

Engenharia da Computação – 3ª série

Notações Assintóticas

(E1, E2)

2025

Notações Assintóticas

Pergunta

- O que é Ordem de Grandeza de Execução?



ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

Ordem de Grandeza de Execução

Resposta



- Por exemplo, o tempo exato de execução de um algoritmo pode ser dado pela função polinomial $f(n) = 3n^2 + 2n + 3$;
- Neste caso, o tempo aproximado de execução será uma função de n^2 , ou seja $f(n^2)$, a mais alta potência de n ;
- Dessa forma, pode-se desprezar o coeficiente de n^2 , bem como os outros termos da função polinomial que define a complexidade do algoritmo;

Ordem de Grandeza de Execução

Resposta



- Assim, para efeito de análise de algoritmos, utiliza-se uma notação que seja capaz de exprimir a ordem de grandeza do tempo de execução;
- Essa notação é assintótica, ou seja, representa uma linha que se aproxima da função de complexidade do algoritmo.

Notações Assintóticas

Pergunta

- O que é Notação Big-Oh?



Notação Big-Oh

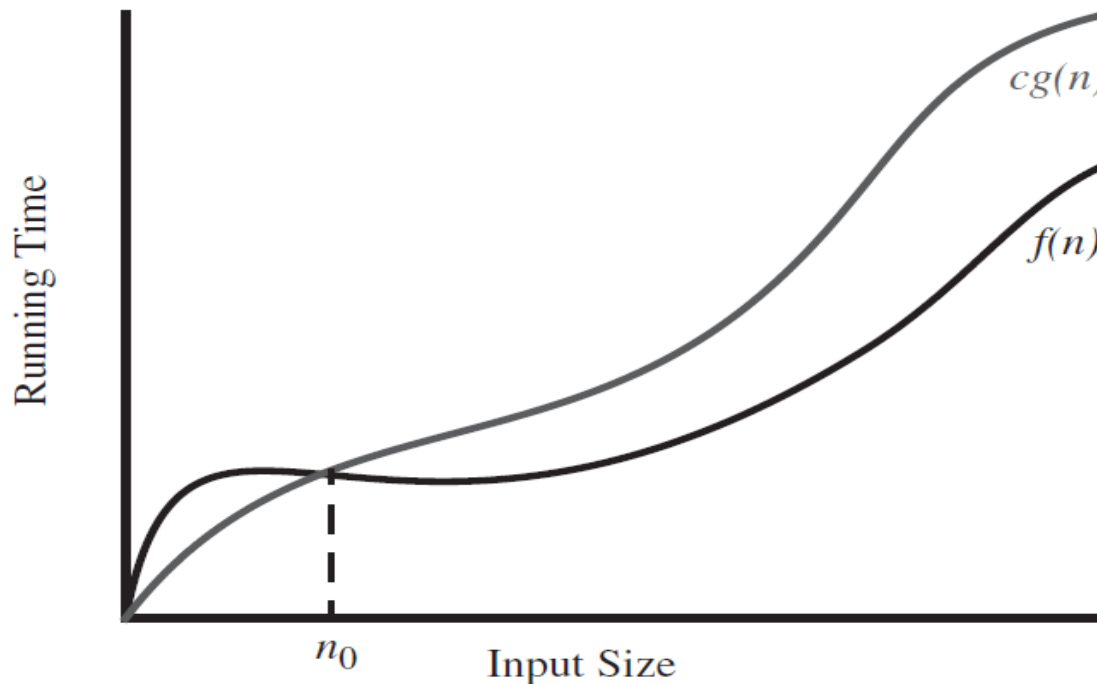
Resposta



- Seja **$f(n)$** e **$g(n)$** funções que mapeiam inteiros não negativos para números reais;
- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** , para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;
- Essa definição é frequentemente dita “ **$f(n)$** é **Big-Oh** de **$g(n)$** ” ou “ **$f(n)$** é ordem **$g(n)$** ”.

Notação Big-Oh

Resposta



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

Notações Assintóticas

Pergunta

- O que é Ordem de Complexidade Big-Oh?



