**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА**

**ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І СИСТЕМ**

**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

# ДИПЛОМНА РОБОТА СПЕЦІАЛІСТА

**зі спеціальності 7.080201 «Інформатика»**

**на тему**

# «Матричнні ігри»

**Студента групи 501-ЕІ Фесюри Сергія Леонідовича**

**Керівник роботи**
**кадидат фіз.-мат. наук,**
**доцент Іванов М.І.**

**Завідувач кафедри**
**доктор фіз.-мат. наук,**
**професор Губреєв Г.М.**

**Полтава 2012**

# РЕФЕРАТ

Дипломна робота спеціаліста: __ с., __ малюнки, __ додатки, __ джерел.

Об’єкт дослідження~ матричні ігри.

Мета роботи~ розроблення ефективного методу та його програмної реалізації знаходження оптимального розв’язку матричної гри.

Методи~ симплексний, Брауна-Робінсона, графічний. Програма реалізована в середовищі Komodo Edit на мові JavaScript.

Відповідно до поставленого завдання у роботі досліджено викладені раніше підходи до розв’язування матричних ігор. Здійснена програмна реалізація трьох основних методів.

**Ключові слова: ТЕОРІЯ ІГОР, МАТРИЧН ІГРИ, СИМПЛЕКС-МЕТОД, МЕТОД БРАУНА-РОБІНСОНА, ГРАФІЧНИЙ МЕТОД, МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ.**

# ЗМІСТ

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Я буду розглядати тільки парні антагоністичні ігри, тобто такі, в яких приймають участь тільки два гравці, і виграш одного гравця рівний програшу іншого. Крім того, я приймаю, що кожен гравець має скінченну кількість стратегій: $U_1=\{a_1, a_2,..., a_m\}$ – множина стратегій першого гравця; $U_2=\{b_1, b_2, ... b_n\}$ – множина стратегій другого гравця.

Ці стратегії назваються чистими на відміну від змішаних, які я введу далі.

Множина U1 ∪ U2 — декартовий добуток множин стратегій гравців називається множиною ситуаці гри. Для кожної ситуації повинна бути визначена ціна гри. Так як гра антагоністична достатньо визначити виграш *a* одного з гравців, наприклад першого. Тоді виграш другого буде рівний (-*a*). Таким чином визначається матриця виграшів першого гравця (для другого гравця матриця виграшів буде -A):

$$A=\begin{array}{c c} & \beta_1\beta_2\ldots\beta_n \\ \begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_m\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}\end{array}$$

**Визначення**. Система Γ = {U1, U2, A} називається матричною грою двох осіб. Розігрування матричної гри зводиться до вибору гравцем 1 i-го рядка матриці виграшів, а гравцем 2 - j-го стовпця. Після цього гравець 1 отримує виграш рівний $a_{ij}$, а гравець 2 - ($-a_{ij}$). При правильній грі гравець 1 може завжди гарантувати собі виграш, який назвемо нижнім значенням ціни гри. Позначимо його: $\underline{v}=\max_i \max_j a_{ij}$ . У свою чергу, гравець 2 може гарантувати собі програш, який назвемо верхнім значенням ціни гри. Позначимо його: $\bar{v}=\min_j \max_i a_{ij}$ . Чисті стратегії i* і j*, що відповідають $\underline{v}$ і $\bar{v}$ називаються максимінною і мінімаксною стратегіями.

**Лемма 1**. В матричній грі $\underline{v}\leqslant\bar{v}$ .

Визначення. Ситуація (i*, j*) називається ситуацією рівноваги, якщо для i'=1, 2, ..., m, j'=1, 2, ..., n виконується нерівність:.$a_{ij'} \le a_{i'j'} \le a_{i'j}$ Ситуація рівноваги це така ситуація, від якої жодному з гравців не вигідно відхилятися. В цьому випадку стратегії i*, j* називають оптимальними стратегіями гравців. Щоб така ситуація існувала необхідно і достатньо рівність верхньої та нижньої цін гри, тобто $\underline{v}$ = $\bar{v}$ $= v$.

