

Técnicas de simulación numérica  
Práctica 2: Fluidos compresibles en dos dimensiones

David Martín Belda  
dmbelda@gmail.com

## 1. El código 2D

El código que se presenta es una ampliación del de la práctica anterior a dos dimensiones. La generalización de la mayor parte de las rutinas es directa. Las diferencias principales son:

- El sistema de ecuaciones en derivadas parciales tiene ahora cuatro ecuaciones (ver ecs (1))
- Las magnitudes se representan con arrays bidimensionales.
- Los flujos, en este caso, son vectores en cada punto, con lo que vendrán representados por dos matrices bidimensionales cada uno.

**Ecuaciones de un fluido en 2-D.** Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_m}{\partial t} &= -\frac{\partial f_{m,x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{m,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{cx}}{\partial t} &= -\frac{\partial f_{cx,x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{cx,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{cz}}{\partial t} &= -\frac{\partial f_{cz,x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{cz,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_e}{\partial t} &= -\frac{\partial f_{e,x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{e,z}}{\partial z}\end{aligned}\tag{1}$$

donde:

$$u_m \equiv \rho; \quad u_{cx} \equiv \rho v_x; \quad u_{cz} \equiv \rho v_z; \quad u_e \equiv \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon\tag{2}$$

y:

$$\begin{aligned}\vec{f}_m &= (u_{cx}, u_{cz}); \quad \vec{f}_e = (u_e + p) \vec{v} \\ \vec{f}_{cx} &= \left( \frac{u_x^2}{\rho} + p, \frac{u_x u_z}{\rho} \right); \quad \vec{f}_{cz} = \left( \frac{u_x u_z}{\rho}, \frac{u_z^2}{\rho} + p \right)\end{aligned}\tag{3}$$

## 1.1. El esquema WR/L en 2 dimensiones

Se tiene una red bidimensional con espaciado uniforme en cada dirección (aunque los intervalos  $\Delta x$  y  $\Delta z$  no tienen por qué ser iguales)..

**Paso a  $n+1/2$ :** Sea  $u$  cualquiera de las magnitudes a actualizar y  $\vec{f}$  su flujo. En primer lugar, se calcula el promedio de la densidad ( $\bar{u}$ ) en el centro de las celdas, es decir, en los puntos  $(i + 1/2, j + 1/2)$ . A continuación, se promedian las derivadas de las componentes de los flujos respecto de la coordenada correspondiente para obtener las derivadas en dichos puntos ( $\bar{\partial}_x f_x$  y  $\bar{\partial}_z f_z$ ). Nótese que las derivadas se definen en los puntos intermedios de la red, por lo que un promedio en  $x$  de una derivada respecto a  $z$  será una aproximación de la derivada en el centro de la celda. Por último se realiza un avance temporal de  $dt/2$ :

$$u_{n+1/2} = \bar{u}_n - \frac{dt}{2}(\bar{\partial}_x f_x + \bar{\partial}_z f_z) \quad (4)$$

Con esto obtenemos valores para las densidades en los centros de las celdas a  $t + dt/2$ .

### **Paso a $n+1$ :**

Se calculan los flujos en el centro de las celdas a partir de las densidades según las ecuaciones (3). Se derivan los flujos y se promedian sus derivadas como en el paso anterior, lo que nos da una estimación de dichas derivadas de nuevo en los puntos de red, salvo en las celdas guarda. En todos los demás puntos, se realiza un avance temporal de  $dt$ , partiendo de la densidad en el paso  $n$ ,  $u_n$ :

$$u_{n+1} = u_n - dt(\bar{\partial}_x f_x + \bar{\partial}_z f_z) \quad (5)$$

Para completar el paso temporal, se calculan los valores en las celdas guarda aplicando las condiciones de contorno.

## 1.2. Testing

Una vez implementado el código, se ha testado usando ondas planas propagándose en direcciones  $x$ ,  $z$  y en diagonal, usando diferentes valores de  $k_x$  y  $k_z$ . Todos los problemas encontrados se han debido a errores en la ampliación del código a dos dimensiones, tales como olvidar calcular el flujo de alguna componente del momento en esa dirección. La prueba que ha resultado ser más útil en este caso, ya que gracias a ella he detectado un error en el código cuyas consecuencias no se apreciaban a simple vista con las ondas propagantes, ha sido probar la propagación en ambas direcciones con una velocidad del fluido igual a menos la velocidad del sonido en la dirección de propagación. Se espera que la onda se quede estática en la pantalla, lo que no sucedía para una de las dos direcciones. El error estaba en el cálculo de la energía inicial, donde sólo había tenido en cuenta una de las componentes de la velocidad en el término de energía cinética. Después de esta última corrección, todas las demás pruebas han dado los resultados esperados (por ejemplo, propagación de la onda en una dirección con movimiento del fluido en la dirección perpendicular...)

