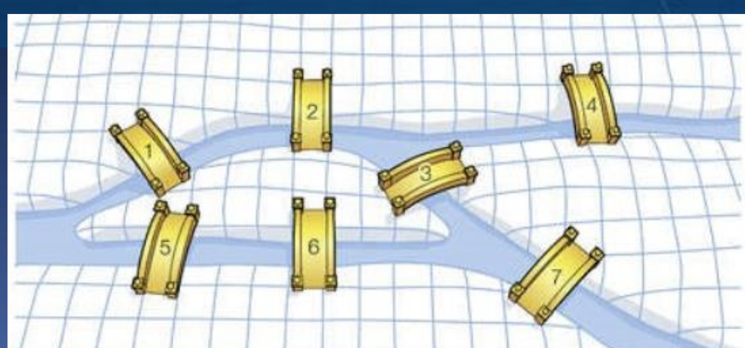
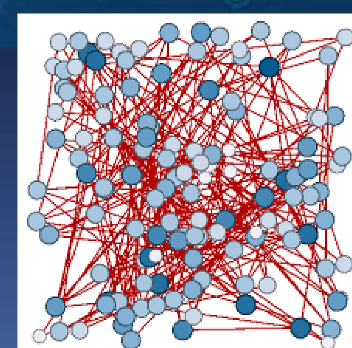
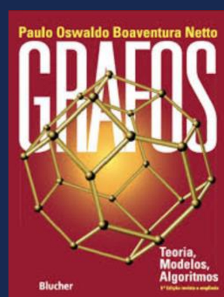
Unidade 16 - Introdução à Teoria dos Grafos
Conceitos Iniciais

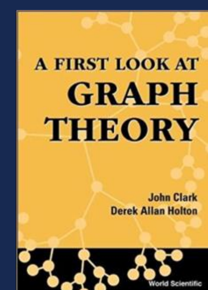


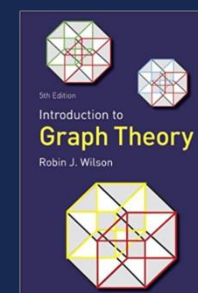


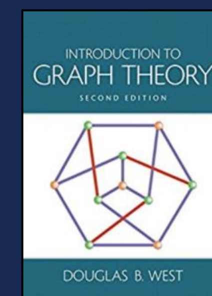
Bibliografia

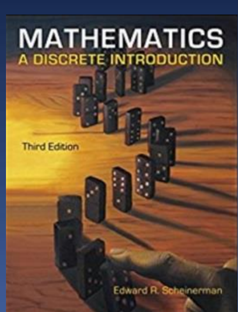
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4^{th} Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7^{th} edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graphy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5^{th} Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018

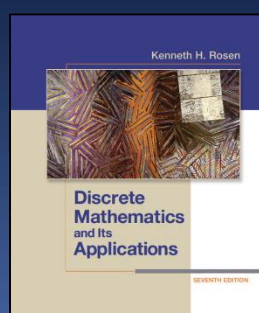


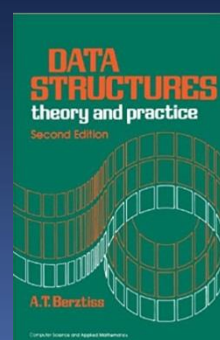


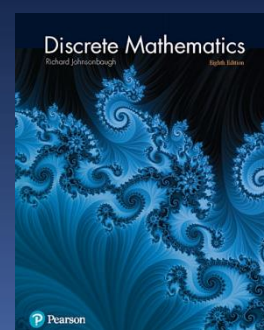


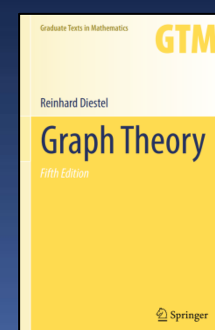












Definição

- Um grafo *G* = (V(G), E(G)) ou *G* = (V,E) consiste de dois conjuntos finitos:

  - **V(G)**, (ou V), que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um **conjunto <u>não</u> vazio** de elementos chamados vértices e

  - **E(G)** , (ou E), que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (**que <u>pode</u> ser vazio**) de elementos chamados **arestas**;

- À cada aresta **e** em **E** atribui-se um par não ordenado de vértices **(u,v)** chamados vértices-extremidade de **e**;

- Vértices também são referenciados como pontos ou nós.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos – Exemplo

Seja o grafo $G = (V,E)$, tal que

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$e_1 \leftrightarrow (a,b)$ $e_2 \leftrightarrow (b,c)$ $e_3 \leftrightarrow (c,c)$ $e_4 \leftrightarrow (c,e)$ $e_5 \leftrightarrow (d,f)$ $e_6 \leftrightarrow (d,f)$

$e_7 \leftrightarrow (c,d)$ $e_8 \leftrightarrow (c,f)$ $e_9 \leftrightarrow (e,f)$ $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$ $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$ $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos – Exemplo

Seja o grafo $G = (V,E)$, tal que

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \text{ e}$$

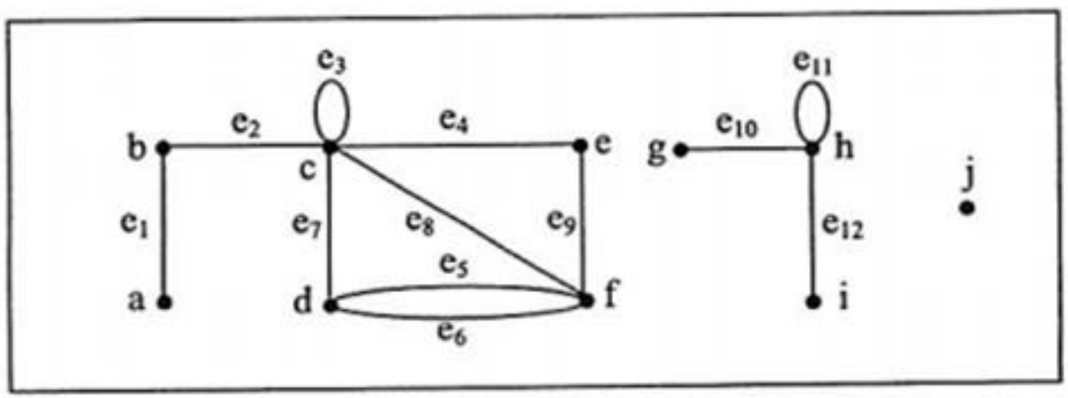
$$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$e_1 \leftrightarrow (a,b)$ $e_2 \leftrightarrow (b,c)$ $e_3 \leftrightarrow (c,c)$ $e_4 \leftrightarrow (c,e)$ $e_5 \leftrightarrow (d,f)$ $e_6 \leftrightarrow (d,f)$

$e_7 \leftrightarrow (c,d)$ $e_8 \leftrightarrow (c,f)$ $e_9 \leftrightarrow (e,f)$ $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$ $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$ $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



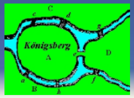
Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos – Observação

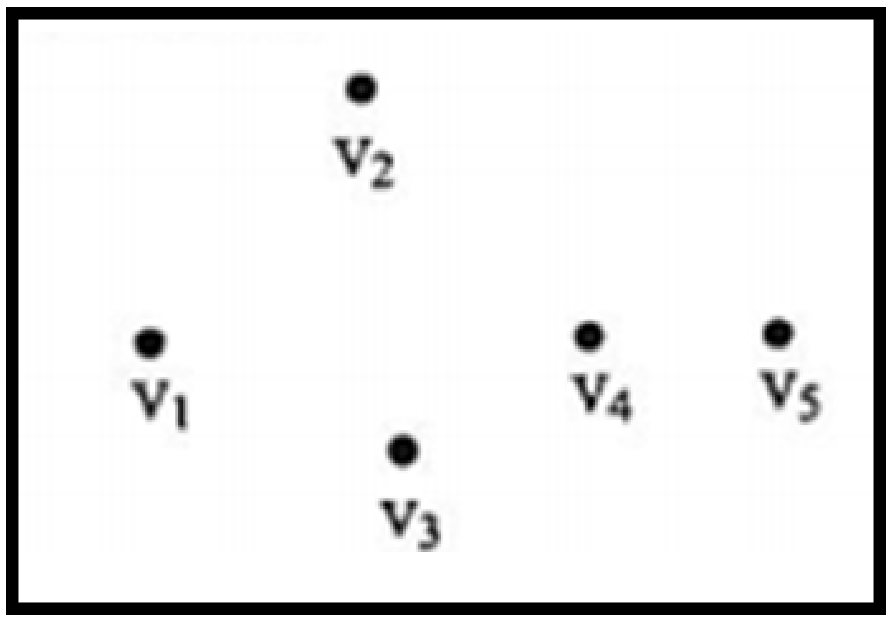
- De acordo com a definição, que formalmente define o conceito de grafo, **é possível** que o conjunto de arestas E seja **vazio**;
- Um grafo cujo conjunto de **arestas** é **vazio** é chamado **grafo nulo**;
- Por outro lado, a definição exige que o conjunto de vértices seja **não vazio**, do contrário, não se tem grafo.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Grafos - Observação

- A Figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com 5 vértices.



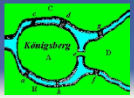
Grafo nulo com 5 vértices

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos - Definições

- Se duas (ou mais) arestas de *G* têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;

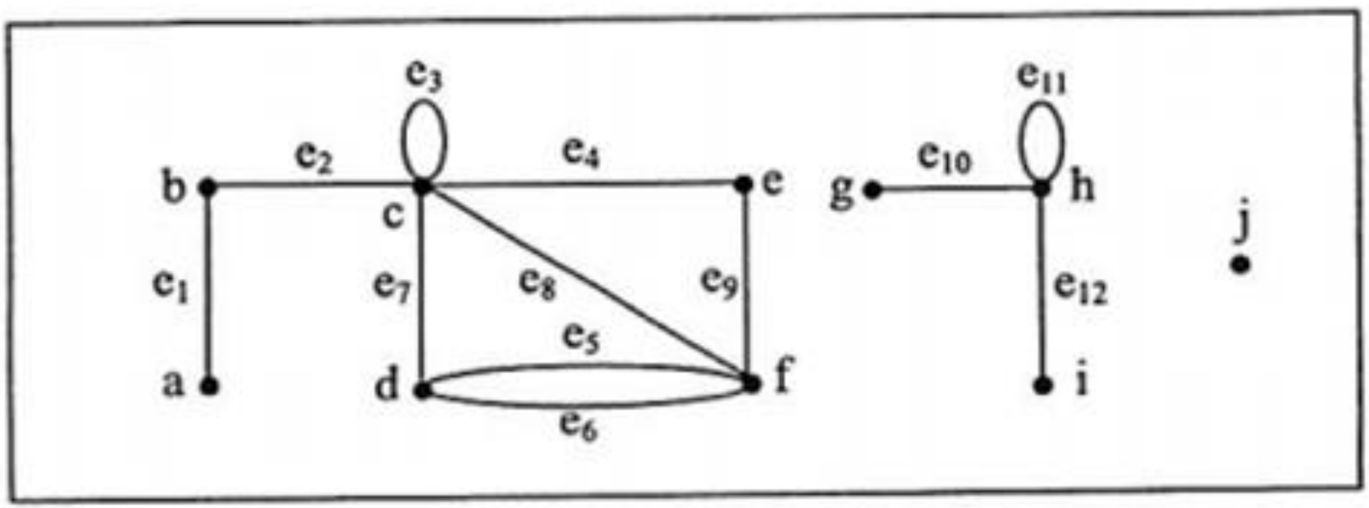
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Arestas Paralelas

- Se duas (ou mais) arestas de *G* têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;
- Por exemplo, as arestas e_5 e e_6 do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



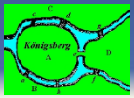
Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Vértice Isolado

- Um vértice de *G* que **não** é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.

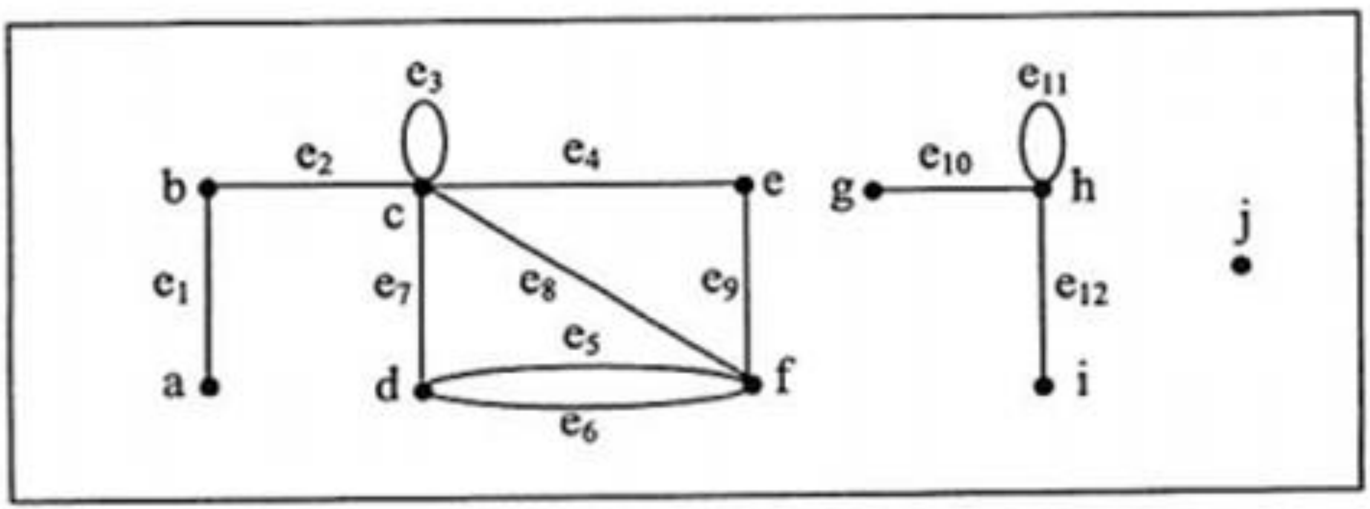
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Vértice Isolado

- Um vértice de *G* que **não** é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.
- Por exemplo, o vértice **j** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Vértices Adjacentes ou Vizinhos

