Teoria dos Grafos – Algoritmo BFS – Busca em Largura
Atividade Hands-on em Laboratório – 03
Prof. Calvetti

1. Introdução

Um problema fundamental em grafos é descobrir como explorá-lo de forma sistemática. Muitas aplicações são abstraídas como problemas de busca.

Os algoritmos de busca em grafos são a base para o estudo de diversos outros algoritmos mais gerais em grafos.

Como motivação para o uso dos algoritmos de busca em grafos, poderíamos levantar a seguinte questão: Como saber se existem caminhos simples entre dois vértices?

Um algoritmo de busca é um algoritmo que esquadrinha um grafo andando pelos arcos de um vértice a outro. Depois de visitar a ponta inicial de um arco, o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final. Cada arco é percorrido no máximo uma vez.

Há muitas maneiras de organizar uma busca. Cada estratégia de busca é caracterizada pela ordem em que os vértices são visitados.

Neste hands-on, trataremos do Algoritmo de Busca em Largura (= breadth-first search = BFS), ou busca BFS.

Na teoria dos grafos, busca em largura (ou busca em amplitude, também conhecido em inglês por Breadth-First Search - BFS) é um algoritmo de busca em grafos utilizado para realizar uma busca ou travessia num grafo e estrutura de dados do tipo árvore.

Intuitivamente, começa-se pelo vértice raiz e explora todos os vértices vizinhos. Então, para cada um desses vértices mais próximos, exploramos os seus vértices vizinhos inexplorados e assim por diante, até que ele encontre o alvo da busca.

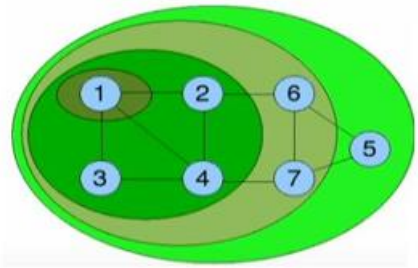
Formalmente, uma busca em largura é um método de busca que expande e examina sistematicamente todos os vértices de um grafo direcionado ou não-direcionado. Em outras palavras, podemos dizer que o algoritmo realiza uma busca exaustiva num grafo passando por todas as arestas e vértices do grafo. Sendo assim, o algoritmo deve garantir que nenhum vértice ou aresta será visitado mais de uma vez e, para isso, utiliza uma estrutura de dados fila para garantir a ordem de chegada dos vértices. Dessa maneira, as visitas aos vértices são realizadas através da ordem de chegada na estrutura fila e um vértice que já foi marcado não pode entrar novamente a esta estrutura.

Uma analogia muito conhecida para demonstrar o funcionamento do algoritmo é pintando os vértices de branco, cinza e preto. Os vértices na cor branca ainda não foram marcados e nem enfileirados, os da cor cinza são os vértices que estão na estrutura fila e os pretos são aqueles que já tiveram todos os seus vértices vizinhos enfileirados e marcados pelo algoritmo.

Seja G = (V,A) e um vértice s, o Algoritmo de Busca em Largura (BFS) percorre as arestas de G descobrindo todos os vértices atingíveis a partir de s.

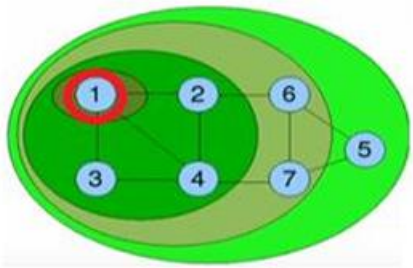
BFS determina a distância (em número de arestas) de cada um desses vértices a s.

Antes de se encontrar um vértice à distância K+1 de s, todos os vértices à distância k são encontrados.

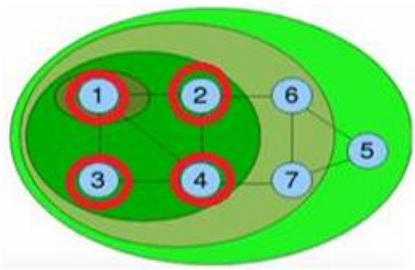


Por exemplo, vamos considerar que o algoritmo BFS será aplicado inicialmente ao Vértice 1.

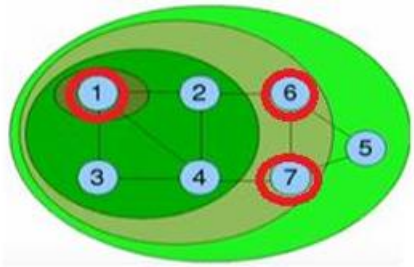
O vértice 1 está à distância zero dele mesmo.



