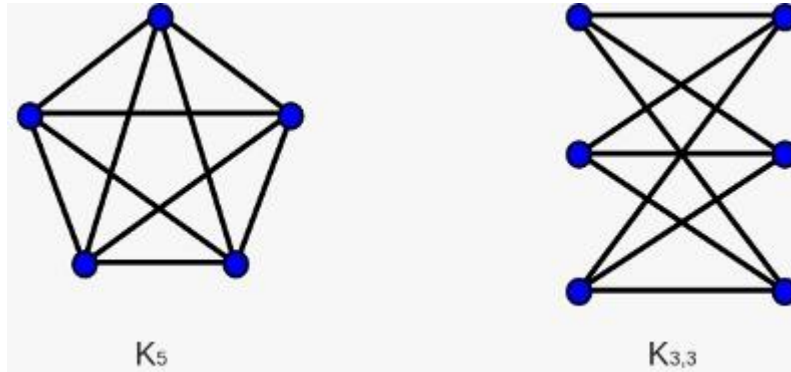
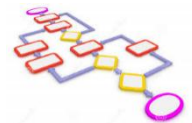


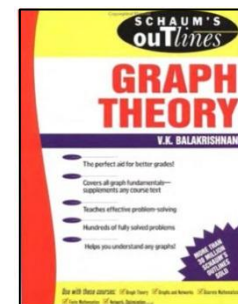
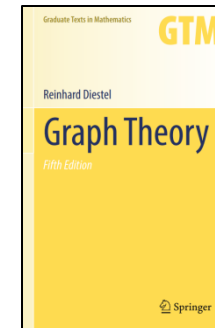
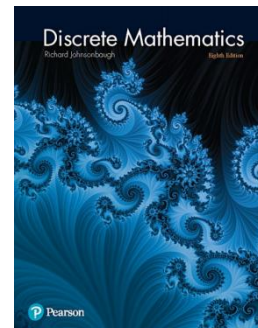
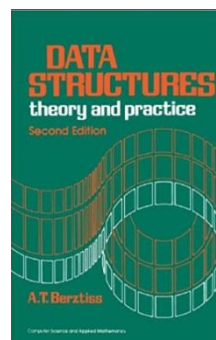
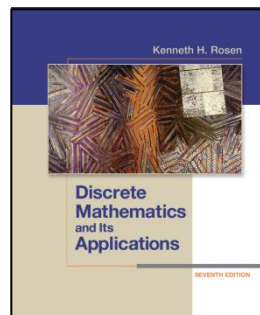
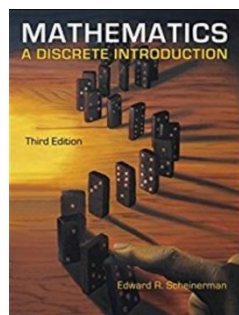
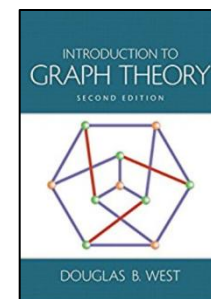
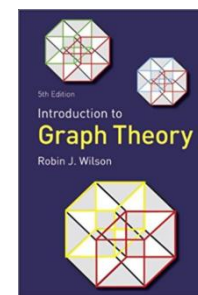
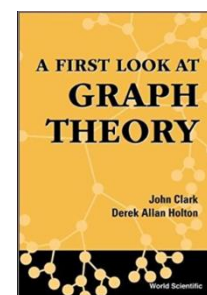
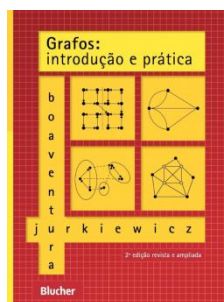
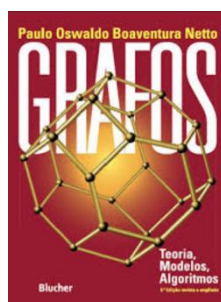
Unidade 23 – Grafos – Tópicos Adicionais