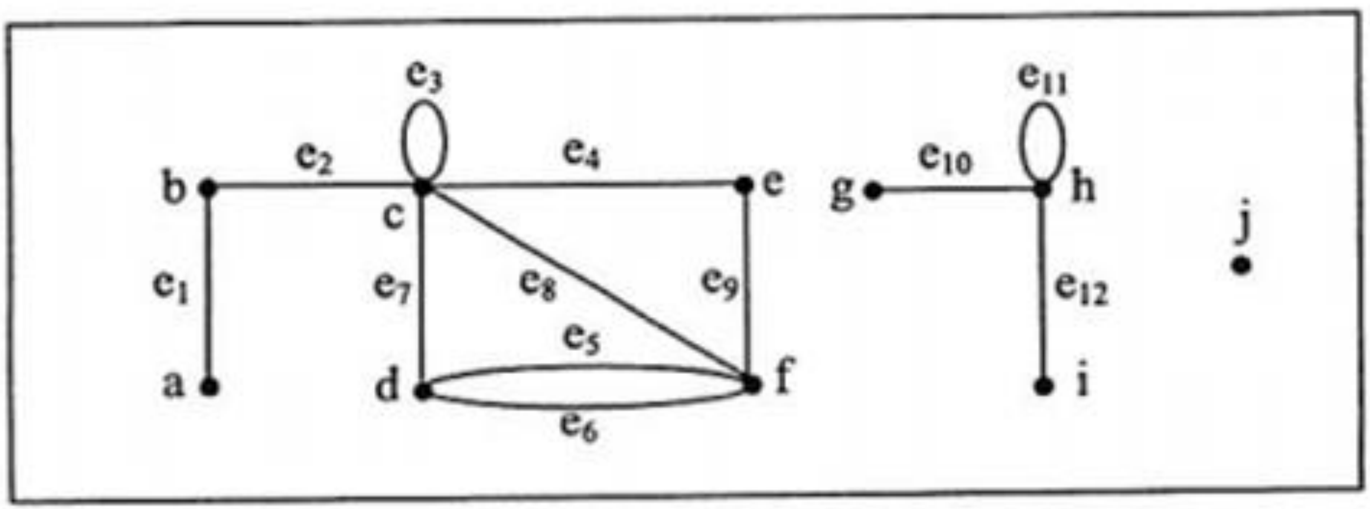
- Dois vértices que estão **unidos** por uma **aresta** são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Vértices Adjacentes

- Dois vértices que estão **unidos** por uma aresta são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.
- Por exemplo, os vértices **a** e **b** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exemplo – Vértices Adjacentes

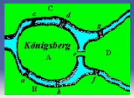
- No grafo da figura abaixo, v_1 e v_2 são adjacentes:

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Arestas Adjacentes

- Duas arestas distintas e_i e e_j são adjacentes se têm um vértice em comum.

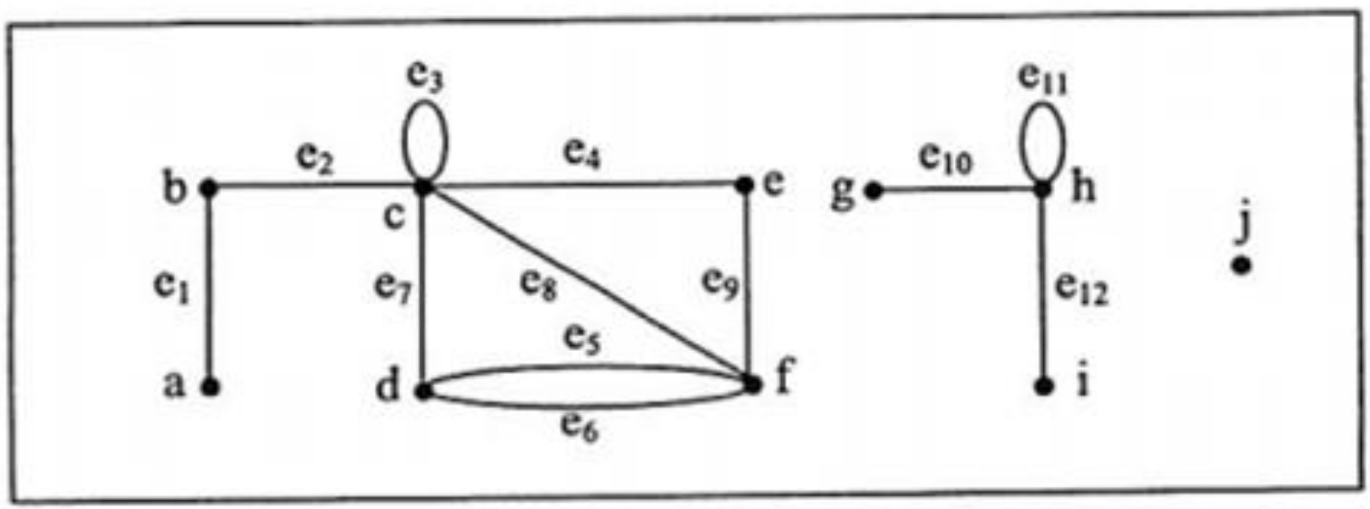
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Arestas Adjacentes

- Duas **arestas** distintas e_i e e_j são **adjacentes** se têm um vértice em comum.
- Por exemplo, as arestas e_1 e e_2 do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.

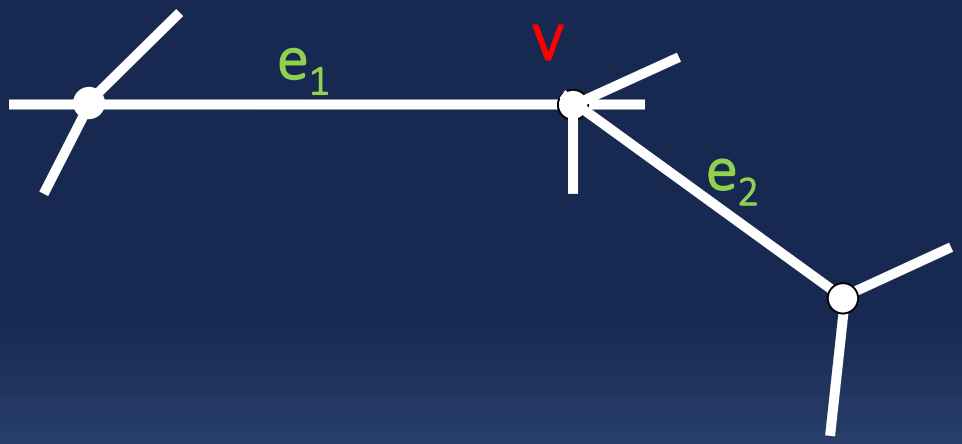


Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exemplo – Arestas Adjacentes

- No grafo da figura abaixo, e_1 e e_2 são adjacentes:

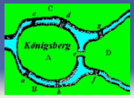


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Conjunto Vizinhança

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo **v** de ***G*** é chamado **conjunto vizinhança** de **v** e é denotado por **N(v)**.

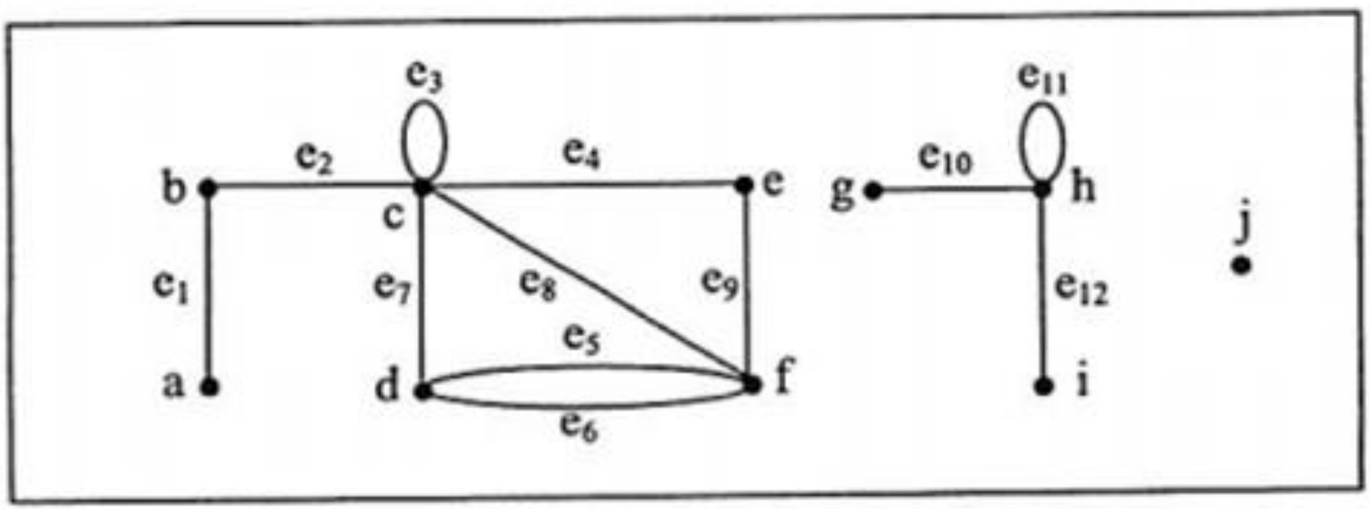
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Conjunto Vizinhança

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo **v** de *G* é chamado **conjunto vizinhança** de **v** e é denotado por **N(v)**.
- Por exemplo, N(f) = {c,d,e}.

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



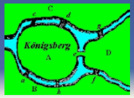
Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafo Simples

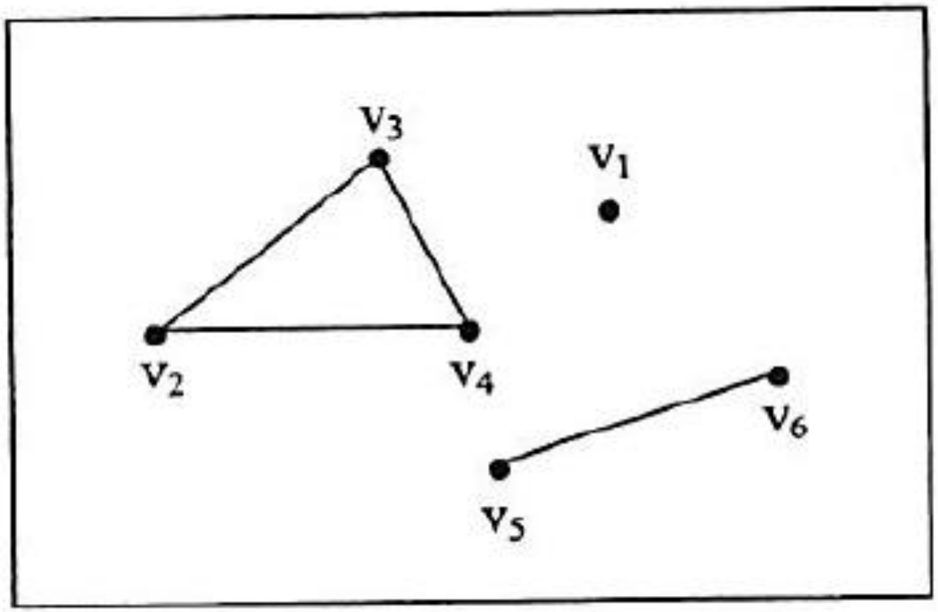
- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Grafo Simples

- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas;
- Exemplo, Grafo da figura abaixo:



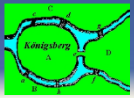
Grafo simples: não tem *loops* e não tem arestas paralelas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

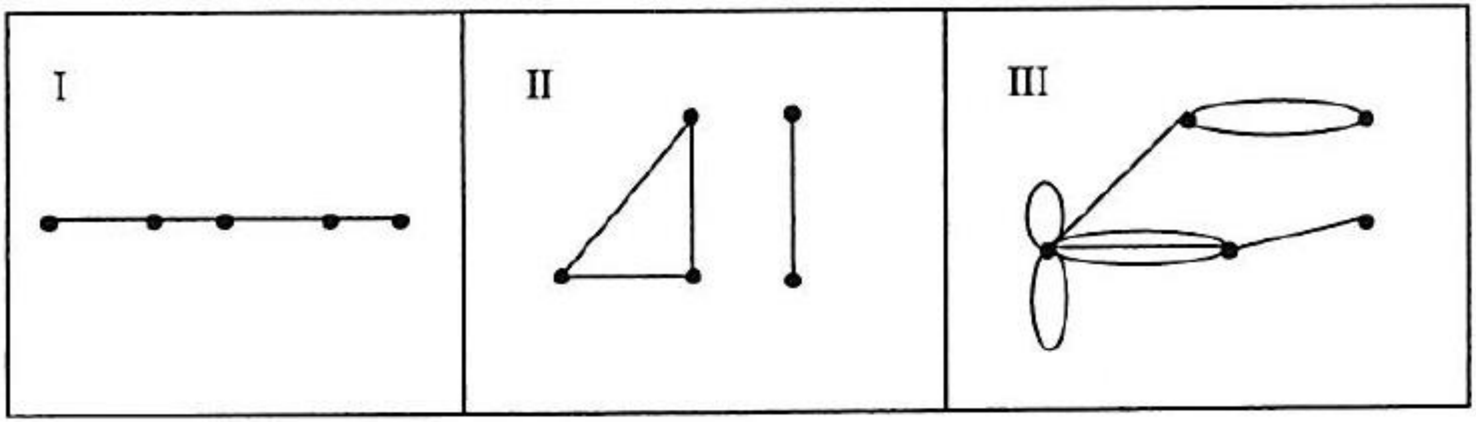
Grau de um vértice

- O **grau** de um vértice **v**, denotado por **d(v)**, é o **número** de arestas de **G** que são incidentes com v, contando cada **loop duas** vezes;
- É pois, o número de vezes que **v** é vértice-extremidade de uma aresta;
- Um vértice de grau **0** é um vértice **isolado**;
- Um vértice de grau 1 é um vértice final.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Grau de um vértice

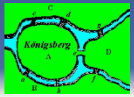


Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2. O grafo em III tem um vértice final, um de grau 2, um de grau 3, um de grau 4 e um de grau 8.