**Визначення**. Нехай (i*, j*) - ситуацією рівноваги в матричній грі. Тоді число $v = a_{i'j'}$ називається значенням або ціною гри. Наприклад, у грі $Г_A$ з матрицею

$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ існує не одна ситуація рівноваги. В даній грі їх дві: (1, 1) і (1, 3).

Безліч всіх ситуацій рівноваги в матричній грі позначимо через Z(Г).

**Лемма про масштаб 1**. Нехай Г і Г' - дві матричні ігри з матрицею виграшів A = {aij} і A' = {a'ij}, причому A' = bA + a, b = const, a = const. Тоді Z(Г) = Z(Г') і n' = bn + a (де n' - значення ціни гри Г', n - значення ціни гри Г).

Ця лема має велике практичне значення, так як більшість алгоритмів для рішення матричних ігор засновано на припущенні, що матриця гри позитивна. У випадку, коли матриця має непозитивно елементи, слід додати до всіх елементів матриці число найбільше за абсолютною величиною, з усіх негативних елементів. Існують ігри, в яких ситуації рівноваги в чистих стратегіях не існує. Тоді гравцям буває не вигідно дотримуватися своїх мінімаксних і максимінних стратегій, так як вони можуть отримати більший виграш, відхилившись від них. В цьому випадку гравцям розумно діяти випадково, тобто вибирати стратегії довільно і не повідомляти про вибір суперника. Такі стратегії гравців будемо називати змішаними.

**Визначення**. Змішаною стратегією гравця називається повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій.

Так якщо гравець 1 має m чистих стратегій, то його змішана стратегія x - це набір чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, які задовольняють співвідношенням $x_i \geq 0$ ,$\sum x_i = 1$. Аналогічним чином визначається змішана стратегія у гравця 2.

**Визначення**. Оптимальними стратегіями гравців називаються стратегії, які при багаторазовому повторенні забезпечують гравцям максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий середній програш). Таким чином, процес гри при використанні гравцями своїх змішаних стратегій перетворюється на випадкове випробування, яке назвемо ситуацією в змішаних стратегіях. Вона позначається так (x, y), де x і y - змішані стратегії гравців 1 і 2 відповідно.

Для ситуації в змішаних стратегіях кожен гравець визначає для себе середній виграш, який виражається у вигляді математичного очікування його виграшів:.K(x, y) = $\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} a_{ij}x_i y_j$ Від матричної гри прийшли до нової гри $\bar{\Gamma}$ = {X, Y, K}, де X, Y - множини змішаних стратегій гравців, а K - функція виграшів в змішаних стратегіях. Таку гру називають змішаним розширенням матричної гри. Цілі гравців залишаються незмінними: гравець 1 бажає отримати максимальний виграш, а гравець 2 прагне звести свій програш до мінімуму. Тому для змішаного розширення гри, аналогічним чином визначаються верхнє і нижнє значення ціни гри, тільки тепер гравці вибирають свої змішані стратегії. Позначимо їх: $\bar{v} = \min_j \max_i K(x, y)$ , $\underline{v} = \max_i \min_j K(x, y)$

В цьому випадку залишається справедливою лема 1, тобто $\underline{v} \leqslant \bar{v}$

**Визначення**. Ситуація (x*, y*) в грі утворює ситуацію рівноваги, якщо для всіх x ∈ X, y ∈ Y виконується рівність: K (x, y *) ≤ K (x *, y *) ≤ K (x *, y). Щоб ситуація рівноваги в змішаному розширенні гри існувала необхідно і достатньо рівність верхньої та нижньої цін гри, тобто $\underline{v}$ = $\bar{v}$ = *v*, де *v* - ціна гри. Для випадку змішаного розширення гри також справедлива лема про масштаб. **Лемма про масштаб 2**. Нехай $\Gamma_A$ і $\Gamma_{A'}$ - дві матричні ігри A' = aA + B, a = const, B - матриця з однаковими елементами b, тобто $b_{ij}$ = b для всіх i, j. Тоді Z ( $\bar{\Gamma}_A$ ) = Z ($\Gamma_{A'}$) і $n_{A'} = an_A + b$ (де nA / - значення ціни гри $\Gamma_{A'}$, $n_A$ - значення ціни гри $\Gamma_A$).

