UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

***CAMPUS* DE ARAPIRACA**

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

JOSÉ LEVI MELO DOS SANTOS

PADRÃO DE BELEZA E PROPORÇÃO ÁUREA: PERFEIÇÃO FUNDAMENTADA NO NÚMERO PHI

ARAPIRACA

2022

José Levi Melo dos Santos

Padrão de beleza e proporção áurea: perfeição fundamentada no número phi

Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, apresentado ao curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, Campus de Arapiraca, como requisito para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira.

Arapiraca

2022

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca *Campus* Arapiraca - BCA

S237p Santos, José Levi Melo dos
Padrão de beleza e proporção áurea: perfeição fundamentada no número phi / José Levi Melo dos Santos. – Arapiraca, 2022.
33 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ornan Filipe de Araújo Oliveira.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2022.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 32-33.

1. Número de Ouro. 2. Número de phi. 3. Proporção áurea. 4. Ideal estético. 5. Matemática da beleza. I. Oliveira, Ornan Filipe de Araújo. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB - 4 / 1557

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSOMATEMÁTICA LICENCIATURA

Às nove horas e trinta minutos do 4º dia do mês de março de 2022, emsessão pública realizada por vídeo conferência na plataforma *GoogleMeet* (pelo link), reuniram-se os docentes Ornan Filipe de Araújo Oliveira (orientador), Eben Alves da Silva (examinador) e Moreno Pereira Bonutti (examinador) para defesa doTrabalho de Conclusão de Curso do discente **José Levi Melo dos Santos**, intitulado ***Padrão de Beleza e Proporção Áurea: Perfeição Fundamentada no Número Phi***.

Após apresentação com duração de 30 minutos, foi realizada uma arguição por parte da Banca Examinadora acima citada, e o referido trabalho foi considerado **APROVADO** com as notas abaixo:

Avaliador 1: Ornan Filipe de Araújo Oliveira	(7,5)
Avaliador 2: Eben Alves da Silva	(7,5)
Avaliador 3: Moreno Pereira Bonutti	(7,5)
MÉDIA: sete inteiros e cinco décimos	(7,5)

E para constar lavrou-se a presente ata que vai assinada pelos três membrosda Banca Examinadora, bem como pelo coordenador do curso.

Arapiraca, 04 de março de 2022.

gov.br Documento assinado digitalmente
Ornan Filipe de Araujo Oliveira
Data: 15/03/2022 18:19:41-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira (orientador)

gov.br Documento assinado digitalmente
EBEN ALVES DA SILVA
Data: 21/03/2022 18:53:20-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Me. Eben Alves da Silva (examinador)

gov.br Documento assinado digitalmente
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 17/03/2022 11:14:10-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Dr. Moreno Pereira Bonutti (examinador)

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE DA SILVA BARROS
Data: 17/03/2022 21:22:50-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Dr. José da Silva Barros (Vice Coordenador do Curso)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, aos meus pais que sempre priorizaram a minha educação, aos meus irmãos que sempre estiveram comigo, aos meus amigos, que sempre me apoiaram.

Meus agradecimentos aos meus amigos de turma que me proporcionaram que a caminhada até aqui pudesse ter sido mais amena e prazerosa. Aos professores que sempre fizeram o possível e o impossível para garantir o melhor aprendizado para mim.

Agradeço a minha instituição e a todos que fazem a Universidade Federal de Alagoas -UFAL, a todos muitíssimo obrigado.

Por fim, e não menos importante agradeço incondicionalmente ao meu Orientador Prof. Ornan Filipe, pela sua dedicação, compreensão e por ter confiado na minha capacidade para chegar até aqui. Obrigado a todos.

RESUMO

A matemática está em tudo, há muito a humanidade busca estudar e utiliza a proporcionalidade em diversas áreas do conhecimento, uma das formas de aplicar proporções com objetivo de atingir a perfeição e a harmonia é com o uso do chamado número de ouro, do qual derivam outros elementos matemáticos – retângulo e elipse áureos, máscara de phi, etc. – vastamente estudados e aplicados em outros ramos. A beleza, muitas das vezes correlata ou envolvida com ideais de perfeição, poderia, então, ser matematicamente alcançada ou explicada? Grandes matemáticos, filósofos e pensadores no decorrer da história desenvolveram estudos nessa área de conhecimento, criando aplicações na arte, arquitetura, anatomia humana, estética, odontologia e outras. Com base nestas considerações iniciais, o intuito desse estudo foi analisar as aplicações do número de Phi e suas variantes – retângulo e elipse áureo, proporção áurea, dentre outras –, em conjunto com a percepção de perfeição ou ideal estético em diferentes áreas do conhecimento, como na arte, arquitetura e, até mesmo, na odontologia. Metodologicamente, foi realizada uma revisão bibliográfica para a promoção de um estudo básico e qualitativo fundamentado em artigos científicos que se mostrem úteis e pertinentes à pesquisa em tela. Com as análises desenvolvidas, percebeu-se que as proporções de ouro e, consequentemente, o número de phi podem auxiliar as diferentes áreas a alcançar o ideal matemático de beleza, entretanto, cabe destacar a subjetividade daquilo que é belo, sempre lembrando que na Matemática, através de cálculos e proporções podemos chegar a um modelo perfeito e harmônico, não necessariamente o mais belo, afinal, a concepção e apreensão do que é beleza difere de indivíduo para indivíduo e é uma discussão filosófica mais profunda.

Palavras-chave: número de phi; proporção áurea; aplicações; perfeição; beleza.

ABSTRACT

Mathematics is in everything, humanity has long sought to study and use proportionality in different areas of knowledge, one of the ways to apply proportions in order to achieve perfection and harmony is with the use of the so-called golden number, of which derive other mathematical elements – golden rectangle and ellipse, phi mask, etc. – extensively studied and applied in other fields. Beauty, often correlated or involved with ideals of perfection, could then be mathematically achieved or explained? Great mathematicians, philosophers and thinkers throughout history have developed studies in this area of knowledge, creating applications in art, architecture, human anatomy, aesthetics, dentistry and others. Based on these initial considerations, the purpose of this study is to analyze the applications of the Phi number and its variants - golden rectangle and ellipse, golden proportion, and others -, with the perception of perfection or ideal aesthetic in different areas of knowledge, such as in art, architecture and even dentistry. Methodologically, a literature review was carried out to promote a basic and qualitative study based on scientific articles that prove to be useful and relevant to this research. With the developed analyses, it was noticed that the proportions of gold and, consequently, the number of phi can help different areas to reach the mathematical ideal of beauty, however, it is worth highlighting the subjectivity of what is beautiful, always remembering that in Mathematics through calculations and proportions we can arrive at a perfect and harmonic model, not necessarily the most beautiful, after all, the conception and apprehension of what is beauty differs from individual to individual and is a deeper philosophical discussion.

Keywords: phi number; golden proportion; applications; perfection; beauty.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Obtenção geométrica da seção/proporção áurea 13
Figura 2 - Retângulo de ouro...18
Figura 3 - Derivação do Retângulo áureo: o espiral áureo. 19
Figura 4 - Máscara de Phi. 20
Figura 5 - Angelina Jolie (rosto matematicamente perfeito), aplicação Máscara Phi.21
Figura 6 - Lizzie Velasquez (mulher mais “feia” do mundo), aplicação Máscara Phi.21
Figura 7 - Algumas composições de Mondrian com o Retângulo de Ouro. 24
Figura 8 - Mona Lisa (Leonardo da Vinci) – aplicação: espiral áureo e razão áurea.25
Figura 9 - Homem Vitruviano...26
Figura 10 - Pirâmide e seus elementos: altura e apótemas da base e da pirâmide. .27
Figura 11 - Modulor, Le Corbusier..28

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO ... 8

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE BELEZA ... 9

3 HISTÓRICO DA PROPORÇÃO ÁUREA ... 10

4 RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO DE PHI ... 11

4.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS ... 11

4.2 OBTENÇÃO ALGÉBRICA ... 11

4.3 OBTENÇÃO GEOMÉTRICA ... 12

4.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI ... 13

4.5 IRRACIONALIDADE DE Φ ... 15

5 RETÂNGULO DE OURO E MÁSCARA DE PHI ... 18

6 APLICAÇÕES DO NÚMERO DE OURO ... 22

6.1 PERFEIÇÃO ESTÉTICA ... 22

6.2 ARTE ... 23

6.3 ARQUITETURA ... 26

7 CONCLUSÃO ... 30

REFERÊNCIAS ... 31

1 INTRODUÇÃO

Por intermédio de uma simples razão matemática é possível demonstrar a natureza e sua perfeição, explicitando a forma como na natureza está correlacionado de forma harmônica e escultural. A expressão da beleza e contemplação, matematicamente falando, podem ser alcançadas através da observância do chamado “número de ouro”, também nomeado de razão áurea, conhecida e estudada desde a antiguidade, podendo ser empregada como uma potente ferramenta de admiração e percepção da harmonia matemática que existe na natureza, seja em flores, frutas, distribuição das folhas nas árvores, estética dental e corporal das pessoas, arte, arquitetura e tantas outras áreas que reafirmam e reiteram que a proporção áurea é o modelo representativo da proporção mais agradável que pode ser alcançada entre duas medidas.

