Emparelhamentos (Matching)

Resumo com exemplos visuais em TikZ

Baseado na Unidade 19

13 de novembro de 2025

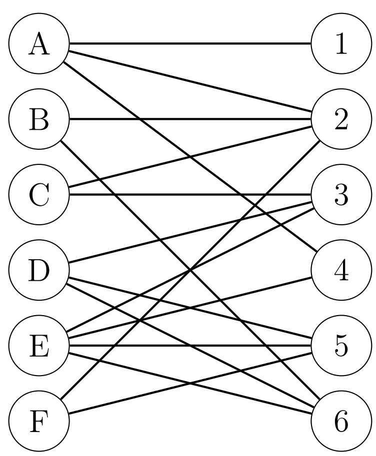
Como usar

Cada conceito do slide de *Emparelhamentos* vem com uma definição curta e um exemplo em TikZ. Compile com pdfLaTeX.

1 Grafo bipartido e modelagem

Definição: Um grafo é *bipartido* se V pode ser particionado em X e Y e toda aresta liga um vértice de X a um de Y.

Exemplo (Hotel: casais × quartos): $X = \{A, B, C, D, E, F\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; conecte gostos.

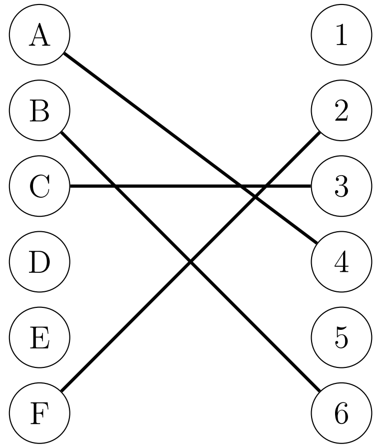


Cada aresta indica "casal aceita quarto".

2 Emparelhamento, máximo e perfeito

Definição (Matching M): Conjunto de arestas sem vértices em comum.
Máximo: M tem o *maior* número de arestas possível. **Perfeito:** Satura *todos* os vértices (em ambos os lados, quando $|X| = |Y|$).

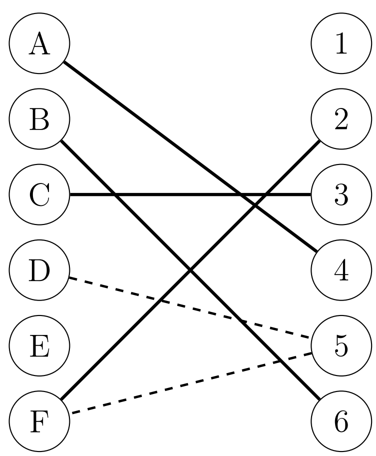
Exemplo (emparelhamento parcial $|M| = 4$):



$M = \{A4,\, B6,\, C3,\, F2\}$ emparelha 4 casais.

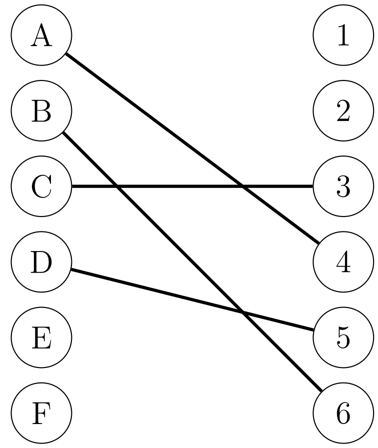
3 Caminho M-alternante e M-aumentante (Teorema de Berge)

Definições: Um *caminho M-alternante* alterna arestas fora/de M. Se começa e termina em vértices *livres*, é *M-aumentante.*
Teorema de Berge: M é máximo $\Leftrightarrow$ não existe caminho M-aumentante.
Exemplo (aumentar M usando $D{-}5{-}F{-}2$):



Caminho M-aumentante $D{-}5{-}F{-}2$. Troque arestas $\Rightarrow$ adiciona $D5$ e remove $F2$.

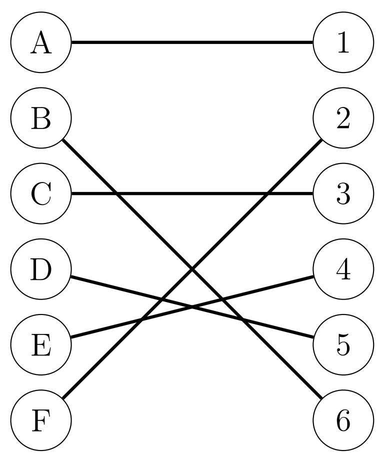
Resultado (novo M' com 5 arestas):



$M' = \{A4,\ B6,\ C3,\ D5\}$ ainda falta casar um – procure outro caminho aumentante a partir de 1 e E.

4 Emparelhamento perfeito no caso do hotel

Ideia: Repita a busca por caminhos M-aumentantes iniciando em vértices livres (por ex., 1 e E) até saturar todos.
Exemplo (esquemático): Após outro aumento, obtém-se um *emparelhamento perfeito* $|M| = 6$.

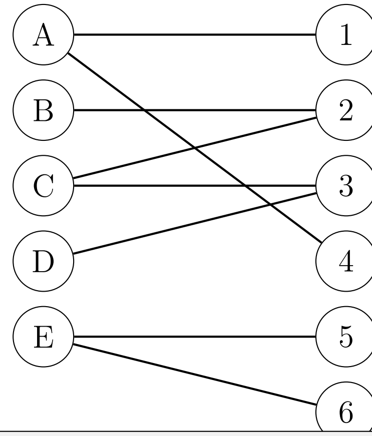


Exemplo de *perfeito*: $\{A1, B6, C3, D5, E4, F2\}$.

5 Emparelhamento completo (apenas em X) e Teorema de Hall

Definições: Um *emparelhamento completo em* X satura todos os vértices de X (não exige saturar Y). Para $G = (X \cup Y, E)$ bipartido, **Teorema de Hall**: existe emparelhamento completo em $X \Leftrightarrow$ para todo $S \subseteq X$, vale $|N(S)| \geq |S|$, onde $N(S)$ é a vizinhança de S em Y.

Exemplo (Ônibus × Vagas, falha de Hall):



$S = \{B, C, D\}, \quad N(S) = \{2, 3\}, \quad |N(S)| = 2 < 3 = |S|$

Por Hall, não existe emparelhamento completo em X.

6 Checklist prático

- Quer maximizar $|M|$? Procure *caminhos M-aumentantes* (Berge/algoritmo de augmenting paths; versão eficiente: Hopcroft–Karp).
- Precisa saber *a priori* se dá para saturar X? Teste Hall: verifique $|N(S)| \geq |S|$ para subconjuntos críticos (ex.: componentes onde muitos vértices competem por poucas opções).
- Perfeito: só se $|X| = |Y|$ e houver emparelhamento completo em ambos os lados.

Dica: Para desenhar augmenting paths, alterne **fora/de** M e **em** M; ao encontrar livres nas duas pontas, troque (symmetric difference) e aumente $|M|$.