

Resoluções dos Exercícios de Teoria dos Grafos

Pedro Wilian Palumbo Bevilacqua - 23.01307-9

October 23, 2025

Exercícios

Exercício 1

1. $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11\}$
2. $E = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, e13, e14\}$

Exercício 2

Não, pois não há arestas que compartilham os mesmos vértices de início e fim.

Exercício 3

Não, pois todos os vértices possuem pelo menos uma aresta incidente.

Exercício 4

Vizinhança de $v6$: $\{v5, v8, v11\}$. Vizinhança de $v9$: $\{v8, v10, v11\}$.

Exercício 5

Sim, o grafo é simples pois não possui laços nem arestas paralelas.

Exercício 6

Grau de cada vértice: $d(v1) = 2, d(v2) = 2, d(v3) = 3, d(v4) = 2, d(v5) = 3, d(v6) = 4, d(v7) = 2, d(v8) = 4, d(v9) = 4, d(v10) = 2, d(v11) = 2$.

Exercício 7

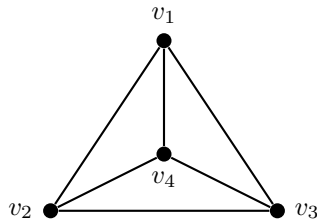
Sequência de graus: $(2, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 2, 2)$.

Exercício 8

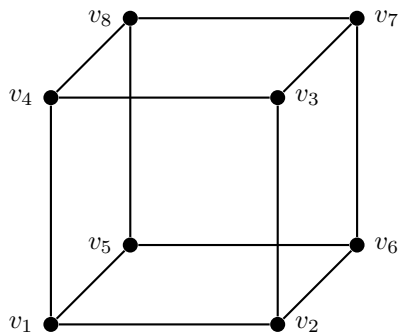
Não, o grafo não é regular pois os graus de seus vértices não são todos iguais.

Exercício 9

Grafo Cúbico G1: Um tetraedro (grafo completo K_4).



Grafo Cúbico G2: O grafo de um cubo (Q_3).



Exercício 10

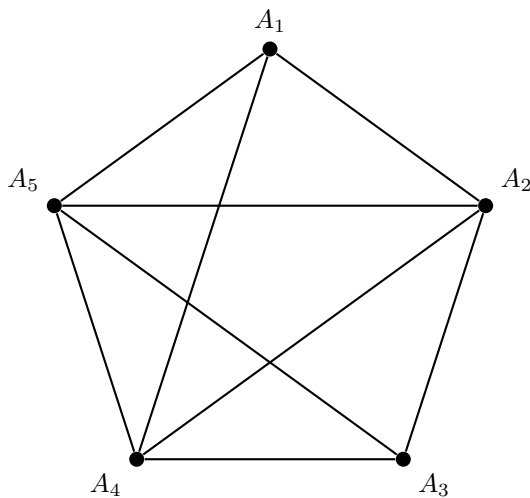
Não. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus de todos os vértices em um grafo é igual a duas vezes o número de arestas. A soma dos graus é $15 \times 5 = 75$, que é um número ímpar. Isso é uma contradição, portanto, tal grafo não pode existir.

Exercício 11

Sim. A soma dos graus é $10 \times 3 = 30$, que é um número par. Portanto, é possível existir um grafo simples com 10 vértices, cada um com grau 3.

Exercício 12

O grafo de intersecção terá 5 vértices, um para cada conjunto. As arestas conectarão vértices cujos conjuntos correspondentes têm uma intersecção não vazia. As arestas são: $(A_1, A_2), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, A_5), (A_3, A_4), (A_3, A_5), (A_4, A_5)$.



Exercício 13

Não. Grafos isomorfos devem ter o mesmo número de vértices. G1 tem 10 vértices e G2 tem 11 vértices, portanto, não podem ser isomorfos.

Exercício 14

Não. Grafos isomorfos devem ter o mesmo número de arestas. G1 tem 5 arestas e G2 tem 6 arestas, portanto, não podem ser isomorfos.

Exercício 15

Sim, G1 e G2 são isomorfos. Ambos os grafos têm 6 vértices e 9 arestas. Ambos são regulares de grau 3. É possível encontrar uma bijeção entre os vértices que preserva a adjacência.