Dessa forma, a problemática central deste estudo coloca-se sobre analisar as aplicações do número de Phi e suas variantes – retângulo e elipse áureo, proporção áurea, dentre outras –, em conjunto com a percepção de perfeição ou ideal estético em diferentes áreas do conhecimento, como na arte, arquitetura e, até mesmo, na odontologia.

Metodologicamente, o trabalho aqui proposto tem como objetivo geral revisar o estado da arte na procura por evidências que suportem o fato de que há ou não a aplicação do número de phi com ideais de beleza e perfeição, apontando as principais áreas do conhecimento às quais o modelo matematicamente perfeito pode ser relacionado com vistas a esclarecer e, simultaneamente, provar que tal coisa é bela, seja ela um sorriso, uma obra de arte ou uma estrutura arquitetônica.

Devido à natureza da proposta que ora se apresenta, recorrer-se-á à revisão bibliográfica para a promoção de um estudo básico e qualitativo fundamentado em artigos científicos que se mostrem úteis e pertinentes à pesquisa em tela. A respeito do procedimento metodológico utilizado para viabilizar a composição e estruturação desta pesquisa, onde foi utilizada a revisão bibliográfica, destaca-se em conformidade com Santos (2012), que está comporta-se como o processo de busca, seguido de análise e descrição de um conjunto de conhecimentos consagrados na literatura científica que são retomados em meio à procura de respostas a uma pergunta específica.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE BELEZA

Há muito os grandes pensadores da humanidade, especialmente das áreas que buscam entender o inconsciente e o subconsciente, tentam caracterizar as manifestações estéticas e a percepção do belo em concordância com o pressuposto de que o indivíduo nada quer das coisas; não prescindem delas para satisfação pessoal ou alguma das muitas e grandes necessidades vitais do ser humano, e sendo utilizadas para gerar contentamento mediante sua simples contemplação e gozo a partir de sua manifestação em sim (FREUD, 1905 *apud* LOUREIRO, 2003).

Nesta linha de pensamento, Umberto Eco (2004, p.193), em seu livro “A história da beleza” já questionava: “Que cânones, gostos e costumes sociais permitem considerar ‘belo’ um corpo?”, estas muitas tentativas de determinar uma definição universal para o vocábulo ‘belo’ e suas variantes vêm gerando um interminável jogo de palavras que, no fim, se limitam a representar valores, sendo estes especialmente individuais. Eco (2004) ainda aprofunda discussões sobre os parâmetros que nortearam o conceito de beleza com o passar dos anos, chegando à conclusão de que a conceituação jamais foi algo concreto, absoluto ou imutável, assumindo faces divergentes a depender do período histórico, aspectos sociais e da cultura do país, por exemplo.

Complementarmente, pode-se afirmar que estabelecer uma definição para o belo citando algo ou alguém que é entendido ou se acha belo, mesmo que o seja de fato, em diferentes culturas e sociedades, não ajuda a conceituá-lo, mas sim, o exemplifica e resume, afinal, não há uma concretude que o justifique (FREITAS *et al*., 2010), diferentemente da beleza matematicamente justificada que pode ser alcançada nas aplicações que envolvem o número de phi e suas variantes matemáticas.

Ferrer (2005), comenta que com a ciência matemática, as muitas e recorrentes buscas das razões de ser do homem e da infinidade de elementos que existem na natureza harmonicamente podem ser alcançadas por intermédio de ordem, relações e proporções entre números e combinações, para atingir explicações sobre a existência da perfeição. Neste contexto, o número de ouro, indicado pela letra grega ϕ, nomeado como uma homenagem ao escultor e arquiteto grego Phídeas (470 – 425 a.C.), e obtido por meio da razão áurea, é fator determinante no cerne desta questão.

3 HISTÓRICO DA PROPORÇÃO ÁUREA

A busca por uma definição de beleza tem uma longa história, atingindo até mesmo a antiga civilização egípcia, nesta perspectiva, no Egito existe uma lenda, citada no livro de Contador (2007) e descrita por Heródoto, que diz: “as grandes pirâmides do Egito foram construídas de modo que a área de uma de suas faces inclinadas é igual ao quadrado de sua altura” (CONTADOR, 2007, p. 97).

Antes mesmo das descobertas da relação do Egito com a proporção áurea, os primeiros humanos que andaram pela superfície terrestre já tinham em mente algum tipo de uso da proporcionalidade de ouro em suas produções, tal como comenta Contador (2007): “Em desenhos primitivos ou rupestres encontra-se a proporção áurea, não que os nossos ancestrais tivessem tal consciência geométrica, mas com certeza a instruíram, na especulação de beleza e na forma das proporções” (CONTADOR, 2007, p. 97).

Além disso, ainda comentando a presença histórica do número de ouro nas produções da humanidade:

Não só no Egito, mas em outros lugares houve a presença da proporção áurea, pois uma das características da razão áurea é a auto propagação, pois vários povos a utilizaram sem terem trocado informações matemáticas, um exemplo disso é os pitagóricos que não podiam falar sobre suas descobertas [...] (BARBOSA, 2012, p. 2).

Em continuidade, ainda na antiguidade, grandes pensadores e estudiosos como Euclides, Pitágoras e Vitrúvio, buscaram a conceituação de beleza partindo de correlações e algoritmos matemáticos, que exerceram um papel fundamental nas propostas de definir beleza e atratividade facial matematicamente, ou seja, justificadas com algo concreto e indiscutível (PROKOPAKIS *et al*., 2013; NGUYEN *et al*., 2016).

A primeira resolução formal acerca do uso da Proporção Divina para explicar a essência da beleza e suas relações com as proporções matemáticas surgiu no século V a.C. e foi descrita pelo filósofo Pitágoras, a referida proporção representa a divisão de uma reta em média e extrema razão, com valor equivalente a 1:0,618 ou 1:1,618, a hipótese de aplicação da proporção áurea à beleza significa que uma determinada forma é esteticamente mais agradável quando se encaixa nesta métrica proporcional (BERTOLLO *et al*., 2008).

4 RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO DE PHI

Geometricamente descrita por Euclides, chamada também de proporção de Fibonacci ou "proporção divina", o valor da PA (Proporção áurea) equivale ao número irracional chamado "phi" (1,618...), nomeado em razão do nome do escultor e criador do Partenon, Fídias (PROKOPAKIS *et al*., 2013).

A razão áurea, também denominada de segmento áureo ou proporção áurea, reproduz a mais agradável proporção que pode ser conseguida entre duas medidas, neste ínterim, os antigos gregos a estabeleciam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou ainda como “secção”, tal como discute Queiroz (2007).

Importante destacar que a Proporção Áurea não é somente um conceito matemático, auxiliando na percepção de padrões harmoniosos no meio natural. A PA, é uma constante irracional obtida quando da divisão de uma reta em dois segmentos de reta, onde o maior é dividido pelo menor, gerando uma razão proporcional que resulta no número de ouro, equivalente a 1,6180339887 (BIEMBENGUT, 1996).

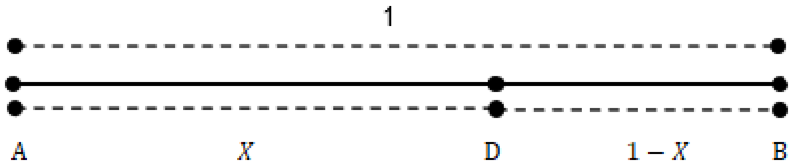
4.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Sobre as formas de obter o número de ouro, Queiroz (2007) dimensiona que phi é o número irracional (que equivale aproximadamente a 1,618...) matematicamente gerado por intermédio do desenvolvimento de sequências contínuas infinitas, deduções algébricas ou geométricas. Inicialmente, será apresentada a dedução através de duas sequências contínuas infinitas, a primeira é a mais simples de todas as frações e, a segunda, uma sequência de radicais contínuos infinitos. De forma que, quando da substituição das sequências infinitas por Φ e expressando-as na forma recursiva, é alcançado o valor do número Phi, tal como na demonstração abaixo.

