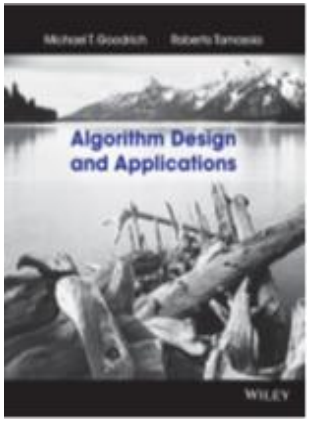
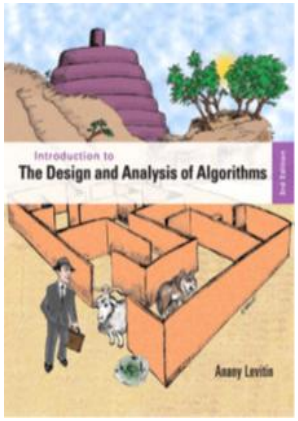
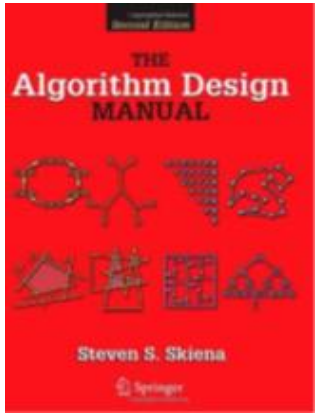
Unidade 22– Técnicas de Projeto de Algoritmos

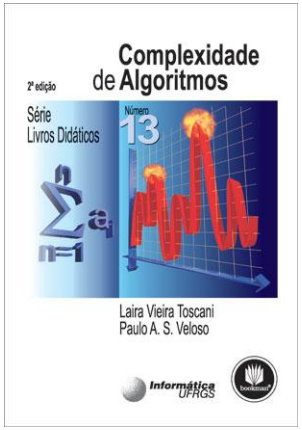
Bibliografia

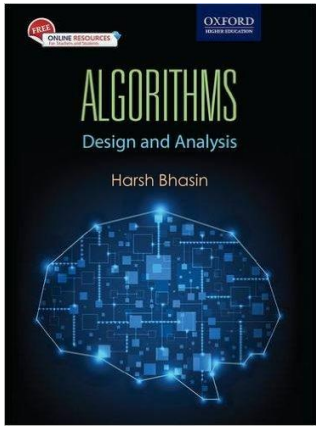
- Algorithm Design and Applications – Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia, Wiley, 2015
- Introduction to the Design and Analysis of Algorithms – Anany Levitin, Pearson, 2012
- The Algorithm Design Manual – Steven S. Skiena, Springer, 2008
- Complexidade de Algoritmos – Série Livros Didáticos – UFRGS
- Algorithms – Design and Analysis – Harsh Bhasin – Oxford University Press - 2015











Técnica Força Bruta

- É uma técnica trivial de soluções de problemas, porém muito geral, que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos da solução e checar cada um para saber se ele satisfaz ao enunciado do problema.

Técnica Força Bruta

Exemplo 1 – Máximo valor de uma lista

```
package br.maua;

public class ForcaBruta_1 {

  public static void main(String[] args) {
        int[] lista = { 4,6,1,9,5 } ;
        System.out.println("Maximo valor da lista: " + maximo(lista));
  }

  public static Integer maximo (int[] lista) {

  int maximo = lista[0];

  for (int i = 1; i < lista.length; i++)
        if( maximo < lista[i] )
          maximo = lista[i];
        return maximo;
  }
}
```

Técnica Força Bruta

Exemplo 2 – Soma dos valores de uma lista

```
package br.maua;

public class ForcaBruta_2 {

  public static void main(String[] args) {
          int[] lista = { 4,6,1,9,5 } ;
          System.out.println(" Soma dos valores da lista: " + soma(lista));
  }

  public static Integer soma (int[] lista) {

  int soma = lista[0];

  for (int i = 1; i < lista.length; i++)
        soma = soma + lista[i];
        return soma;
  }
}
```

Técnica Força Bruta

Exemplo 3 – Cálculo do Fatorial

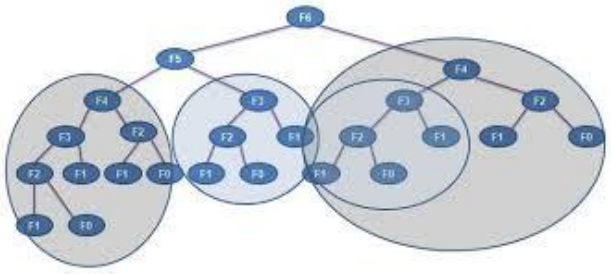
```
package br.maua;

public class ForcaBruta_3 {

  public static void main(String[] args) {
        int n = 10;
        System.out.println("Fatorial de " + n + ": " + fat(n));
  }

  public static Long fat (int n) {

       Long fat = 1L;

       for (int i = 2; i <= n; i++)
             fat = fat * i;
       return fat;
  }
}
```

Técnica Divisão e Conquista

- É provavelmente uma das mais conhecidas técnicas de projeto de algoritmos;
- Algoritmos **divide-and-conquer** funcionam de acordo com um plano geral.