**Теорема**. У змішаному розширенні матричної гри завжди існує ситуація рівноваги.

# ВСТУП

Організації звичайно мають цілі, які суперечать цілям інших організацій-конкурентів. Тому робота менеджерів часто полягає у виборі рішення з урахуванням дій конкурентів. Для вирішення таких проблем призначені методи теорії ігор.

Теорія ігор - це розділ прикладної математики, який вивчає моделі і методи прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту.

Під конфліктом розуміється така ситуація, в якій зіштовхуються інтереси двох або більше сторін, що переслідують різні (найчастіше суперечливі) цілі. При цьому кожне рішення має прийматися в розрахунку на розумного суперника, який намагається зашкодити іншому учаснику гри досягти успіху.

З метою дослідження конфліктної ситуації будують її формалізовану спрощену модель. Для побудови такої моделі необхідно чітко описати конфлікт, тобто:

1. уточнити кількість учасників (учасники або сторони конфлікту називаються гравцями);
2. вказати на всі можливі способи (правила) дій гравців, які називаються стратегіями гравців;
3. розрахувати, якими будуть результати гри, якщо кожний гравець вибере певну стратегію (тобто з'ясувати виграші або програші гравців).

Основну задачу теорії ігор можна сформулювати так: визначити, яку стратегію має застосувати розумний гравець у конфлікті з розумним суперником, щоб гарантувати кожному з них виграш, при чому відхилення будь-якого з гравців від оптимальної стратегії може тільки зменшити його виграш.

Математична теорія ігор здатна не тільки вказати оптимальний шлях до вирішення деяких проблем, а й прогнозувати їх результат. Матричні ігри серйозно вивчаються фахівцями, так як вони досить прості і до них можуть бути зведені ігри загального виду. Тому теорія матричних ігор добре розвинена, існують різні методи пошуку рішення ігор.

Але в більшості випадків рішення матричних ігор являє собою важкий і громіздкий процес. Є приклади, коли навіть для матриць розміру 3*3, процес пошуку рішення досить трудомісткий.

Крім того, виграші гравців у кожній ситуації не завжди визначаються точними вимірами. В процесі збору даних про досліджуване явище, аналізу цих даних та введення при побудові моделі різних припущень накопичуються помилки. Вони ж можуть виражатися числами в матриці виграшів. Тому точність у визначенні значення гри та оптимальних стратегій гравців виправдана не завжди.

А також, слід зауважити, що похибка в оцінці гравцем свого виграшу не може привести до практично серйозних наслідків і невелике відхилення гравця від оптимальної стратегії не тягне за собою істотної зміни в його виграші.

Тому виникає потреба в розробці чисельних методів розв'язання матричних ігор. В даний час в теорії ігор відомі кілька способів наближеного рішення матричних ігор.

Мета випускної кваліфікаційної роботи вивчити деякі методи наближеного рішення матричних ігор, обгрунтувати їх алгоритми, і, по можливості, реалізувати на мові програмування.

Робота складається зі вступу, трьох параграфів і додатків, в яких приведена програма на мові JavaScript, що дозволяє знаходити наближене рішення матричної гри.

У першому параграфі наведений інформаційний огляд задач, що зводяться до матричних ігор, а також короткий огляд методів.

Параграф другий присвячений більш глибокому викладу різних методів розв’язання матричних ігор.

У третьому параграфі описано реалізацію деяких методів розв’язання ігор з описом архітектурних моментів програми.

# 1. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД

## 2.1 Огляд методів розв’язування антагоністичних ігор

Існує кілька основних методів розв'язання матричних ігор. Я розгляну основні з них. Це симплекс-метод, графічний метод, ітеративний метод Брауна-Робінсона та монотонний ітеративний алгоритм.

**Симплекс-метод**

Алгоритм симплекс-методу включає наступні етапи:

1. Складання першого опорного плану. Перехід до канонічної формі завдання лінійного програмування шляхом введення невід'ємних додаткових балансових змінних.

2. Перевірка плану на оптимальність. Якщо знайдеться хоча б один коефіцієнт індексного рядка менше нуля, то план не оптимальний, і його необхідно поліпшити.