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \qquad \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

4.2 OBTENÇÃO ALGÉBRICA

Queiroz (2007), também demonstra a maneira de chegar ao número Phi algebricamente, para isso, deve-se considerar: m(AB)=1, m(AD) = x e m(DB) = 1-x – segue demonstração abaixo –, posteriormente, obtendo a divisão de um segmento em média e extrema razão, pode-se aplicar a propriedade fundamental das proporções: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, com isso, alcança-se uma equação de segundo grau, resolvendo-a são encontradas duas raízes, uma delas é negativa e deve ser desprezada, uma vez que trata-se de uma medida de segmento, não podendo ser negativa, e, então, calcula-se a razão Phi=1/x para obter, por fim, o número de ouro.



$$\frac{m(AB)}{m(AD)} = \frac{m(AD)}{m(DB)}$$

$$\frac{1}{X} = \frac{X}{1-X}$$

$$X^2 + X - 1 = 0$$

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad e \; x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

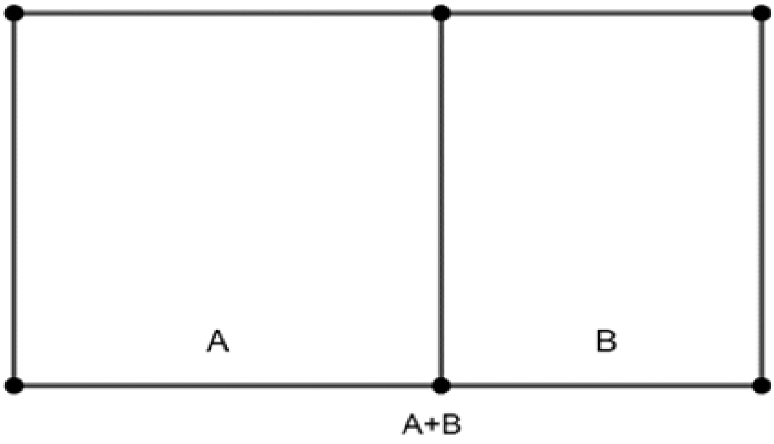
$$\varphi = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1.236...} = 1{,}618 \ldots$$

4.3 OBTENÇÃO GEOMÉTRICA

Geometricamente, para obter a seção áurea, o famoso matemático de Alexandria, Euclides, o pai da geometria, definia a seguinte percepção “uma linha reta se diz dividida em extrema e média razão, quando toda a linha é para o segmento maior, como este segmento maior é para o segmento menor” (COMMANDINO, 1944, p. 99), tal conceituação geométrica segue exemplificada na

Figura 1:

Figura 1 - Obtenção geométrica da seção/proporção áurea



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$(a+b)b = a^2$$

$$ab + b^2 - a^2 = 0$$

$$\frac{-a^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2}$$

$$-\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0;\ \frac{a}{b} = \varphi$$

$$-\varphi^2 + \varphi + 1 = 0;\ \div -\varphi$$

$$\varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Fonte: Colliselli (2016).

4.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Outra correlação importante do número áureo é com sequência proposta por Leonardo Fibonacci, matemático que criou e divulgou o sistema numérico decimal, conhecido como Sequência Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., na qual cada um dos elementos é a soma de seus dois precedentes e a razão entre dois números consecutivos depois do 3, sempre será 0,618 ou 1,618. Desta feita, a referida sequência e a proporção áurea encontram-se intimamente relacionadas com a presença do número áureo na relação (BERTOLLO *et al*., 2008).

O estudo de Pereira e Ferreira (2008) apresenta a conexão da Sequência de Fibonacci com o Número de Ouro. E, assim, considerando a sequência abaixo, tem-se:

a_n

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, com\ n > 1$$

Em que, os correspondem a termos da Sequência de Fibonacci, dada por:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots, ou\ seja, 1{,}2{,}1.5{,}1.666\ldots, 1.6, \ldots$$

De forma que a Sequência tende a um valor entre 1.5 e 2, com estes dados, emerge o Teorema 1 a seguir:

Teorema 1 – Percebe-se que é dado recursivamente por:

$$r_1 = 1\ e\ r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1, n \geq 2$$

E, então, Pereira e Ferreira (2008) provam com a demonstração desse teorema que é possível alcançar o número de phi pela sequência de Fibonacci, tal como segue.

Parte-se da sequência $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, considerando substituição com algoritmo de Euclides ($a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$), é obtido:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

Provando, portanto, que $r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1, n \geq 2$. Com a relação alcançada, é perceptível que o limite *r* dá sequência r_n, caso exista, é solução para equação r^2 –

r – 1 = 0, com apenas uma raiz positiva. Partindo do Teorema 1, é entendido que:

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r_{n-1}} + 1\right),$$

Sendo assim,

$$r = \frac{1}{r} + 1,$$

Onde:

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Desenvolvendo a equação quadrada pela fórmula de Bhaskara,

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

E, assim, como $r_n > 0$, para todo n, tem-se:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749895\ ...$$

O resultado obtido é exatamente phi, conhecido como o número de ouro.

4.5 IRRACIONALIDADE DE Φ

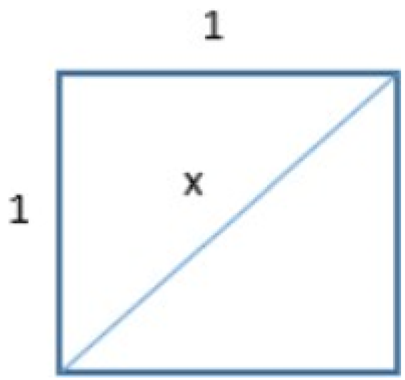
Garcia *et al*. ([20--]) compreendem que um número irracional é aquele que representa a medida de um segmento incomensurável[1] com a unidade, de forma que, ele não pode ser obtido por uma razão m/n com m e n inteiros e n ≠ 0. E, assim, os autores trazem uma correlação bem simples e didática para explicar a

[1] As problemáticas com segmentos incomensuráveis surgiram durante momento de ruptura na matemática, alguns séculos antes de Cristo, onde os sistemas numéricos conhecidos – números naturais e racionais – eram insuficientes para efetuar medidas dos objetos geométricos mais simples, como o quadrado e o círculo (GARCIA *et al*., [20--]).

irracionalidade do número de ouro.

Numa aplicação básica do Teorema de Pitágoras (a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa), encontra-se que a diagonal unitária é igual a √2. Algebricamente, é possível demonstrar que a √2 é irracional por um método comum, a redução ao absurdo – supondo que a raiz quadrada de 2 seja racional, como exemplificado abaixo (CABRAL, 2013) –, caso que acontece com todas as raízes quadradas não exatas de números naturais (2, 3, 5, 6, 7 e 8), que são, portanto, irracionais (GARCIA *et al.*, [20--]).

Cabral (2013) desenvolve que a metodologia de redução ao absurdo consiste em, partindo de determinada hipótese, concluir por raciocínio lógico algo absurdo que possa contradizê-la, falseando a tese inicial. Demonstrando a irracionalidade com a raiz quadrada de 2 (CABRAL, 2013), tem-se o quadrado seguinte:



Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$1^2 + 1^2 = x^2 \quad => \quad x = \sqrt{2}$$

Assume-se a hipótese de que a raiz quadrada de 2 é igual a um número racional (um absurdo) e pode ser descrita por

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, onde\ p\ e\ q\ são\ inteiros\ sem\ nenhum\ fator\ comum$$

De fato, se a raiz quadrada de 2 for racional é possível exprimi-la por meio de uma fração irredutível, ou seja, que não pode ser simplificada (CABRAL, 2013). Elevando a equação anterior ao quadrado, obtém-se que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad => \quad p^2 = 2q^2$$

Portanto, sendo p² o dobro de um número inteiro, p² deveria necessariamente ser par. Em contrapartida, um número ímpar ao quadrado resulta sempre em outro ímpar. Desta feita, é possível escrever p = 2s, com s igual a um número inteiro (CABRAL, 2013). Substituindo, tem-se:

$$(2s)^2 = 2q^2 \quad => \quad 4s^2 = 2q^2 \quad => \quad 2s^2 = q^2$$

Analogamente ao raciocínio feito para p, entende-se que q² deve ser par, assim como q. Logo, se q e p são números pares, são divisíveis por 2 e, assim, a fração p/q seria redutível, contradizendo a hipótese inicial. O raciocínio não poderia levar à redução de frações e, sendo assim, a raiz quadrada de 2 não pode ser racional (CABRAL, 2013).

E assim, Garcia *et al*. ([20--]) retomam o resultado da sequência de Fibonacci:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

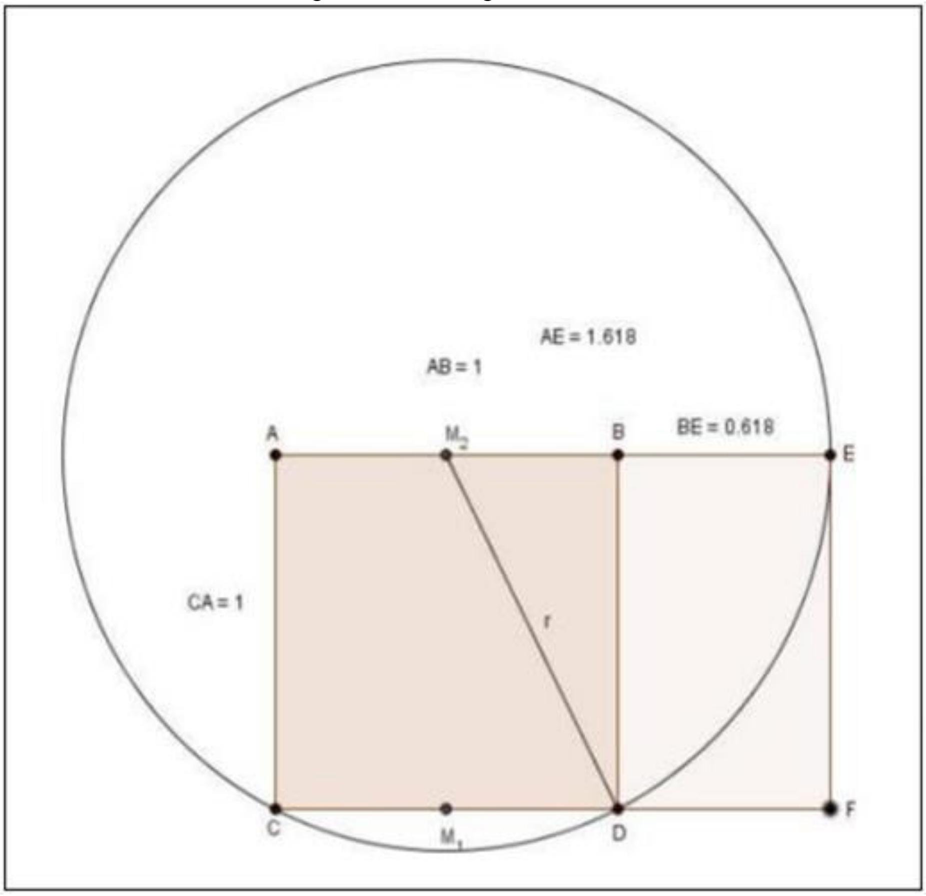
Com isso, apontam que o número de ouro é irracional pelo fato de que envolve a raiz quadrada não exata de um número natural, o 5.