Ordem de Complexidade Big-Oh

Resposta



- A notação **Big-Oh** permite que se diga que uma função de n é “menor ou igual” a outra função, por um fator constante, ou seja, c na definição;
- A notação **Big-Oh** é largamente empregada para caracterizar limites de tempo e de espaço do algoritmo em termos de um parâmetro n , o qual representa o tamanho do problema;
- A notação **Big-Oh** fornece limites superiores de funções que, por sua vez, correspondem ao tempo de execução de algoritmos.

Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?



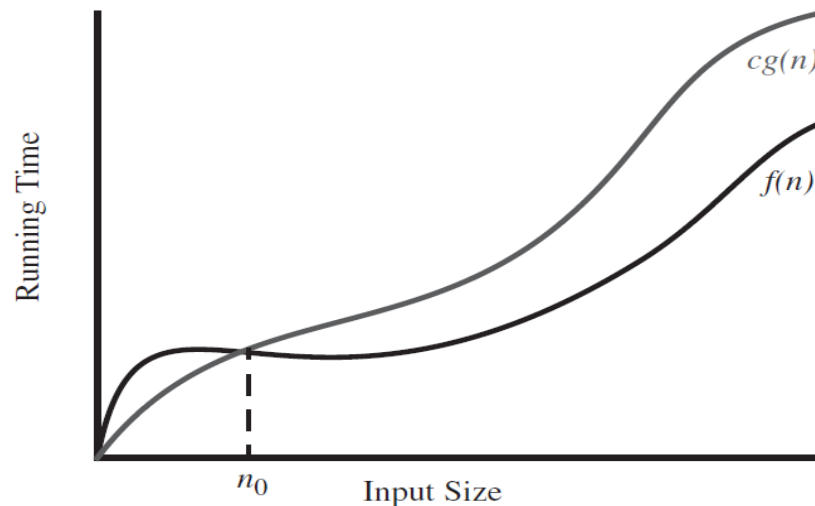
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n \leq 11n \rightarrow c n$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n \leq 11n \rightarrow c n$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n$, para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n + 8n \leq 11n \rightarrow c n$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n$, para todo $n > 0$;
- Assim, $3n + 8$ é $O(n)$.

Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?



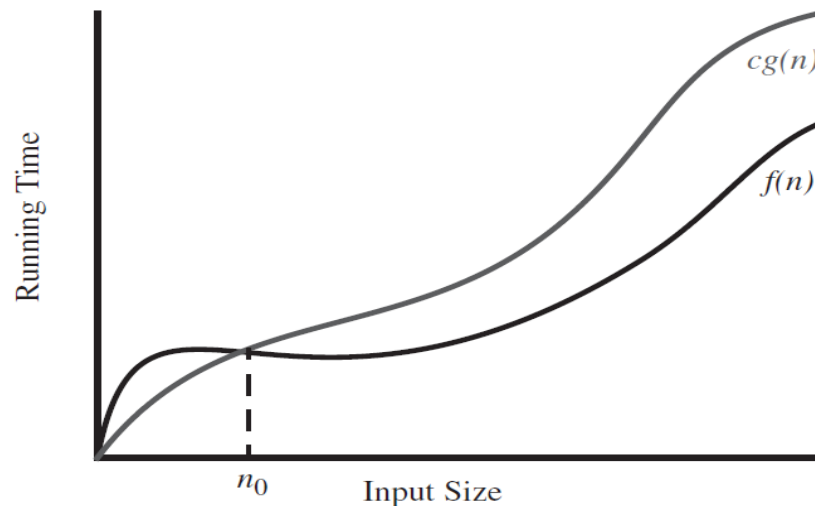
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:
$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2$$
- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2 \leq 11n^2 \rightarrow c n^2$ (c: constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2 \leq 11n^2 \rightarrow c n^2$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n^2$, para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:
$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2$$
- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^2 + 8n^2 \leq 11n^2 \rightarrow c n^2$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n^2$, para todo $n > 0$;
- Assim, $3n + 8$ é $O(n^2)$.

Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?