Exercício 16

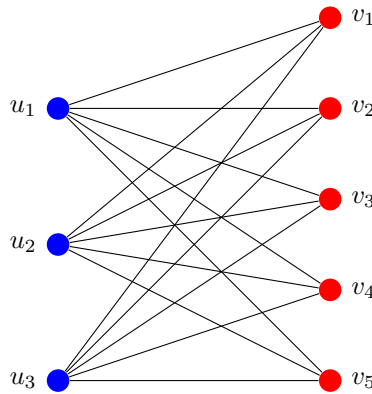
O grafo completo K_7 tem 7 vértices. O número de arestas é dado por $C(7, 2) = (7 \times 6)/2 = 21$.

Exercício 17

O grafo completo K_{10} tem 10 vértices. O número de arestas é dado por $C(10, 2) = (10 \times 9)/2 = 45$.

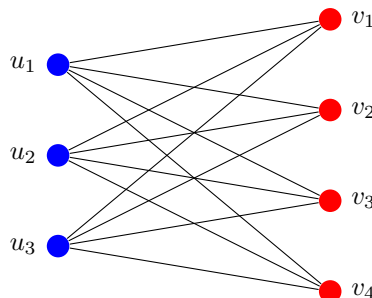
Exercício 18

O grafo bipartido completo $K_{3,5}$ tem dois conjuntos de vértices, um com 3 e outro com 5. O número de arestas é $3 \times 5 = 15$.



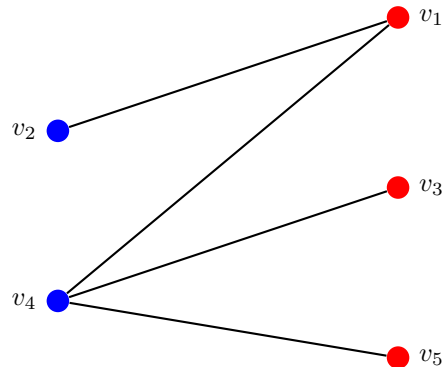
Exercício 19

O grafo bipartido completo $K_{3,4}$ tem dois conjuntos de vértices, um com 3 e outro com 4. O número de arestas é $3 \times 4 = 12$.



Exercício 20

Sim, o grafo G é bipartido. Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, $\{v_2, v_4\}$ e $\{v_1, v_3, v_5\}$, de modo que toda aresta conecta um vértice de um conjunto a um vértice do outro conjunto.



Exercício 21

Um supergrafo de G é um grafo G' tal que G é um subgrafo de G' . Isso significa que G' contém todos os vértices e arestas de G , e pode ter vértices e/ou arestas adicionais.

Exercício 22

Um subgrafo de G é um grafo G' tal que $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$, e para cada aresta (u, v) em $E(G')$, u e v estão em $V(G')$.

Exercício 23

Considerando o grafo G da questão 23:

- A) Passeio aberto: $v1 - e1 - v2 - e2 - v3 - e3 - v5$. (Não começa e termina no mesmo vértice)
- B) Passeio fechado: $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$. (Começa e termina no mesmo vértice)
- C) Trilha aberta: $v1 - e1 - v2 - e2 - v3 - e4 - v4$. (Todas as arestas são distintas, vértices podem se repetir, não começa e termina no mesmo vértice)
- D) Circuito: $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$. (Trilha fechada, todas as arestas distintas)
- E) Caminho aberto: $v1 - e1 - v2 - e2 - v3$. (Todos os vértices e arestas distintas, não começa e termina no mesmo vértice)
- F) Ciclo: $v2 - e1 - v1 - e1 - v2$. (Caminho fechado, todos os vértices e arestas distintas, exceto o inicial e final)

Exercício 24

Um grafo é Euleriano se todos os seus vértices têm grau par. No grafo da questão 24, todos os vértices têm grau 2 ($v1, v2, v3, v4, v5, v6$). Portanto, o grafo é Euleriano.

Exercício 25

Para o grafo da questão 25, precisamos verificar o grau de cada vértice. Há vértices com grau 3 e 4. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

Exercício 26

Para o grafo da questão 26, precisamos verificar o grau de cada vértice. Este é um grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Todos os vértices têm grau 3. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

Exercício 27

Para o grafo da questão 27, precisamos verificar o grau de cada vértice. Há vértices com grau 4 e 5. Como nem todos os vértices têm grau par, o grafo não é Euleriano.