**Mejoras futuras del código.** El código está lo suficientemente bien estructurado como para poder incluir fácilmente más física, como un término de transporte de calor. A nivel práctico, la modificación más urgente quizá sea la traducción de alguna de las rutinas más pesadas, si no el código entero, a un lenguaje compilado como FORTRAN o C, lo que aumentaría su velocidad en un factor típicamente de 50 a 100.

## 2. El experimento: Trazado de rayos

### 2.1. Trazado de rayos en 1D

Las ecuaciones de la aproximación *eikonal* para trazado de rayos en 1D son:

$$\frac{dk}{dt} = -k \frac{dc_s(x)}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = c_s(x) \quad (7)$$

Estas ecuaciones se han integrado numéricamente para cada paso de tiempo. De la primera se obtiene el valor de  $k$  en cada instante, y de la segunda la posición de un punto del rayo. Estos valores se almacenan en un archivo para poder representarlos.

El experimento se ha llevado a cabo con una red de  $4096 \times 4$  puntos, más las celdas guarda. Para incluir el efecto de un medio inhomogéneo se ha dado a la densidad de equilibrio una forma exponencial creciente. Según la primera ecuación del trazado de rayos, si el gradiente de velocidades es negativo se espera que  $k$  aumente con el tiempo, es decir, que el paquete de ondas se comprima. Para comprobar que  $k$  va aumentando, se ha ido calculando cada cierto número de pasos la transformada de Fourier de la perturbación de presión. Se comprueba en las figuras que el paquete de ondas se comprime, a la vez que el número de ondas se va desplazando hacia mayores valores absolutos, a medida que el tiempo avanza.

Para comprobar el desplazamiento del paquete de ondas a la velocidad del sonido en cada punto, se ha dibujado una  $x$  encima del máximo de la onda, y en cada paso de tiempo se ha desplazado ese punto de acuerdo a la segunda de las ecuaciones de arriba. Como puede verse en las imágenes, el punto se ha desplazado con el paquete de ondas, tal y como predice la aproximación.

Debido a algún error que no he encontrado, hay una discrepancia entre el  $k$  que asigno a cada valor de la transformada de fourier y el  $k_0$  de la onda modulada de presión.

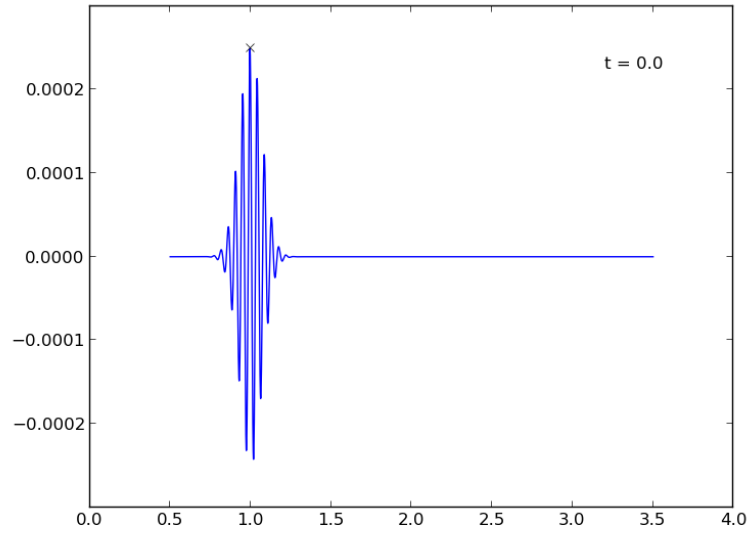


Figura 1: Paquete de ondas inicial

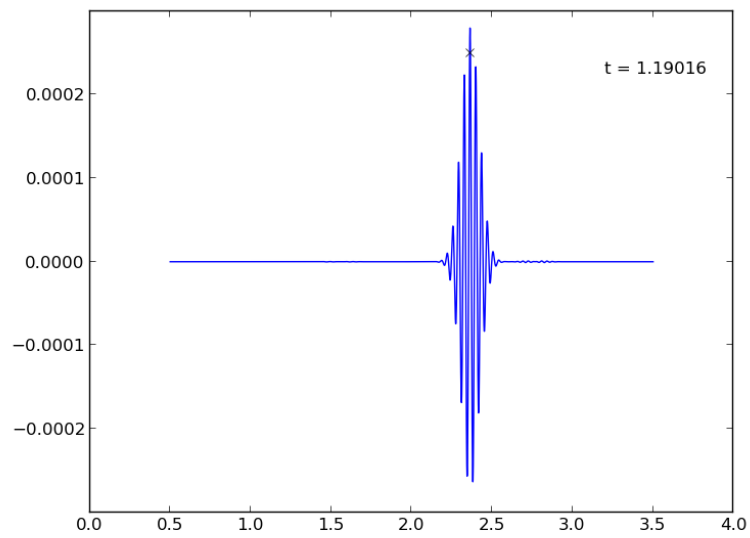


Figura 2: Paquete de ondas pasado un tiempo  $t = 1,19016uds$ . El punto del rayo sigue sobre la misma posición del paquete.