5 RETÂNGULO DE OURO E MÁSCARA DE PHI

A partir do número Phi são geradas diversas variáveis matemáticas, dentre elas, o retângulo áureo, que é uma figura esteticamente agradável – ver Figura 2 –, seus lados são obtidos por meio da razão áurea, isto é: a/b = 1,618... Tal retângulo exerceu e exerce uma grande influência na arquitetura e na pintura, especialmente na Antiguidade Clássica e no Renascimento (QUEIROZ, 2007).

Atualmente, é utilizado vastamente para gerar os formatos de cartões de crédito, carteira de identidade, carteira de habilitação, capas de livros e cadernos, cartas de baralho, blocos de papel de carta, janelas, construções, dentre outros objetos comuns ao dia a dia (QUEIROZ, 2007).

Figura 2 - Retângulo de ouro.

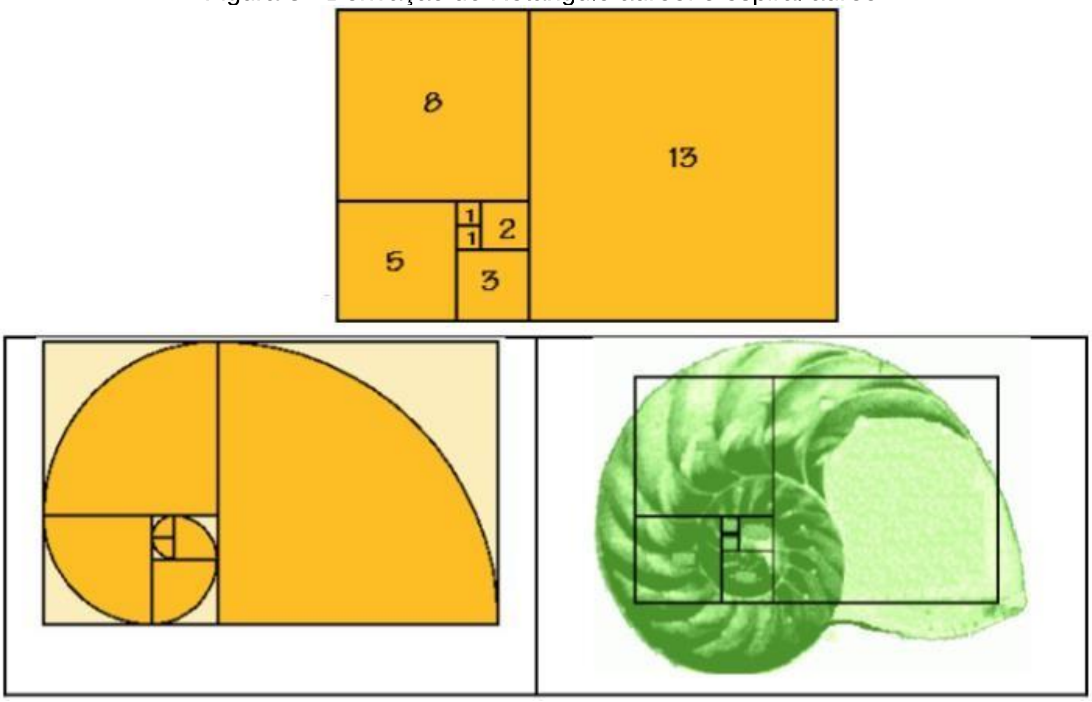


Fonte: Souza; Sousa e Monte (2015).

O referido retângulo chegou a ser objeto de pesquisa da psicologia, mais precisamente no ano de 1876, o psicólogo alemão Gustav Fechner analisou a preferência inconsciente das pessoas por formato retangulares, o resultado do estudo demonstra que a maioria dos indivíduos prefere um retângulo com razão entre as suas medidas que se aproxima muito dos números e relações da razão áurea, tal pesquisa foi repetida posteriormente, por Wilmar em 1894, Lalo em 1908 e Thorndike em 1917, obtendo resultados semelhantes (QUEIROZ, 2007).

De modo complementar, Queiroz (2007) ainda explicita que um retângulo áureo possui uma propriedade especialmente relevante: quando dividido um quadrado e um retângulo, o novo retângulo também áureo, com a repetição de tal processo de forma infinita e com a união dos cantos dos quadrados formados, constrói-se uma espiral, que recebe a denominação de espiral áureo – ver o desenvolvimento do Retângulo Áureo na Figura 3.

Figura 3 - Derivação do Retângulo áureo: o espiral áureo.



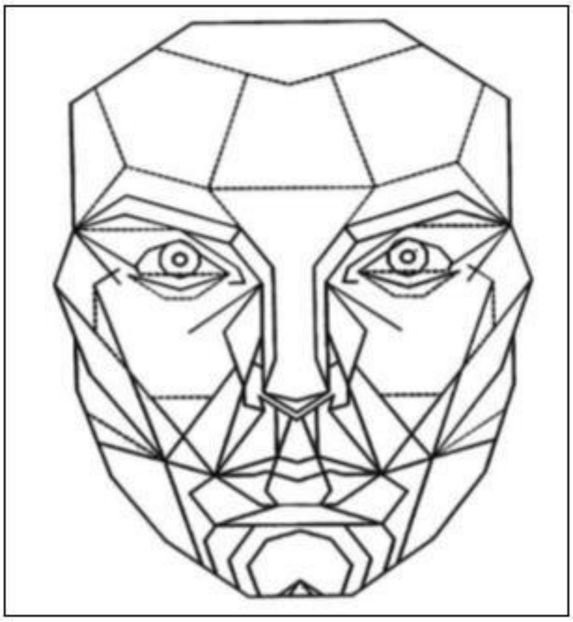
Fonte: Huntley (1985).

Por sua vez, a espiral também possui uma propriedade a ser comentada, por mais divergentes que dois segmentos da curva gerada possam ser em tamanho, elas não são diferentes formalmente, ou seja, o formato se mantém. Exemplificando: supondo que com o uso de um microscópio, tirasse uma fotografia das convoluções, de forma que, quando adequadamente ampliada, a cópia poderia encaixar-se perfeitamente na espiral, sendo assim, entende-se que ela não possui ponto terminal, podendo crescer para fora (ou para dentro) de modo indefinido e seu formato se mantem inalterável (HUNTLEY, 1985).

Passando à máscara de Phi, Nguyen *et al*. (2016) depreendem que a face humana é entendida como o aspecto mais importante da aparência física de uma pessoa, de forma que os fatores geralmente mais importantes e relacionados com a atratividade facial são a aparência mediana, o dimorfismo sexual, a juventude e a simetria, sendo esta última passível de alcance matemático.

A busca pela beleza ideal, especialmente a veiculada midiaticamente e vastamente aceita em sociedade, faz com que cada vez mais pessoas busquem de forma incansável o seu alcance, neste sentido, Souza; Sousa e Monte (2015) comentam que foi estudado e adaptado aos olhos humanos uma técnica matemática por meio da qual pode-se diferenciar aquilo que é bonito e o que é feio, sendo assim, para a obtenção de um rosto "matematicamente perfeito", com proporções verdadeiramente divinas, o cirurgião plástico Steven Marquardt desenvolveu uma máscara, a Máscara de Phi – ver Figura 4 –, que toma fundamento central as sequências matemáticas já discutidas neste estudo.