Exercício 28

Um grafo é Hamiltoniano se contém um ciclo Hamiltoniano (um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez). No grafo da questão 28, é possível encontrar um ciclo Hamiltoniano, por exemplo: $v1 - v2 - v3 - v4 - v1$. Portanto, o grafo é Hamiltoniano.

Exercício 29

O grafo completo K_8 tem 8 vértices. O número de arestas é dado por $C(8, 2) = (8 \times 7)/2 = 28$.

Exercício 30

O grafo bipartido completo $K_{6,3}$ tem $6 + 3 = 9$ vértices. O número de arestas é $6 \times 3 + 3 \times 6 = 36$.

Exercício 31

O grafo ciclo C_5 tem 5 vértices e 5 arestas.

Exercício 32

O grafo Cubo Q_5 tem $2^5 = 32$ vértices. O número de arestas é $5 \times 2^{(5-1)} = 5 \times 16 = 80$.

Exercício 33

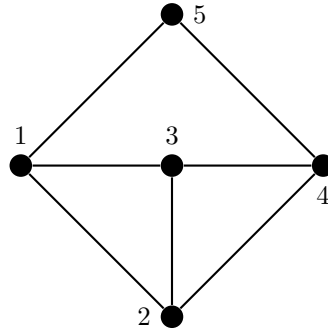
O grafo Roda W_4 tem $4 + 1 = 5$ vértices (o vértice central mais os 4 vértices do ciclo). O número de arestas é 4 (do ciclo) + 4 (do vértice central) = 8.

Exercício 34

A soma dos graus é $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$. O número de arestas é a soma dos graus dividida por 2, ou seja, $14/2 = 7$. É possível desenhar um grafo com esses graus.

Exercício 35

Sim, a soma dos graus é $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$, que é par. É possível desenhar um grafo simples com esses graus.



Graus dos vértices: $d(1) = 3, d(2) = 3, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 2$.

Exercício 36

Não, a soma dos graus é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, que é ímpar. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus deve ser par. Portanto, não existe tal grafo.

Exercício 37

Não, a soma dos graus é $1 + 2 + 3 + 4 + 4 = 14$, que é par. No entanto, um grafo simples com 5 vértices e grau máximo 4 significa que um vértice pode estar conectado a todos os outros 4 vértices. Se houver um vértice de grau 1, ele deve estar conectado a um dos outros vértices. É possível desenhar um grafo simples com esses graus.

Exercício 38

Não, a soma dos graus é $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 17$, que é ímpar. Pelo lema do aperto de mão, a soma dos graus deve ser par. Portanto, não existe tal grafo.

Exercício 39

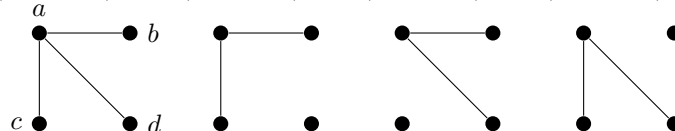
O grafo K_3 tem 3 vértices e 3 arestas. O número de subgrafos com pelo menos um vértice é $2^{\text{número de arestas}} \times 2^{\text{número de vértices}} - 1$. No entanto, esta fórmula não é para subgrafos induzidos. Para K_3 , os subgrafos são: 3 vértices e 3 arestas (o próprio K_3), 3 vértices e 2 arestas (3 opções), 3 vértices e 1 aresta (3 opções), 3 vértices e 0 arestas (1 opção), 2 vértices e 1 aresta (3 opções), 2 vértices e 0 arestas (3 opções), 1 vértice e 0 arestas (3 opções). Total: $1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 = 17$ subgrafos com pelo menos um vértice.

Exercício 40

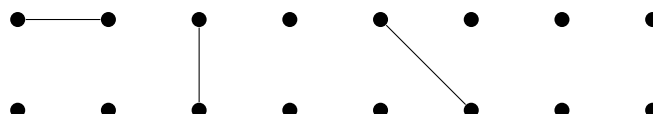
O grafo G tem 4 vértices $\{a, b, c, d\}$ e 3 arestas $\{(a, b), (a, c), (a, d)\}$. Todos os subgrafos possíveis são:

Subgrafos com 4 vértices:

G (3 arestas) G_1 (2 arestas) G_2 (2 arestas) G_3 (2 arestas)

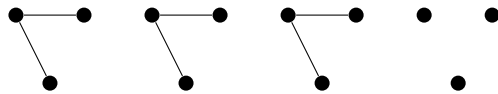


G_4 (1 aresta) G_5 (1 aresta) G_6 (1 aresta) G_7 (0 arestas)