Técnica Divisão e Conquista

- Dado um problema com uma entrada grande, quebra-se a entrada em porções menores (**DIVISÃO**);
- Resolve-se cada porção separadamente (**CONQUISTA**);
- Combinam-se os resultados.



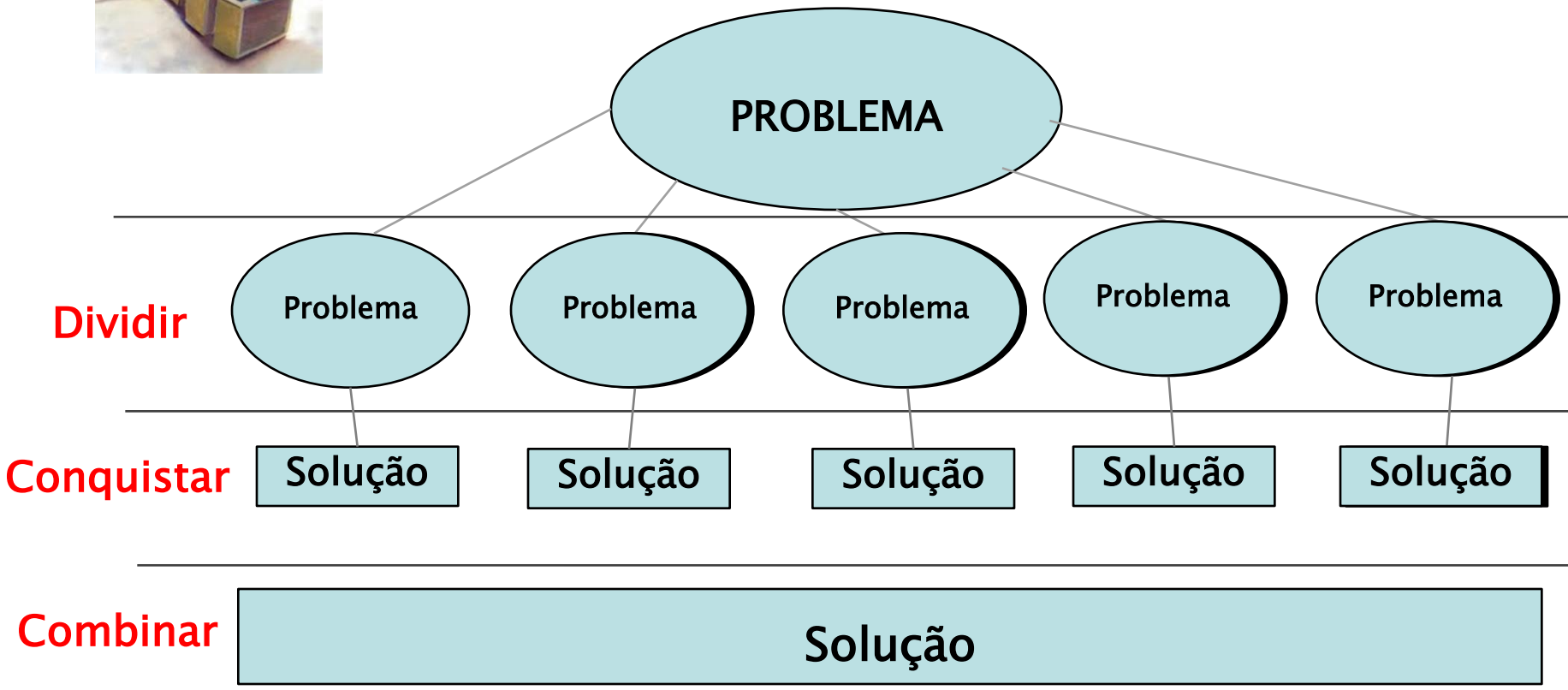
Técnica Divisão e Conquista

- Muitos algoritmos úteis são recursivos em sua estrutura;
- Para resolver um dado problema, eles chamam a si recursivamente uma ou mais vezes para lidar com problemas intimamente relacionados;
- Problemas são desmembrados em vários sub-problemas que são semelhantes ao problema original, mas menores em tamanho;
- Resolvem-se de forma recursiva os sub-problemas e depois combinam suas soluções com o objetivo de criar uma solução para o problema original.