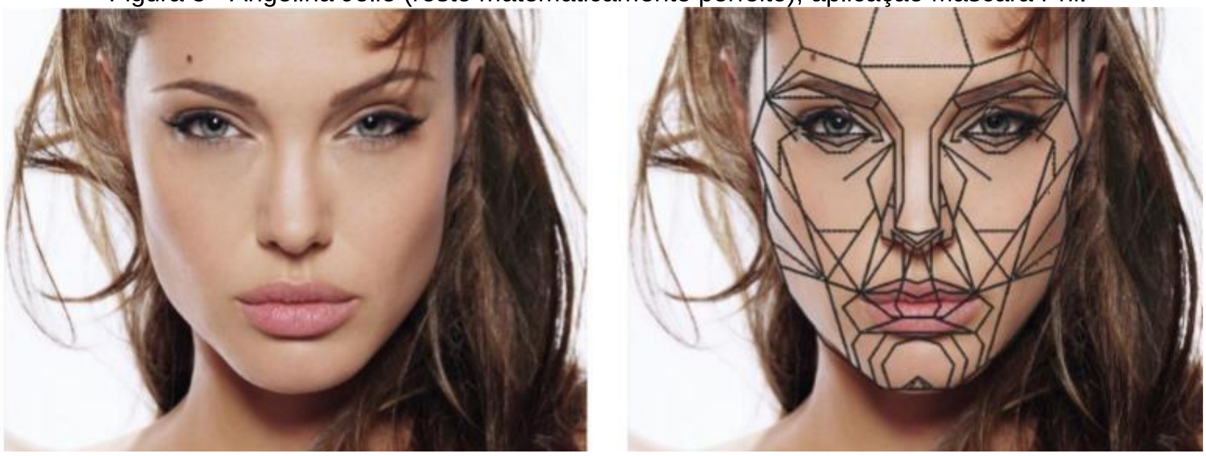
Figura 4 - Máscara de Phi.



Fonte: Souza; Sousa e Monte (2015).

Os autores Souza; Sousa e Monte (2015), explicando a Máscara de Phi, destacam que a face humana perfeita deve ser seccionada em três partes horizontalmente, a parte superior está entre o tríquio e a glabela, a parte está entre a glabela e o subnasal e a inferior está entre o subnasal e o queixo. Logo, as três seções devem ser iguais, porém, em geral não o são. Por sua vez, verticalmente, a face deveria ser dividida em cinco partes, onde a largura de cada um dos olhos é uma parte e as duas distâncias intercantais e a largura nasal compreendem uma parte cada. Ademais, os autores em questão desenvolveram uma aplicação da máscara de Phi a fim de demonstrar que ela justifica a beleza matematicamente harmônica, ver figuras 5 e 6.

Figura 5 - Angelina Jolie (rosto matematicamente perfeito), aplicação Máscara Phi.



Fonte: Souza; Sousa e Monte (2015).

Na Figura 5, observa-se o rosto de uma das mulheres, considerada uma das mais belas do mundo, Angelina Jolie, sobre a qual aplicou-se a máscara de Phi, onde percebe-se o encaixe praticamente perfeito de suas feições às proporções inspiradas no número divino, assim comprovando que há perfeição matemática em traços estéticos humanos.

Em continuidade, a Figura 6 desenvolvida no estudo de Souza; Sousa e Monte (2015), traz a sobreposição da máscara de Phi sobre o rosto da mulher mais "feia" do mundo, Lizzie Velasquez, de forma que a maioria dos traços da máscara que são relacionados com o número divino e proporcionalmente perfeito não se aproximam das feições dela, claramente deslocados e, consequentemente, justificando a falta de beleza matemática.

Figura 6 - Lizzie Velasquez (mulher mais "feia" do mundo), aplicação Máscara Phi.

Fonte: Souza; Sousa e Monte (2015).

6 APLICAÇÕES DO NÚMERO DE OURO

São muitas as possibilidades de aplicação do número de ouro, especialmente no alcance de perfeição estética – anatomicamente no sorriso humano por exemplo – e nas artes da pintura e da arquitetura, neste interim, os estudiosos Biembengut e Hein (2000) expressam que, de forma geral, na natureza, onde existir harmonia, será encontrada a presença do número de ouro, que é indicado como a máxima expressão do equilíbrio, sendo assim, se atentar o olhar é possível encontrá-lo em toda parte.

A exemplo, a molécula de DNA, módulo básico e simples das estruturas biológicas do organismo humano, está na proporção Phi, e assim, o emprego da Proporção Áurea na natureza pode ser visualizado facilmente nos reinos animal, vegetal e mineral (PHILIPS, 1999).

6.1 PERFEIÇÃO ESTÉTICA

O entendimento de que a imagem corporal seria a figura mental formada em referência ao tamanho, aparência e forma de determinado corpo humano, é um construto multifacetado e compreende o envolvimento de dimensões fundamentais, a saber: a perceptiva e a atitudinal, a primeira refere-se à acurácia – que diz respeito à proximidade entre o valor obtido experimentalmente e o valor verdadeiro é uma grandeza física – envolvida no processo de julgamento da beleza corporal e a segunda subdivide-se em componentes distintos: cognitivo, comportamental e afetivo (FERREIRA *et al*., 2014).

Acerca da aplicação matemática do número de phi na estética, mais especificamente na odontologia, cabe compreender que a estética necessariamente envolve o estudo da beleza, sendo uma resposta emocional a ela, e assim, o tratamento dental cosmético utiliza-se de componentes artísticos e subjetivos para criação da ilusão da beleza. Desta forma, entende-se que a preocupação com a estética, que está presente em todos os setores do conhecimento humano, também é objetivo primordial da Odontologia Restauradora (PAGANI; BOTTINO, 2003).

Os autores Pagani e Bottino (2003) comentam que o primeiro estudo a mencionar a aplicação do Número Divino à Odontologia foi desenvolvido Lombardi, no ano de 1973, nele foi dimensionado que o equilíbrio facial não necessariamente exige simetria, de forma que a estabilidade dos componentes da face deveria ser resultado do ajuste de todos os elementos.

Continuando os estudos históricos odontológicos que se utilizam do número de phi, Levin, no ano de 1978, citou que Filius Bonacci – conhecido como Fibonacci –, em 1202, publicou o livro Liber Abaci, que foi influência para que muitos matemáticos passassem a usar o sistema numérico hindu-arábico. Levin desenvolveu a principal aplicabilidade do Número de Ouro na Odontologia, com o emprego de compassos observou que na face humana mais harmônica mantinha uma Proporção constante entre as partes maiores e menores (PAGANI; BOTTINO, 2003).

Dessa forma, no estudo de Levin foi observado que a largura do incisivo central está proporcionalmente equilibrado com a largura do incisivo lateral que, por sua vez, está em Proporção Dourada com a parte anterior do canino, o que gera uma percepção esteticamente agradável, ademais, o autor evidenciou que as regras áureas devem ser aplicadas levando em consideração o sexo, a linha gengival, a linha e a posição labial, assim como o biotipo físico e a faixa etária do indivíduo (PAGANI; BOTTINO, 2003).