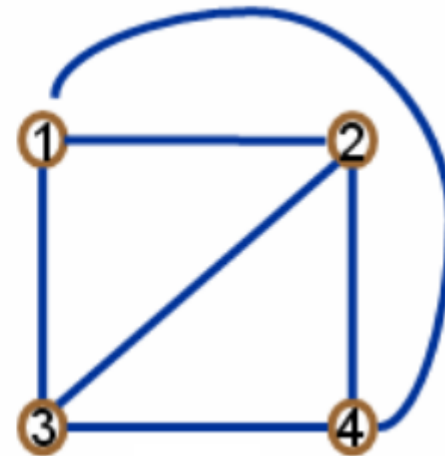
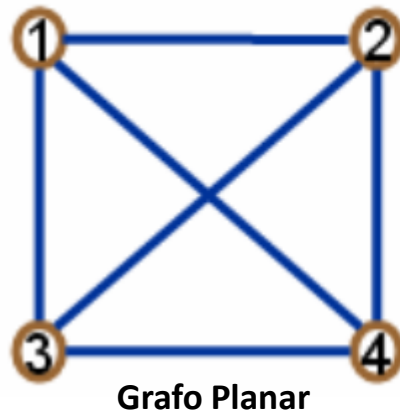
Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka Jr.** 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura Netto**, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997



Introdução

- ✓ Muitos grafos podem ser redesenhados de forma a evitar que suas **arestas se cruzem** em lugares que não sejam nos vértices;
- ✓ Um **grafo** que possa ser redesenhado dessa maneira é chamado **Grafo Planar**.



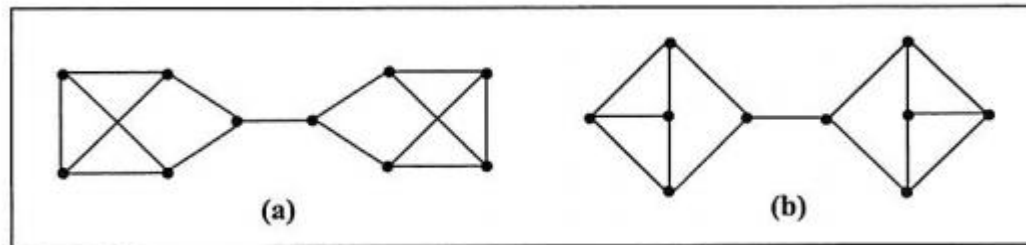
Planaridade

- ✓ O conceito de **Planaridade** subsidia muitas aplicações do mundo real;
- ✓ Em muitos projetos práticos, é desejável que se tenha um mínimo possível de intersecções;
- ✓ Assim, **grafos planares** desempenham um papel importante no chamado problema de **coloração**. Este problema consiste em tentar colorir os vértices de um grafo simples com determinado número de cores, de maneira que cada aresta do grafo una vértices de cores diferentes;
- ✓ Se o grafo for **planar**, seus vértices sempre podem ser coloridos dessa maneira com apenas quatro cores, como estabelece o **Teorema das Quatro Cores**.



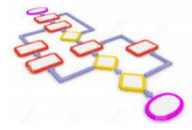
Grafo Plano e Grafo Planar

- ✓ Um **Grafo Plano** é um grafo desenhado em uma superfície plana, de maneira que duas quaisquer de suas arestas se encontrem apenas nos vértices-extremidade (considerando que elas se encontrem).
- ✓ Um **Grafo Planar** é um grafo isomorfo a um **Grafo Plano**, isto é, pode ser redesenhado como um **Grafo Plano**.