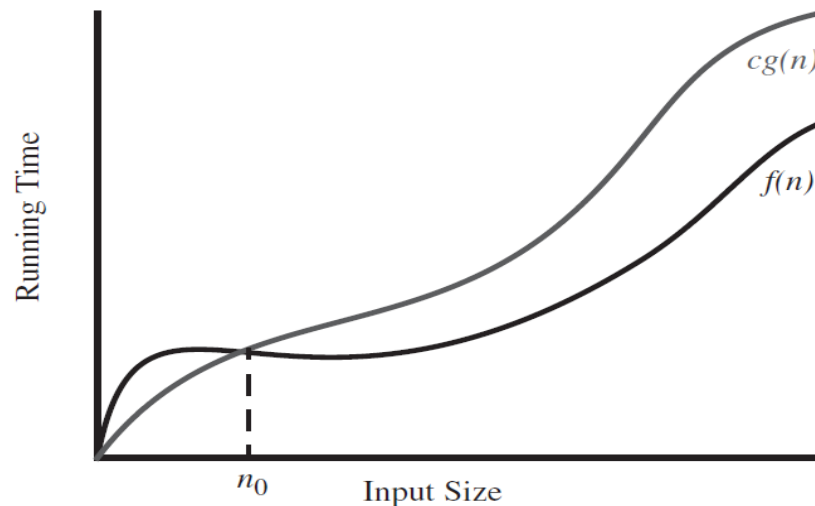
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:
$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3$$
- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3 \leq 11n^3 \rightarrow c n^3$ (c: constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3 \leq 11n^3 \rightarrow c n^3$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n^3$, para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 3n + 8$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $3n + 8 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3$$

- Portanto, $F(n) = 3n + 8 \leq 3n^3 + 8n^3 \leq 11n^3 \rightarrow c n^3$ (c : constante)
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 11$, tal que $F(n) = 3n + 8 \leq c n^3$, para todo $n > 0$;
- Assim, $3n + 8$ é $O(n^3)$.

Notações Assintóticas

Conclusão



- $3n + 8$ é $O(n)$;
- $3n + 8$ é $O(n^2)$; e
- $3n + 8$ é $O(n^3)$.
- Portanto, $3n + 8 \in$ a um conjunto de funções que atendem à definição de $O(f(n))$.



Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?



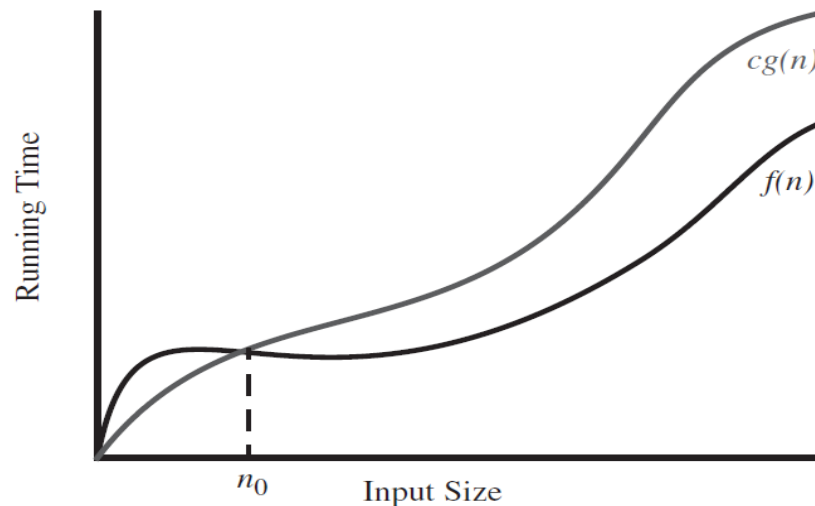
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 \leq 9n^2 \rightarrow c n^2$
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 \leq 9n^2 \rightarrow c n^2$
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 9$, tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$, para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 \leq 9n^2 \rightarrow c n^2$

- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

- Logo, existe $c = 9$, tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^2$, para todo $n > 0$;

- Assim, $2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$.

Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?