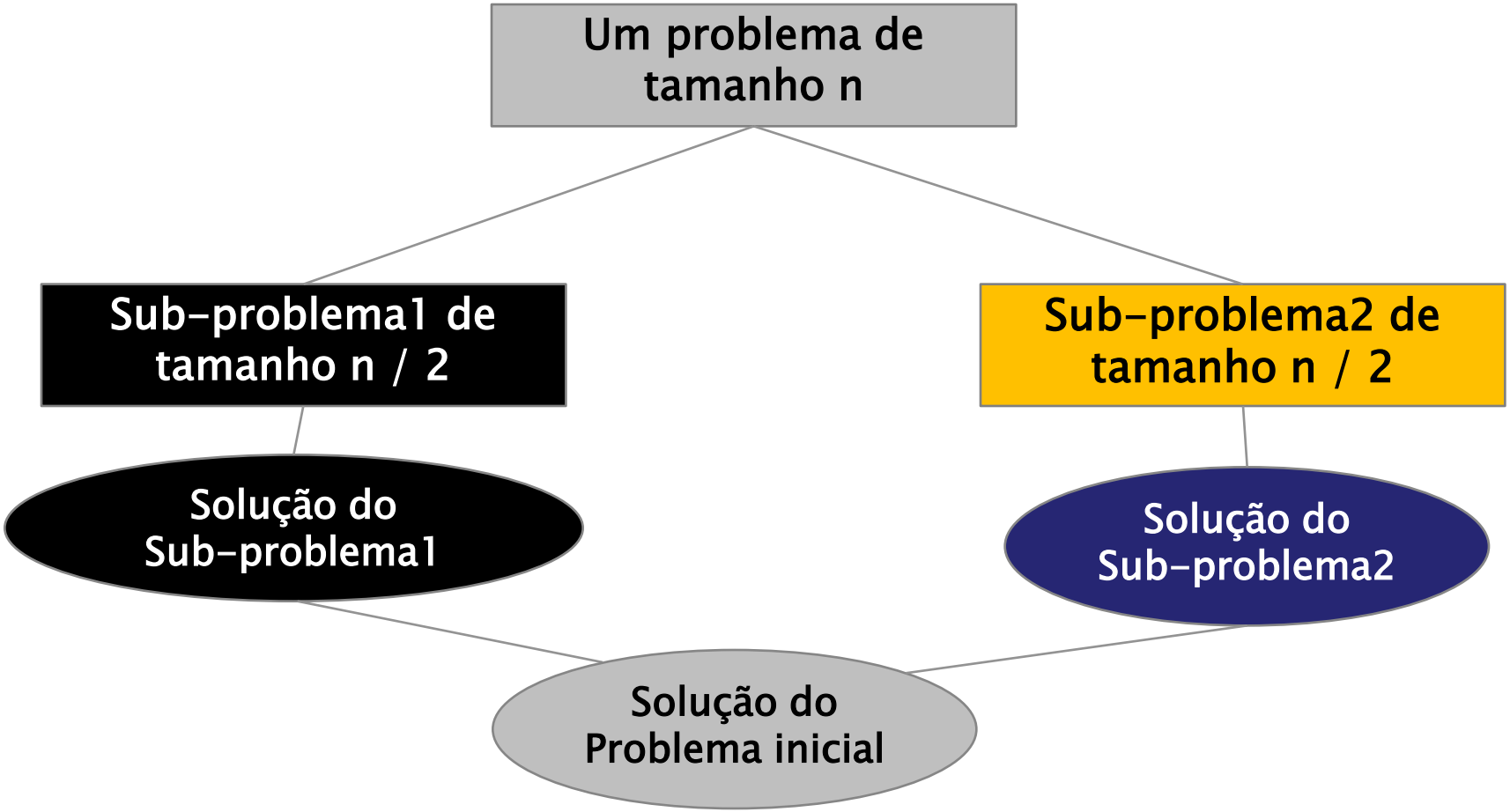
Passos - Divisão e Conquista

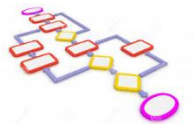
- **Dividir** o problema em um determinado número de sub-problemas;
- **Conquistar** os subproblemas, resolvendo-os recursivamente. Porém, se os tamanhos dos subproblemas forem pequenos o bastante, basta resolver os subproblemas de forma direta;
- **Combinar** as soluções dadas aos subproblemas, a fim de formar a solução para o problema original.

Passos do Algoritmo Divisão e Conquista



Técnica Divisão e Conquista

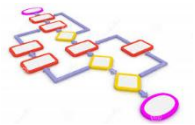




Técnica Divisão e Conquista
Algoritmo Genérico

DivisãoeConquista(x)

```
if x é pequeno ou simples do
        return resolver(x)
else
        decompor x em conjuntos menores x0, x1, … xn
        for i ← 0 to  n  do
                yi ← DivisãoeConquista(xi)
                i ← i + 1
        combinar yi's

return y
```

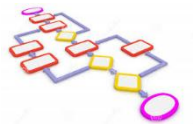


Técnica Divisão e Conquista

Exemplo 1- Máximo elemento de uma lista

O problema consiste em encontrar o maior elemento de um array a [1 .. n]

3	8	1	7	6	2	9	4



Exemplo 1- Máximo elemento de uma lista
Solução – Força Bruta

```
for (int i = 1; i < lista.length; i++)
        if( maximo < lista[i] )
          maximo = lista[i];
return maximo;
```