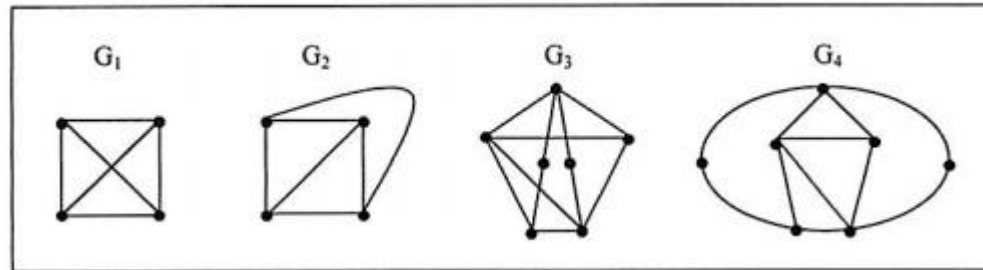
(a) **Grafo Planar**, dado que seu isomorfo (b) é **Plano**;





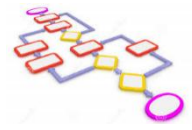
Grafo Plano e Grafo Planar

Exemplos



- ✓ G_1 , G_2 , G_3 e G_4 são todos Grafos Planares;
- ✓ G_1 e G_4 não são Grafos Planos;
- ✓ O Grafo G_1 pode ser redesenhado como G_2 ;
- ✓ O Grafo G_3 pode ser redesenhado como G_4 .



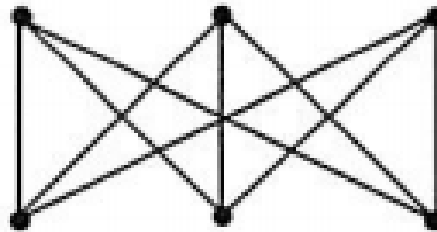


Todo Grafo é passível de ser Plano?



Todo Grafo é passível de ser Plano?

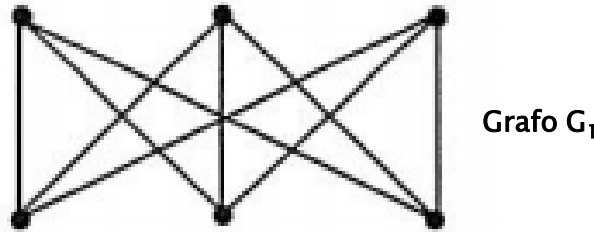
- ✓ Nem todo **Grafo** é passível de ter um desenho como um **Grafo Plano**;



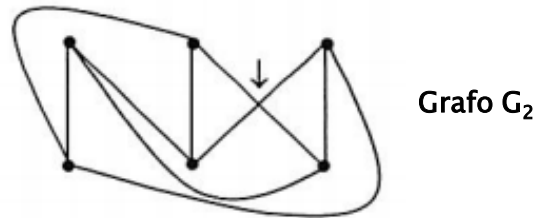
- ✓ Para o **Grafo** acima, é **impossível** obter-se uma versão **plana** do Grafo;



Todo Grafo é passível de ser Plano?



- ✓ Nesse caso, seu **redesenho** poderá reproduzir um número menor de intersecções, mas **não** se consegue eliminá-las;



- ✓ G_1 e G_2 são **isomorfos**, porém não são **planos**;



Curva de Jordan

- ✓ Uma **Curva de Jordan** no plano é uma curva **contínua** que **não intercepta a si própria**, cuja **origem** e cujo **término coincidem**;

Curva de Jordan – Exemplos



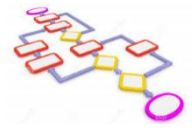
Curva de Jordan

Contra-Exemplos



- ✓ As curvas acima NÃO são **Curvas de Jordan**;





Curvas de Jordan

- ✓ Se J é uma curva de Jordan no plano, então a parte do plano que é **interna** à J é chamada **interior de J** e denotada por **int J** ;
- ✓ São excluídos de int J os pontos que pertencem à **curva J** ;
- ✓ De maneira semelhante, a parte do plano que é **externa** a int J é chamada de **exterior de J** e denotada por **ext J** .