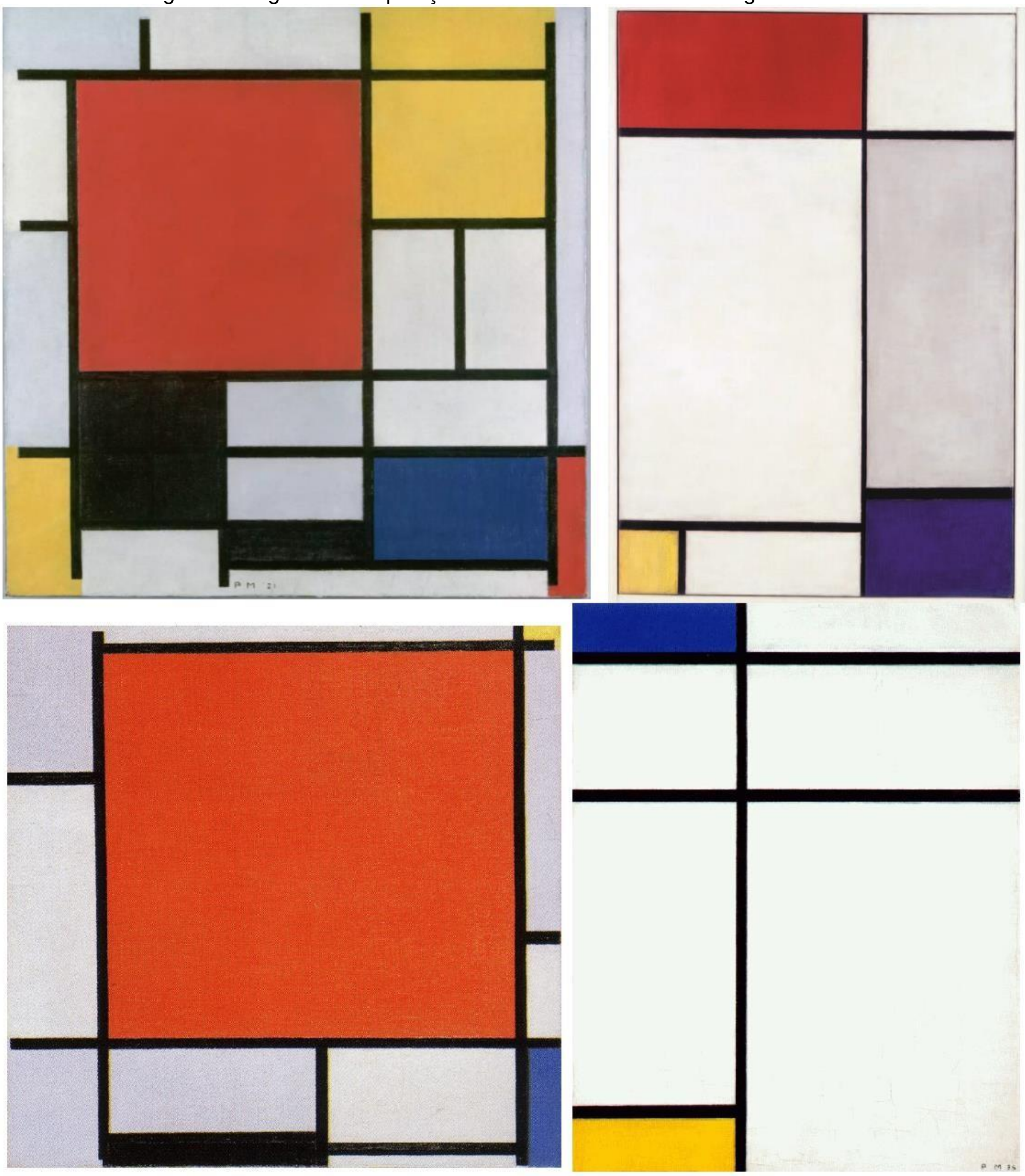
6.2 ARTE

Passando às aplicações da seção áurea na arte da pintura, observa-se que as obras do pintor holandês Pieter Mondrian (1872-1974), as melhores representantes do abstracionismo geométrico, buscavam, assim como as produções de Cézanne, aquilo que existe de constante nos seres e elementos da natureza, apesar de parecerem diferentes (PROENÇA, 2003).

Mondrian compreendida que cada coisa, seja casa, árvore ou paisagem, apresenta essência que vai para além da aparência. E, por sua vez, tais coisas, em essência, estão em total harmonia e equilíbrio com o Universo, neste interim, a função do artista seria revelar esta essência oculta e apresentar os aspectos harmônicos à sociedade (PROENÇA, 2003).

Aplicando em especial as variantes do retângulo e do espiral áureo, Mondrian, em suas composições, aplicou o emprego de linhas pretas horizontais e verticais que delimitavam blocos nas cores branco, vermelho, amarelo ou azul. Os anseios do artista seriam o alcance de uma arte que se expresse de forma clara e disciplinada, refletindo, de certo modo, as leis objetivas do universo. Nesta busca por harmonia e a beleza, Mondrian necessariamente utilizou e encontrou a Matemática, descobrindo o número de ouro e o retângulo de ouro, presença recorrente em suas pinturas (GOMBRICH, 2006), tal como pode ser visto na Figura 7:

Figura 7 - Algumas composições de Mondrian com o Retângulo de Ouro.



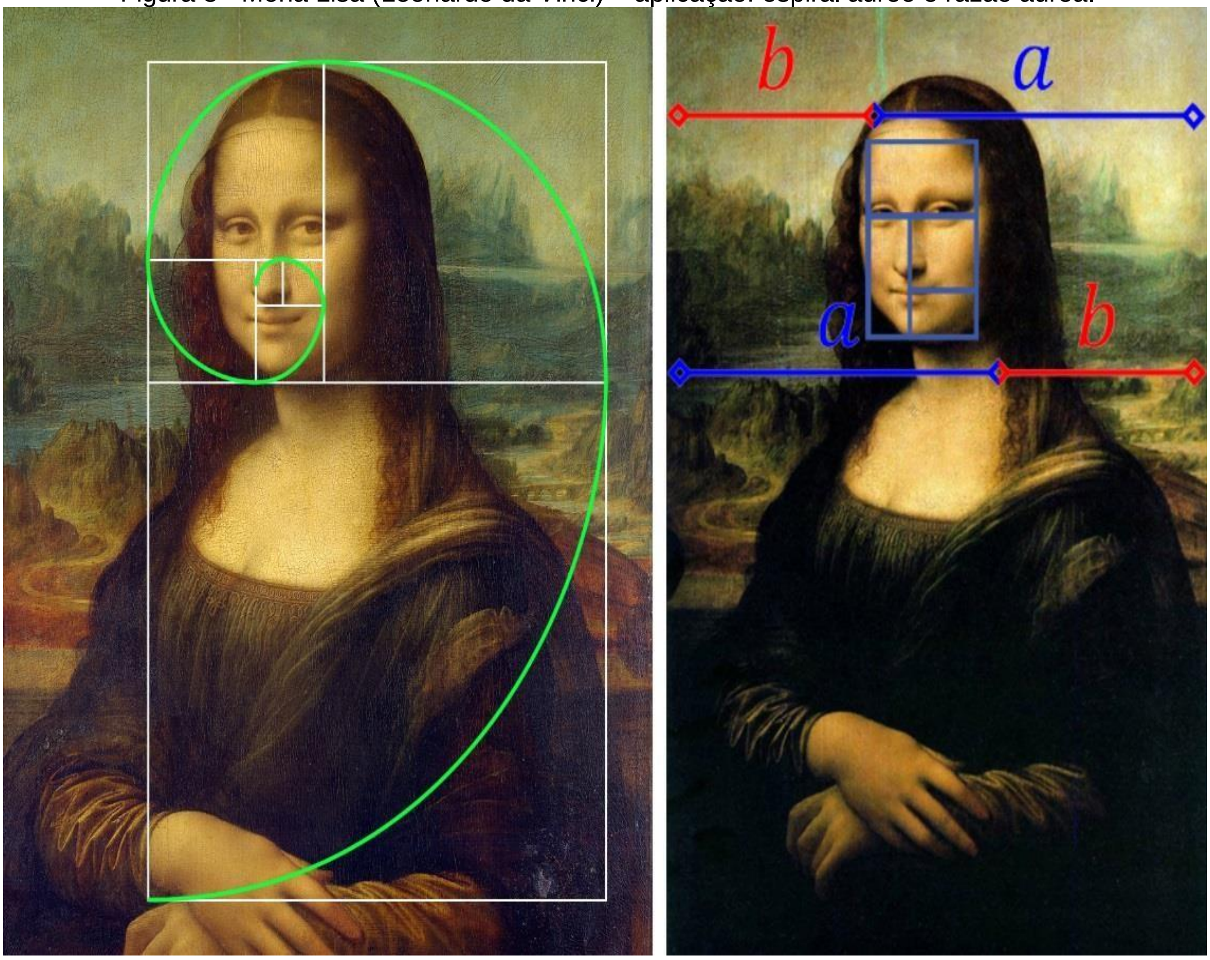
Fonte: Gombrich (2006).

Como comentado, no Renascimento os pensadores inspirados na Antiguidade Clássica, retomaram os estudos e aplicações matemáticas correlacionadas com a perfeição e proporcionalidade estéticas, destacando especialmente o corpo humano na escultura e na pintura. Os artistas se voltavam à

Matemática e Anatomia, para melhor desenvolver as produções que consideravam as leis de perspectivas, proporção e construção do corpo humano (QUEIROZ, 2007).

Nesta perspectiva, uma das obras mais notáveis de tal época é a Mona Lisa de Leonardo da Vinci (1452-1519), pois, em diferentes vistas da obra, como por exemplo, nas relações proporcionais entre seu tronco e cabeça, ou ainda entre os elementos do rosto, aparece a razão áurea – ver Figura 8 com a aplicação do espiral áureo e da razão áurea na Mona Lisa de Leonardo da Vinci – (QUEIROZ, 2007), a principal característica era, portanto, criar espaços proporcionais de modo que “o observador possa compreender a lei que o organiza” (PROENÇA, 2003, p. 79) partindo de qualquer ângulo visual.

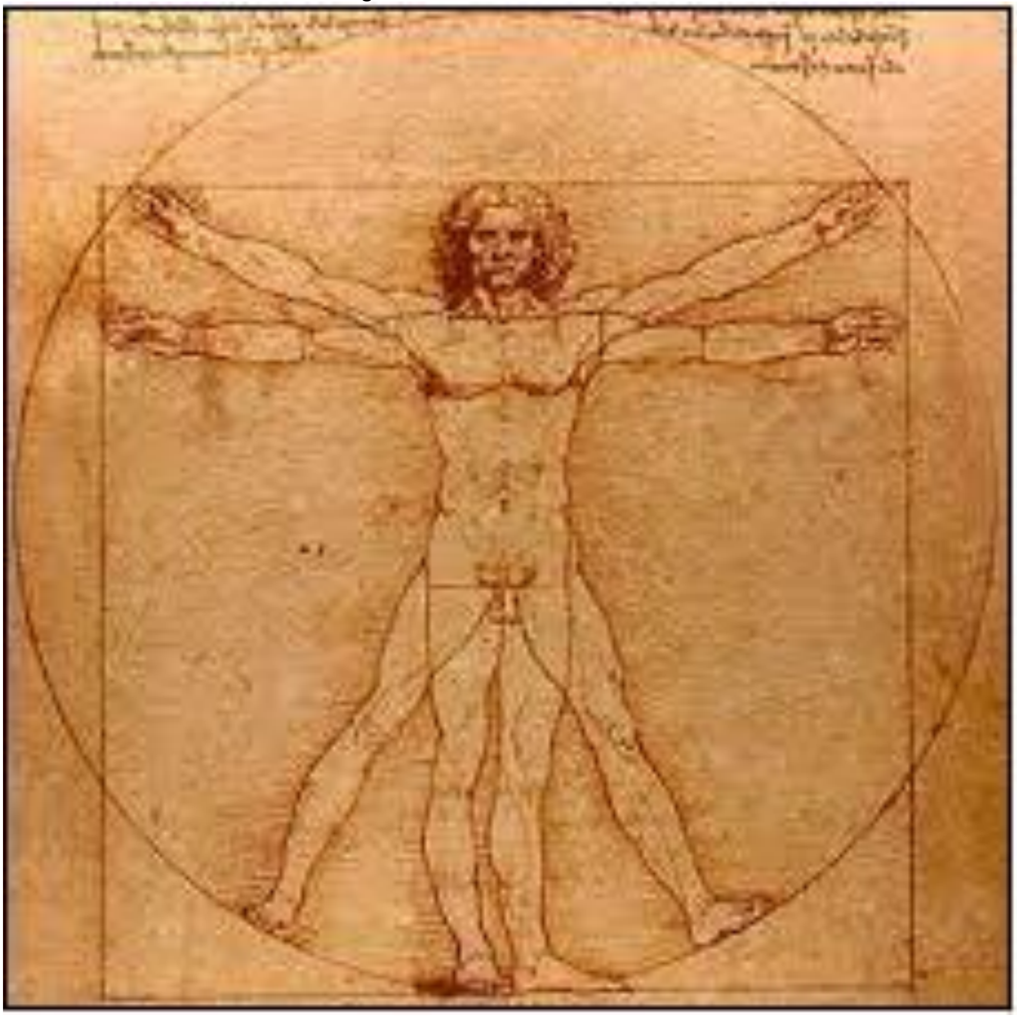
Figura 8 - Mona Lisa (Leonardo da Vinci) – aplicação: espiral áureo e razão áurea.