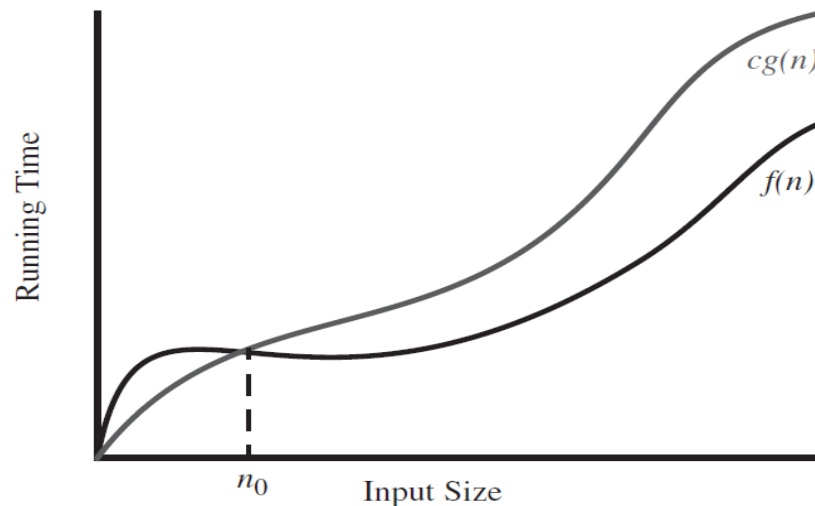
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3 \leq 9n^3 \rightarrow c n^3$
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3 \leq 9n^3 \rightarrow c n^3$
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 9$, tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$, para todo $n > 0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

- Majorando-se a função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3$$

- Portanto, $F(n) = 2n^2 + 3n + 4 \leq 2n^3 + 3n^3 + 4n^3 \leq 9n^3 \rightarrow c n^3$
- A expressão acima é verdadeira para todo $n > 0$;
- Logo, existe $c = 9$, tal que $2n^2 + 3n + 4 \leq c n^3$, para todo $n > 0$;
- Assim, $2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$.

Notações Assintóticas

Conclusão



- $2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$; e
- $2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^3)$.
- Portanto, $2n^2 + 3n + 4 \in$ a um conjunto de funções que atendem à definição de $O(f(n))$;
- E somente por razões de ordem prática, prefere-se e costuma-se dizer que $2n^2 + 3n + 4$ é $O(n^2)$.



Notações Assintóticas

Pergunta

- A função de complexidade $F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?



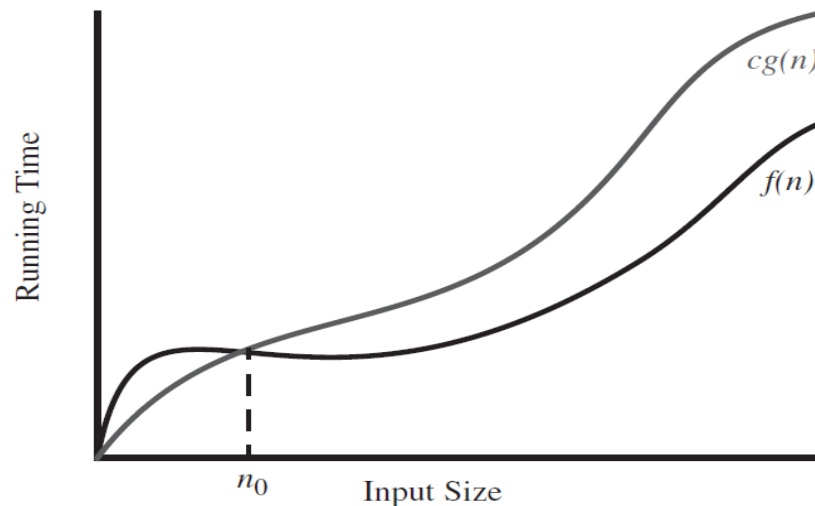
ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Diz-se que **$f(n)$** é **$O(g(n))$** se existir uma constante real **$c > 0$** e uma constante inteira **$n_0 \geq 1$** tal que **$f(n) \leq c g(n)$** para todo inteiro **$n \geq n_0$** ;