Vértice par ou ímpar

- Um vértice de um grafo é par se o seu grau for par;
- Um vértice de um grafo é ímpar se o seu grau for ímpar;

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

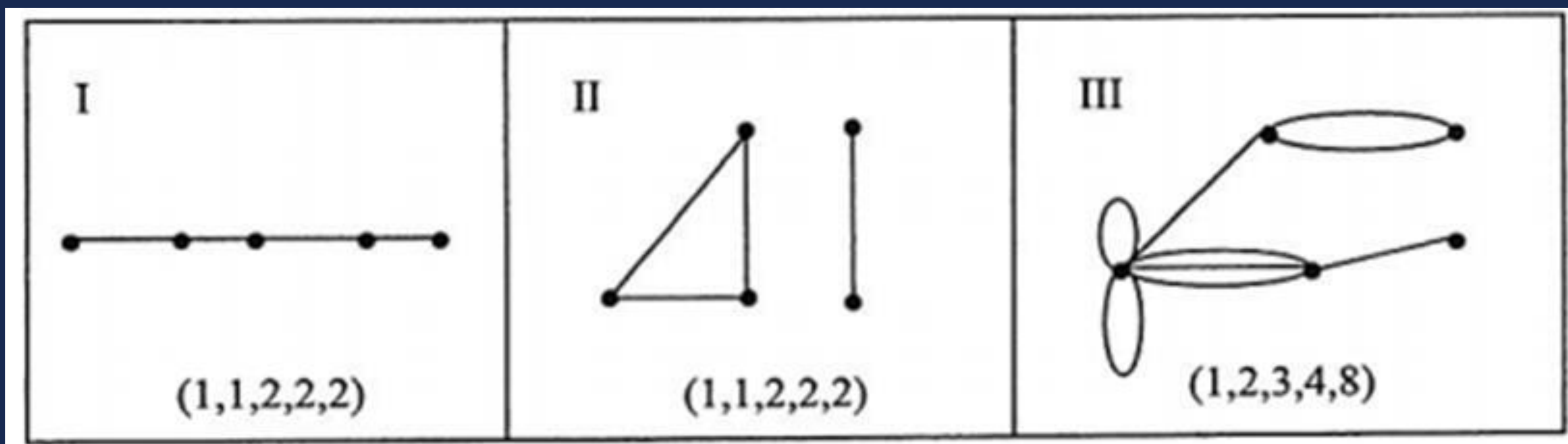


Sequência de graus de um grafo

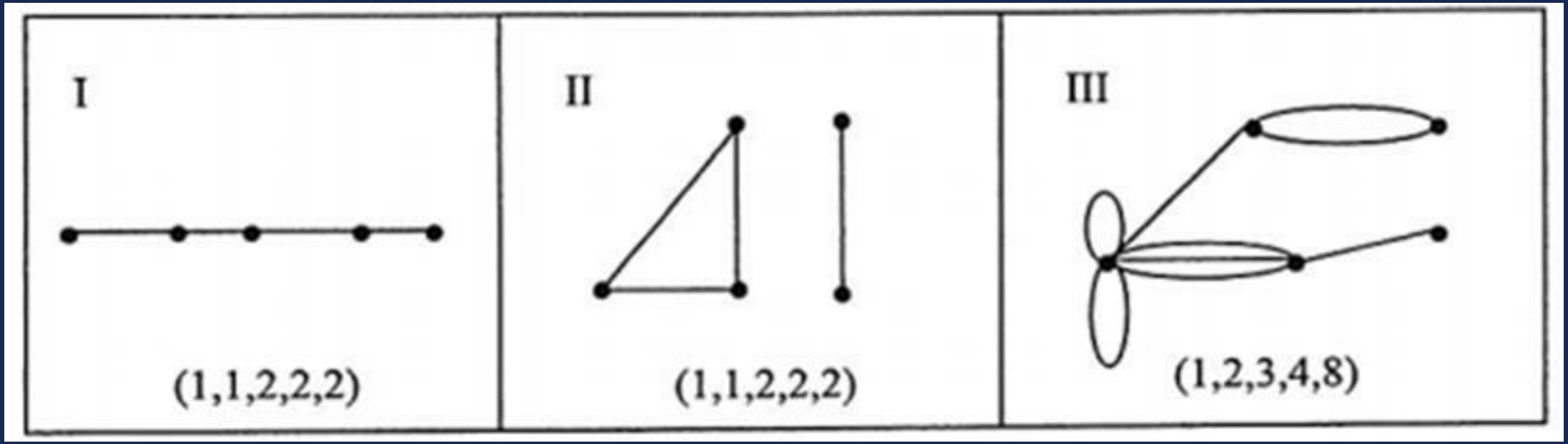
- A **sequência** de graus de um grafo consiste nos graus de seus vértices escritos em ordem **crescente**, com **repetições**, se **necessário**.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Sequência de graus de um grafo

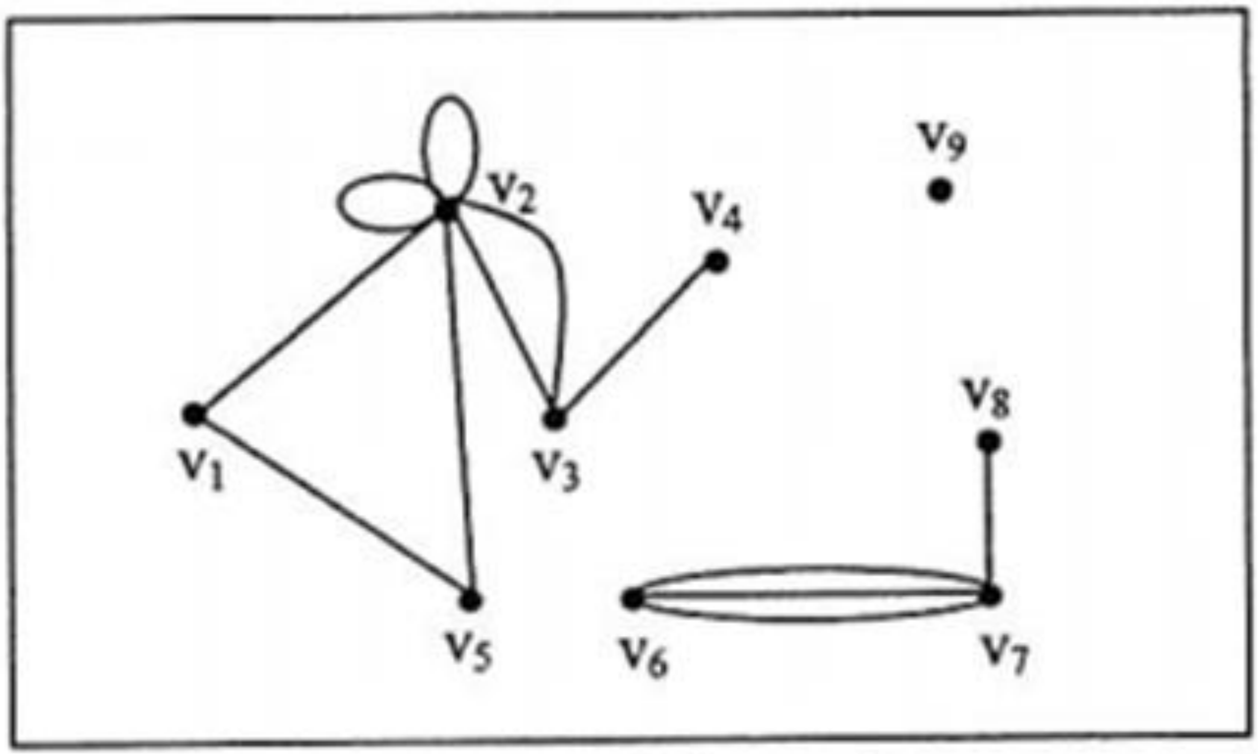


Sequência de graus de um grafo



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

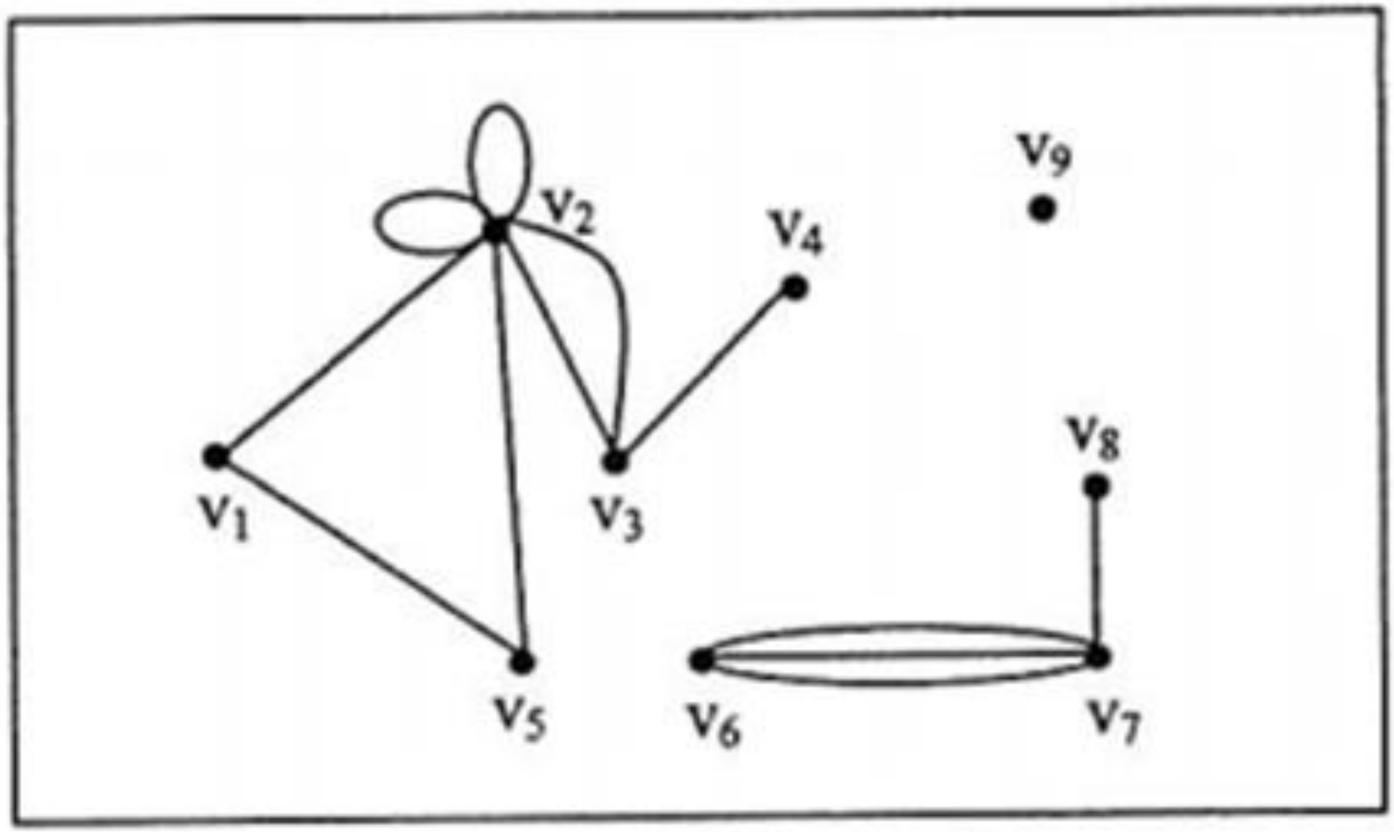
Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

- *Os vértices v1 e v2 são adjacentes.*

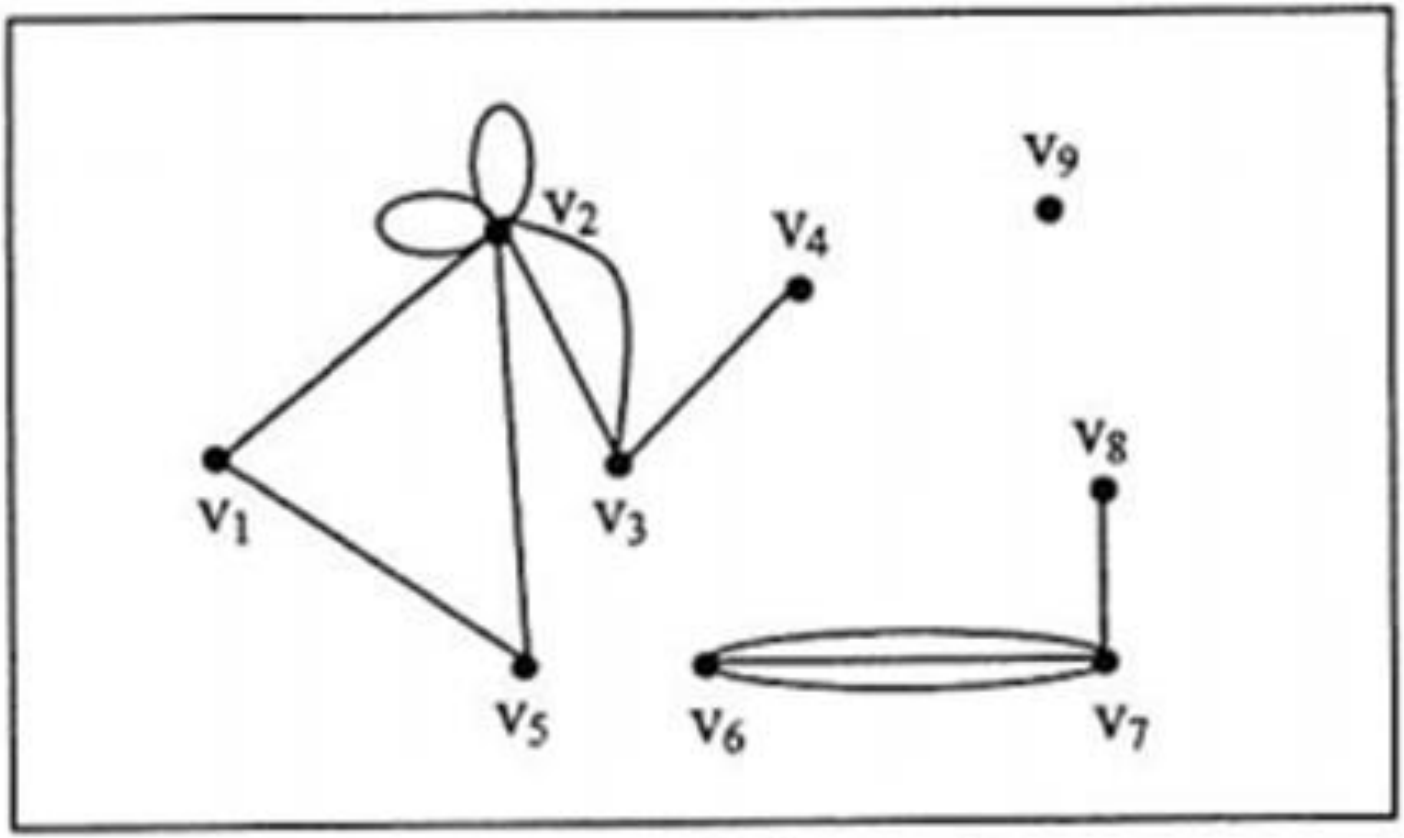
Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