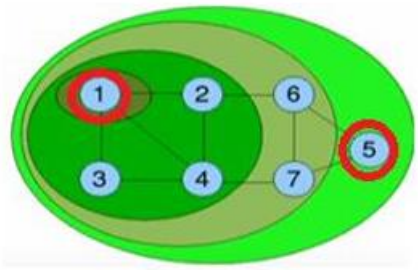
Em seguida, o algoritmo irá encontrar todos os vértices que estão à distância 1: 2, 3 e 4



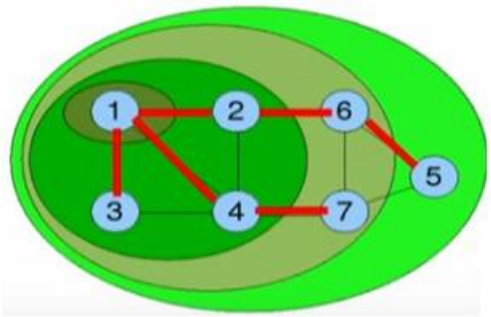
Em seguida, o algoritmo irá encontrar todos os vértices que estão à distância 2: 6 e 7



Em seguida, o algoritmo irá encontrar todos os vértices que estão à distância 3: 5



O algoritmo BFS produz uma árvore BFS com raiz em s, que contém todos os vértices acessíveis determinando o caminho mais curto (Caminho que contém o número mínimo de arestas) de s a t (em que t é um vértice acessível).

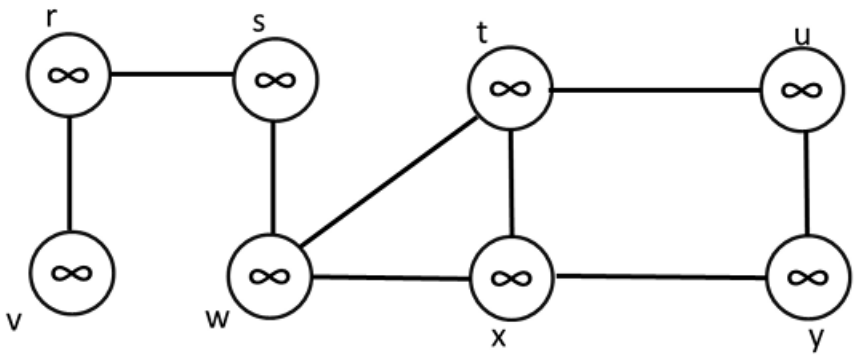


Para se organizar o processo de busca, pintam-se os vértices:

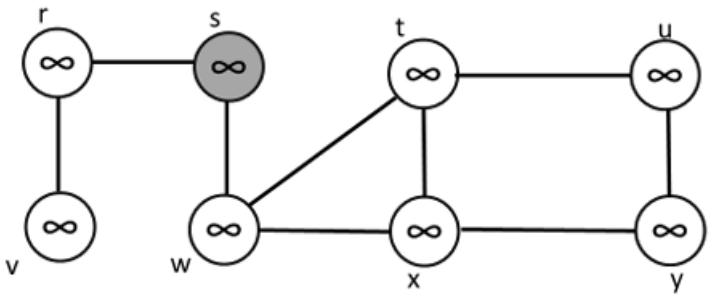
- ✓ Branco: ainda não foram descobertos
- ✓ Cinza: correspondem à fronteira. O vértice já foi descoberto, mas ainda não foram examinados seus vizinhos;
- ✓ Preto: São os vértices já descobertos e seus vizinhos já foram examinados.

Utiliza-se uma fila para se manter os vértices cinzas.

Exemplo: No início, todos os vértices são brancos e a distância é infinita.

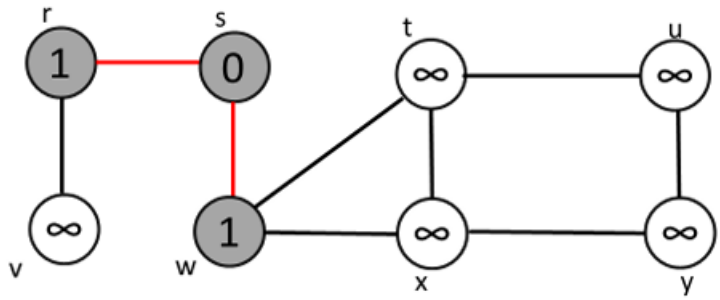


Vamos agora aplicar o algoritmo a partir do vértice inicial s.
O vértice inicial s é pintado de cinza (ele é considerado descoberto) e é colocado na fila.