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Da função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 - 3n + 4 \leq c n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Da função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 - 3n + 4 \leq c n$$

$$2n^2 - 3n + 4 + 3n \leq c n + 3n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Da função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 - 3n + 4 \leq c n$$

$$2n^2 - 3n + 4 + 3n \leq c n + 3n$$

$$2n^2 - \cancel{3n} + 4 + \cancel{3n} \leq c n + 3n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Da função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 - 3n + 4 \leq c n$$

$$2n^2 - 3n + 4 + 3n \leq c n + 3n$$

$$2n^2 - \cancel{3n} + 4 + \cancel{3n} \leq c n + 3n$$

$$2n^2 + 4 \leq c n + 3n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Necessita-se de uma constante real $c > 0$ e uma constante inteira $n_0 \geq 1$ tal que $2n^2 - 3n + 4 \leq c n$ para todo inteiro $n \geq n_0$;
- Da função $F(n)$, tem-se:

$$F(n) = 2n^2 - 3n + 4 \leq c n$$

$$2n^2 - 3n + 4 + 3n \leq c n + 3n$$

$$2n^2 - \cancel{3n} + 4 + \cancel{3n} \leq c n + 3n$$

$$2n^2 + 4 \leq c n + 3n$$

$$2n^2 + 4 \leq n (c + 3)$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n^2 + 4 \leq n(c + 3)$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n^2 + 4 \leq n(c + 3)$$

$$2n^2 + 4 \leq n k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n^2 + 4 \leq n(c + 3)$$

$$2n^2 + 4 \leq n k$$

$$(2n^2 + 4)/n \leq (n k)/n$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n^2 + 4 \leq n(c + 3)$$

$$2n^2 + 4 \leq n k$$

$$(2n^2 + 4)/n \leq (n k)/n$$

$$2n^2/n + 4/n \leq k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n^2 + 4 \leq n(c + 3)$$

$$2n^2 + 4 \leq n k$$

$$(2n^2 + 4)/n \leq (n k)/n$$

$$2n^2/n + 4/n \leq k$$

$$2n + 4/n \leq k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **$F(n)$** , tem-se:

$$2n + 4/n \leq k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n + 4/n \leq k$$

Sendo **n** muito grande...

$$2n + 4/\cancel{n} \leq k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n + 4/n \leq k$$

Sendo **n** muito grande...

$$2n + 4/\cancel{n} \leq k$$

$$2n \leq k$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n + 4/n \leq k$$

Sendo **n** muito grande...

$$2n + 4/\cancel{n} \leq k$$

$$2n \leq k$$

$$n \leq k/2$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$2n + 4/n \leq k$$

Sendo **n** muito grande...

$$\cancel{2n + 4/n} \leq k$$

$$2n \leq k$$

$$n \leq k/2$$

$$n \leq k_2$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$n \leq k_2$$

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **$F(n)$** , tem-se:

$$n \leq k_2$$

ABSURDO!

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **F(n)**, tem-se:

$$n \leq k_2$$

ABSURDO!

O valor de **n** é muito grande e, portanto, o primeiro termo da inequação nunca será inferior ao segundo termo, para qualquer **$k_2 > 0$** e **$n \geq n_0$** , sendo **$n_0 \geq 1$** .

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

$F(n) = 2n^2 - 3n + 4$ é $O(n)$?

Resposta



- Da função **$F(n)$** , tem-se:

$$n \leq k_2$$

ABSURDO!

O valor de **n** é muito grande e, portanto, o primeiro termo da inequação nunca será inferior ao segundo termo, para qualquer **$k_2 > 0$** e **$n \geq n_0$** , sendo **$n_0 \geq 1$** .

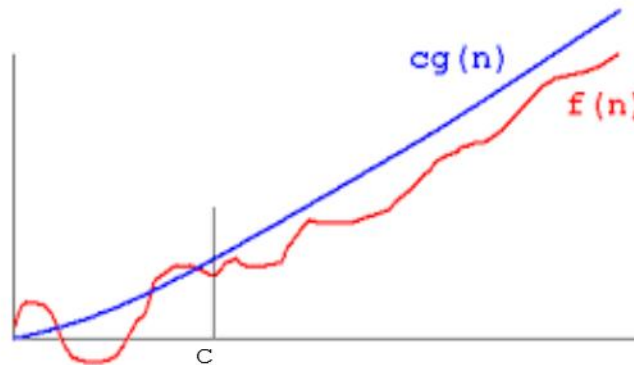
Logo, **$2n^2 - 3n + 4$ NÃO é $O(n)$**

Notação Big-Oh

Observações



- A ordem de complexidade $O(n)$ é melhor que $O(n^2)$ ou $O(n^3)$;
- Embora seja verdade dizer que $f(n) = 4n^3 + 3n^{4/3}$ seja $O(n^5)$, é mais informativo e prático dizer que seja $O(n^3)$;
- Algumas funções frequentemente aparecem na Análise de Algoritmos, tais como: $O(\log n)$, $O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n^k)$ ($k \geq 1$) e $O(n^a)$ ($a > 1$).