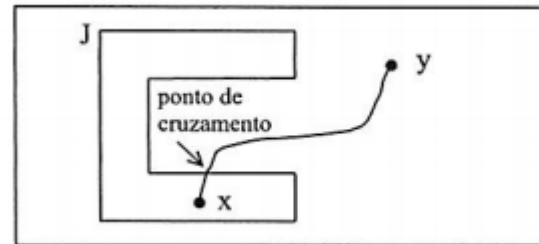


Teorema da Curva de Jordan

- ✓ O **Teorema da Curva de Jordan** estabelece que se J é uma curva de Jordan, se x é um ponto de **int** J , se y é um ponto de **ext** J , então **qualquer** linha (reta ou curva) que una x a y deve **cruzar** J em **algum** ponto;

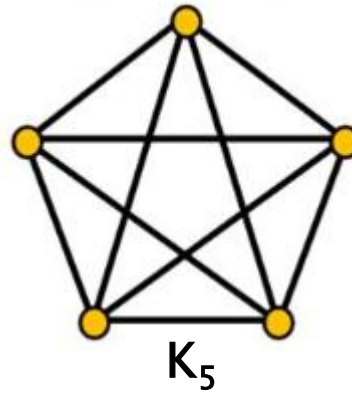


- ✓ O **Teorema da Curva de Jordan** embora intuitivamente **óbvio**, é muito **difícil** de ser provado.



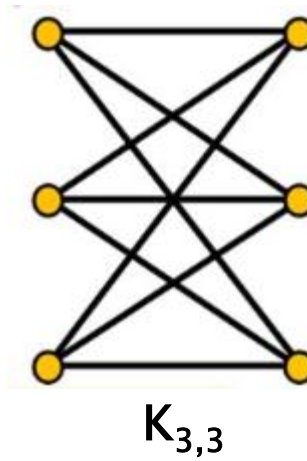
Teorema

- ✓ O grafo completo de cinco vértices K_5 , não é planar.



Teorema

✓ O grafo $K_{3,3}$, não é planar.



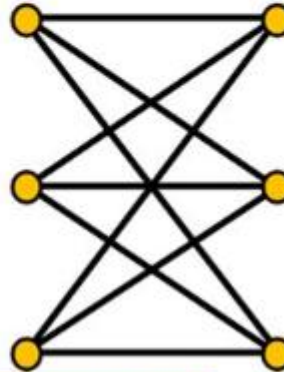
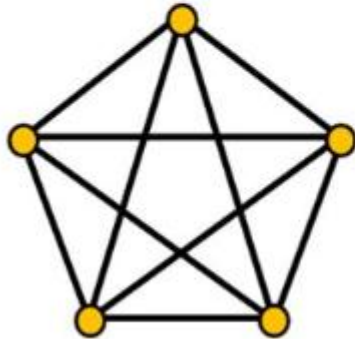
$K_{3,3}$



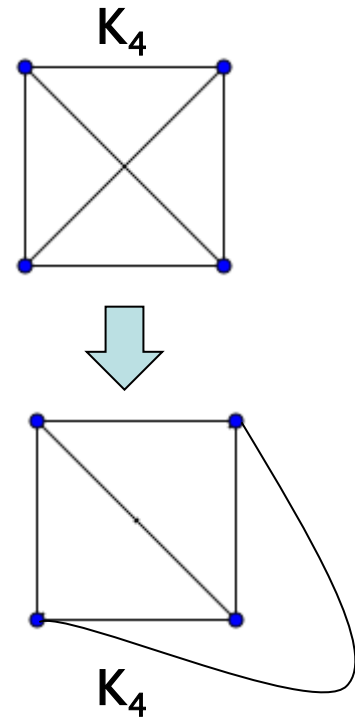
Nem todos grafos são planares



- K_4 é um grafo planar pois admite pelo menos uma representação num plano sem que haja cruzamento de arestas (**representação planar**);
- Mas nem todos os grafos são planares!

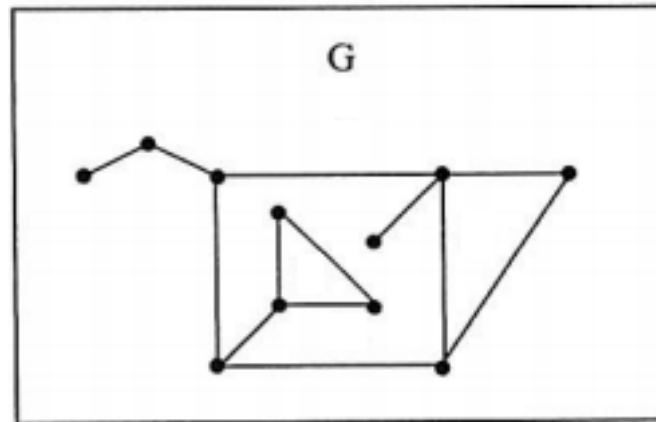


K_5 e $K_{3,3}$ não são planares!