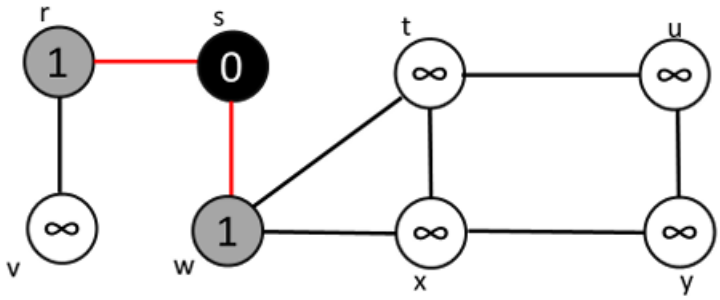
Q: S

Retira-se o primeiro elemento da Fila e os adjacentes a ele são colocados em Q e pintados de cinza. Além disso, é atualizada a distância dos nós adjacentes e do pai.



Q: w r

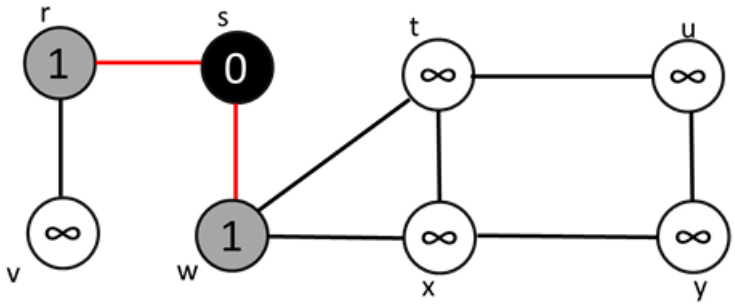
Em seguida, o vértice s é colorido com preto, uma vez que seus vizinhos já foram visitados (descobertos).



Q: w r

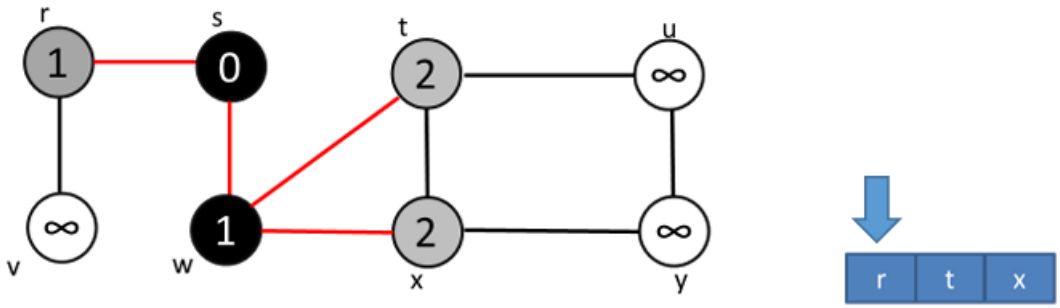
Agora, os dados da fila serão processados. O primeiro elemento da fila a ser processado é w e seus vizinhos são: t e x

W é removido da fila e entram na fila t e x.



r t x

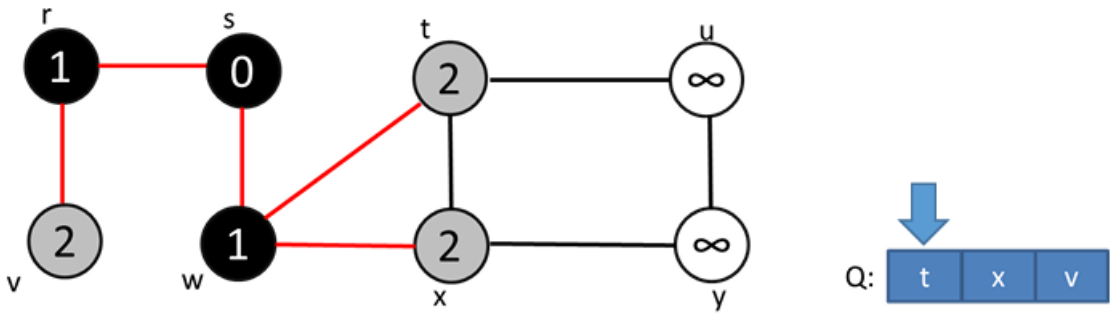
Os vértices t e x são coloridos de cinza e o vértice w é colorido de preto. As distâncias também são atualizadas.