Técnica Divisão e Conquista
Exemplo 1 - Máximo elemento de uma lista - Pseudocódigo

```
maximo (lista, int inicio, int fim)

        if ( inicio = fim )
            retorna lista(inicio)

        meio = ( inicio + fim ) / 2;

        m1 = maximo(lista, inicio, meio)
        m2 = maximo(lista, meio+1, fim);

        if (m1 >= m2)
                retorna m1;
            else
                retorna m2;
```

Técnica Divisão e Conquista

Exemplo 1 - Máximo elemento de uma lista

```
package br.maua;

public class DivConquista_1 {

 public static void main(String[] args) {

        int[] lista = { 4,133,1,9,5,99,2 } ;
        int indiceInicio = 0;
        int indiceFim = lista.length-1;

        System.out.println("Maximo valor da lista: "
            + maximo(lista, indiceInicio, indiceFim));
 }
```

Técnica Divisão e Conquista
Exemplo 1 - Máximo elemento de uma lista

```
public static Integer maximo (int[] lista, int indiceInicio, int indiceFim) {

  if (  indiceInicio == indiceFim )
        return lista[indiceInicio] ;

  int indiceMetade = ( indiceInicio + indiceFim ) / 2;

  Integer m1 = maximo(lista, indiceInicio, indiceMetade);
  Integer m2 = maximo(lista, indiceMetade+1, indiceFim);

  if (m1 >= m2)
        return m1;
  else
        return m2;
 }
}
```

Técnica Divisão e Conquista
Exemplo 2 – Soma dos valores de uma lista

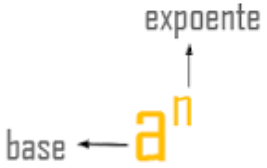
```
package br.maua;

public class DivConquista_2 {

  public static void main(String[] args) {

     int[] lista = { 4,6,1,9,5,100 } ;

     int indiceInicio = 0;
     int indiceFim = lista.length-1;

     System.out.println("Soma dos valores da lista: " +
        soma(lista, indiceInicio, indiceFim));
  }
```

Técnica Divisão e Conquista
Exemplo 2 – Soma dos valores de uma lista

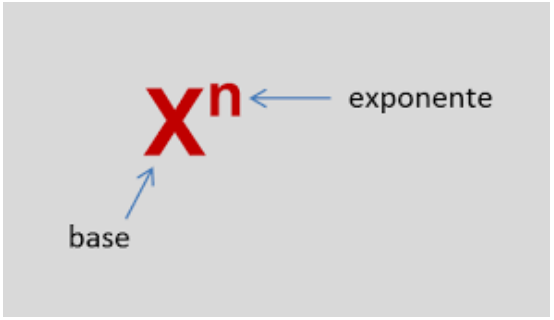
```
public static Integer soma (int[] lista, int indiceInicio, int indiceFim) {

   if (indiceInicio == indiceFim )
        return lista[indiceInicio];

   int indiceMetade = (indiceInicio + indiceFim)/2;

   int s1 = soma(lista, indiceInicio, indiceMetade);

   int s2 = soma(lista, indiceMetade+1, indiceFim);

   return (s1 + s2);
  }
}
```

Técnica Divisão e Conquista

Exemplo 3 - Exponenciação



O problema consiste em computar x^n.



Exemplo 3

Solução Força Bruta - Exponenciação

```
Pow(a, n)
      p ← a

      for i ← 2 to n do
            p ← p × a
      return p
```

Exemplo 3

Solução Força Bruta – Exponenciação

```
package br.maua;

public class ForcaBruta_4 {

  public static void main(String[] args) {
    int  x = 3;
    int n = 4;
    System.out.println("Potencia de " + x + " elevado a " + n + " :  " +  pot(x,n));
  }

  public static Long pot (int x , int n) {

    long   pot  = x;

    for (int i = 2; i <= n; i++)
         pot = pot * x;

     return pot;
  }
}
```

Solução Divisão e Conquista

Exemplo 3 – Exponenciação

```
Pow(a, n)

        if n=0 then
                return 1
        if n é par then
                return Pow(a, n/2) × Pow(a, n/2)
        else
                return Pow(a,(n-1)/2) × Pow(a, (n-1)/2) × a
```

Exemplo 3

Solução Divisão e Conquista - Exponenciação

```
package br.maua;

public class DivConquista_3 {

  public static void main(String[] args) {

        int  x = 2;
        int  n = 5;

        System.out.println("Potencia de " + x + " elevado a " +
        n + " :  " +  pot(x,n));

  }
```

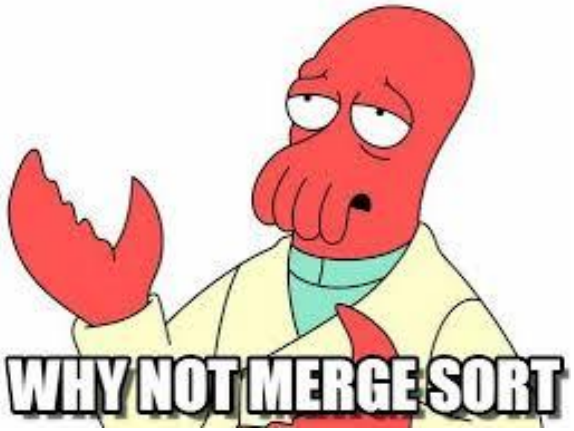
Exemplo 3
Solução Divisão e Conquista - Exponenciação