Fonte: Gombrich (2006).

Ainda na pintura, Gombrich (2006) ressalta o desenvolvimento do modelo ideal do ser humano por Leonardo da Vinci, que parte da proporção divina da PA e apresenta proporções perfeitas, harmônicas e equilibradas entre as partes do corpo, o artista dedicou-se aos estudos de perspectivas, proporções e anatomia a fim de realizar seu desenho mais famoso: “O Homem Vitruviano”.

Figura 9 - Homem Vitruviano.



Fonte: Gombrich (2006).

No homem vitruviano é perceptível que a razão entre a altura do indivíduo e a medida do umbigo até o chão; a razão entre o comprimento do braço e a medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio; razão entre o comprimento da perna e a medida do joelho até o chão possuem como resultado números muito próximos ao número Phi (QUEIROZ, 2007).

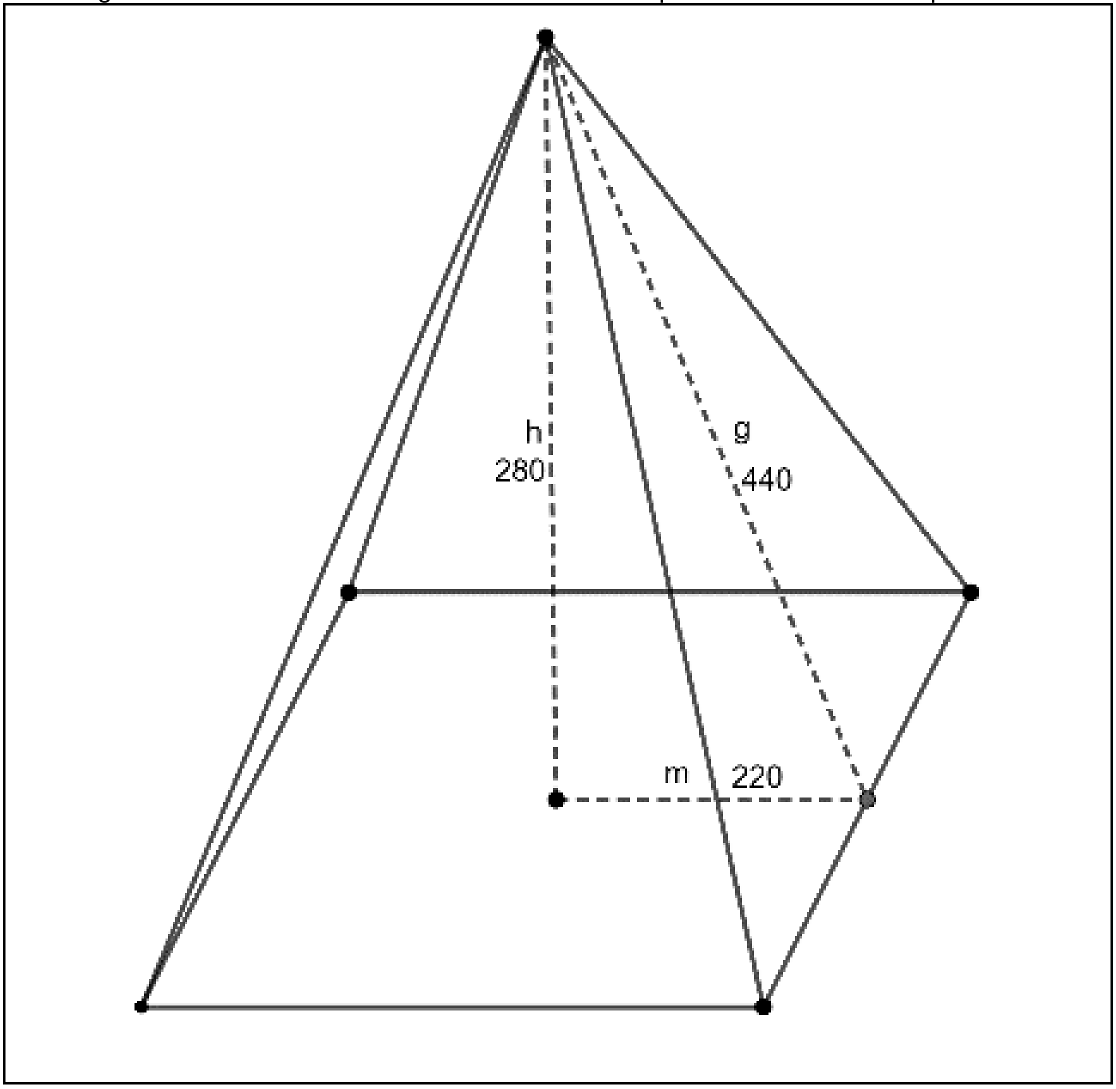
6.3 ARQUITETURA

Uma curiosidade arquitetônica em relação à razão áurea leva ao antigo Egito, uma vez que, a pirâmide de Quéops, uma das pirâmides com construção datada entre 2551 e 2528 a.C, e considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo, tinha as seguintes proporções: “sua altura media 280 cúbitos e a medida do lado da base 440 cúbitos” (EVES, 1997, p. 83), consequentemente, o apótema da base é de

220 cúbitos, assim, na pirâmide de Giseh a razão entre suas dimensões é Phi (EVES, 1997).

Seguindo tal linha de pensamento, é de importância comentar que o cálculo da medida do apótema pode ser alcançado com o uso do teorema de Pitágoras, segue exemplificação na Figura 10:

Figura 10 - Pirâmide e seus elementos: altura e apótemas da base e da pirâmide.



Fonte: Eves (1997).

Complementando, Queiroz (2007) dimensiona que se g é o apótema da pirâmide, h é a altura da pirâmide e m é o apótema da base da pirâmide, pode-se calcular a razão entre o apótema da pirâmide e o apótema da base da pirâmide, ou seja: g/m, obtendo: 356,08/220 = 1,618... – tal como demonstrado abaixo –, que é correspondente ao número Phi. Com este fato, a história mostra que os egípcios eram especialmente exatos no contar e medir, sendo surpreendente o aparecimento da razão áurea em tal construção do mundo antigo.

