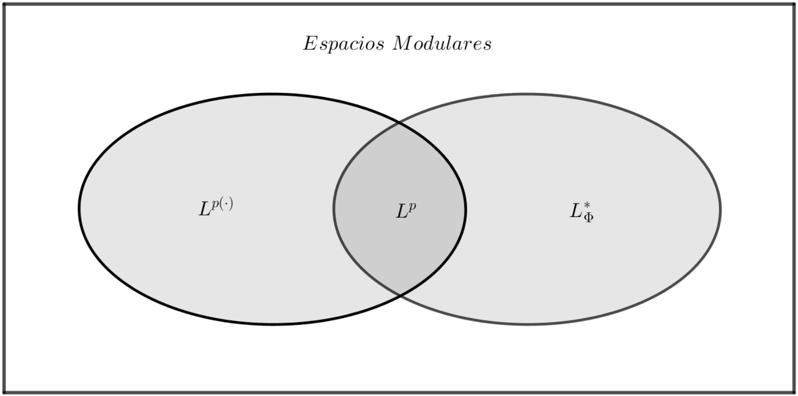
Extensiones de los espacios funcionales de Lebesgue: espacios de Orlicz, modulares y de exponente variable

Autor: Daniel Peinado Ginés

Tutor: F. Javier Soria de Diego

TRABAJO DE FIN DE GRADO

14 de julio de 2021


$Espacios\ Modulares$
$L^{p(\cdot)}$
L^p
L^*_Φ

Contenido de la presentación

1. Propiedades de las funciones convexas
   - Funciones convexas
   - N-funciones
2. Clases y espacios de Orlicz: propiedad Δ_2
   - Clases de Orlicz y Propiedad Δ_2
   - Espacios de Orlicz
   - Propiedades funcionales
3. Espacios modulares
4. Espacios de Lebesgue de exponente variable

Funciones convexas

Sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,

- es absolutamente continua y lipschitziana en todo intervalo $[a, b] \subset \mathring{I}$,
- es derivable en casi todo punto,
- existe su derivada por la derecha, es continua por la derecha y no decreciente,
- admite una representación de la forma

$$F(u) - F(a) = \int_a^u f(t)\, dt,$$

donde f es una función continua por la derecha y no decreciente.

Funciones convexas

Sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,

- es absolutamente continua y lipschitziana en todo intervalo $[a, b] \subset \mathring{I}$,
- es derivable en casi todo punto,
- existe su derivada por la derecha, es continua por la derecha y no decreciente,
- admite una representación de la forma

$$F(u) - F(a) = \int_a^u f(t)\, dt,$$

donde f es una función continua por la derecha y no decreciente.

Funciones convexas

Sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,

- es absolutamente continua y lipschitziana en todo intervalo $[a, b] \subset \mathring{I}$,
- es derivable en casi todo punto,
- existe su derivada por la derecha, es continua por la derecha y no decreciente,
- admite una representación de la forma

$$F(u) - F(a) = \int_a^u f(t)\,dt,$$

donde f es una función continua por la derecha y no decreciente.

Funciones convexas

Sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces,

- es absolutamente continua y lipschitziana en todo intervalo $[a, b] \subset \mathring{I}$,
- es derivable en casi todo punto,
- existe su derivada por la derecha, es continua por la derecha y no decreciente,
- admite una representación de la forma

$$F(u) - F(a) = \int_a^u f(t)\, dt,$$

donde f es una función continua por la derecha y no decreciente.

N-funciones

Definición

Se dice que una función Φ es una *N-función* si admite una representación de la forma

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} f(t)\,dt,$$

donde $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha, no decreciente y positiva para $t > 0$, tal que

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

N-función complementaria

$$\Psi(v) = \max_{v\geq 0}\{u|v| - \Phi(u)\}$$

N-funciones complementarias

$$\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p} \quad \text{y} \quad \Psi(v) = \frac{|v|^q}{q}$$

N-funciones

Definición

Se dice que una función Φ es una *N-función* si admite una representación de la forma

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} f(t)\,dt,$$

donde $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha, no decreciente y positiva para $t > 0$, tal que

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

N-función complementaria

$$\Psi(v) = \max_{v\geq 0}\{u|v| - \Phi(u)\}$$

N-funciones complementarias

$$\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p} \quad \text{y} \quad \Psi(v) = \frac{|v|^q}{q}$$

CLASES DE ORLICZ

Sea Φ una N-función. Se denota por $L_\Phi(\Omega)$ a la *clase de Orlicz* definida como

$$L_\Phi(\Omega) \doteqdot \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \; \rho(u;\Phi) = \int_\Omega \Phi(u(x))\, dx < \infty \right\}.$$

Definición

Se dice que una función Φ satisface la condición Δ_2 para grandes valores de u si existen $k > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi(2u) \leq k\Phi(u),$$

para todo $u \geq u_0$.