- *Os vértices v1 e v3* **não** *são adjacentes.*

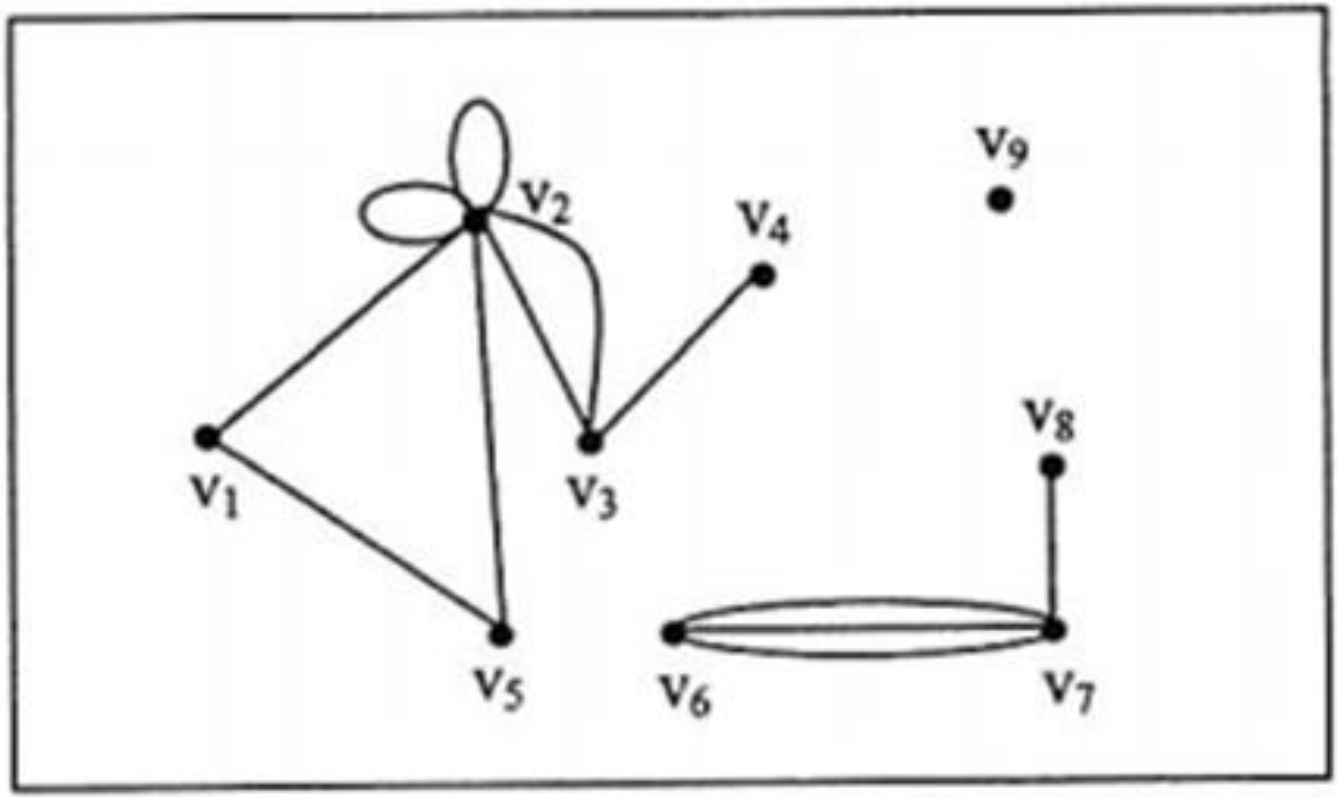
Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

- As arestas (v1,v2) e (v2,v3) são **adjacentes**.

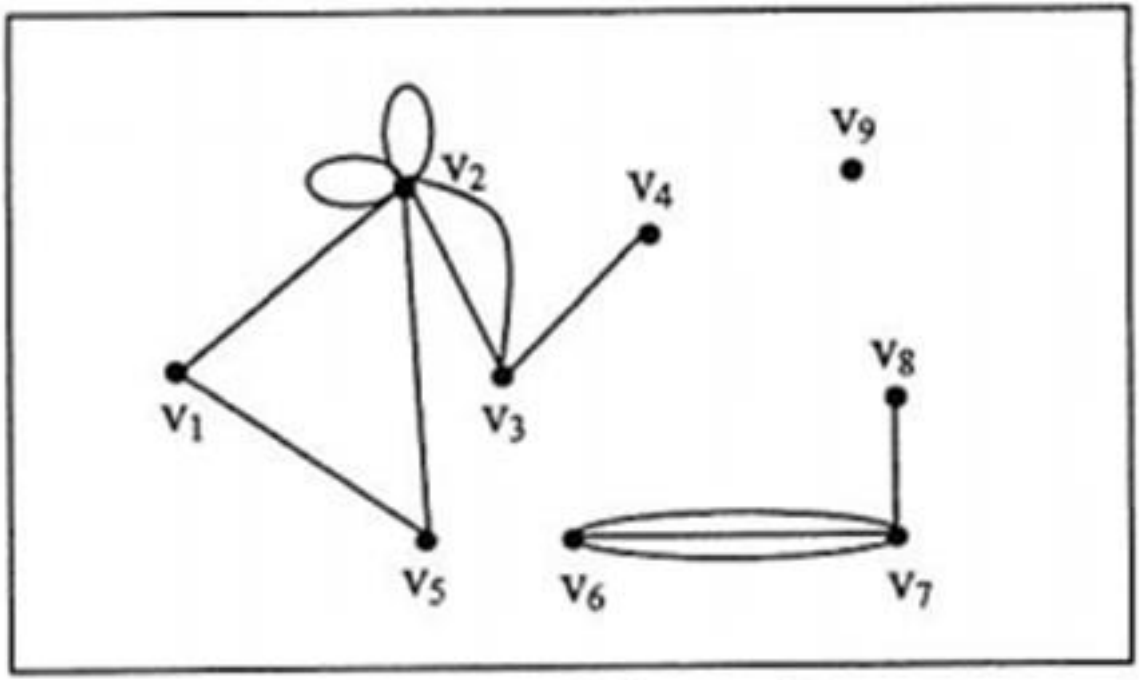
Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

- As arestas (v1,v2) e (v3,v4) não são adjacentes.

Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

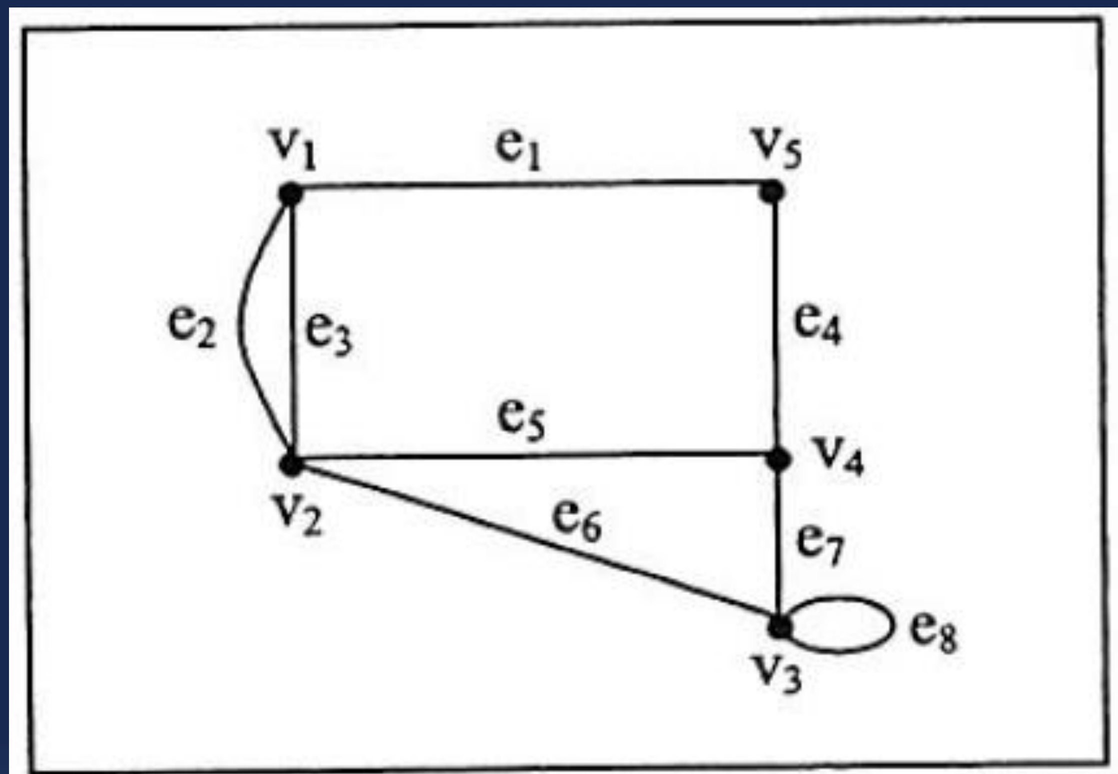
- *Os graus dos vários vértices são:*

d(v1) = 2; d(v2) = 8; d(v3) = 3; d(v4) = 1;

d(v5) = 2 ; d(v6) = 3; d(v7) = 4; d(v8) = 1 e d(v9) = 0

Exercício 1

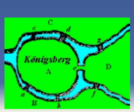
Dado o grafo abaixo:



a) Determine a quantidade de arestas do grafo

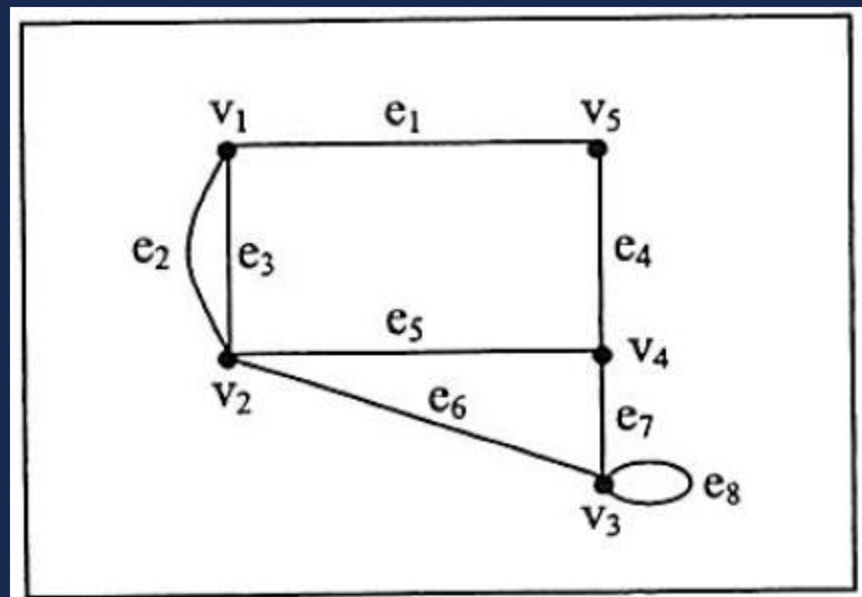
b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Exercício 1

Dado o grafo abaixo:



a) Determine a quantidade de arestas do grafo => 8

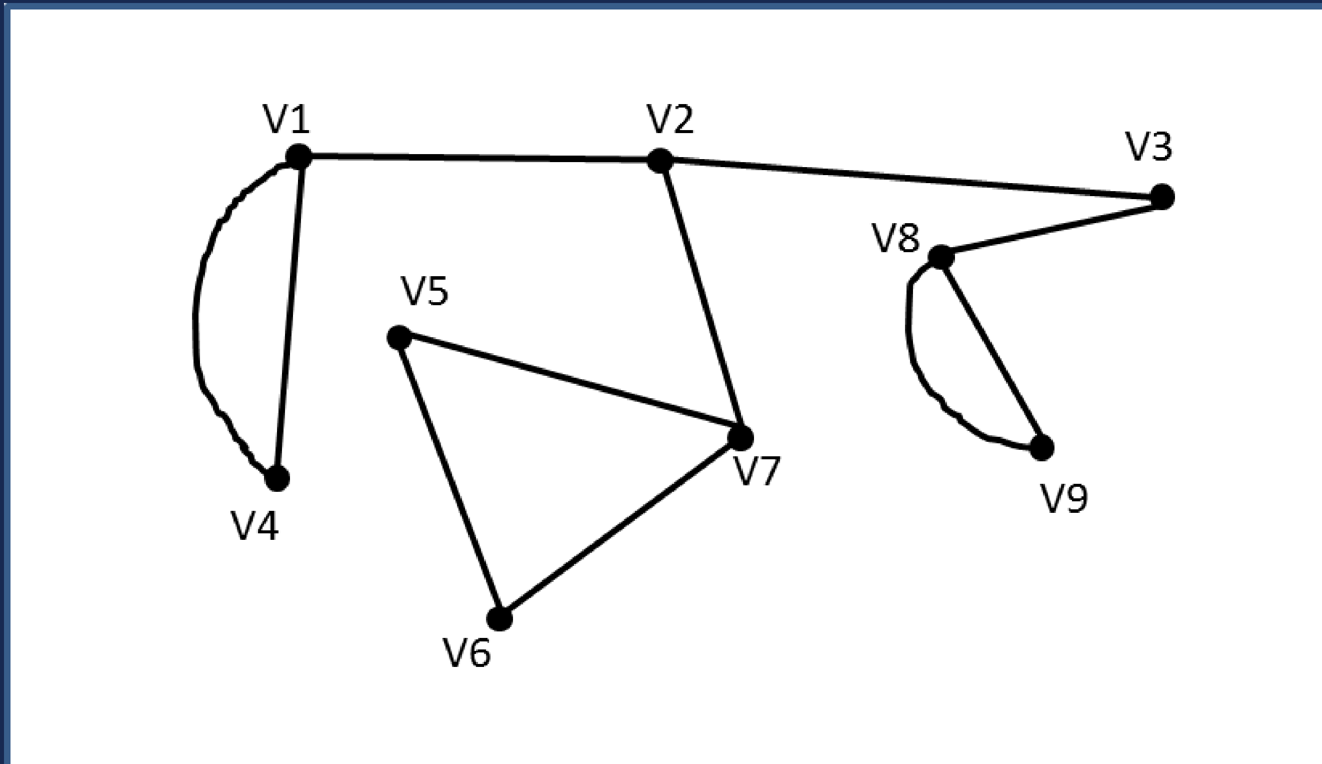
b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

=> 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 2

Dado o grafo abaixo:



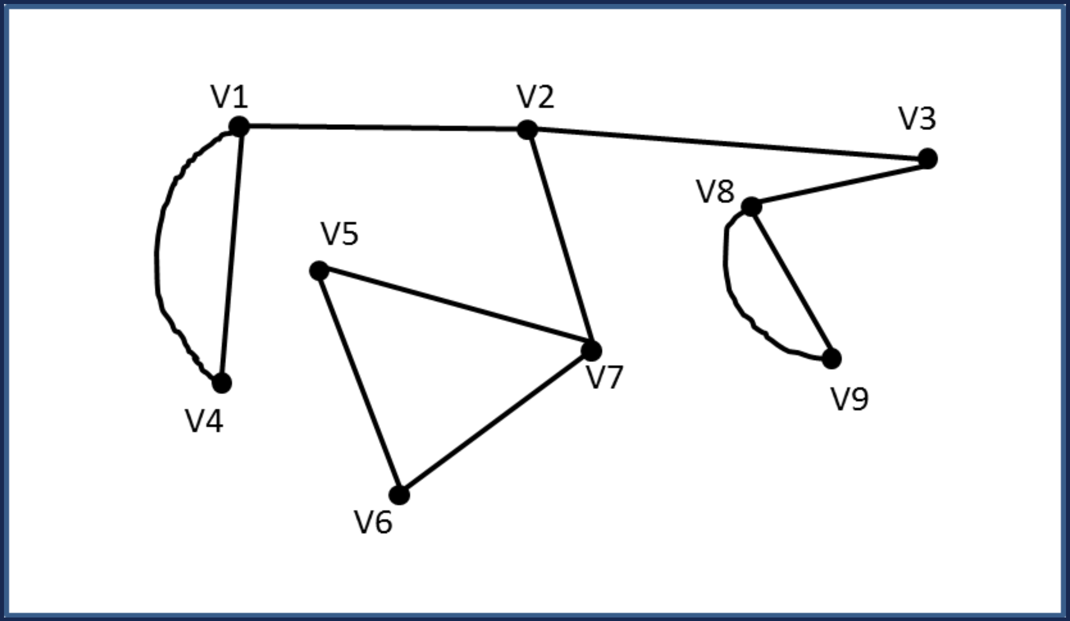
a) Determine a quantidade de arestas do grafo
b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 2

Grafos – Exemplo

Dado o grafo abaixo:



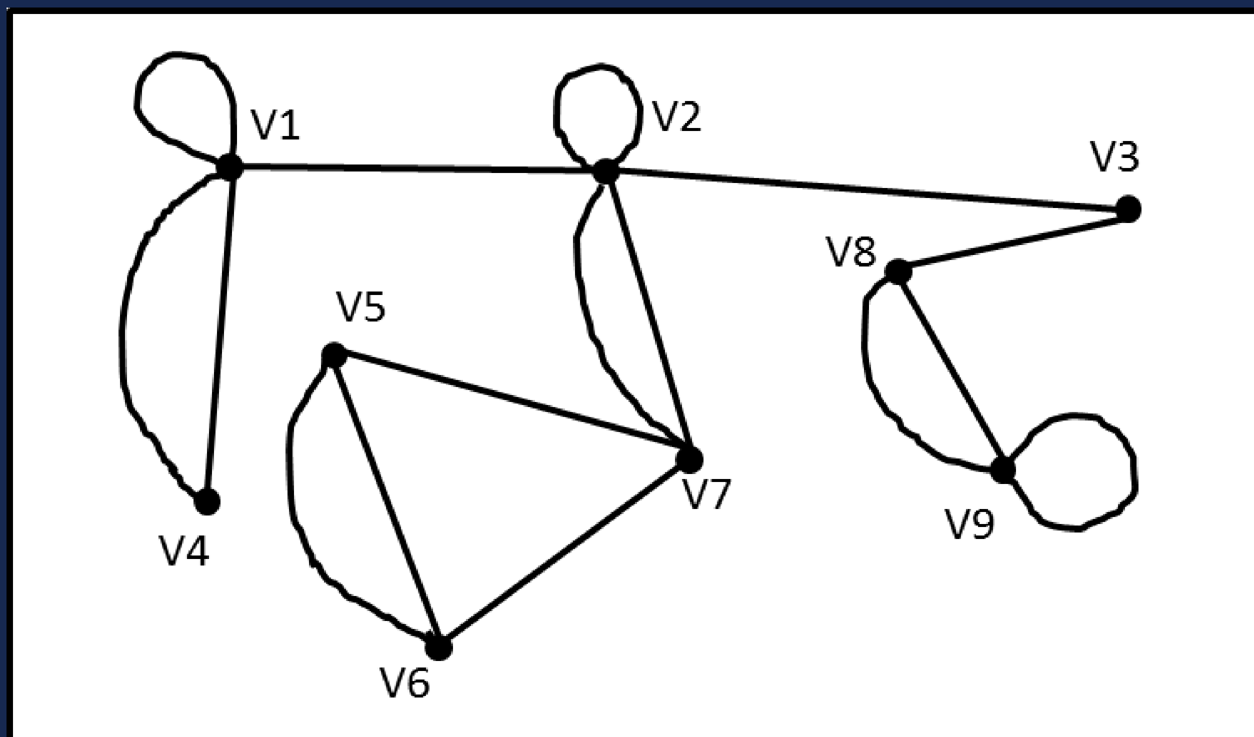
a) Determine a quantidade de arestas do grafo => 11

b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo
=> (3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2) = 22

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 3

Dado o grafo abaixo:

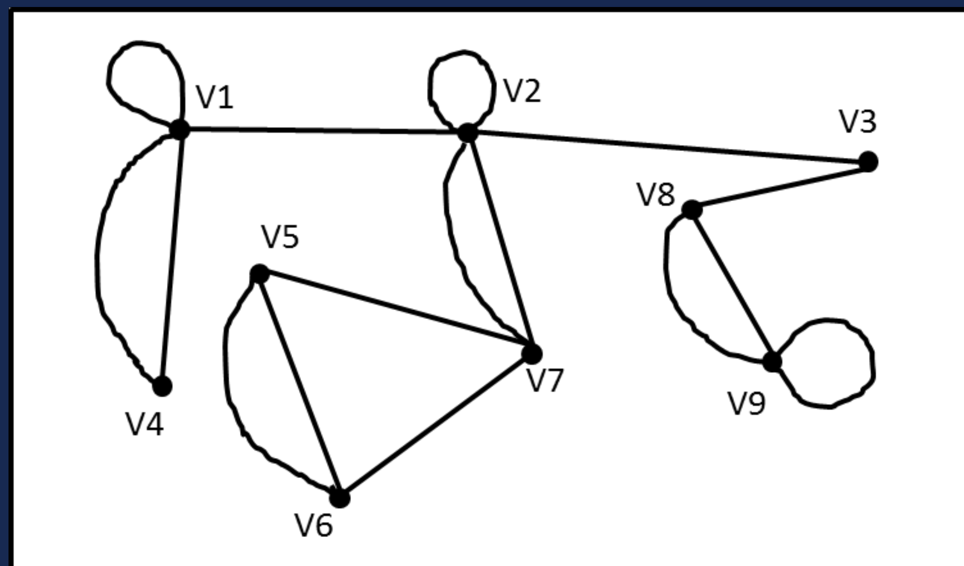


a) Determine a quantidade de arestas do grafo
b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 3

Dado o grafo abaixo:



a) Determine a quantidade de arestas do grafo => 16

b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

=> (5+ 6 +2 +2 +3 + 3 + 4 + 3 +4) = 32

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Interessante !!!

Será que existe alguma relação entre vértices e arestas?

Teorema 1

Para um grafo G = (V,E) tal que V = {v1, v2, . . .,Vn} , (|V| = n) e E = {e1, e2, ...e_m } (| E | = m), tem-se :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Esse teorema está afirmando que a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro da quantidade de arestas.

Teorema 1 – Prova

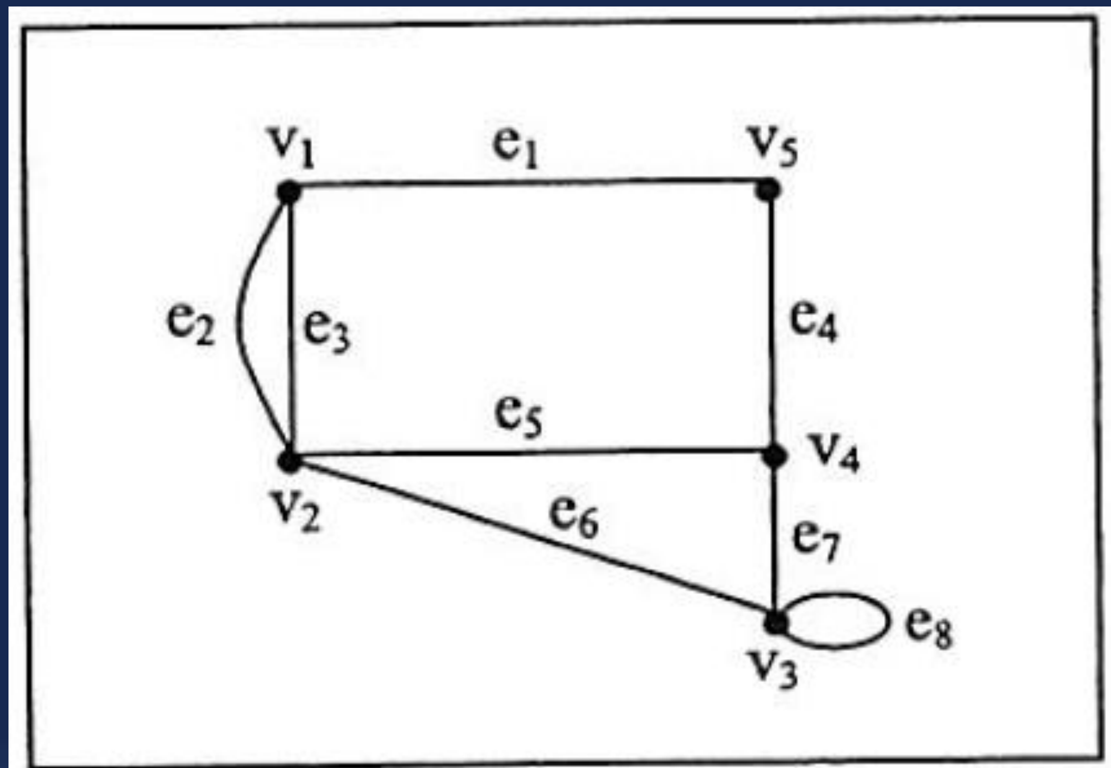
Para um grafo G = (V,E) tal que V + {v1, v2, . . .,Vn} (|V| = n) e E = {e1, e2, ...e_m } (| E | = m), tem-se :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- Uma vez que cada aresta contribui com dois graus, a soma dos graus de todos os vértices em G é igual a duas vezes o número de arestas em G. □

Exercício 4

Dado o grafo abaixo:

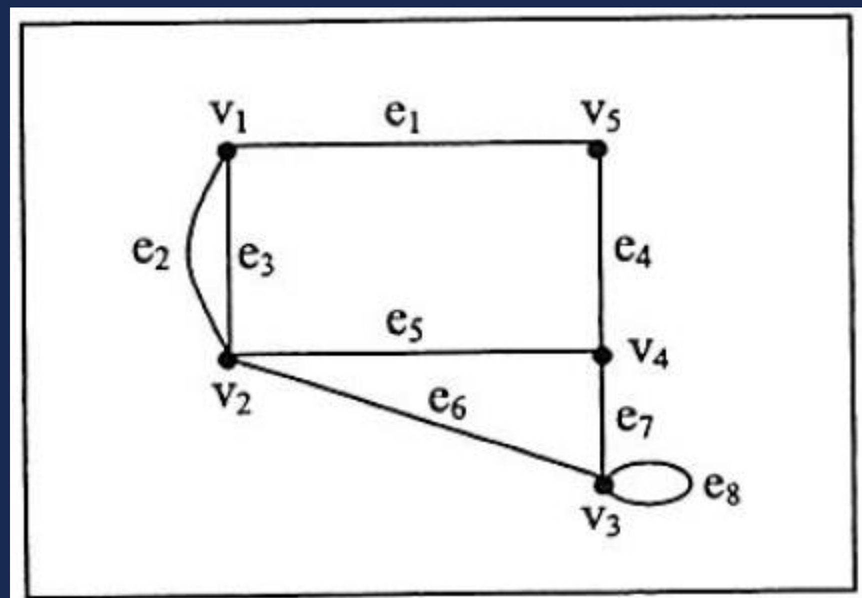


Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 4

Dado o grafo abaixo:



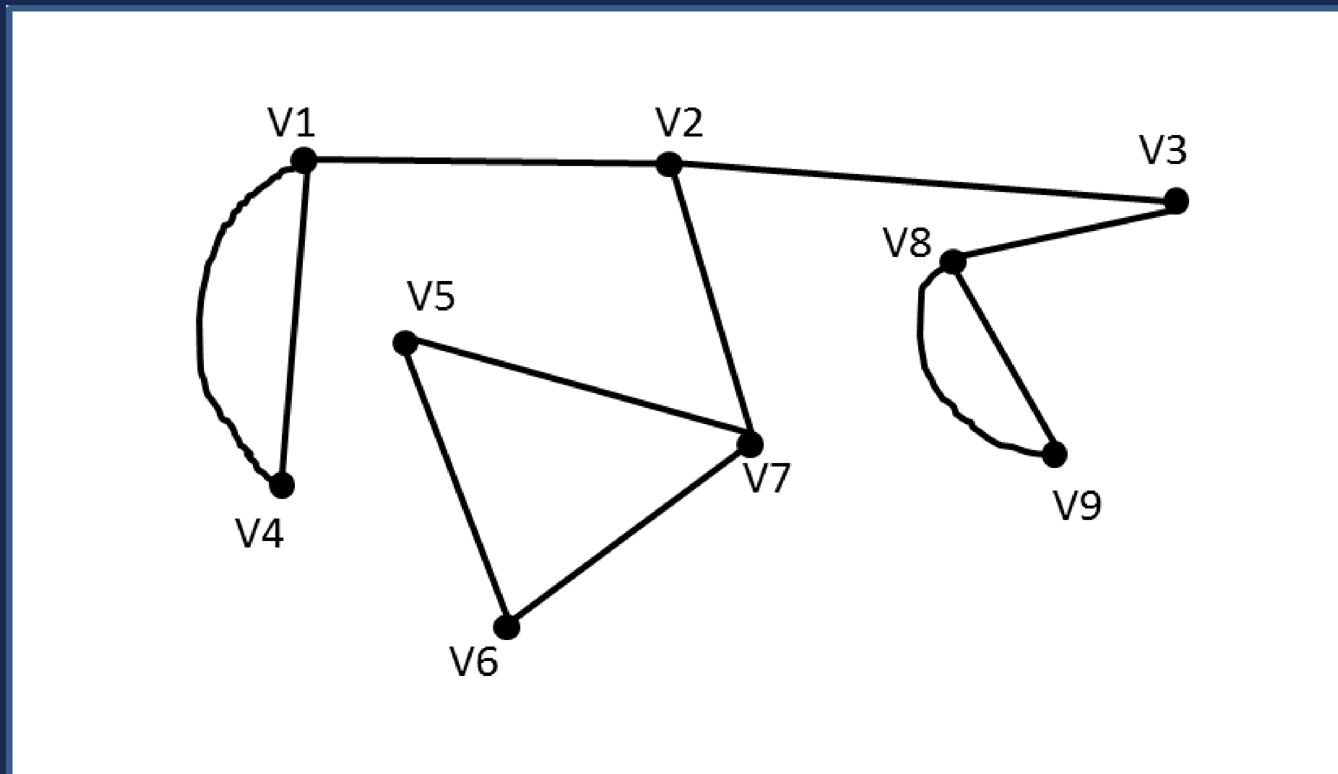
Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Ímpares => { v1, v4 } ; Portanto há 2 vértices ímpares! (3 pares)

