo** se ele pertence à classe NP (Non-deterministic Polynomial time) e é NP-difícil, ou seja, qualquer problema em NP pode ser reduzido a ele em tempo polinomial. Isso significa que, se um problema NP-completo puder ser resolvido em tempo polinomial, todos os problemas em NP também poderão. Um problema tem complexidade **P** (Polynomial time) se ele pode ser resolvido por um algoritmo determinístico em tempo polinomial. Problemas em P são considerados eficientemente solúveis.

## Exercício 49

O **Teorema de Berge** para o Problema do Emparelhamento de Grafos afirma que um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  é um emparelhamento máximo se e somente se  $G$  não contém nenhum caminho  $M$ -aumentador. Um caminho  $M$ -aumentador é um caminho que começa e termina em vértices não emparelhados e alterna entre arestas não emparelhadas e arestas emparelhadas. A importância deste teorema reside no fato de que ele fornece uma condição necessária e suficiente para a maximalidade de um emparelhamento, o que é fundamental para o desenvolvimento de algoritmos de emparelhamento, como o algoritmo de Edmonds para emparelhamentos em grafos gerais.

## Exercício 50

O **Teorema de Hall** (também conhecido como Teorema do Casamento de Hall) fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido. Ele afirma que um grafo bipartido  $G = (U \cup V, E)$  tem um emparelhamento que cobre todos os vértices em  $U$  se e somente se, para todo subconjunto  $A \subseteq U$ , a cardinalidade da vizinhança de  $A$  (denotada por  $N(A)$ ) é maior ou igual à cardinalidade de  $A$ , ou seja,  $|N(A)| \geq |A|$ . A importância deste teorema é que ele oferece um critério combinatório simples para determinar a existência de um emparelhamento completo em grafos bipartidos, sendo amplamente utilizado em diversas aplicações, como alocação de tarefas e teoria dos fluxos em redes.