O próximo elemento que deverá ser retirado da fila é r.

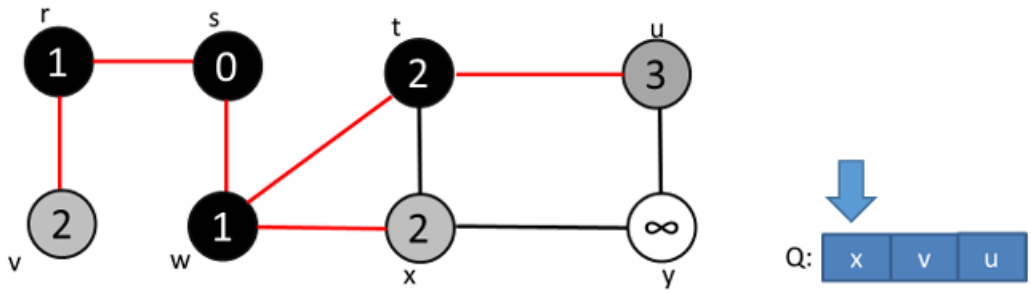
Os vizinhos de r são v. Assim, r é retirado da fila e insere-se na fila o vértice v. O nó r é pintado de preto e o nó v de cinza.

A distância também é atualizada.

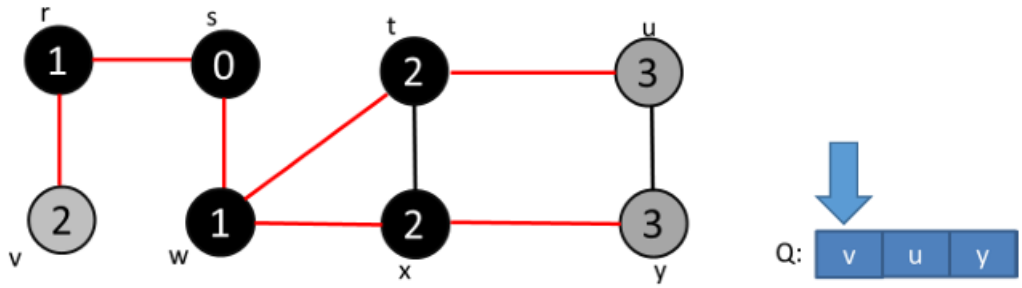


O próximo a ser retirado da fila é t. Os vizinhos de t são u e x, mas x já foi visitado. Observe, portanto, que somente se coloca na fila vértices brancos, que são imediatamente coloridos de cinza ao entrar na fila.

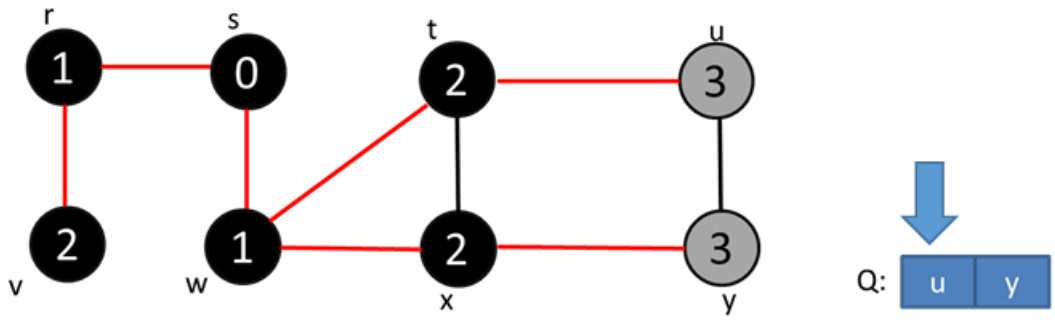
Assim, considera-se apenas o vértice u que é vizinho branco de t. Com isso, u entra na fila, é colorido de cinza, atualizam se as distâncias.