3. Визначення опорних стовпця і рядка. З негативних коефіцієнтів індексного рядка вибирається найбільший за абсолютною величиною. Потім елементи стовпця вільних членів симплексного таблиці діляться на елементи того ж знака ведучого стовпця.

4. Побудова нового опорного плану. Перехід до нового плану здійснюється в результаті перерахунку симплексного таблиці методом Жордана-Гаусса

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_i k, & \text{if } i \neq l; \\ \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, & \text{if } i = l; \end{cases}$$

Детальний опис рішення матричних ігор за допомогою симплекс-методу буде наведено в частині 2 даної роботи.

**Графічний метод**

Перший крок при використанні графічного методу полягає в поданні області допустимих розв’язків, у якій водночас задовольняються всі обмеження моделі. Умови невід’ємності змінних обмежують область їх допустимих значень першим квадрантом координатної площини (частина площини над віссю $x_1$ і справа від осі $x_2$). Інші межі простору розв'язків зображені прямими лініями, побудованими по рівняннях, що отримані заміною знака "≤" знаком "=" в обмеженнях. Області, в яких відповідні обмеження виконуються як нерівності ( в нашому випадку - нерівності із знаком "<"), указуються стрілками, спрямованими вбік допустимих значень змінних. У кожній точці, що належить внутрішній області або межам *багатокутника розв'язків ABCDEF*, всі обмеження виконуються, тому розв'язки, що відповідають цим точкам, є допустимими. Серед безкінечного числа таких точок можна знайти точку оптимального розв'язку, якщо з'ясувати, в якому напрямку зростає цільова функція. На рис. 2.2 показано, як здійснюється така операція.

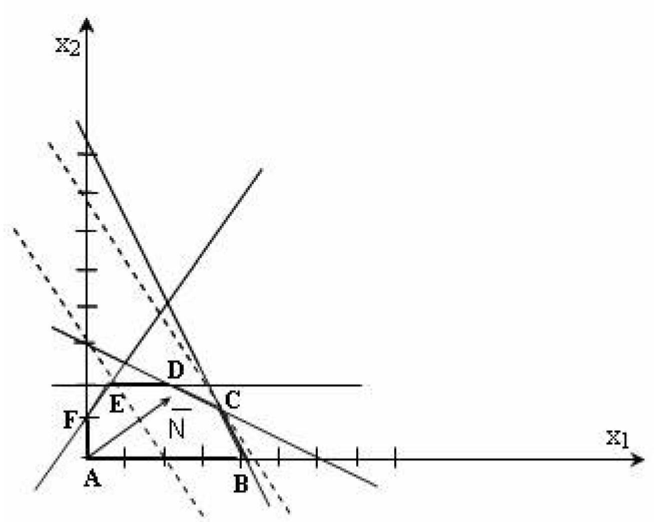


Рис. 2.2. Знаходження оптимального розв'язку ЗЛП графічним методом.

На графік наносять лінію рівня цільової функції $c_1x_1+c_2x_2=z_0$, де $z_0$ - довільне значення z. Будують вектор N ($c_1$, $c_2$), що є нормальним до ліній рівня цільової функції й визначає напрямок оптимізації z.

Лінію рівня зрушують паралельно самій собі вздовж вектора N доти, поки вона не вийде за межі області допустимих розв'язків. Остання точка цієї області й буде точкою оптимуму.

Очевидно, що оптимальному розв'язку відповідає точка С- точка перетину прямих (1) і (2). Значення $x_1$ та $x_2$ в точці С визначаються шляхом розв'язання системи рівнянь:

Зазначимо, що у випадку, коли лінії рівня z мають такий самий нахил, як пряма зв'язуючого обмеження (тобто такого, що проходить через оптимальну точку), матимемо безліч оптимумів на відрізку.

**Ітеративний метод Брауна-Робінсона**

Часто в практичних завданнях немає необхідності знаходити точне рішення матричної гри. Досить знайти наближене рішення, яке дає середній виграш, близький до ціни гри і наближені оптимальні стратегії гравців.