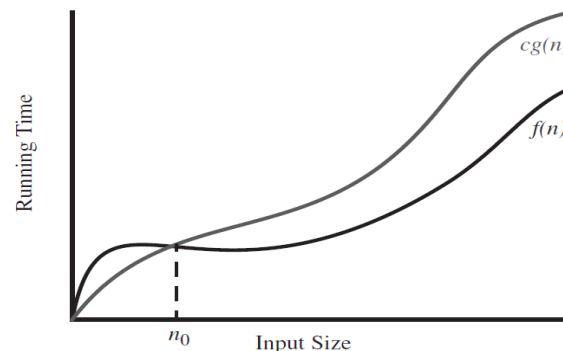


Notação Big-Oh

Observações



- É desaconselhável dizer que $f(n) \leq g(n)$, uma vez que o conceito de **Big-Oh** já denota a desigualdade “menor ou igual”;
- Assim, embora comumente usado, não é completamente correto dizer-se que $f(n) = g(n)$;
- É melhor dizer-se que $f(n) \in g(n)$, uma vez que **Big-Oh** denota uma coleção de funções.



The function $f(n)$ is $O(g(n))$, for $f(n) \leq c \cdot g(n)$ when $n \geq n_0$.

Notações Assintóticas

Pergunta

- O que é Limite Superior?



Limite Superior

Resposta



- A notação **$O(n)$** é utilizada para indicar Limites Superiores para Problemas;
- Dado um problema, por exemplo, o de multiplicação de duas matrizes quadradas de ordem **n** (**$n \times n$**);
- Conhece-se um algoritmo para se resolver este problema, pelo método trivial, de complexidade **$O(n^3)$** .

Limite Superior

Resposta



- Assim, sabe-se que a ordem de complexidade deste problema, ou seja, multiplicação de matrizes quadradas de ordem n , não deve superar $O(n^3)$, uma vez que existe um algoritmo que o resolve com esta complexidade;
- Portanto, diz-se que uma **COTA SUPERIOR** ou **LIMITE SUPERIOR** para este problema é $O(n^3)$;
- A **cota superior** de um problema pode mudar se alguém descobrir um outro algoritmo melhor.

Curiosidades



- Por exemplo, Volker Strassen, matemático alemão, apresentou, em 1969, um algoritmo para Multiplicação de Matrizes Quadradas com Complexidade:

$$O(n^{\log 7}) = O(n^{2.807})$$

- Assim, a cota superior ou limite superior para o problema de multiplicação de matrizes passou a ser $O(n^{2.807})$.

Limite Superior

Curiosidades



- Em 1990, Don Coppersmith e Shmuel Winograd melhoraram esta marca para $= O(n^{2.376})$;
- Em 2010, Andrew James Stothers apresentou um algoritmo de complexidade $O(n^{2.373})$;
- Em 2011, Virginia Vassilevska Williams melhorou ainda mais a cota superior do algoritmo, com uma complexidade $O(n^{2.372})$;
- Portanto, a Cota Superior atual para o problema de multiplicação de matrizes é complexidade $O(n^{2.372})$;
- Quem de vocês, meus alunos, poderá melhorá-la???

Notações Assintóticas

Pergunta

- Existem outras notações além do Big-Oh?