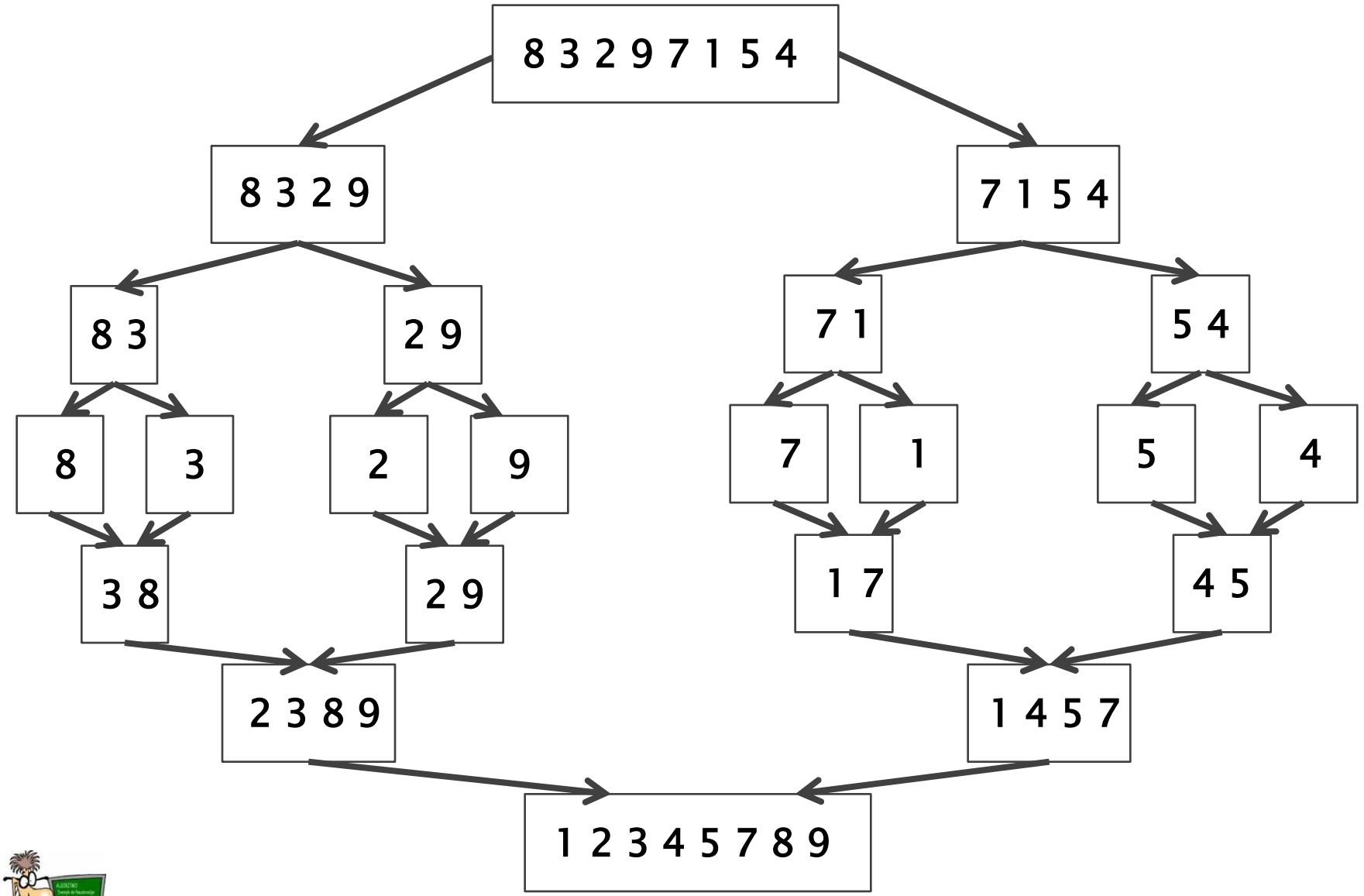
```
public static Long pot (int x , int n) {

 if (n == 0) return 1L;

 if (n%2 == 0)

        return (pot (x, n/2 ) * pot(x,n/2) );

 else

        return (pot (x, (n-1)/2 )  * pot(x, (n-1)/2) * x ) ;
  }
}
```

Mergesort

- ✓ É um perfeito exemplo de uma aplicação da técnica **Divide-and-Conquer**.

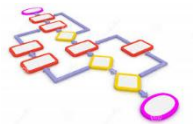
- ✓ O algoritmo classifica um dado array A[0..n-1] dividindo-o em duas metades A[0 . . [n/2]-1] e A[[n/2] . . n-1], sorteando cada uma delas de forma recursiva, e em seguida efetua um merge das partes sorteadas.