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

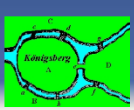
Exercício 5

Dado o grafo abaixo:



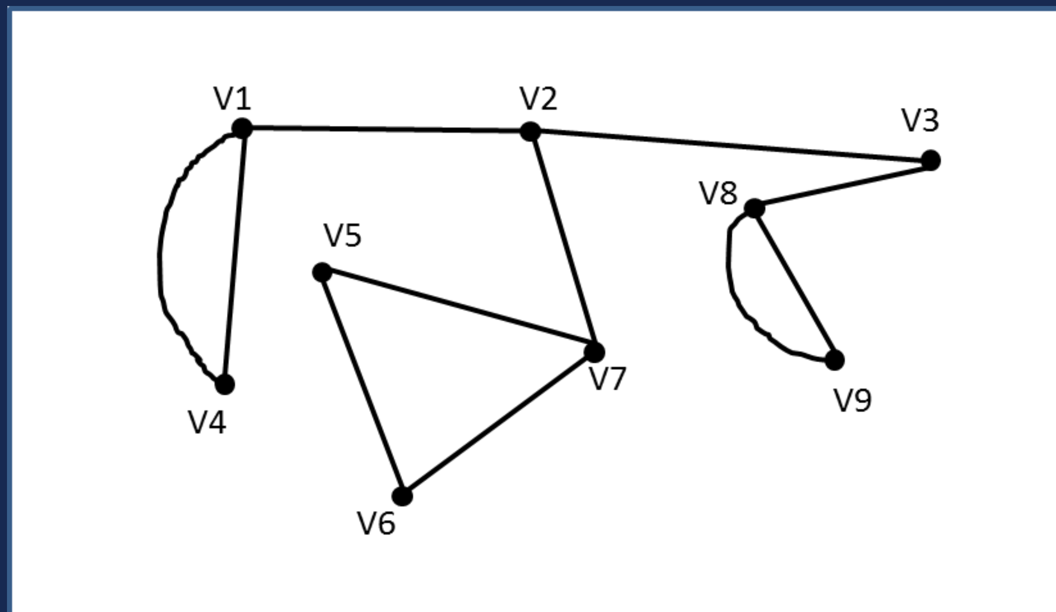
Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



Exercício 5

Dado o grafo abaixo:



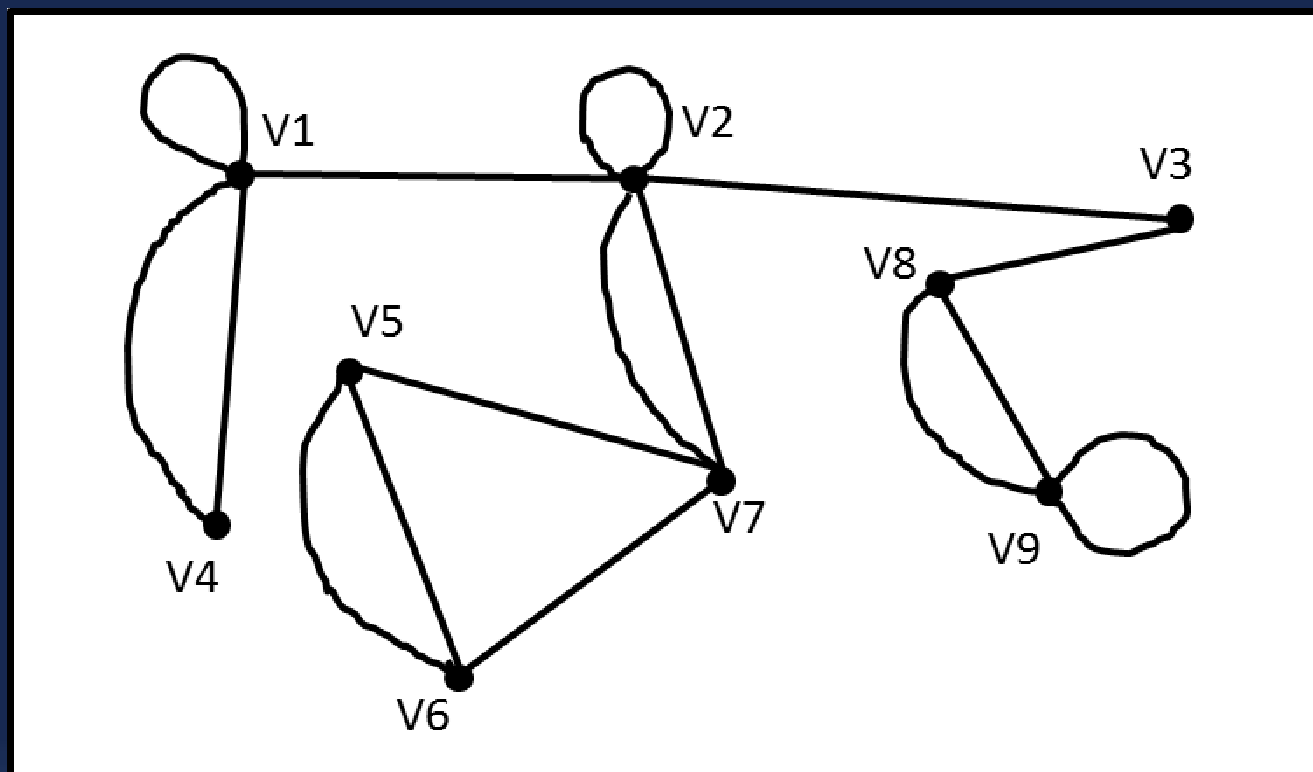
Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Ímpares => { v1, v2, v7, v8 } ; Portanto há 4 vértices ímpares! (5 pares)

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 6

Dado o grafo abaixo:



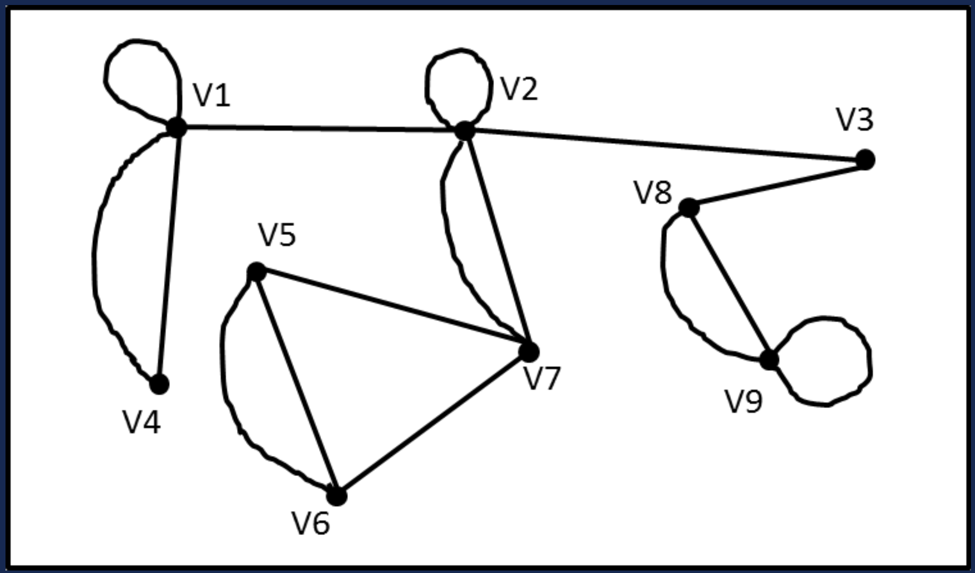
Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício 6

Grafos – Exemplo

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

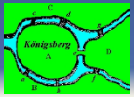
Ímpares => { v1, v5, v6, v8 } ; Portanto há 4 vértices ímpares! (5 pares)

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Será que existe alguma propriedade do número de vértices ímpares ?

Teorema 2

Em um grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{v1, v2, . . ., Vn\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e1, e2, ...e_m\}$ ($|E| = m$), o número de vértices ímpares é sempre par.



Grafos – Teorema 3.2

Teorema 3.2 Em um grafo $G = (V,E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $|E| = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = m$, o número de vértices ímpares é sempre par.

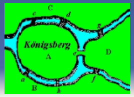
Prova: O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

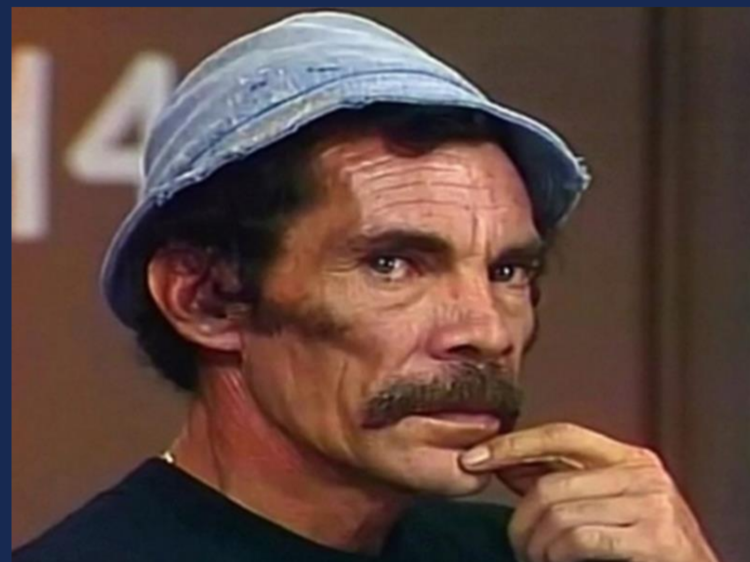
Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2m - \sum_{u \in P} d(u)$$

A diferença acima é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma $\sum_{w \in I} d(w)$ é ímpar (uma vez que cada um eles é o grau de um vértice ímpar) e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que a soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar) ♦.



O teorema 2 afirma que a quantidade de vértices ímpares é par !



Posso afirmar que a quantidade de vértices pares é sempre ímpar ?

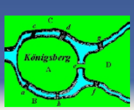
Observação

- Pelo teorema 2, a quantidade de vértices ímpares é sempre par ;

- Mas, nada se pode afirmar sobre a quantidade de vértices pares;

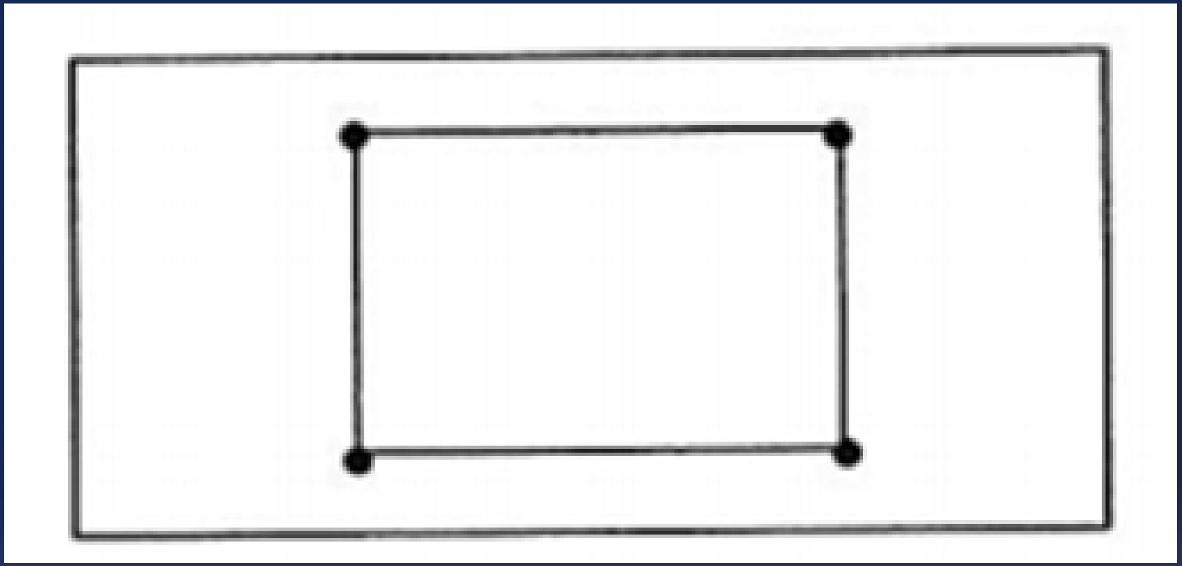
- A quantidade de vértices pares pode ser par ou ímpar.

Note que nem sempre é fato que um grafo deve ter um número ímpar de vértices pares. Considere, por exemplo, o grafo da Figura 3.8, que tem um número par (quatro) de vértices pares (vértices de grau 2).



Observação

- A quantidade de vértices pares pode ser par ou ímpar.



Grafo com número par de vértices pares

Grafo Regular

Em Teoria dos grafos, um **grafo regular** é um grafo onde cada vértice tem o mesmo número de **adjacências**, i.e. cada vértice tem o mesmo grau ou valência.

Um grafo regular com vértices de grau k é chamado um grafo k**-regular** ou grafo regular de grau k.

Definição 3.4 Seja o grafo G = (V,E), se para algum inteiro positivo k, d(v) = k para todo vértice v ∈ V, então G é chamado *k-regular*. Um *grafo regular* é um grafo que é k-regular para algum k.

Grafo Regular

Observação 3.1 Em Teoria dos Grafos, os chamados *grafos cúbicos* (3-regulares) são particularmente importantes. Note que o grafo nulo G = (V,∅) é um grafo regular de grau 0.

Exemplo 3.4 A Figura 3.9 mostra o único grafo 1-regular, dois grafos 2-regular e 2 grafos 3-regular.

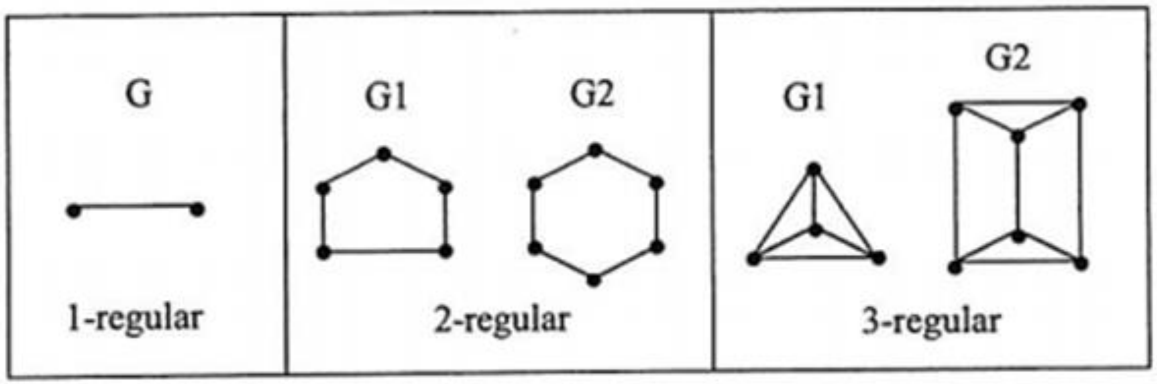


Figura 3.9 Grafos regulares.

