Técnicas de simulación numérica

Práctica 1: Fluidos compresibles en una dimensión (parte 2)

David Martín Belda
dmbelda@gmail.com

3. Análisis de las perturbaciones en modos normales

3.1. Otro experimento de perturbaciones de pequeña amplitud

Archivos de entrada: *exp1.dat*

Se realiza ahora un experimento con una condición inicial con forma gaussiana (ec. (5.20) en los apuntes). La perturbación tiene una amplitud $A = 4 \times 10^{-4}$. Se observa que la perturbación de la densidad permanece fijaen el tiempo, lo cual se puede esperar dado que tanto la velocidad como el gradiente de presiones iniciales son nulos.

Representando s/c_v comprobamos que la condición inicial no es isoentrópica:

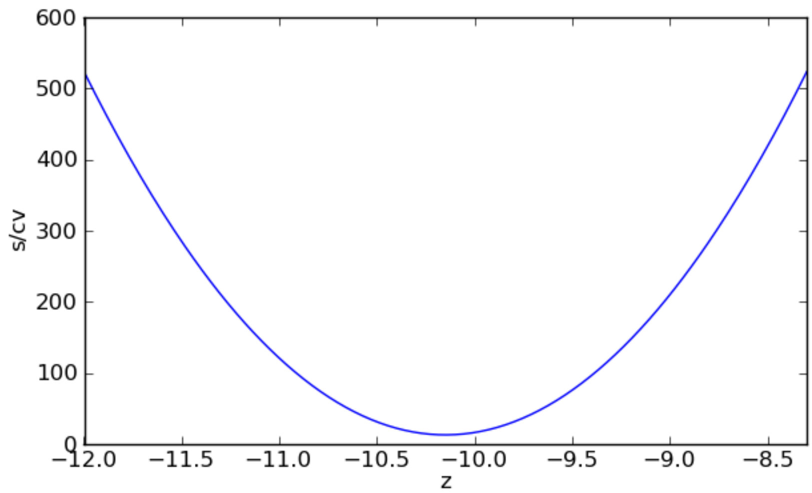

Figura 1: s/c_v en el instante inicial.

3.2. Análisis en modos normales

3.2.1. Relaciones de amplitud para cada modo individual

Partimos de las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6) del guión de la tarea, a saber:

$$\omega\frac{\rho'}{\rho_0} = kv; \tag{1}$$

$$\omega\frac{v}{c_{s0}} = k\frac{c_{s0}}{\gamma}\frac{p'}{p_0}; \tag{2}$$

$$\omega\left(\frac{p}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) = (\gamma - 1)kv. \tag{3}$$

Introduciendo en estas ecuaciones las frecuencias dadas por las relaciones de dispersión para los modos de sonido y la entropía, $\omega_\pm = \pm c_{s0}k$, $\omega_e = 0$, y usando las definiciones $R \equiv \rho'/\rho_0$, $P \equiv p'/p_0$, y $V \equiv v7c_{s0}$, obetenemos las siguientes relaciones entre las amplitudes para cada modo:

$$P_+ = \gamma V_+ = \gamma R_+; \tag{4}$$

$$P_- = -\gamma V_- = \gamma R_-; \tag{5}$$

$$P_e = V_e = 0. \tag{6}$$

Nótese que, de las ecuaciones (2), y (3), se sigue inmediatamente que P_e y V_e son nulas. Teniendo esto en cuenta, la ecuación (1) se convierte, para el modo de entropía, en una tautología por la que R_e queda como parámetro libre, al menos matemáticamente.

Viendo estas relaciones, identificamos el primer experimento con el modo (+) de sonido. En efecto, las relaciones entre amplitudes del modo positivo equivalen a que las tres perturbaciones sinusoidales estén en fase. Para el modo negativo, las relaciones entre amplitudes implican una contrafase entre la perturbación de la velocidad y las otras dos, lo cual se corresponde al cambio que hicimos en las condiciones iniciales cuando quisimos obtener una onda que se desplazase con velocidad negativa. Para el experimento de la sección anterior, se verifican las relaciones de amplitudes de un modo entrópico puro.

3.2.2. Descomposición de una condición inicial arbitraria

Las relaciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6), con $V_e = P_e = 0$, constituyen un sistema de siete ecuaciones lineales independientes del que podemos despejar las amplitudes de los modos de la perturbación en función de P, V y R. Haciendo unas cuantas cuentas, se obtiene:

$$P_+ = \frac{P + \gamma V}{2};\ R_+ = V_+ = \frac{P/\gamma + V}{2}; \tag{7}$$

$$P_- = \frac{P - \gamma V}{2};\ R_- = -V_- = \frac{P/\gamma - V}{2}; \tag{8}$$

$$P_e = 0;\ V_e = 0;\ R_e = \text{arb.} \tag{9}$$

3.2.3. Perturbación de la entropía

En el estado perturbado, la expresión para la entropía en función de p y ρ queda:

$$\begin{aligned} s_0 + s' &= c_v \log(p_0 + p') - c_v\gamma(\rho_0 + \rho') \\ &= c_v \log(p_0(1 + P)) - c_v\gamma(\rho_0(1 + R)) \\ &= c_v \log(p_0) - cv\gamma \log(\rho_0) + \\ &+ c_v \log(1 + P) - c_v\gamma \log(1 + R) \end{aligned} \tag{10}$$

