Introdução à Teoria dos Grafos

Resumo

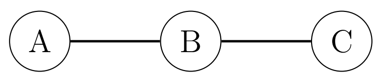
13 de novembro de 2025

1 Conceitos básicos

1.1 Grafo $G = (V, E)$

Definição: Um grafo é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de vértices e E é um conjunto (possivelmente vazio) de arestas que ligam pares de vértices.

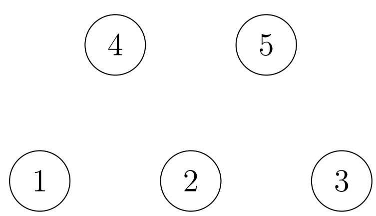
Exemplo: $V = \{A, B, C\}$, $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}\}$.



1.2 Grafo nulo

Definição: Grafo sem arestas ($E = \varnothing$).

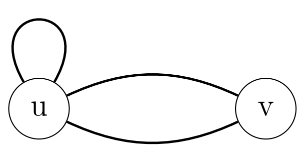
Exemplo: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \varnothing$.



1.3 Arestas paralelas e loop (multigrafo)

Definições: Arestas paralelas ligam as mesmas extremidades. Loop liga um vértice a ele mesmo (conta 2 no grau).

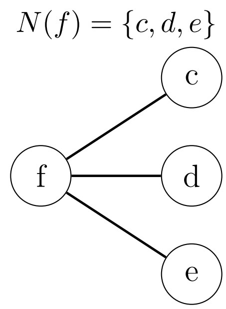
Exemplo: Duas arestas entre u e v; um loop em u.



1.4 Vizinhança $N(v)$

Definição: Conjunto dos vizinhos de v (vértices adjacentes a v).

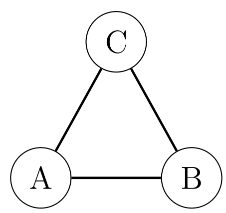
Exemplo: $N(f) = \{c, d, e\}$.



1.5 Grafo simples

Definição: Não possui loops nem arestas paralelas.

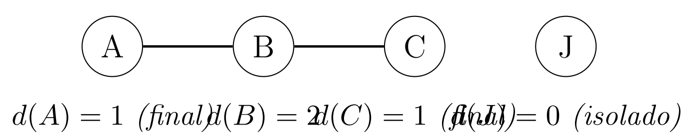
Exemplo: Triângulo K_3.



1.6 Grau $d(v)$, vértice isolado e final

Definições: $d(v)$ é o número de arestas incidentes em v (loop conta 2). Vértice isolado: grau 0. Vértice final (pendente): grau 1.

Exemplo: Caminho $A - B - C$ e vértice isolado J.



1.7 Sequência de graus

Definição: Lista dos graus em ordem crescente (com repetições).

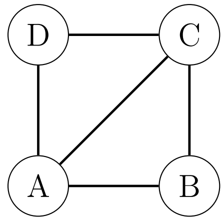
Exemplo: No grafo acima, os graus são $(1, 2, 1, 0)$ e a sequência é $(0, 1, 1, 2)$.

1.8 Teorema do Aperto de Mão (Handshake)

Enunciado: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Exemplo: Quadrado com uma diagonal ($|E| = 5$).

$d(D) = 2 \quad d(C) = 3$



$d(A) = 3 \quad d(B) = 2$

Soma dos graus $= 3 + 2 + 3 + 2 = 10 = 2 \cdot 5 = 2|E|$.

1.9 Paridade dos vértices ímpares

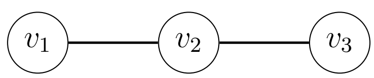
Fato: O número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Exemplo: No grafo do item anterior, os ímpares são A e C (2 vértices).

1.10 Adjacência de vértices e arestas

Definições: Vértices são adjacentes se há aresta entre eles. Arestas são adjacentes se compartilham um vértice.

Exemplo: Caminho $v_1 - v_2 - v_3$.



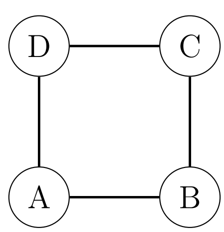
v_1 e v_2 adjacentes; (v_1, v_2) e (v_2, v_3) adjacentes.

2 Padrões frequentes

2.1 Grafo regular

Definição: Todos os vértices têm o mesmo grau.

Exemplo: Ciclo C_4 é 2-regular.

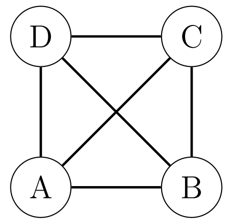


$d(\cdot) = 2$ *em todos.*

2.2 Grafo completo K_n

Definição: Todo par de vértices é adjacente.

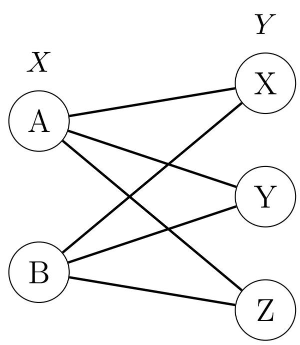
Exemplo: K_4 ($|V| = 4$, $|E| = 6$).



2.3 Grafo bipartido e bipartido completo $K_{m,n}$

Definição: O conjunto V é particionado em dois lados X e Y, e todas as arestas ligam um vértice de X a um de Y. No completo $K_{m,n}$, todo vértice de X conecta a todos de Y.

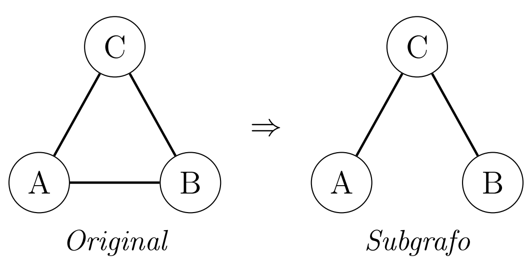
Exemplo: $K_{2,3}$ com $X = \{A, B\}$ e $Y = \{X, Y, Z\}$.



2.4 Subgrafo

Definição: Obtido removendo vértices e/ou arestas do grafo original, mantendo incidências válidas.

Exemplo: À esquerda, triângulo; à direita, subgrafo em caminho (removida a aresta AB).



Dica de estudo: Para checar consistência, liste os graus, verifique a soma $= 2|E|$, e conte quantos vértices ímpares (tem que ser número par).