8 3 2 9 7 1 5 4
8 3 2 9
7 1 5 4
8 3
2 9
7 1
5 4
8
3
2
9
7
1
5
4
3 8
2 9
1 7
4 5
2 3 8 9
1 4 5 7
1 2 3 4 5 7 8 9

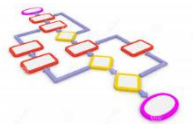
Mergesort - Implementação

```
package br.maua;

public class MergeSort {

  public static int[] vetor = {8,3,2,9,7,1,5,4};

  static int n = vetor.length;

  public static void main(String[] args) {

        Sort(0,n-1);
        for (int i=0;i<n;i++ )
              System.out.println("vetor[" + i + "] = " + vetor[i]);
  }
```



Mergesort - Implementação

```
public static void Sort(int inicio, int fim) {

        if (inicio < fim) {

                int meio = (inicio + fim) / 2;

                Sort(inicio, meio);
                Sort(meio + 1, fim);
                Merge(inicio, meio, fim);
        }
}
```



Mergesort - Implementação

```
public static void Merge(int inicio, int meio, int fim) {

        int n = fim - inicio + 1;

        int[] temp = new int[n];
        int tamanho = temp.length;

        for (int posicao = 0; posicao < tamanho; posicao++) {
                temp[posicao] = vetor[inicio + posicao];
}
```

Mergesort - Implementação

```
int i = 0;
int j = meio - inicio + 1;

for (int posicao = 0; posicao < tamanho; posicao++) {

  if (j <= n- 1 )
   if ( i <= meio - inicio)
          if (temp[i] < temp[j] )
                  vetor[inicio + posicao] = temp[i++];
          else vetor[inicio + posicao] = temp[j++];
   else vetor[inicio + posicao] = temp[j++];
  else vetor[inicio + posicao] = temp[i++];
 }

 }

}
```

Mergesort - Eficiência

- Prova-se que a ordem de complexidade do algoritmo **MergeSort** é:

$$O(n) = n * \log(n)$$

Programação Dinâmica

- A técnica foi inventada pelo matemático Richard Bellman, na década de 50, como um método geral de otimização de processos de decisão;
- Assim, a palavra "**programação**" nesta técnica se refere à planejamento ao invés de programação de computadores;
- Recentemente a técnica foi incorporada na Computação.

Programação Dinâmica - Introdução

- A programação dinâmica, como o método **divisão e conquista**, resolve problemas **combinando** as soluções para subproblemas;
- Como vimos, na técnica **Divisão e Conquista**, particiona-se o problema em **subproblemas independentes**, resolve-se os subproblemas recursivamente, e então combinam-se suas soluções para se resolver o problema original;
- Em constraste, a **Programação Dinâmica** é aplicável quando os subproblemas **não** são independentes, isto é, quando os subproblemas compartilham subproblemas.
- Resolve-se cada subproblema somente uma vez e grava o resultado em uma **tabela**, evitando-se assim o trabalho de se recalcular a resposta toda vez que o **subproblema** é encontrado.

Um exemplo simples: Fibonacci

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Um exemplo simples: Fibonacci

- Os números de **Fibonacci** são definidos pela função:

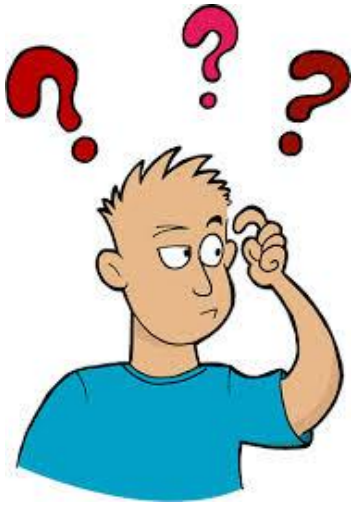
$$F(0) = 0, n = 0$$

$$F(1) = 1, n = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), n > 1$$

- Definidos em termos de uma função recursiva.

Como implementar a Série de Fibonacci ?



