作业参考解答

章鹤梓

2016 年 3 月 14 日

1 第二次作业习题解答

1 (1) $\partial u/\partial x = f'(xy)\partial(xy)/\partial x = yf'$，同理 $\partial u/\partial y = xf'$。易得结论。

12 (1) 特征方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{z+x} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y} \tag{1}$$

由合分比定理易得出

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} = \frac{\mathrm{d}(y-z)}{y-z} \quad \Rightarrow \mathrm{d}\big(\ln(x-y)-\ln(y-z)\big)=0 \tag{2}$$

因此 $\dfrac{x-y}{y-z}$ 是运动积分，同理 $\dfrac{z-x}{y-z}$ 也是积分常数。因此有通解

$$u = u\left(\frac{x-y}{y-z}, \frac{z-x}{y-z}\right) \tag{3}$$

13 (1) 特征方程：

$$\mathrm{d}x_i/\sqrt{x_i} = 2\mathrm{d}\sqrt{x_i} = 2\mathrm{d}\sqrt{x_j} \tag{4}$$

故对任意 $i \neq j$ 而言 $\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}$ 是积分常数。因此有通解

$$u = u(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{x}-\sqrt{z}) \tag{5}$$

代入边值得 $u(1-\sqrt{y}, 1-\sqrt{z}) = y-z$，因此 $u(m,n) = (m-1)^2-(n-1)^2$

$$\begin{aligned} u(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{x}-\sqrt{z}) &= (\sqrt{x}-\sqrt{y}-1)^2-(\sqrt{x}-\sqrt{z}-1)^2 \quad (6)\\ &= (\sqrt{z}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}-2) \quad (7)\\ &= y-z+2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{z}-\sqrt{y}) \quad (8)\end{aligned}$$

14 (1) 积分一次得 $u = x^2 t + f(x)$，代入边值得 $f = x^2$ 故 $u = x^2(1+t)$

(2) 易得 $u = u(at + x)$，代入边值得 $u(x) = x^2$ 故 $u = (at + x)^2$

略难的作业 **题目中的光滑不需要分析的过于复杂，只需要分析连续性即可，可微性等不做要求**

(i) 由特征方程 $\mathrm{d}x/y = -\mathrm{d}y/x$ 知有首次积分 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，设另一个变量 $\phi = \mathrm{Arg}(x + y\mathrm{i})$，则有：

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \partial/\partial\phi = \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{9}$$

因此，若 $c \neq 0$，原方程化为 $\partial_\phi u - c(u - f/c) = 0$，$u$ 有通解

$$u(r, \phi) = g(r)\exp(c\phi) + f/c, \quad c \neq 0 \tag{10}$$

$g(r)$ 为任意函数。

否则当 $c = 0$ 时，方程化为

$$\partial_\phi u = -f \tag{11}$$

$$u = -f\phi + g(r) \tag{12}$$

在 $r = 0$ 处，u 必须与 ϕ 无关。得出

$$\begin{cases} g(0) = 0, & c \neq 0 \\ f = 0, & c = 0 \end{cases} \tag{13}$$

总之：

$$\boxed{\begin{cases} u(r, \phi) = g(r)\exp(c\phi) + f/c,\ g(0) = 0 & c \neq 0 \\ u(r, \phi) = g(r) & c = 0 \end{cases}} \tag{14}$$

对 ii 与 iii 的分析 全平面内单值的解 u 要满足周期性边界条件 $u(r, \phi) = u(r, \phi + 2\pi)$。因此需要附加额外条件：

$$\begin{cases} \exp(2\pi c) = 1, & c \neq 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = n\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

(ii) 在 u 的解非平庸的前提下，为了让 u 是实函数，需要满足 c 为实数。又由于 $c = n\mathrm{i}$ 的限制，$c = 0$，因此 $f = 0$。

(iii) 此时只需要 $c=n\mathrm{i}$ 即可，f 可以是任意复数

(iv) 正负半轴分别对应 $\phi=0,\phi=\pi$ 时的情况，$g(r)$ 可由任意一边确定下来：

$$g(r)=\theta(r)-f/c=(\theta(-r)-f/c)\exp(-c\pi),\quad r\geq 0 \tag{16}$$

前面的等号说明，第一问中 $g(r)$ 需要满足的条件如13，$\theta(r)-f/c$ 也需要同时满足；后面的等号就是 $\theta(x)$ 要满足的自洽性要求。

1.1 最后一个题目原点处可微性/光滑性的讨论

这小节都是附加内容，不做要求。但是解微分方程采用极坐标/球坐标在原点处是需要经过一些额外讨论的，这是极坐标/球坐标的一种缺陷。前面已经利用原点处的连续性条件得出了13。这里不讨论 $c=0$ 的简单情形。

1.1.1 一阶可微性

原点处方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\lim_{r\to 0}\frac{u(r\cos\theta,r\sin\theta)}{r-0}=g'(0)\mathrm{e}^{c\theta},\quad \boldsymbol{n}=(\cos\theta,\sin\theta) \tag{17}$$

这里利用了 $g(0)=0$ 的条件，而且转换到直角坐标 $u=u(x,y)$。因此可以得出：

$$u_{x+}=g'(0),\quad u_{y+}=g'(0)\mathrm{e}^{c\pi/2} \tag{18}$$

可微要求

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta \tag{19}$$

$$g'(0)\mathrm{e}^{c\theta}=g'(0)(\cos\theta-\sin\theta\mathrm{e}^{c\pi/2}) \tag{20}$$

代入 $c=n\mathrm{i}$ 得到：

$$g'(0)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-\cos\theta-\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2})=0 \tag{21}$$

因此有两种可能：

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ \quad n=\pm 1 \end{cases} \tag{22}$$

1.1.2 光滑性

一般情况下容易证明 $u=z^n+f/c=r^n\exp(\mathrm{i}n\phi)+f/c$ 是 $c=\mathrm{i}n$ 的时候的解 $g=r^n$，而且此时 u 是解析的所以一定满足光滑性要求。但是如果要得到所有解，会有与 n 有关的限制，就像1.1.1这种特殊情况一样。