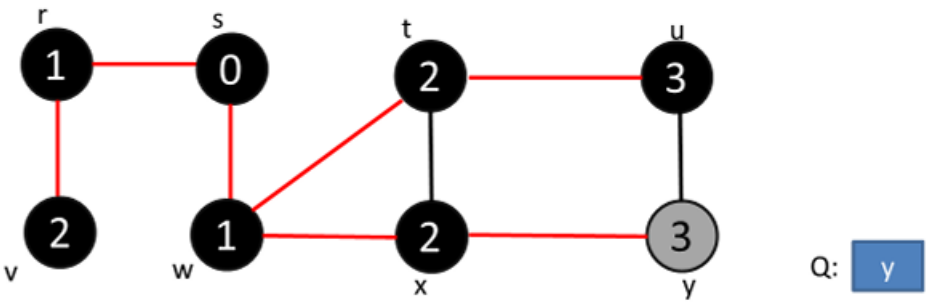
O próximo elemento que deverá ser retirado da fila é x. Os vizinhos de x são 1 e y. Mas 1 já foi visitado. Então, x é retirado da fila e pintado de preto. O vértice y entra fila e é pintado de cinza. As distâncias também são atualizadas.



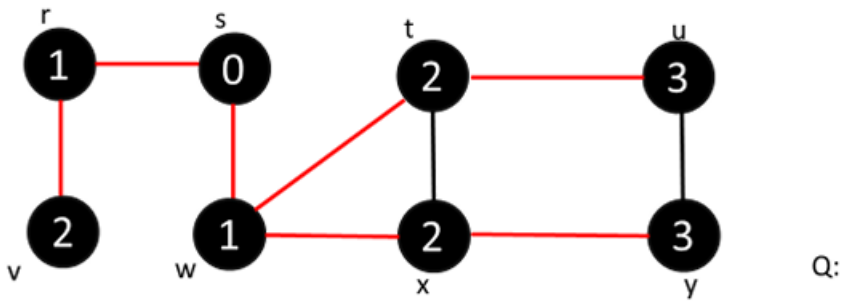
O próximo vértice que deverá ser retirado da fila é v. Os vizinhos de v são r. Mas, r já foi visitado. Portanto, apenas remove se v da fila. O vértice v é pintado de preto.



O próximo que está na fila é u. Os vizinhos de u são t e y. Mas, t e y já foram visitados. Assim, u é retirado da fila e pintado de preto.



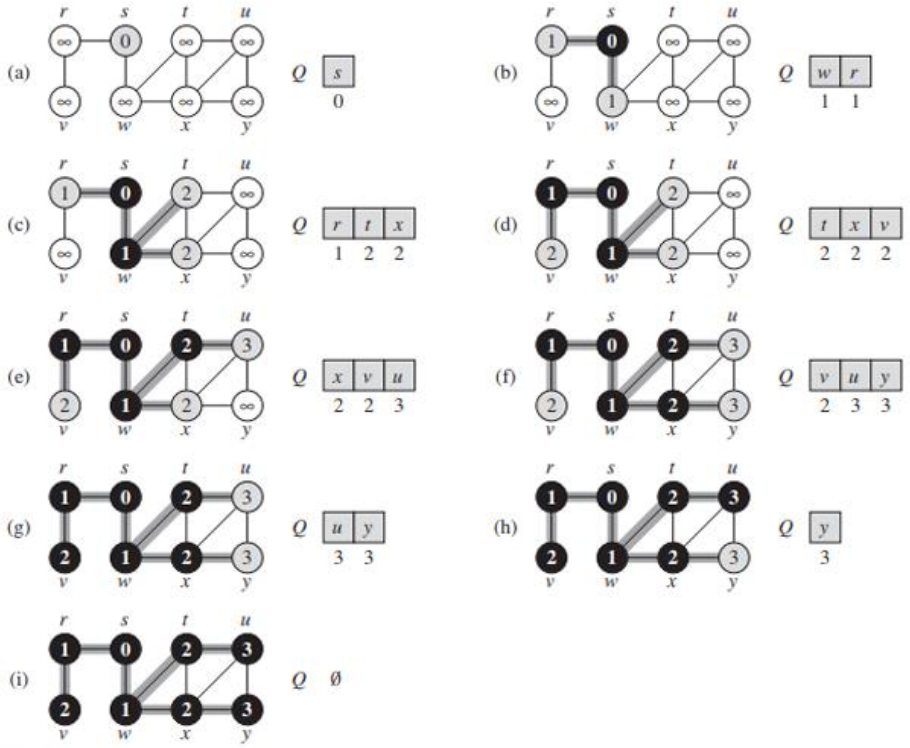
O próximo vértice a ser processado é y. Os vizinhos de y são x e u. Mas, x e u já foram visitados. Assim y é retirado da fila.