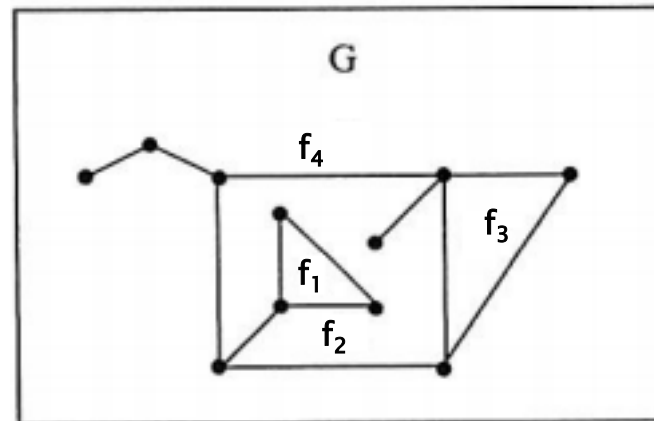


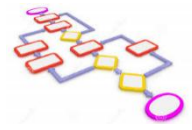
Faças de um Grafo G

- ✓ Um **Grafo Plano G** particiona o plano em um número de regiões chamadas **Faças** de **G**;



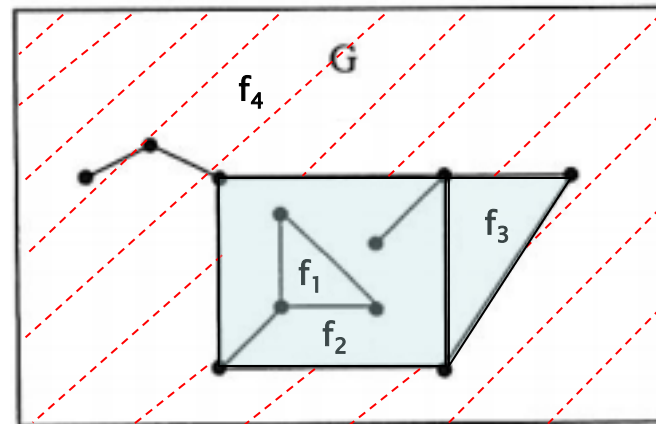
- ✓ O **Grafo Plano G** acima tem quatro faces: f_1 , f_2 , f_3 e f_4 ;
- ✓ A face f_4 não é limitada e é chamada **face exterior**;





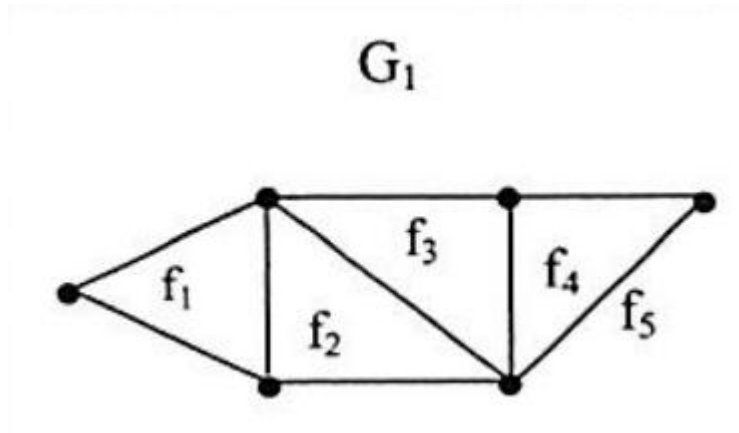
Faces de um Grafo G

- ✓ Qualquer **Grafo Plano** G tem exatamente uma **Face exterior**;
- ✓ Qualquer outra **Face** é limitada por um caminho fechado no grafo e é chamada **Face Interior**;
- ✓ O número de **Faces** de um Grafo Plano é denotado por $f(G)$ ou simplesmente f .