Freqüentemente, acontece o caso de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente. Para muitos propósitos, esses dois grafos são essencialmente o mesmo grafo. A Definição 3.5 trata formalmente dessa situação.

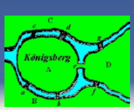
Grafos – Isomorfismo

Definição 3.5 Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são *isomorfos* se:

1. existir uma função bijetora f, do conjunto de vértices de G1, no conjunto de vértices de G2 (f:V1→V2) (f é total);
2. existir uma função bijetora g, do conjunto de arestas de G1, no conjunto de arestas de G2 (g:E1→E2) (g é total),

tal que uma aresta *e* é incidente a v_1 e v_2 em G1 se e somente se a aresta g(e) for incidente a $f(v_1)$ e $f(v_2)$ em G2. O par de funções f e g é chamado um isomorfismo de G1 em G2.

Parafraseando a Definição 3.5, diz-se que o grafo G1 = (V1,E1) é *isomorfo* ao grafo G2 = (V2,E2) se existir uma correspondência entre os conjuntos de vértices V1 e V2 e uma correspondência entre os conjuntos de arestas E1 e E2, de tal maneira que, se e_1 for uma aresta com vértices-extremidade u_1 e v_1 em G1, então a aresta correspondente e_2 em G2 (isto é, $g(e_1)$) deve ter como vértices-extremidade os vértices u_2 e v_2 em G2 que correspondem a u_1 e v_1, respectivamente; se os vértices v_1 e v_2 forem adjacentes em G1, os vértices $f(v_1)$ e $f(v_2)$ devem ser adjacentes em G2.



Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.5 Os grafos G1 e G2 mostrados na Figura 3.10 são isomorfos.

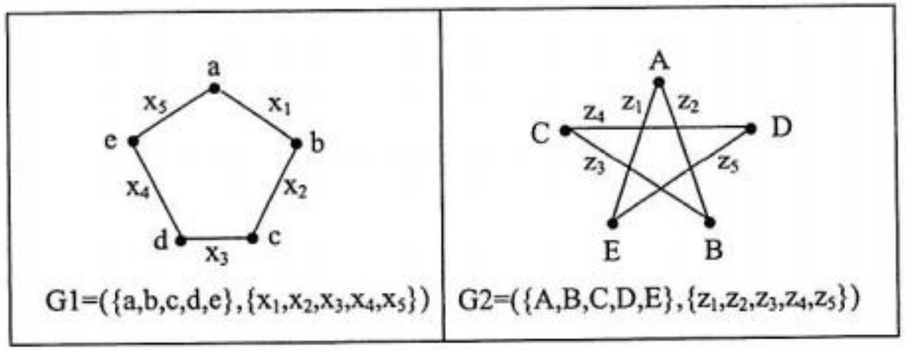


Figura 3.10 Grafos isomorfos G1 e G2.

Para os grafos G1 e G2 da Figura 3.10, um isomorfismo pode ser estabelecido como as funções bijetoras f e g, definidas a seguir, que preservam a relação de adjacência entre os vértices.

(1) f:{a,b,c,d,e}→{A,B,C,D,E}, tal que:

x	a	b	c	d	e
f(x)	A	B	C	D	E

$x_1 \leftrightarrow$ (a,b). $g(x_1)$ deve ter como imagem a aresta que une f(a) a f(b), que é a aresta (A,B) $\leftrightarrow z_2$
$x_2 \leftrightarrow$ (b,c). $g(x_2)$ deve ter como imagem a aresta que une f(b) a f(c), que é a aresta (B,C) $\leftrightarrow z_3$
$x_3 \leftrightarrow$ (c,d). $g(x_3)$ deve ter como imagem a aresta que une f(c) a f(d), que é a aresta (C,D) $\leftrightarrow z_4$
$x_4 \leftrightarrow$ (d,e). $g(x_4)$ deve ter como imagem a aresta que une f(d) a f(e), que é a aresta (D,E) $\leftrightarrow z_5$
$x_5 \leftrightarrow$ (e,a). $g(x_5)$ deve ter como imagem a aresta que une f(e) a f(a), que é a aresta (E,A) $\leftrightarrow z_1$

A função g, portanto, é definida como:

(2) $g:\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}\rightarrow\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
g(x)	z_2	z_3	z_4	z_5	z_1

Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.6 Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura 3.11, são isomorfos.

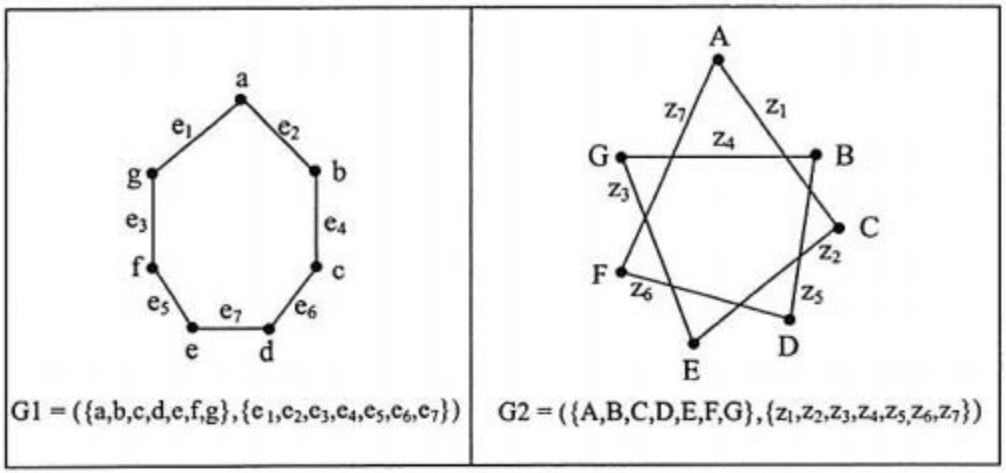


Figura 3.11 Grafos isomorfos G1 e G2.

As funções f e g que definem o isomorfismo são:

(1) $f: \{a,b,c,d,e,f,g\} \rightarrow \{A,B,C,D,E,F,G\}$, tal que:

x	a	b	c	d	e	f	g
f(x)	A	C	E	G	B	D	F

(2) $g: \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\} \rightarrow \{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7\}$

x	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_5	e_5
g(x)	z_7	z_1	z_6	z_2	z_5	z_3	z_4

Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.7 A Figura 3.12 mostra cinco exemplos (I, II, III, IV, V) de pares de grafos isomorfos.

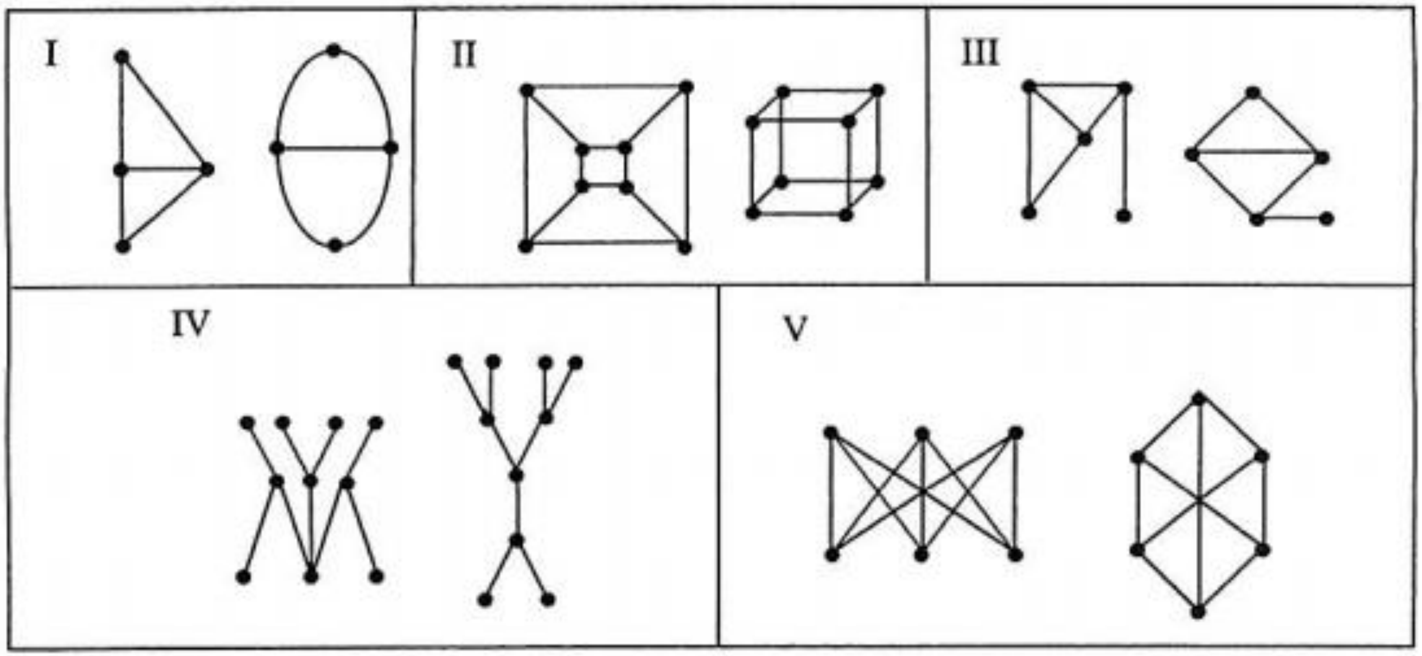


Figura 3.12 Os grafos em I, II, III, IV e V são isomorfos.

Grafos – Contra-exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.8 A Figura 3.13 mostra dois pares de grafos que não são isomorfos. Em (I), no grafo à direita, cada vértice de grau 4 é adjacente a dois outros vértices de grau 4. No grafo à esquerda, cada vértice de grau 4 é adjacente a apenas um outro vértice de grau 4. Assim, os dois grafos em questão não são isomorfos.

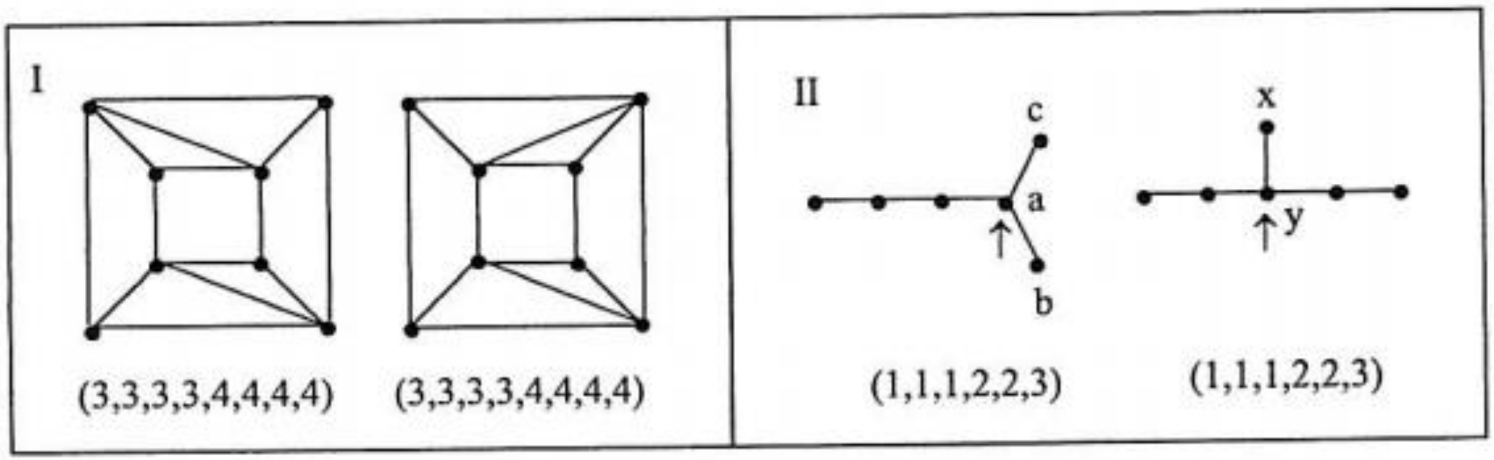


Figura 3.13 Grafos em I e II são não isomorfos.

Grafos – Isomorfismo - Observações

Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que dois grafos sejam isomorfos eles devem ter:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas; e
- um número igual de vértices com determinado grau.

Essas condições, entretanto, não são suficientes. Considere, por exemplo, os dois grafos mostrados na Figura 3.13 (II). Eles satisfazem todas as três condições e, entretanto, não são isomorfos. O fato de não serem isomorfos pode ser evidenciado considerando a seguinte argumentação: se os grafos fossem isomorfos, o vértice a do grafo à esquerda deveria corresponder ao vértice y do grafo à direita, uma vez que são os únicos dois vértices com grau três. No grafo à direita, existe apenas um vértice de grau 1 adjacente a y, que é o vértice x, enquanto no grafo à esquerda existem dois, b e c. A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo é ainda um problema não resolvido em TG. Existem, entretanto, vários algoritmos que se propõem à detecção automática de isomorfismo, como será visto posteriormente.

Observação 3.2 O problema de determinar se dois grafos são isomorfos torna-se mais difícil à medida que o número de vértices e de arestas no grafo aumentam. Por exemplo, enquanto existem apenas quatro grafos simples não isomorfos com três vértices e 11 com quatro vértices, existem 1.044 grafos simples não isomorfos com sete vértices.

Grafos – Isomorfismo – Invariantes

Definição 3.6 Sejam G1 e G2 grafos isomorfos. Uma propriedade P é um invariante sempre que G1 tiver a propriedade P e G2 também tiver esta mesma propriedade.

Com base na Definição 3.6, se os grafos G1 e G2 são isomorfos, então existem funções bijetoras entre os vértices (e entre as arestas) de G1 e G2. Assim, se G1 e G2 são isomorfos, eles têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices. Portanto, se n e m são inteiros não negativos, as propriedades "tem n vértices" e "tem m arestas" são invariantes.

Exemplo 3.11 Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura 3.17, são não isomorfos, uma vez que o invariante "têm o mesmo número de arestas" não é verificado.