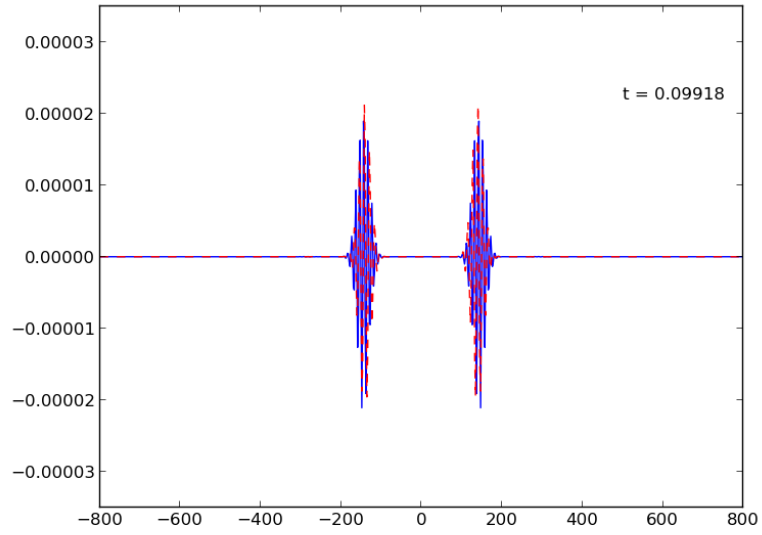


Figura 3: Transformada de Fourier del paquete de ondas inicial

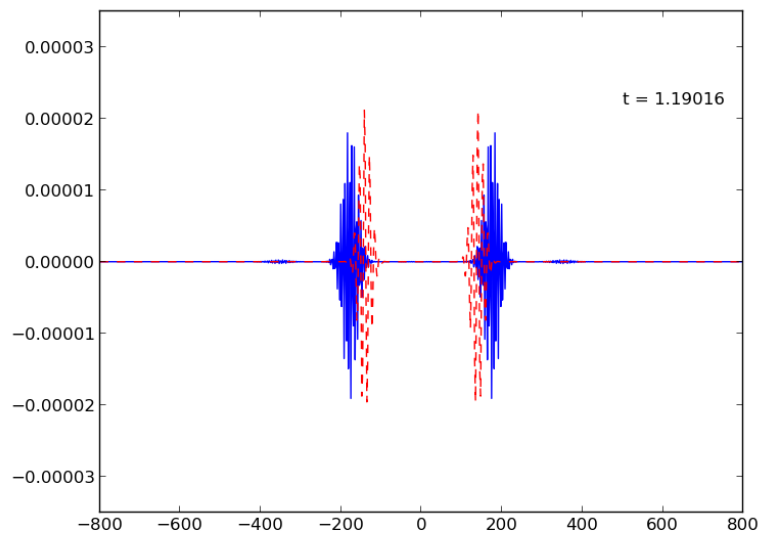


Figura 4: Desplazamiento de la  $k$  central (la de la onda plana modulada) hacia valores absolutos mayores.

## 2.2. Trazado de rayos en 2D

Sólo he probado el caso más elemental; desplazamiento en un medio homogéneo. La observación más llamativa en este caso es la deformación del paquete de ondas a medida que avanza el tiempo (figuras 5 y 6).

Para comprender este comportamiento, calculamos la transformada de la perturbación de presión inicial:

$$p' = \exp\left(\frac{x^2}{w_x^2} + \frac{z^2}{w_z^2}\right) \cos(k_0 x) \quad (8)$$

donde se ha omitido el factor de amplitud por no recargar la notación. Esta función es separable en coordenadas cartesianas. La transformada de Fourier será:

$$F \equiv F[p'](k_x, k_z) = F\left[\exp\left(\frac{z^2}{w_z^2}\right)\right](k_z) \left(F\left[\exp\left(\frac{x^2}{w_x^2}\right)\right] * F(\cos(k_0 x))(k_x)\right) \quad (9)$$

donde el asterisco denota producto de convolución. Así:

$$F = w_x w_z \pi e^{-(w_z \pi k_z)^2} e^{-(w_x \pi (k_x - k_0))^2} \quad (10)$$

Se concluye que el comportamiento observado en las figuras se da porque hay números de onda en la dirección  $x$ , centrados en torno a  $k_x = 0$ , implicados. En la dirección  $z$ , los valores de  $k_z$  están centrados en  $k_0$ , lo que explica la propagación del paquete de ondas mayoritariamente en esa dirección. De la transformada de Fourier se infiere fácilmente que para minimizar este efecto de "dispersión" hemos de aumentar  $w_z$  en las condiciones iniciales, resultado bastante intuitivo ya que cuanto más lo aumentemos más se parecerá el paquete a un frente de ondas planas propagándose en dirección  $z$ . El precio de esto es que al estirar el paquete inicial en la dirección  $x$  podemos tener problemas de tipo técnico, como que se dejen de cumplir las condiciones de contorno al salirse el paquete del dominio numérico.



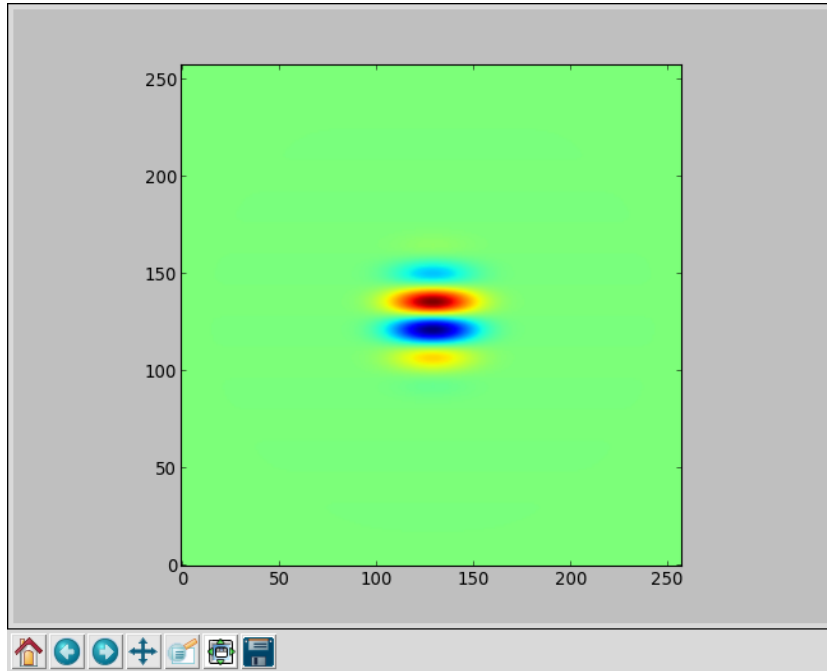


Figura 5: Paquete de ondas inicial

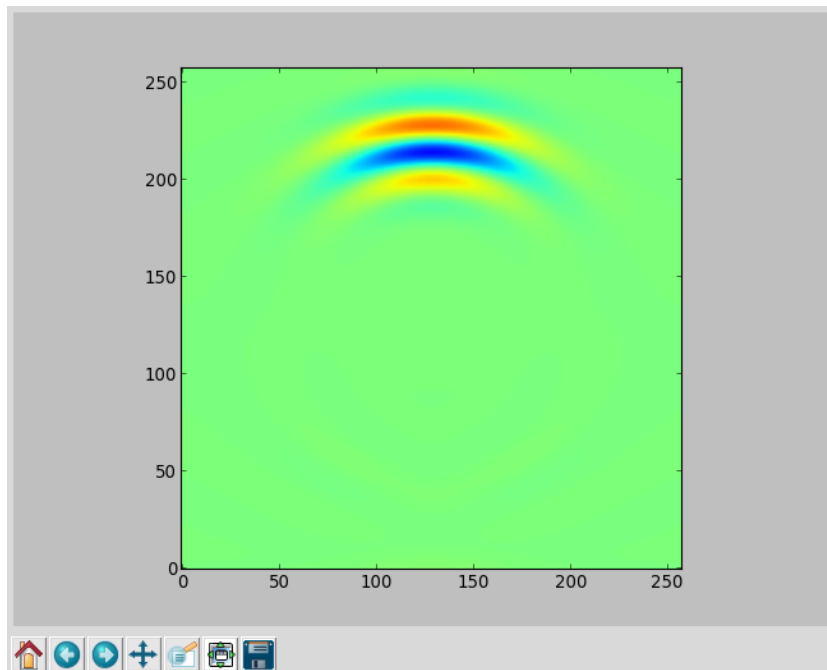


Figura 6: Deformación producida por la distribución de  $k_x$