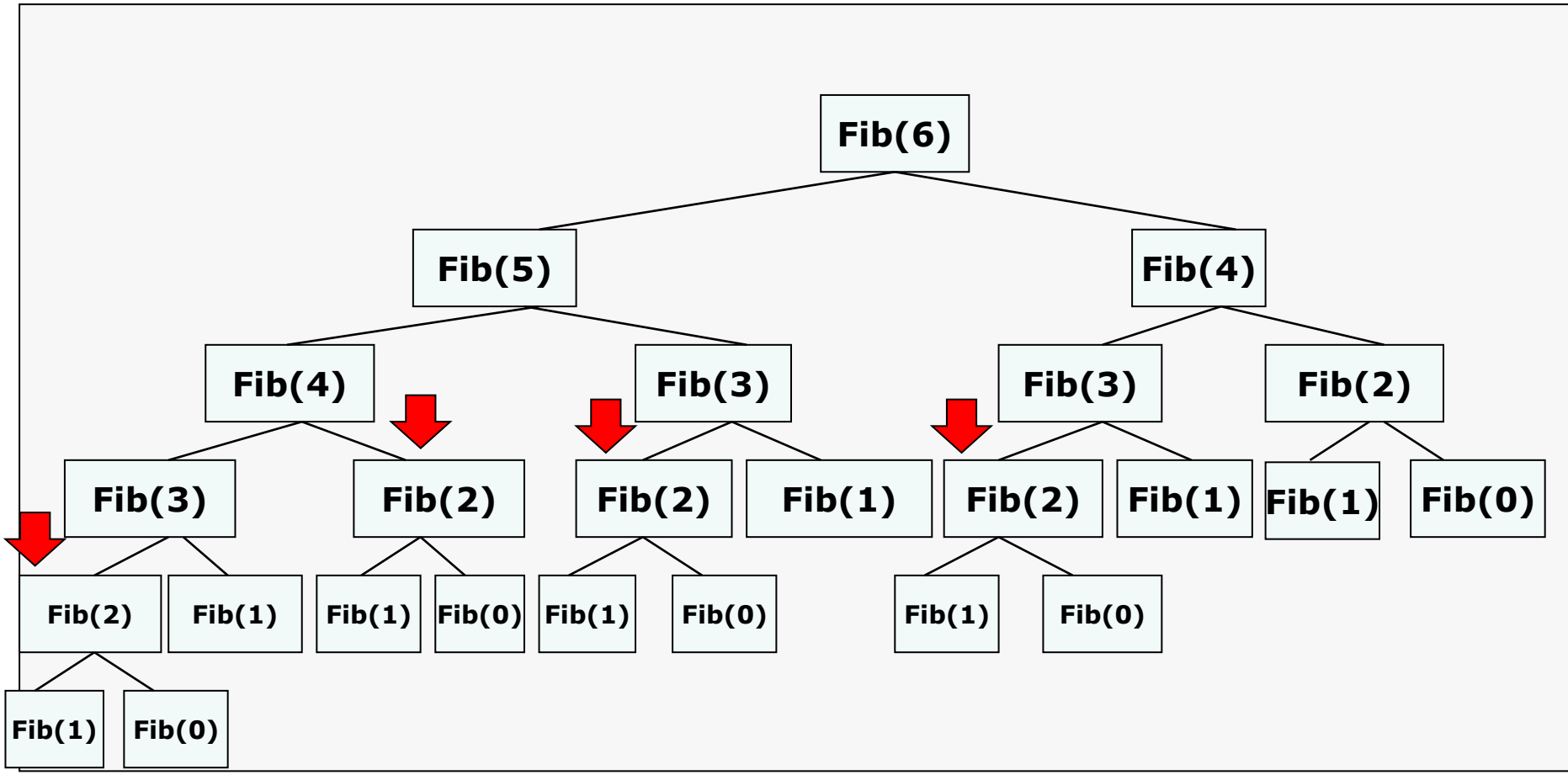
Código recursivo para os números de Fibonacci

```
public static int Fib(int n) {

        if (n == 0 || n == 1)
                return n;
        else
                return Fib(n-1) + Fib(n-2);
        }
}
```

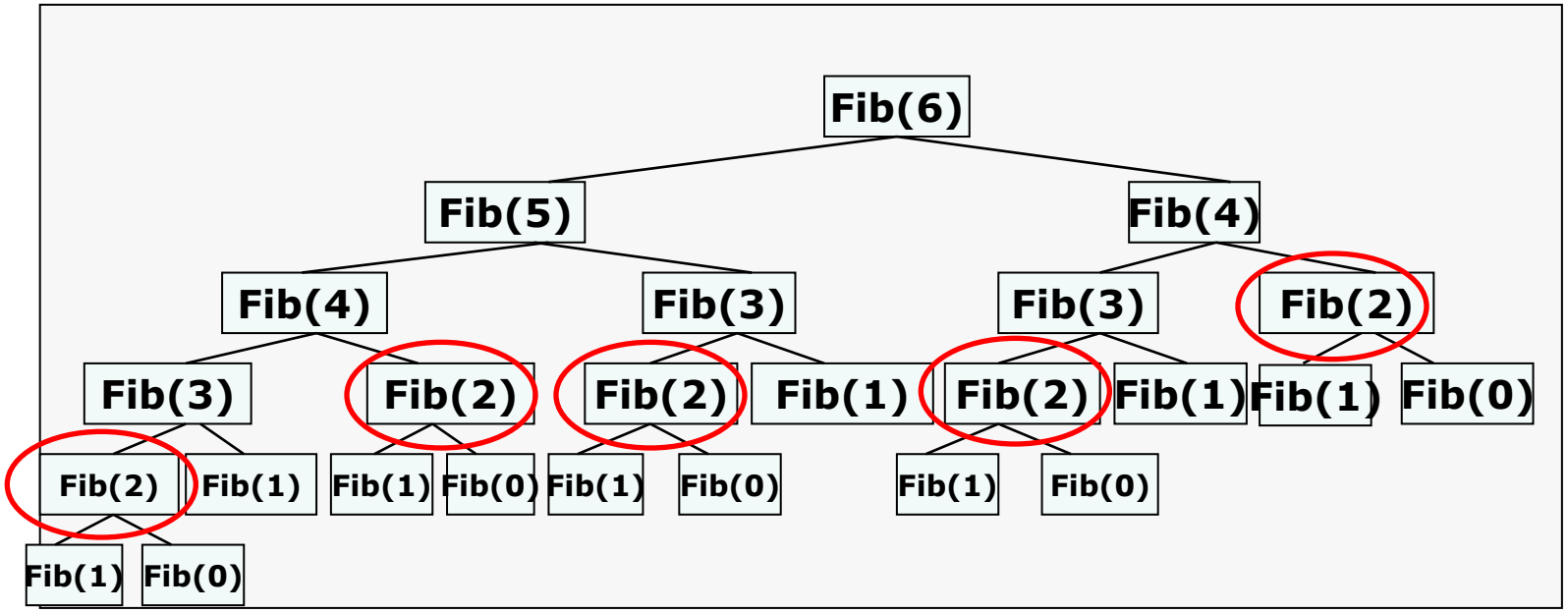
```
public static int Fib(int n) {

        if (n == 0 || n == 1)
                return n;
        else
                return Fib(n-1) + Fib(n-2);
        }
}
```