Reagrupando los logaritmos, y teniendo en cuenta que $log(1 + x) \approx x$ cuando $x << 1$, obtenemos para la perturbación:

$$s' = c_v(P - \gamma R) \tag{11}$$

Usando las relaciones anteriores junto con ésta, se ve que para los modos de sonido la perturbación en entropía es nula, $s'_\pm = 0$, mientras que para el modo de entropía, $s' = -c_v\gamma R_e$, lo cual encaja con que dicho modo se llame así.

La perturbación de la entropía no tiene por qué ser isoentrópica, como se ha visto en el primer experimento de esta parte de la práctica, si la situación es estacionaria. Si la condición inicial es isoentrópica en un modo entrópico puro, el estado perturbado no es más que un nuevo estado de equilibrio, por lo que no da lugar a evolución temporal. Fijándome en el ejemplo del primer experimento, parece que el hecho de que la condición inicial no sea isoentrópica tiene que ver con que el sistema no esté aislado. Para mantener una situación estacionaria, en un gas en el que la densidad no es homogénea, tiene que mantenerse una distribución de temperaturas no homogénea, algo que no es posible en un sistema aislado en virtud del principio cero de la termodinámica. En cuanto se aisle el sistema, la temperatura tenderá a homogeneizarse, se creará un gradiente de presiones y se evolucionará hacia un estado de equilibrio.

3.2.4. Experimentos con condiciones iniciales arbitrarias

Con las condiciones iniciales propuestas, vemos que la densidad empieza a decaer en el centro, *manteniéndose la presión constante, salvo en el paso de los lóbulos propagantes*, y no deja de hacerlo conforme pasa el tiempo. En torno a este sumidero (vemos que el sistema no parece estar aislado) se forman dos lóbulos que se alejan. El primero tiene que ver con el modo de entropía. La descomposición nos da para R_e un valor de $-1{,}7 \times 10^{-4}$. Los modos de sonido se identifican con la parte propagante; se obtiene $V_+ = 13/2\gamma\, 10^{-4}$ y $V_- = -11/2\gamma\, 10^{-4}$, con lo cual habrá ondas propagándose hacia la derecha y hacia la izquierda.

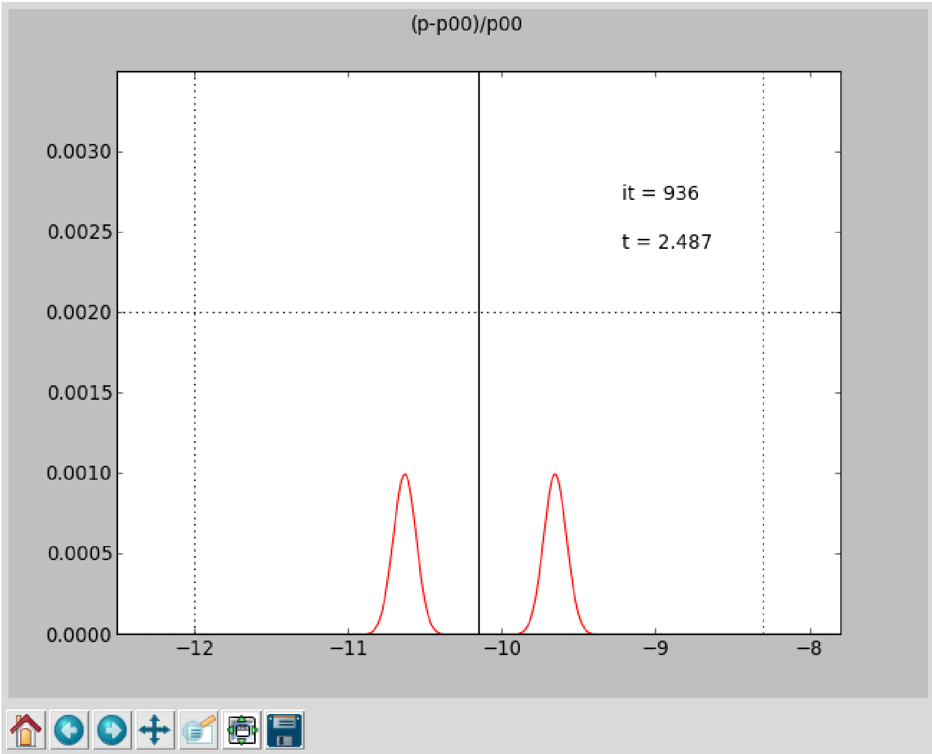

Figura 2: Pertuirbación en la presión.