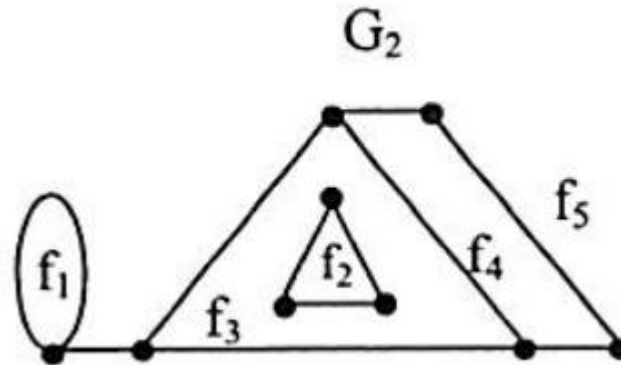
Faças de um Grafo G – Exemplo

✓ O Grafo G_1 abaixo tem 5 faces;



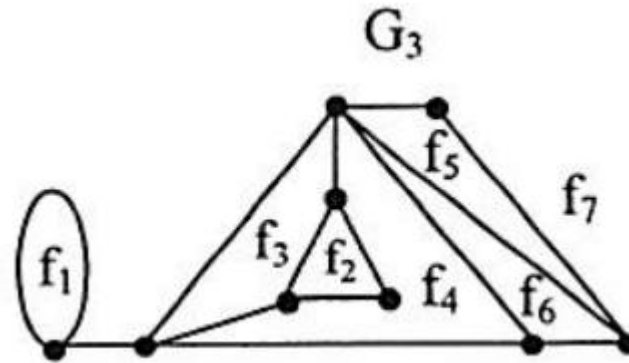
Faças de um Grafo G – Exemplo

- ✓ O Grafo G_2 abaixo tem 5 faces;



Faças de um Grafo G – Exemplo

- ✓ O Grafo G_3 abaixo tem 7 faces;



Fórmula de Euler

✓ Seja **G** um **Grafo conectado plano** e seja:

n – o número de **Vértices** de **G**;

e – o número de **Arestas** de **G**;

f – o número de **Faces** de **G**.

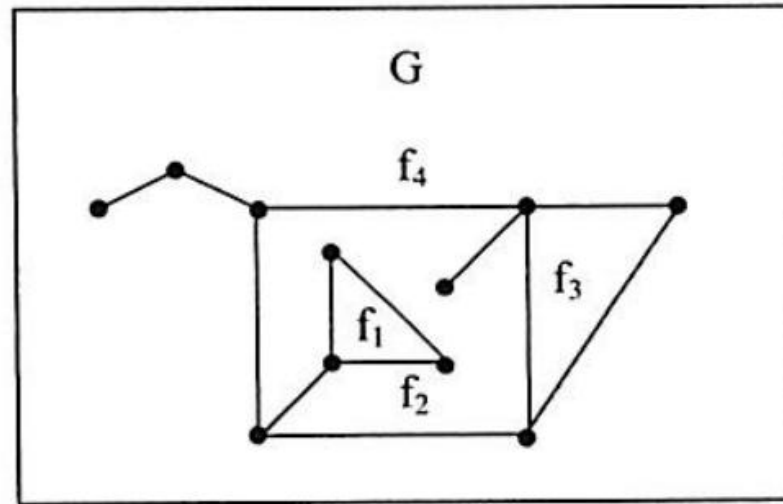
Então:

$$n - e + f = 2$$



Fórmula de Euler – Exemplo

✓ Seja **G** o Grafo da Figura abaixo:



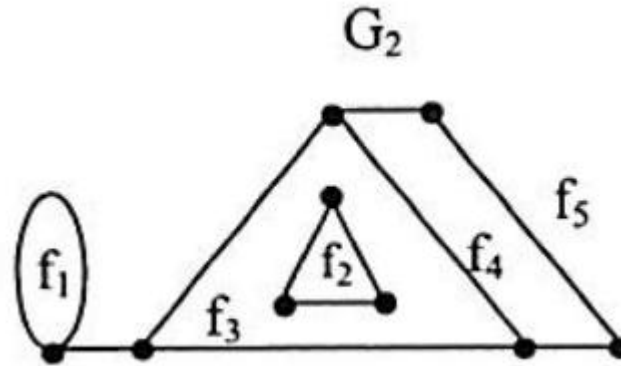
- ✓ O Grafo tem 11 vértices, 13 arestas e quatro faces, uma vez que o Grafo é Conectado;
- ✓ Logo: $n - e + f = 2 \Rightarrow 11 - 13 + 4 = 2$ (verdade)

$$n - e + f = 2$$



Fórmula de Euler – Exemplo

- ✓ Seja G_2 o Grafo da Figura abaixo:

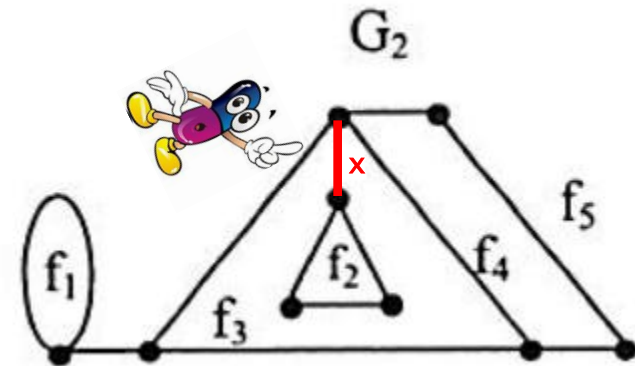
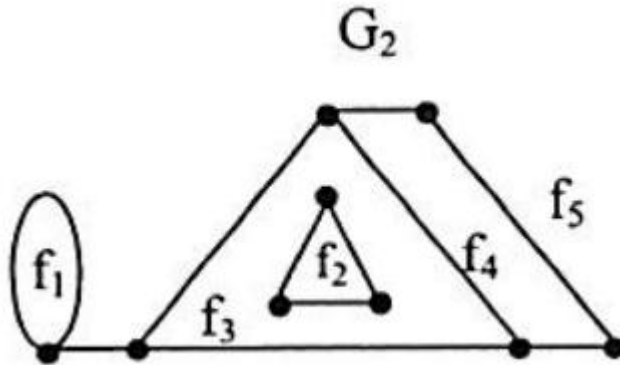


- ✓ Considerando que o Grafo G_2 não é conectado, **não** se pode aplicar a Fórmula de Euler;
- ✓ Ou seja, nesse caso a **Fórmula de Euler não é válida**.



Fórmula de Euler – Exemplo

- ✓ Seja G_2 o **Grafo da Figura abaixo**;
- ✓ Acrescentando-se a **aresta x**, para torná-lo Conectado, tem-se:



- ✓ $n = 9$
- ✓ $e = 12$
- ✓ $f = 5$

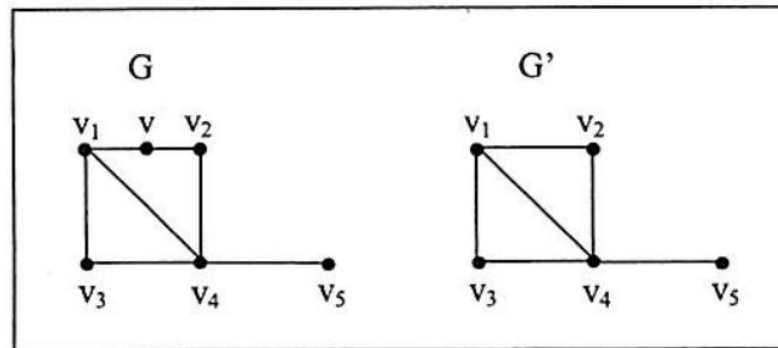
- ✓ Aplicando-se a **Fórmula de Euler**, tem-se: $n - e + f = 2 \Rightarrow 9 - 12 + 5 = 2$ (Verdade...)