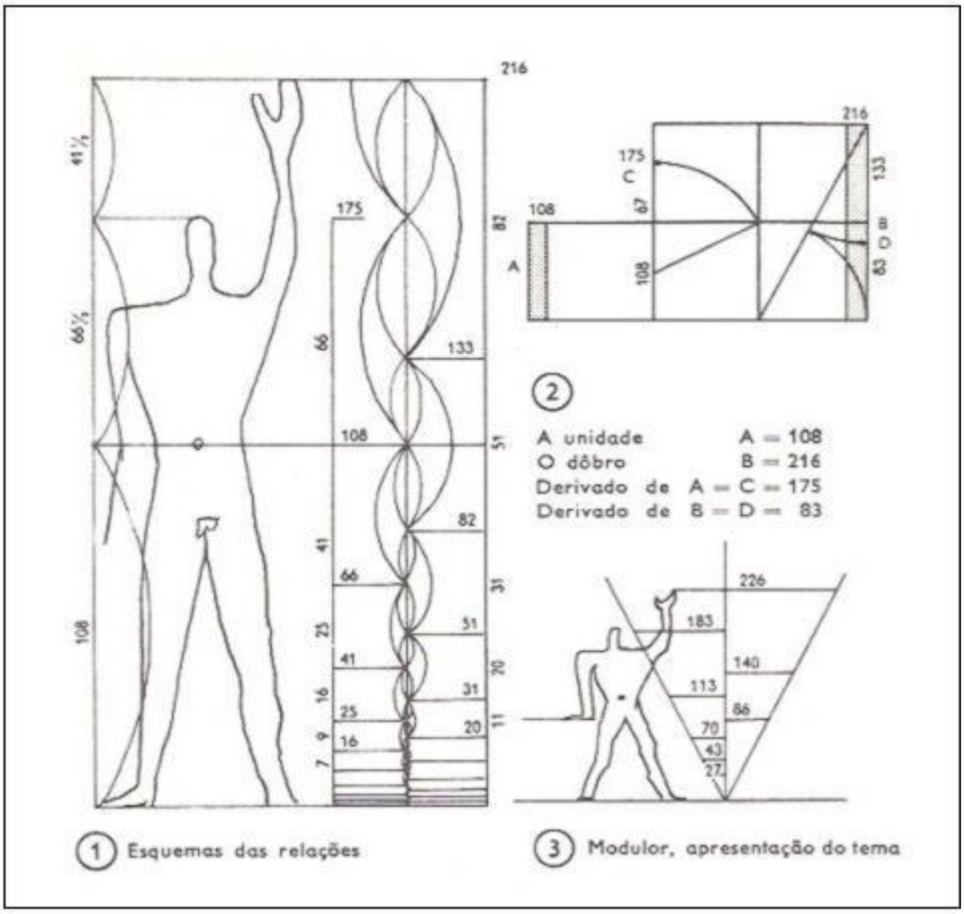
$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$g^2 = 280^2 + 220^2 = 78400 + 48400 = 126800$$

$$g = 356{,}08$$

Ainda acerca das aplicações arquitetônicas que envolvem a proporção áurea, revela-se que, no ano de 1946, o arquiteto franco-suíço Charles Édouard Jeanneret, conhecido pelo pseudônimo Le Corbusier (1887-1965), forjou um modelo de padrões de dimensões harmônicas à escala humana, a ser empregado no desenvolvimento das produções ligas à Arquitetura e ao Desenho Industrial, que foi chamado de “Le Modulor”, que segue exemplificado na Figura 11 (NEUFERT, 1976); a base do sistema se utiliza do número de ouro e a sequência de Fibonacci para estabelecer as médias humanas e foi considerada inicialmente a altura de 175 cm por ser a estatura média do homem europeu (PROENÇA, 2003).

Figura 11 - Modulor, Le Corbusier.



Fonte: Neufert (1976).

A respeito do Modulor, há o entendimento de que este é um sistema de proporções do espaço arquitetônico baseado num critério geométrico compreendendo o oferecimento de extensa gama de dimensões, as medianas são aquelas relacionadas ao corpo humano; as extremas aplicam-se aos detalhes mínimos dos instrumentos de precisão e, também, à escala dos grandes projetos de planejamento urbano e arquitetural (SUMMERSON, 1999).

7 CONCLUSÃO

É notório que a beleza, correlata e envolvida recorrentemente com ideais de perfeição, pode ser matematicamente alcançada ou explicada. Grandes matemáticos, filósofos e pensadores no decorrer da história desenvolveram estudos nessa seara de conhecimento, criando aplicações do número de ouro (ou número de phi) na arte, arquitetura, anatomia humana, estética, odontologia e outras.

Compreende-se, então, que a matemática realmente está em tudo, há muito a humanidade busca estudar e utiliza a proporcionalidade em diversas áreas do conhecimento, uma das formas de aplicar proporções com objetivo de atingir a perfeição e a harmonia é com o uso do chamado número de ouro, do qual derivam outros elementos matemáticos – retângulo e elipse áureos, máscara de phi, etc. – vastamente estudados e aplicados em outros ramos.

Com as análises desenvolvidas, percebeu-se que as proporções de ouro e, consequentemente, o número de phi podem auxiliar as diferentes áreas a alcançar o ideal matemático de beleza, entretanto, cabe destacar a subjetividade daquilo que é belo, sempre lembrando que na Matemática, através de cálculos e proporções podemos chegar a um modelo perfeito e harmônico, não necessariamente o mais belo, afinal, a concepção e apreensão do que é beleza difere de indivíduo para indivíduo e é uma discussão filosófica mais profunda.

REFERÊNCIAS

BAROSA, E. J. O. História da proporção áurea: história e filosofia da matemática e da educação matemática. **DocPlayer**, 2012. Disponível em: https://docplayer.com.br/16620257-Historia-da-proporcao-aurea-historia-e-filosofia-da-matematica-e-da-educacao-matematica.html. Acesso em: 20 nov. 2021.

BERTOLLO, R. M. *et al*. Avaliação da harmonia facial em relação às proporções divinas de Fibonacci. **Revista Portuguesa de Estomatologia, Medicina Dentária e Cirurgia Maxilofacial**, v. 49, n. 4, p. 213-219, 2008.

BIEMBEGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo Contexto, 2000.

BIEMBENGUT, M. S. **Número de ouro e secção áurea:** considerações e sugestões para a sala de aula. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

CABRAL, F. A prova da irracionalidade da raiz de 2 por "redução ao absurdo". **Matemática Viva**, 18 maio 2013. Disponível em: https://www.matematicaviva.pt/2013/05/blog-post.html. Acesso: 07 fev. 2022.

COLLISELLI, N. Matematicamente perfeito: a proporção áurea no universo. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: ENEM, 2016. p. 1-12.

COMMANDINO, F. **Euclides**: elementos de geometria. Tradução de Roberto Simson. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida.** São Paulo: Livraria da Física, 2007.

ECO, U. (org.). **História da beleza.** Rio de Janeiro: Record, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Atual, 1997.

FERREIRA, M. E. C.; CASTRO, M. R.; MORGADO, F. F. R. **Imagem corporal:** reflexões, diretrizes e práticas de pesquisa. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2014.

FERRER, Joseane Vieira. **O número de ouro na arte, arquitetura e natureza**: beleza e harmonia. 2005. 14 f. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, DF, 2005.

FREITAS, C. M. S. M. *et al*. O padrão de beleza corporal sobre o corpo feminino mediante o IMC. **Revista Brasileira de Educação Física e Esporte**, São Paulo, v. 24, n. 3, p. 389-404, jul./set. 2010.

GARCIA, V. C. *et al*. **O número de ouro**. Porto Alegre: UFRGS, [20--]. Disponível em:http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/Site%20V%EDdeos/html/textos_pdf/numero_de_ouro.pdf. Acesso: 07 fev. 2022.

GOMBRICH, E. H. **A história da arte.** Rio de Janeiro: Zahar, 2006.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção:** um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

LEVIN, E. I. Dental esthetics and the golden proportion. **J Prosthet Dent**, v. 40, n. 3, p. 244-252, sept. 1978.

LOMBARDI, R. E. The principles of visual perception and their clinical application to denture esthetics. **J Prosthet Dent**, v. 29, n. 4, p. 358-382, apr. 1973.

LOUREIRO, I. Sobre as várias noções de estética de Freud. **Revista de Psicanálise**, São Paulo: Escuta, v.16, n. 175, p. 23-32, nov. 2003. Disponível em: http://www.editoraescuta.com.br/pulsional/175_01.pdf. Acesso em: 20 nov. 2021.

NEUFERT, E. **Arte de projetar em arquitetura**. 5.ed. São Paulo: Gustavo Gili do Brasil, 1976.

NGUYEN, M. S. *et al*. The golden proportion in facial soft-tissues of vietnamese females. **Stomatologija**, v. 18, p. 80-85, 2016.

PAGANI, C.; BOTTINO, M. C. Proporção áurea e a odontologia estética. **Jornal Brasileiro de Dentística & Estética**, Curitiba, v. 2, n. 5, p. 80-85, 2003.

PEREIRA, L. C.; FERREIRA, M. V. Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. **Disc. Scientia. Série:** Ciências Naturais e Tecnológicas, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

PROENÇA, G. **História da arte.** São Paulo: Editora Ática, 2003.

PROKOPAKIS, E. P. *et al*. The golden ratio in facial symmetry. **Rhinology**, v. 51, p. 18-21, 2013

QUEIROZ, R. M. **Razão áurea:** a beleza de uma razão surpreendente. 2007. Trabalho (Matemática) - Programa de Desenvolvimento Educacional, Superintendência da Educação, Secretaria do Estado da Educação, Curitiba, PR, 2008. Disponível em: http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf. Acesso: 07 dez. 2021.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica:** a construção do conhecimento. 13. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2012.

SOUZA, D. V.; SOUSA, F. B.; MONTE, G. S. A máscara de phi: a beleza que só a Matemática Explica. *In*: JORNADA DE ESTUDOS EM MATEMÁTICA, 1., 2015, Marabá. **Anais** [...]*.* Marabá: JEM, 2015. p.1-16. Disponível em: https://jem.unifesspa.edu.br/images/Anais/v1_2015/CC_20150979002_A_mscara_de_PHI.pdf. Acesso: 02 dez. 2021.

SUMMERSON, J. **A linguagem clássica da arquitetura**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

THOMAS, R. *et al*. The golden ratio in facial symmetry. **Rhinology**, v. 51, p. 18-21, 2013.