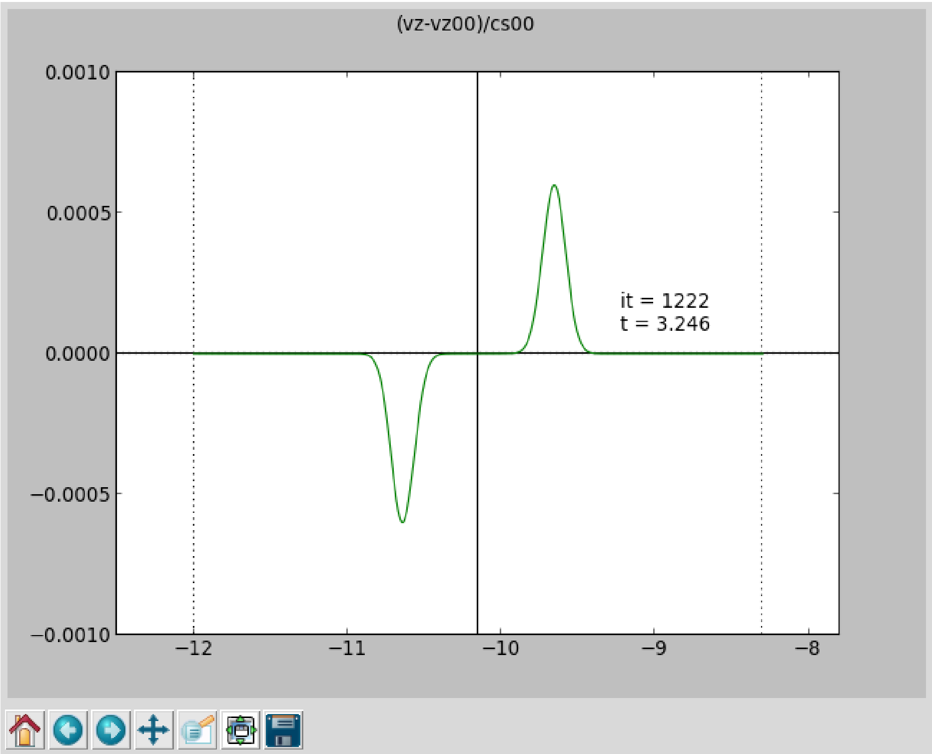

Figura 3: Perturbación en la velocidad.

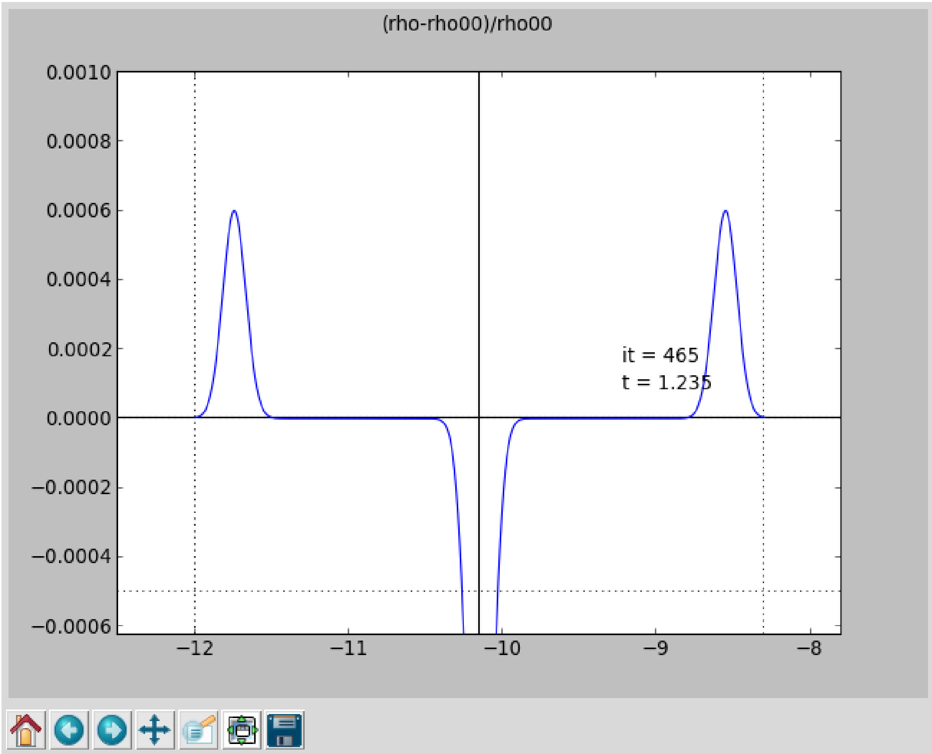

Figura 4: Perturbación en la densidad.