Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Laboratorium 1
Arytmetyka komputerowa

9 marca 2021

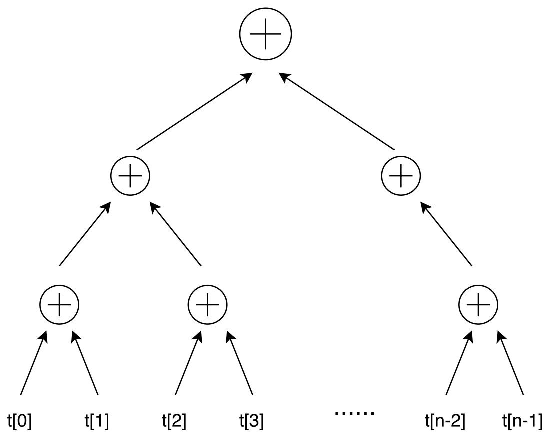
Zadanie 1 Sumowanie liczb pojedynczej precyzji

1. Napisz program, który oblicza sumę N liczb pojedynczej precyzji przechowywanych w tablicy o $N = 10^7$ elementach. Tablica wypełniona jest tą samą wartością v z przedziału $[0.1, 0.9]$ np. $v = 0.53125$.

2. Wyznacz bezwzględny i względny błąd obliczeń. Dlaczego błąd względny jest tak duży?

3. W jaki sposób rośnie błąd względny w trakcie sumowania? Przedstaw wykres (raportuj wartość błędu co 25000 kroków) i dokonaj jego interpretacji.

4. Zaimplementuj rekurencyjny algorytm sumowania, działający jak na rysunku poniżej.



5. Wyznacz bezwzględny i względny błąd obliczeń. Dlaczego błąd względny znacznie zmalał?

6. Porównaj czas działania obu algorytmów dla tych samych danych wejściowych.

7. Przedstaw przykładowe dane wejściowe, dla których algorytm sumowania rekurencyjnego zwraca niezerowy błąd.

Zadanie 2 Algorytm Kahana

Zaimplementuj algorytm sumowania Kahana.

```
float sum = 0.0f;
float err = 0.0f;
for (int i = 0; i < tab.length; ++i) {
    float y = tab[i] - err;
    float temp = sum + y;
    err = (temp - sum) - y;
    sum = temp;
}
```

1. Wyznacz bezwzględny i względny błąd obliczeń dla tych samych danych wejściowych jak w przypadku testów z Zadania 1.

2. Wyjaśnij dlaczego w algorytm Kahana ma znacznie lepsze własności numeryczne? Do czego służy zmienna `err`?

3. Porównaj czasy działania algorytmu Kahana oraz algorytmu sumowania rekurencyjnego dla tych samych danych wejściowych.

Zadanie 3 Sumy częściowe

Rozważ sumy częściowe szeregu definiującego funkcję dzeta Riemanna

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

oraz funkcję eta Dirichleta

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^s}$$

Dla $s = 2, 3.6667, 5, 7.2, 10$ oraz $n = 50, 100, 200, 500, 1000$ oblicz wartości funkcji $\zeta(s)$ i $\eta(s)$ w pojedynczej precyzji sumując w przód, a następnie wstecz. Porównaj wyniki z rezultatami uzyskanymi dla podwójnej precyzji. Dokonaj interpretacji otrzymanych wyników.

Wskazówka
Porównaj oszacowania względnych błędów dla działań

$$fl(fl(x + y) + z)$$

oraz

$$fl(x + fl(y + z))$$

przy założeniu, że $|x + y| < |y + z|$.

Zadanie 4 Błędy zaokrągleń i odwzorowanie logistyczne (dodatkowe)

Rozważ odwzorowanie logistyczne dane następującym wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Przy czym $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ i $r > 0$. Zbadaj zbieżność procesu iteracyjnego określonego tym równaniem w zależności od wartości parametru r oraz x_0.

a) Dla różnych wartości r ($1 \leqslant r \leqslant 4$) oraz kilku wybranych wartości x_0 przedstaw na wykresie wartości x_n uzyskane po wielu iteracjach odwzorowania logistycznego (diagram bifurkacyjny). Dokonaj interpretacji otrzymanych wyników.

b) Dla tych samych wartości x_0 oraz r ($3.75 \leqslant r \leqslant 3.8$) porównaj trajektorie obliczone z użyciem pojedynczej i podwójnej precyzji. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

c) Dla $r = 4$ i różnych wartości x_0 wyznacz (pojedyncza precyzja) liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia zera. Przedstaw interpretację rezultatów.