ESPACIOS DE ORLICZ

Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Se define el *espacio de Orlicz* $L^*_\Phi(\Omega)$ como

$$L^*_\Phi(\Omega) \doteqdot \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx < \infty, \text{ para todo } v \in L_\Psi \right\}.$$

Norma de Orlicz

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx$$

Si $u \in L^*_\Phi$, entonces

$$\boxed{\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) \leq 1\, dx}$$

Norma de Luxemburg

$$\|u\|_{(\Phi)} = \inf\left\{ k > 0 : \rho\left(\frac{u}{k};\Phi\right) \leq 1 \right\}$$

Si $u \in L^*_\Phi$ y $v \in L^*_\Psi$, entonces

$$\boxed{\left|\int_\Omega u(x)v(x)\, dx\right| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_{(\Psi)}}$$

Espacios de Orlicz

ESPACIOS DE ORLICZ

Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Se define el *espacio de Orlicz* $L^*_\Phi(\Omega)$ como

$$L^*_\Phi(\Omega) \doteqdot \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx < \infty, \text{ para todo } v \in L_\Psi \right\}.$$

Norma de Orlicz

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx$$

Si $u \in L^*_\Phi$, entonces

$$\boxed{\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) \leq 1\, dx}$$

Norma de Luxemburg

$$\|u\|_{(\Phi)} = \text{ínf}\left\{ k > 0 : \rho\left(\frac{u}{k}; \Phi\right) \leq 1 \right\}$$

Si $u \in L^*_\Phi$ y $v \in L^*_\Psi$, entonces

$$\boxed{\left|\int_\Omega u(x)v(x)\, dx\right| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_{(\Psi)}}$$

Espacios de Orlicz

ESPACIOS DE ORLICZ

Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Se define el *espacio de Orlicz* $L^*_\Phi(\Omega)$ como

$$L^*_\Phi(\Omega) \doteqdot \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx < \infty, \text{ para todo } v \in L_\Psi \right\}.$$

Norma de Orlicz

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx$$

Si $u \in L^*_\Phi$, entonces

$$\boxed{\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) \leq 1\, dx}$$

Norma de Luxemburg

$$\|u\|_{(\Phi)} = \text{ínf} \left\{ k > 0 : \rho\left(\frac{u}{k};\Phi\right) \leq 1 \right\}$$

Si $u \in L^*_\Phi$ y $v \in L^*_\Psi$, entonces

$$\boxed{\left| \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \right| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_{(\Psi)}}$$

Sea Φ una N-función y sea L^*_Φ el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L^*_Φ es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L^*_Φ es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L^*_\Phi = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L^*_Φ es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Sea Φ una N-función y sea L^*_Φ el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L^*_Φ es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L^*_Φ es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L^*_\Phi = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L^*_Φ es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Sea Φ una N-función y sea L_Φ^* el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L_Φ^* es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L_Φ^* es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L_\Phi^* = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L_Φ^* es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L_\Phi^*, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L_\Psi^*, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Sea Φ una N-función y sea L_Φ^* el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L_Φ^* es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L_Φ^* es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L_\Phi^* = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L_Φ^* es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L_\Phi^*, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L_\Psi^*, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Sea Φ una N-función y sea L^*_Φ el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L^*_Φ es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L^*_Φ es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L^*_\Phi = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L^*_Φ es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Sea Φ una N-función y sea L^*_Φ el correspondiente espacio de Orlicz. Entonces,

- L^*_Φ es un espacio de Banach,
- las normas de Orlicz y de Luxemburg son equivalentes,
- L^*_Φ es separable si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- $L^*_\Phi = L_\Phi$ si, y solo si, Φ satisface la propiedad Δ_2,
- L^*_Φ es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ tiene como espacio asociado $(L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ.