Quais os pontos negativos dessa implementação ?

Chamadas recursivas para o cálculo de Fib(6)



Observe que há chamadas redundantes de funções ! ! !



Quantas vezes Fib(2) é chamada ?

Portanto...

- Os cálculos redundantes levam o algoritmo a ter maior complexidade computacional;
- Um algoritmo mais "**otimizado**" poderia ser feito com **programação dinâmica**;
- A ideia do algoritmo com programação dinâmica seria guardar numa **tabela** os sub-resultados;
- Melhor ainda: Guardaria apenas os dois últimos resultados (afinal só é preciso disso para saber o próximo resultado da sequência).

Com programação dinâmica . . .

```
package br.maua;
public class Prog_Dinamica {

        public static void main(String[] args) {
                Integer n = 10;

                System.out.println("Fib de " +  n + " = " + Fib(n) ) ;
        }

        public static Integer  Fib(Integer n) {

                Integer u=1,p=0,f=0;
                if ( n == 0 || n == 1) return n;

                for (int i = 2; i <= n+1 ; i++) {
                        f = u + p;
                        p = u;
                        u = f;
                }
                return f;
        }
```

Algoritmos Gulosos

Algoritmos Gulosos

- Realiza a escolha que parece ser a **melhor** no momento na esperança de que a mesma acarrete em uma solução ou prevenção de futuros problemas a nível global.

- É **míope**: ele toma decisões com base nas informações disponíveis na iteração corrente.

Algoritmos Gulosos

- Jamais se arrepende de uma decisão, as **escolhas** realizadas são **definitivas**;
- **Não** leva em consideração as consequências de suas decisões;
- Podem fazer cálculos repetitivos;
- Nem sempre produz a melhor solução (depende da quantidade de informação fornecida);
- Quanto mais informações, maior a chance de produzir uma solução melhor.

Algoritmos Gulosos – Exemplo

```
package br.maua;
import java.text.DecimalFormat;

public class TrocoGuloso {

    public String calculaTroco(double conta, double pago) {

        DecimalFormat formatador = new DecimalFormat("###,##0.00");
        if (pago < conta)
            return ("\nPagamento insuficiente, faltam R$" +
                            formatador.format(conta - pago) + "\n");
        else {

            String resultado;
            double troco;

            troco = pago - conta;
            resultado = "\nTroco = R$" + formatador.format(troco) + "\n\n";

            resultado = this.calculaNotas(troco, resultado);
            resultado = this.calculaMoedas(troco, resultado);

            resultado = resultado + "\n";

            return (resultado);
        }
    }
```

Algoritmos Gulosos – Exemplo

```
public String calculaNotas(final double troco, String resultado) {

        int nota[] = { 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1 };

        int valor;
        int ct;

        int contadorNota = 0;

        valor = (int) troco;
        while (valor != 0) {
            ct = valor / nota[contadorNota]; // calculando a qtde de notas
            if (ct != 0) {
                resultado = resultado + (ct + " nota(s) de R$" +
                            nota[contadorNota] + "\n");
                valor = valor % nota[contadorNota]; // sobra
            }
            contadorNota++; // próxima nota
        }
        return resultado;
    }
```

Algoritmos Gulosos – Exemplo

```
package br.maua;

public class TesteTrocoGuloso {

        public static void main(String[] args) {

                TrocoGuloso t = new TrocoGuloso();

                double conta = 559.25;

                double pago = 710.0;

                System.out.println(t.calculaTroco(conta, pago)) ;

        }

}
```

FIM