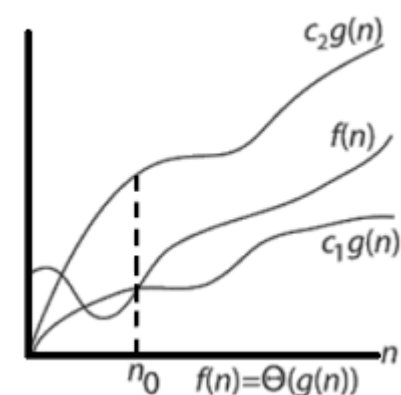
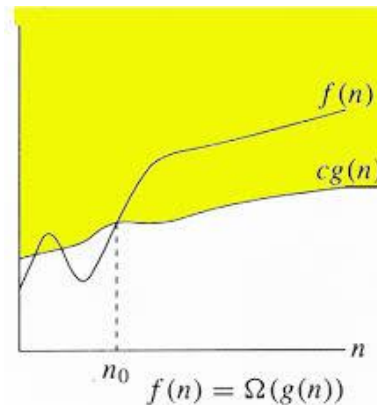
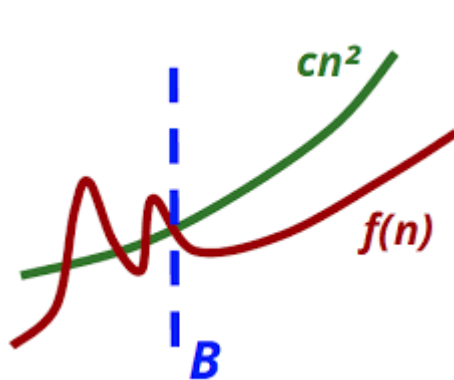


Outras Notações

Resposta



- Da mesma forma que a notação **Big-Oh** provê uma forma assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual” a outra função, há outras notações que provêm formas assintóticas para fazer outras formas de comparação;
- Em Análise de Algoritmos essas outras formas assintóticas são conhecidas por **Big-Omega** e **Big-Theta**.



Notações Assintóticas

Exercícios



1. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 5n^2 + 10n + 8$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n²)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



2. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n^3$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **$F(n)$** pertence à ordem de complexidade **$O(n^3)$** .

Exercícios



3. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 5n^2 + 10n + 8$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



4. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n^3$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n²)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



5. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **$F(n)$** pertence à ordem de complexidade **$O(n)$** .

Notações Assintóticas

Exercícios



6. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 50n^2$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



7. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 50n^2$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n³)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



8. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n^2 - 200n - 300$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



9. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n^2 - 200n - 300$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n⁵)**.

Exercícios



10. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = n^2 - 200n - 300$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(1)**.

Exercícios



11. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 3/2n^2 + 7/2n - 4$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n)**.

Exercícios



12. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 3/2n^2 + 7/2n - 4$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n²)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



13. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 5n^2 + 10n - 900$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n²)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



14. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 5n^2 + 10n - 900$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **F(n)** pertence à ordem de complexidade **O(n)**.

Notações Assintóticas

Exercícios



15. Um algoritmo apresenta Função de Complexidade:

$$F(n) = 10 + 2/n$$

Prove ou disprove que a Função de Complexidade **$F(n)$** pertence à ordem de complexidade **$O(n^2)$** .

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

Referências bibliográficas



- CORMEN, T.H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática (Caps. 13). Campus. 2002.
- ZIVIANI, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C (Cap. 1). 2.ed. Thomson, 2004.
- FEOFILOFF, P. Minicurso de Análise de Algoritmos, 2010. Disponível em:
<http://www.ime.usp.br/~pf/livrinho-AA/>
- DOWNEY, A.B. *Analysis of algorithms* (Cap. 2), Em: *Computational Modeling and Complexity Science*. Disponível em:
<http://www.greenteapress.com/compmo/html/book003.html>
- ROSA, J.L. Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II. Universidade de São Paulo. Disponível em:
<http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=639>

ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

Referências bibliográficas

- GOODRICH, Michael T. et al: *Algorithm Design and Applications*. Wiley, 2015.
- LEVITIN, Anany. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms*. Pearson, 2012.
- SKIENA, Steven S. *The Algorithm Design Manual*. Springer, 2008.
- Série de Livros Didáticos. *Complexidade de Algoritmos*. UFRGS.
- BHASIN, Harsh. *Algorithms – Design and Analysis*. Oxford University Press, 2015.
- FREITAS, Aparecido V. de – 2022 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.
- CALVETTI, Robson - 2015 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.



ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

Aula 06

FIM