Definición

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es un modular en X, si se cumplen

1. ρ es una función convexa,
2. ρ es continua por la izquierda, i.e., $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. si $|\lambda| = 1$, entonces $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Espacios modulares

Definición

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es un modular en X, si se cumplen

1. ρ es una función convexa,
2. ρ es continua por la izquierda, i.e., $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. si $|\lambda| = 1$, entonces $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Espacios modulares

Definición

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es un modular en X, si se cumplen

1. ρ es una función convexa,
2. ρ es continua por la izquierda, i.e., $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. si $|\lambda| = 1$, entonces $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Espacios modulares

Definición

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es un modular en X, si se cumplen

1. ρ es una función convexa,
2. ρ es continua por la izquierda, i.e., $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. si $|\lambda| = 1$, entonces $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Espacios modulares

Definición

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es un modular en X, si se cumplen

1. ρ es una función convexa,
2. ρ es continua por la izquierda, i.e., $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
4. si $|\lambda| = 1$, entonces $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

ESPACIOS MODULARES

Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea ρ un modular en X. Se define el *espacio modular* X_ρ como

$$X_\rho \doteq \left\{ u \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda u) = 0 \right\} = \left\{ u \in X : \rho(\lambda u) < \infty, \text{ para algún } \lambda > 0 \right\}.$$

Espacios de Lebesgue de exponente variable

ESPACIOS $L^{p(\cdot)}$ DE EXPONENTE VARIABLE

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. Se define el conjunto de las funciones medibles en Ω tales que existe un $k > 0$ para el cual se satisface

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{k} \right)^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |f(x)| < \infty$$

donde $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : \; p(x) = \infty\}$. A este espacio se le llama *espacio de Lebesgue de exponente varible*, y se denota por $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Norma de Luxemburg

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \; \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

Otra norma

$$|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\rho_{p'(\cdot)}(g) \leq 1} \int_\Omega f(x) g(x) \, dx,$$

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. Entonces el espacio $L^{p(\cdot)}$ tiene las siguientes propiedades

- $L^{p(\cdot)}$ es un espacio de Banach,
- si la función $p(\cdot)$ no es constante, entonces $L^{p(\cdot)}$ no es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ tiene como espacio asociado a $(L^{p'(\cdot)}, \|\cdot\|_{p'(\cdot)})$, donde $p'(\cdot)$ es la función exponente conjugada de $p(\cdot)$.

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. Entonces el espacio $L^{p(\cdot)}$ tiene las siguientes propiedades

- $L^{p(\cdot)}$ es un espacio de Banach,
- si la función $p(\cdot)$ no es constante, entonces $L^{p(\cdot)}$ no es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ tiene como espacio asociado a $(L^{p'(\cdot)}, \|\cdot\|_{p'(\cdot)})$, donde $p'(\cdot)$ es la función exponente conjugada de $p(\cdot)$.

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. Entonces el espacio $L^{p(\cdot)}$ tiene las siguientes propiedades

- $L^{p(\cdot)}$ es un espacio de Banach,
- si la función $p(\cdot)$ no es constante, entonces $L^{p(\cdot)}$ no es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ tiene como espacio asociado a $(L^{p'(\cdot)}, \|\cdot\|_{p'(\cdot)})$, donde $p'(\cdot)$ es la función exponente conjugada de $p(\cdot)$.

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. Entonces el espacio $L^{p(\cdot)}$ tiene las siguientes propiedades

- $L^{p(\cdot)}$ es un espacio de Banach,
- si la función $p(\cdot)$ no es constante, entonces $L^{p(\cdot)}$ no es un espacio invariante por reordenamientos,
- $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ tiene como espacio asociado a $(L^{p'(\cdot)}, \|\cdot\|_{p'(\cdot)})$, donde $p'(\cdot)$ es la función exponente conjugada de $p(\cdot)$.

Desigualdad de Hölder

Sea $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ una función medible. La desigualdad

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)},$$

se cumple para todo $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, donde

$$K_{p(\cdot)} = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty \left(1 + \frac{1}{p_{min}} - \frac{1}{p_{max}}\right).$$

Bibliografía

- D. V. Cruz-Uribe y A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analisys*. Birkhäuser, Heildelberg, 2013.
- M. A. Krasnosel'skii y Y. U. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*. P. Noordhoff, Groningen, 1961.
- J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus*, Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences **8/9**(1932), 207–220.
- W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentefolgen*, Studia Math. **3**(1931), 200–211.