Redução de Série

Se um grafo G tem um vértice com grau 2 e arestas (v, v_1) e (v, v_2) , com $v_1 \neq v_2$, diz-se que as arestas (v, v_1) e (v, v_2) estão em série. Uma *redução de série* consiste na eliminação do vértice v do grafo G e na substituição das arestas (v, v_1) e (v, v_2) pela aresta (v_1, v_2) . Diz-se que o grafo resultante G' foi obtido a partir de G por uma redução de série. Por convenção, diz-se que um grafo G é obtido a partir de si mesmo por uma redução de série.

No grafo G da Figura as arestas (v, v_1) e (v, v_2) estão em série. O grafo G' foi obtido a partir de G por uma redução de série.



Grafo G' , obtido a partir de G por uma redução de série.

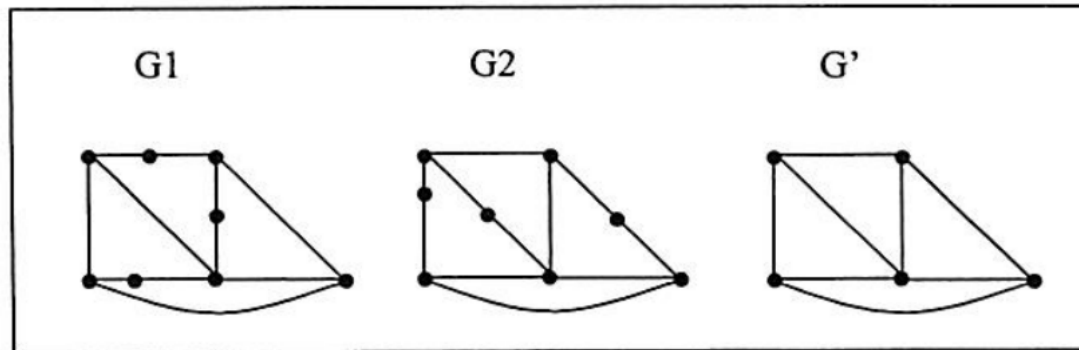


Grafos Homeomorfos

Os grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se G_1 e G_2 puderem ser reduzidos a grafos isomorfos por meio da realização de uma sequência de reduções de série.

De acordo com as definições, qualquer grafo é homeomorfo a si próprio. Os grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se G_1 puder ser reduzido a um grafo isomorfo a G_2 ou se G_2 puder ser reduzido a um grafo isomorfo a G_1 .

Exemplo Os grafos G_1 e G_2 , mostrados na Figura , são homeomorfos, uma vez que ambos podem ser reduzidos ao grafo G' , mostrado na mesma figura, por meio de uma sequência de reduções de série.

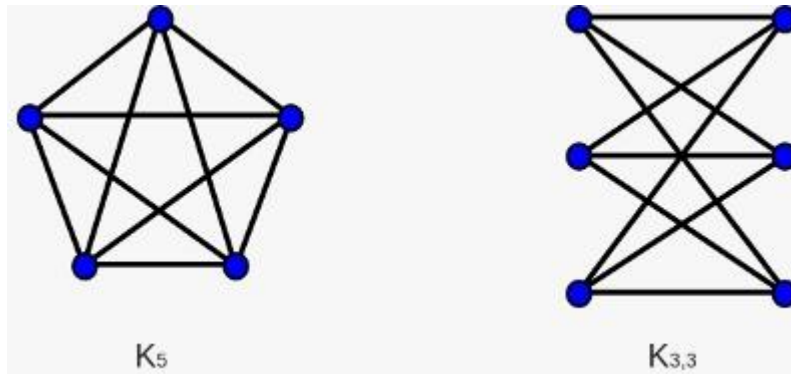


Os grafos G_1 e G_2 são homeomorfos. Cada um deles pode ser reduzido ao grafo G' .



Teorema de Kuratowski

- ✓ Um Grafo **G** é **planar** se e somente se não tiver um subgrafo **homeomorfo** a **K_5** ou **$K_{3,3}$** .


 K_5
 $K_{3,3}$