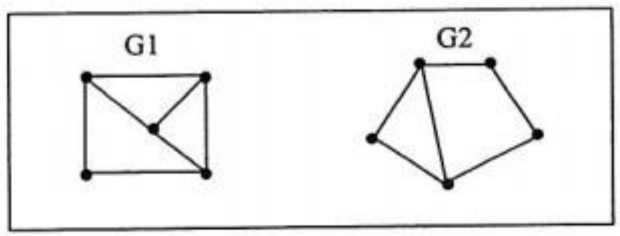
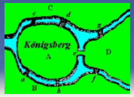


Figura 3.17 G1 tem sete arestas, G2 tem seis arestas e "tem m arestas" é invariante. Portanto, G1 e G2 não são isomorfos.

Observação 3.4 Sejam G1 e G2 dois grafos, a propriedade "os grafos têm o mesmo número de vértices com grau k (k > 0, inteiro)" é um invariante.



Grafos – Isomorfismo – Invariantes

Exemplo 3.12 Os grafos G1 e G2 da Figura 3.19 são não isomorfos.

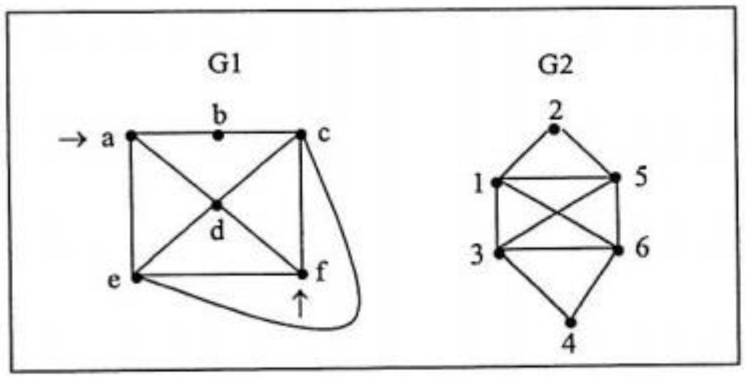


Figura 3.19 Apesar de G1 e G2 terem o mesmo número de vértices e arestas, G1 tem vértices de grau 3, e G2 não tem vértices de grau 3. G1 e G2 não são isomorfos.

Grafo Completo

Definição 3.7 Um grafo *completo* de ordem n, notado por K_n, é um grafo que tem n vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

A Figura 3.20 mostra os grafos completos de K_1 até K_6.

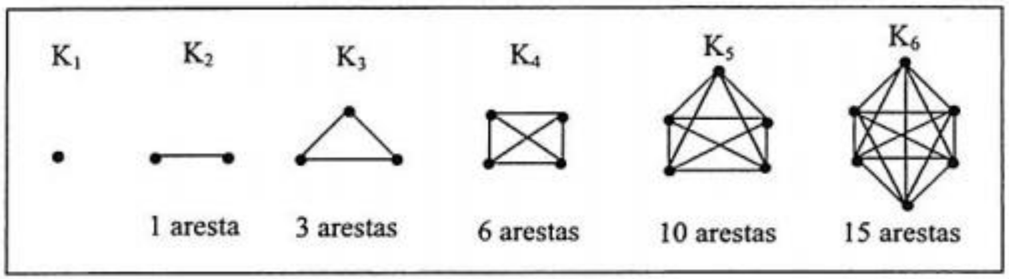


Figura 3.20 Grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 e K_6.

Observação 3.6 Obviamente, grafos completos são grafos simples, ou seja, não têm arestas paralelas ou *loops*. Uma vez que existem $\binom{n}{2}$ possíveis pares em n vértices, o grafo completo K_n tem exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Observação 3.7 Note que todo grafo completo com n vértices é um grafo $(n-1)$-regular.

Grafo Bipartido

Definição 3.8 Seja G = (V,E) um grafo, se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \varnothing$), de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y, então G é chamado *bipartido*. A partição $V = X \cup Y$ é chamada *bipartição* de G.

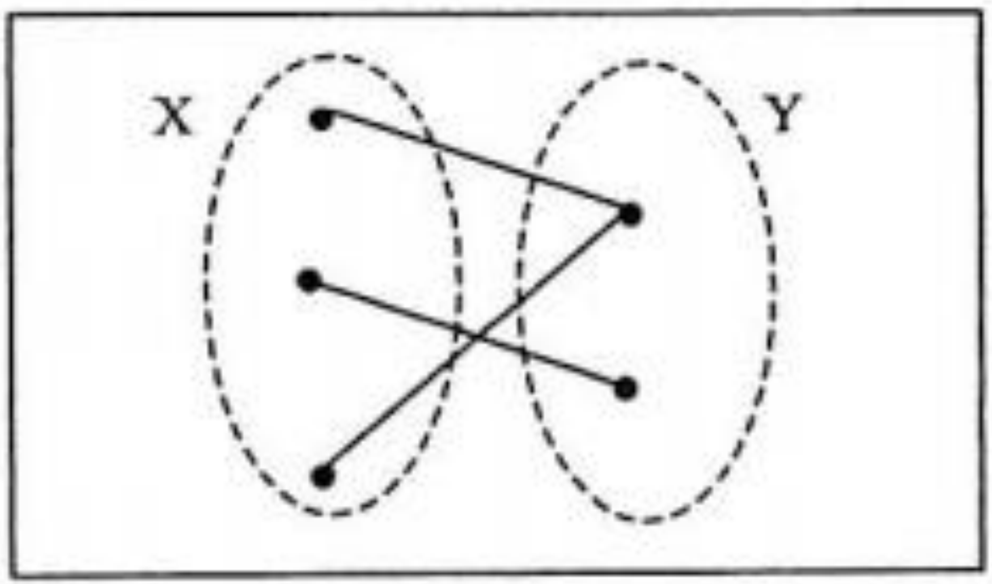
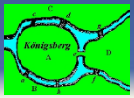


Figura 3.21 Grafo bipartido.



Grafo Bipartido

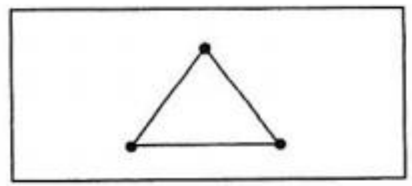


Figura 3.22 Grafo não bipartido.

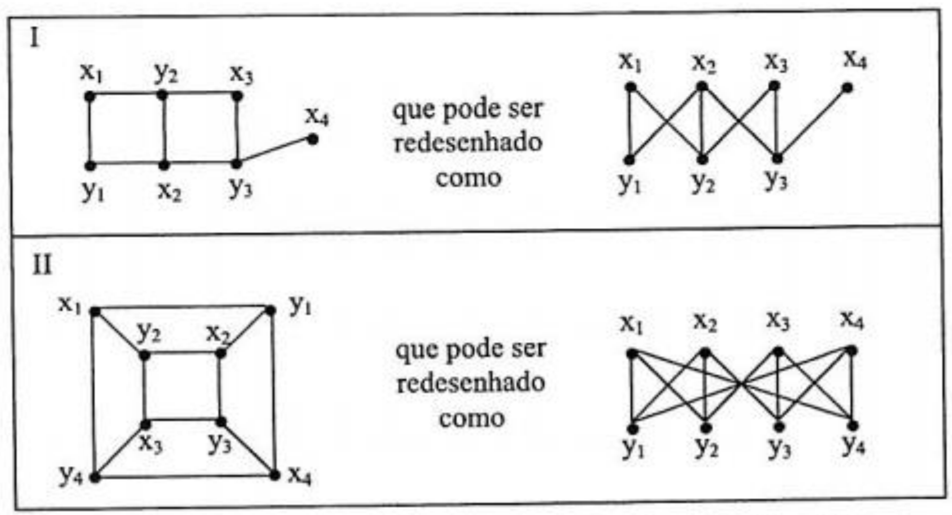


Figura 3.23 Os grafos em I e II são exemplos de grafos bipartidos.

Grafo Bipartido Completo

Definição 3.9 Um *grafo bipartido completo* é um grafo simples bipartido G, com a bipartição $V = X \cup Y$, em que todo vértice em X está unido a todo vértice em Y. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$. Para padronizar, assume-se que $m \leq n$. Note que $K_{n,n}$ é um grafo regular de grau n.

Exemplo 3.13 A Figura 3.24 mostra os diagramas de $K_{m,n}$, para $m = 1,2,3$ e $n = m, m+1, m+2$.

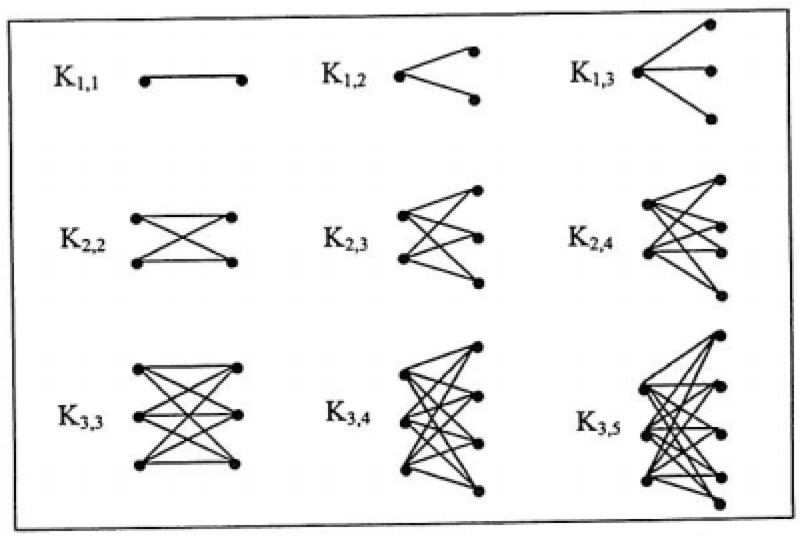
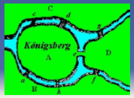


Figura 3.24 $K_{m,n}$, para $m = 1,2,3$ e $n = m, m+1, m+2$.



Subgrafo

Definição 3.10 Sejam dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2). Diz-se que G2 *é subgrafo de* G1 se V2 $\subseteq$ V1 e E2 $\subseteq$ E1, e para toda aresta e $\in$ E2, se e for incidente a v_1 e v_2, então $v_1, v_2 \in$ V2. Nesse caso, diz-se também que G1 *é supergrafo de* G2.

Exemplo 3.14 A Figura 3.28 mostra um grafo e alguns de seus possíveis subgrafos.

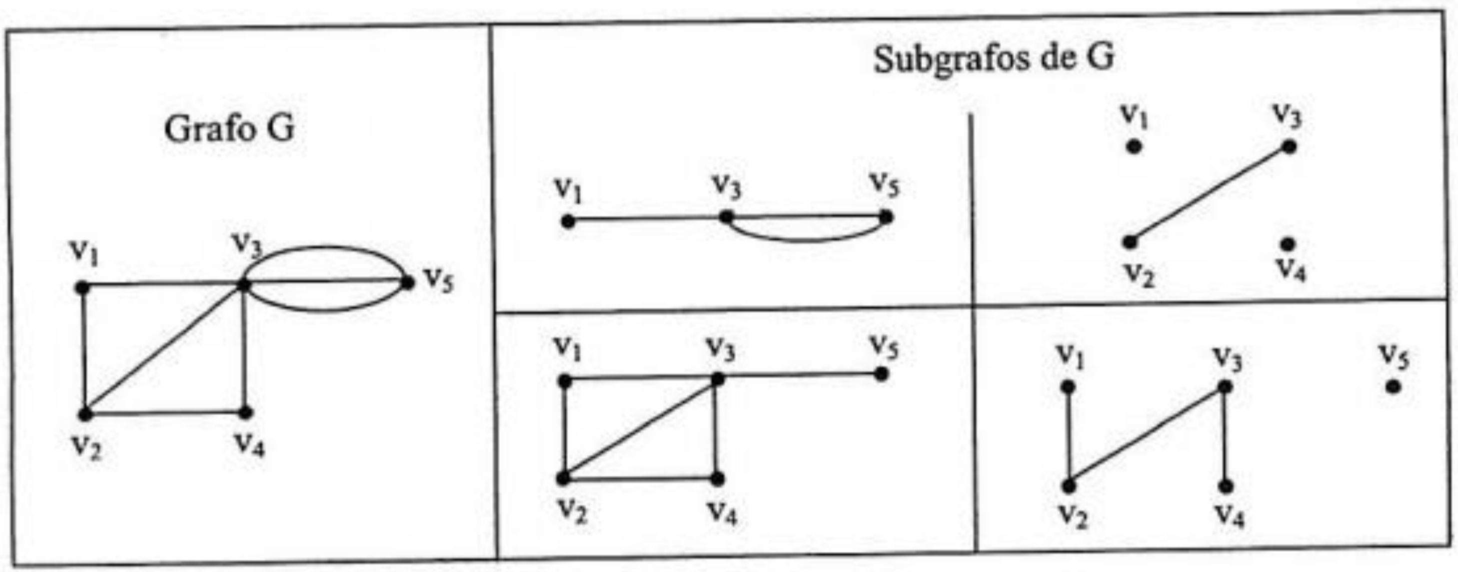


Figura 3.28 Grafo G e quatro possíveis subgrafos.

Subgrafo

Exemplo 3.15 A Figura 3.29 mostra um grafo G e um grafo G1, que é subgrafo de G. Mostra também o grafo G2, que não é subgrafo de G.

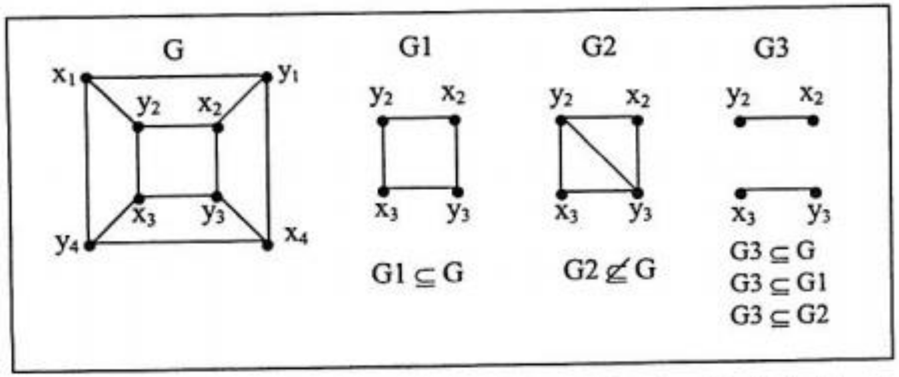


Figura 3.29 Grafo G1 é subgrafo do grafo G, mas o grafo G2 não é subgrafo de G. O grafo G3 é subgrafo de G1, o que o torna um subgrafo de G também.

Note que:

- Todo grafo é seu próprio subgrafo.
- Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G
- Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G.
- Uma única aresta de G, com seus vértices-extremidade, é também um subgrafo de G.

FIM