De acordo com Cormen, o pseudocódigo do algoritmo BFS é dado por:

```
BFS(G, s)
 1  for each vertex u ∈ G.V − {s}
 2       u.color = WHITE
 3       u.d = ∞
 4       u.π = NIL
 5  s.color = GRAY
 6  s.d = 0
 7  s.π = NIL
 8  Q = ∅
 9  ENQUEUE(Q, s)
10  while Q ≠ ∅
11       u = DEQUEUE(Q)
12       for each v ∈ G.Adj[u]
13            if v.color == WHITE
14                 v.color = GRAY
15                 v.d = u.d + 1
16                 v.π = u
17                 ENQUEUE(Q, v)
18       u.color = BLACK
```

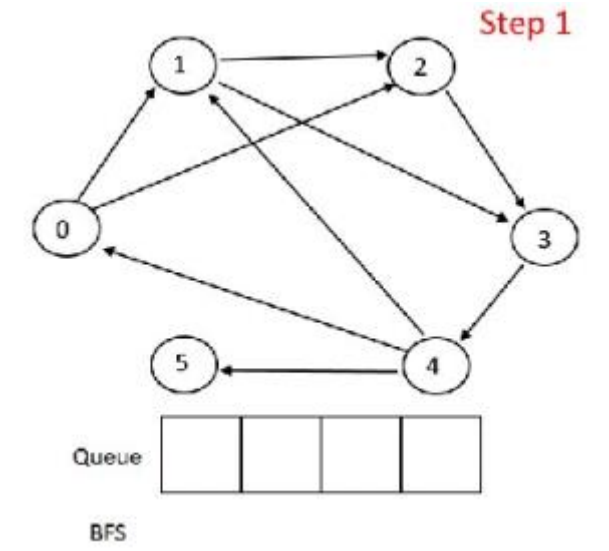
Ainda de acordo com Cormen, a figura abaixo ilustra o algoritmo BFS:

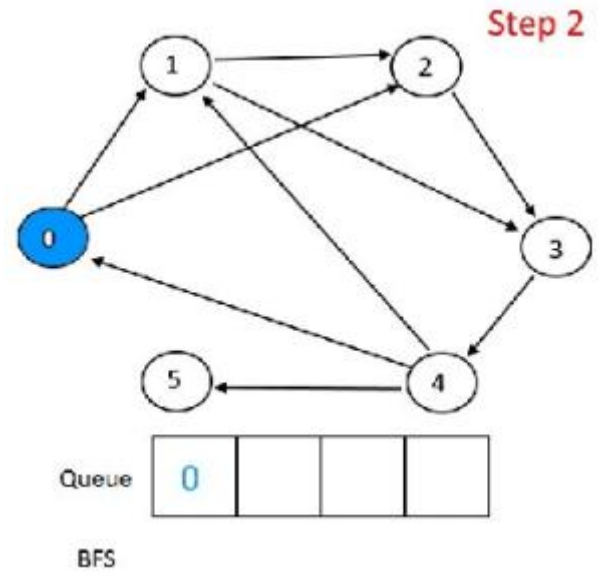


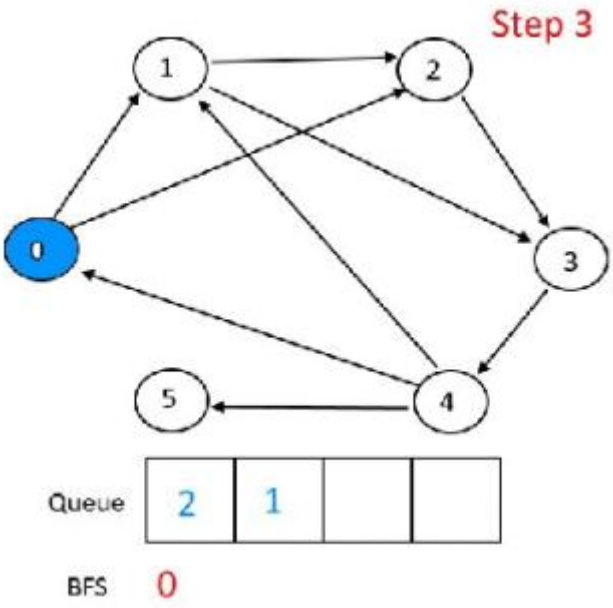
Busca em largura

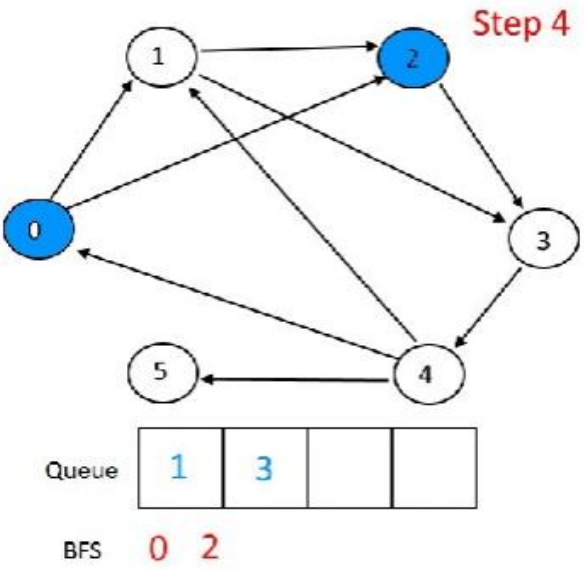
```
BFS(V, A, s)
1.      for each u in V − {s}          ▷ para cada vértice u em V exceto s
2.            color[u] ← WHITE          ▷ no início todos os vértices são brancos
3.            d[u] ← infinity
4.            π[u] ← NIL
5.      color[s] ← GRAY                 ▷ Vértice origem descoberto
6.      d[s] ← 0
7.      π[s] ← NIL
8.      Q ← {}
9.      ENQUEUE(Q, s)                   ▷ Colocar o vértice origem na fila Q
10      while Q is non-empty            ▷ Enquanto existam vértices cinzas
11.           u ← DEQUEUE(Q)                  ▷ i.e., u = primeiro(Q)
12.           for each v adjacent to u        ▷ para cada vértice adjacente a u
13.                 if color[v] = WHITE       ▷ se é branco (ele ainda não foi descoberto)
14.                     then color[v] ← GRAY
15.                          d[v] ← d[u] + 1
16.                          π[v] ← u
17.                          ENQUEUE(Q, v)
18.           color[u] ← BLACK
```

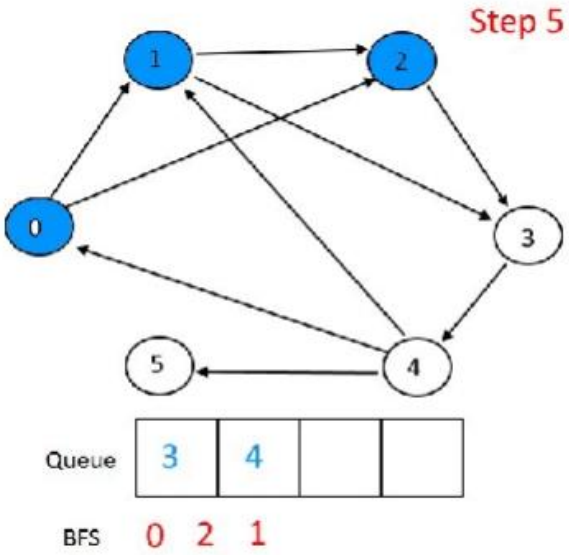
Efetuar a análise do algoritmo Busca em Largura e, com o emprego de Listas de Adjacências, aplicar o algoritmo BFS para o grafo abaixo:

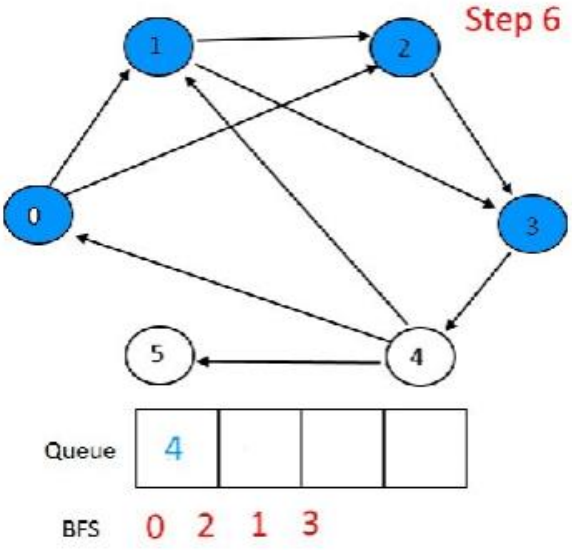


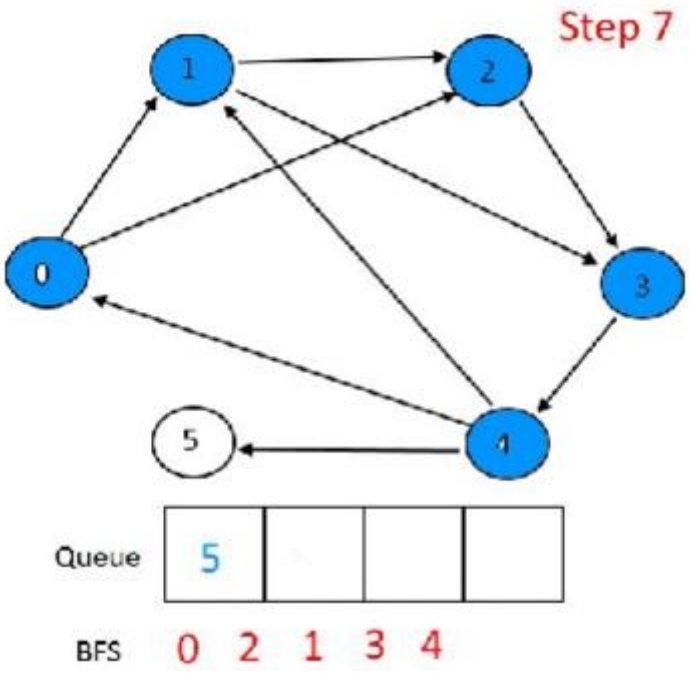


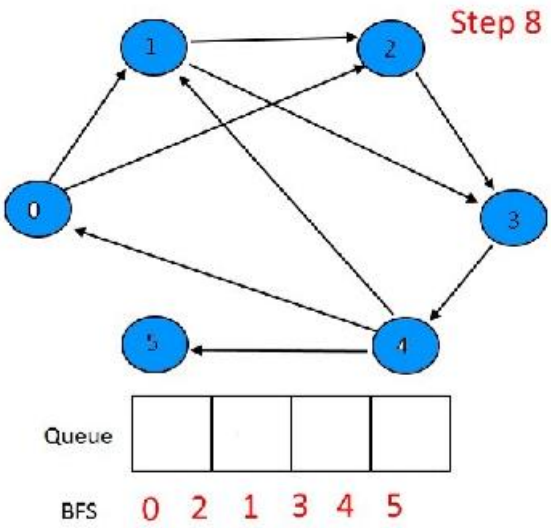



Step 4
1
2
0
3
5
4
Queue
1
3
BFS
0
2


Step 5
1
2
0
3
5
4
Queue
3
4
BFS
0
2
1


Step 6
1
2
0
3
5
4
Queue
4
BFS
0
2
1
3


Step 7
1
2
0
3
5
4
Queue
5
BFS
0 2 1 3 4


Step 8
1
2
0
3
5
4
Queue
BFS
0 2 1 3 4 5

```
import java.util.LinkedList;
import java.util.Queue;

public class GraphBFS {
	public static void main(String args[]) {
		Graph g = new Graph(6);
		g.addEdge(0, 1);
		g.addEdge(0, 2);
		g.addEdge(1, 2);
		g.addEdge(1, 3);
		g.addEdge(3, 4);
		g.addEdge(2, 3);
		g.addEdge(4, 0);
		g.addEdge(4, 1);
		g.addEdge(4, 5);
		g.BFS(0);

	}
}

class Node {
	int dest;
	Node next;

	public Node(int d) {
		dest = d;
		next = null;
	}
}

class adjList {
	Node head;
}

class Graph {
	int V;
	adjList[] array;

	public Graph(int V) {
		this.V = V;
		array = new adjList[V]; // linked lists = number of Nodes
in Graph

		for (int i = 0; i < V; i++) {
			array[i] = new adjList();
			array[i].head = null;
		}
	}
```

```
    public void addEdge(int src, int dest) {
        Node n = new Node(dest);
        n.next = array[src].head;
        array[src].head = n;
    }

    public void BFS(int startVertex) {
        boolean[] visited = new boolean[V];
        Queue<Integer> s = new LinkedList<Integer>();

        s.add(startVertex);
        while (s.isEmpty() == false) {
            int n = s.poll(); //
            System.out.print(" " + n);
            visited[n] = true;
            Node head = array[n].head;
            while (head != null) {
                if (visited[head.dest] == false) {
                    s.add(head.dest);
                    visited[head.dest] = true;
                }
                head = head.next;
            }
        }
    }
}
```