Subgrafos com 3 vértices:

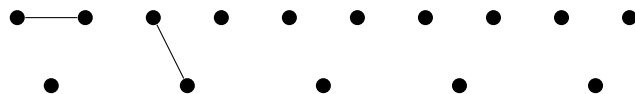
$\{a, b, c\}$ (2 arestas) (2 arestas) (2 arestas) (0 arestas)



$\{a, b, c\}$ (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta)



$\{a, c, d\}$ (1 aresta) (1 aresta) (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas)



Subgrafos com 2 vértices:

$\{a, b\}$ (1 aresta) (1 aresta) (1 aresta) (0 arestas) (0 arestas)



$\{a, d\}$ (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas) (0 arestas)



Subgrafos com 1 vértice:

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$



Total de subgrafos (excluindo o conjunto vazio): 38 subgrafos

Exercício 41

Os grafos completos K_n são regulares para todo $n \geq 1$. O grau de cada vértice em K_n é $n - 1$.

Exercício 42

Os grafos ciclo C_n são regulares para todo $n \geq 3$. O grau de cada vértice em C_n é 2.

Exercício 43

Os grafos roda W_n são regulares apenas para $n = 3$. Em W_n , o vértice central tem grau n , e os vértices do ciclo têm grau 3. Para ser regular, n deve ser igual a 3.

Exercício 44

Os grafos cubo Q_n são regulares para todo $n \geq 1$. O grau de cada vértice em Q_n é n .

Exercício 45

A condição imposta pelo Teorema de Dirac é **suficiente**, mas não necessária. Se um grafo satisfaz a condição de Dirac, ele é Hamiltoniano, mas um grafo pode ser Hamiltoniano sem satisfazer a condição de Dirac.

Exercício 46

A condição imposta pelo Teorema de Ore é **suficiente**, mas não necessária. Se um grafo satisfaz a condição de Ore, ele é Hamiltoniano, mas um grafo pode ser Hamiltoniano sem satisfazer a condição de Ore.

Exercício 47

Considere o grafo G da questão 47:

- Sim, é possível encontrar um ciclo Hamiltoniano, por exemplo, $v1 - v2 - v3 - v4 - v5 - v6 - v7 - v8 - v1$. Portanto, é Hamiltoniano.
- Para ser Euleriano, todos os vértices devem ter grau par. No grafo da questão 47, todos os vértices têm grau 2, que é par. Portanto, o grafo é Euleriano.

Exercício 48

Um problema tem complexidade **NP Completo** se ele pertence à classe NP (Non-deterministic Polynomial time) e é NP-difícil, ou seja, qualquer problema em NP pode ser reduzido a ele em tempo polinomial. Isso significa que, se um problema NP-completo puder ser resolvido em tempo polinomial, todos os problemas em NP também poderão. Um problema tem complexidade **P** (Polynomial time) se ele pode ser resolvido por um algoritmo determinístico em tempo polinomial. Problemas em P são considerados eficientemente solúveis.

Exercício 49

O **Teorema de Berge** para o Problema do Emparelhamento de Grafos afirma que um emparelhamento M em um grafo G é um emparelhamento máximo se e somente se G não contém nenhum caminho M -aumentador. Um caminho M -aumentador é um caminho que começa e termina em vértices não emparelhados e alterna entre arestas não emparelhadas e arestas emparelhadas. A importância deste teorema reside no fato de que ele fornece uma condição necessária e suficiente para a maximalidade de um emparelhamento, o que é fundamental para o desenvolvimento de algoritmos de emparelhamento, como o algoritmo de Edmonds para emparelhamentos em grafos gerais.

Exercício 50

O **Teorema de Hall** (também conhecido como Teorema do Casamento de Hall) fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido. Ele afirma que um grafo bipartido $G = (U \cup V, E)$ tem um emparelhamento que cobre todos os vértices em U se e somente se, para todo subconjunto $A \subseteq U$, a cardinalidade da vizinhança de A (denotada por $N(A)$) é maior ou igual à cardinalidade de A , ou seja, $|N(A)| \geq |A|$. A importância deste teorema é que ele oferece um critério combinatório simples para determinar a existência de um emparelhamento completo em grafos bipartidos, sendo amplamente utilizado em diversas aplicações, como alocação de tarefas e teoria dos fluxos em redes.