Орієнтовне значення ціни гри може дати вже простий аналіз матриці виграшів та визначення нижньої і верхньої цін гри. Якщо вони близькі, то пошуками точного рішення займатися не обов'язково, так як досить вибрати чисті мінімаксні стратегії. Якщо ж вони не близькі, можна отримати прийнятне для практики вирішення за допомогою чисельних методів розв'язання ігор, з яких розглянемо метод ітерацій.

Нехай розігрується матрична гра $\Gamma_A$ з матрицею A = {a $_{ij}$} розміру (m*n). Ідея методу - багаторазове фіктивне розігрування гри із заданою матрицею. Одне розігрування гри будемо називати партією, число яких необмежено.

У 1-й партії обидва гравці вибирають абсолютно довільні чисті стратегії. Нехай гравець 1 вибрав і-ю стратегію, а гравець 2 - j-у стратегію. У другій партії гравець 1 відповідає на хід гравця 2 тієї своєю стратегією, яка дає йому максимальний виграш. У свою чергу, гравець 2, відповідає на цей хід гравця 1 своєю стратегією, яка звертає його програш у мінімум. Далі третя партія.

З ростом числа кроків процесу змішані стратегії, які приписуються гравцям, наближаються до їх оптимальних стратегій. Цей процес наближеного знаходження оптимальних стратегій гравців називається *ітеративним,* а його кроки - ітераціями.

Детальний опис рішення матричних ігор за допомогою ітеративного методу Брауна-Робінсона буде наведено в частині 2 даної роботи.

**Монотонний ітеративний алгоритм розв'язання матричних ігор**

Пропонований для розгляду алгоритм реалізується тільки для одного гравця на відміну від методу Брауна-Робінсона, який працює для двох гравців. Алгоритм дозволяє знаходити точно і наближено оптимальну стратегію гравця 1 і значення ціни гри n. За допомогою алгоритму можна отримати задану точність рішення, причому число кроків, необхідних для досягнення результатів, слабо залежить від розмірності матриці виграшів.

Особливість цього алгоритму у здатності генерувати строго монотонно зростаючу послідовність оцінок ціни гри, що не властиво раніше запропонованого алгоритму.

Розглянемо змішане розширення $\bar{\Gamma}_A$ = (X, Y, K) матричної гри $\Gamma_A$ з матрицею А розміру (m*n). Процес розігрування гри складається з декількох кроків. Нехай кожен з гравців має скінченне число стратегій.

Введемо наступні позначення:

$a_i$ - i-й рядок матриці виграшів;

$x^N = (x_1^N, x_2^N, ..., x_m^N) \in \bar{X}$ - m-мірний вектор, наближення оптимальної стратегії першого гравця на N-кроці (N-номер кроку);

$c^N = (y_1^N, y_2^N, ..., y_n^N)$ - N-мірний вектор, який визначає середній накопичений виграш на N-кроці.

Задамо початкові умови. Нехай на 0-кроці $c^0 = a_{i_0}$, $X^0 = (0, ..., 1, ..., 0)$, де 1 займає $i_{0\text{-}y}$ позицію.

Визначимо ітеративний процес наступним чином: за відомим векторах $x^{N-1}$, $c^{N-1}$ знаходимо вектори $x^N$ і $c^N$, які обчислюються за такими формулами:

$$x^N = (1-\varepsilon_N)\, x^{N-1} + \varepsilon_N\, \tilde{x}^N;$$
$$c^N = (1-\varepsilon_N)\, c^{N-1} + \varepsilon_N\, \tilde{c}^N;$$

де параметр $0 \le \varepsilon_N \le 1$, а вектори $\tilde{x}^N, \tilde{c}^N$ вводяться далі.

Як зазначалося, вектор $c^N$ визначає середній накопичений виграш гравця 1 на N кроці. Компоненти цього вектора - це числа. У гіршому випадку гравець 1 може отримати мінімальне з цих чисел. Приймемо його за нижню оцінку ціну гри, яку позначимо: $\underline{v}^{N-1} = \min_{j=1,...,n} \gamma_j^{N-1}$

Запам'ятаємо безліч індексів $J^{N-1}=(j_1^{N-1},..., j_k^{N-1})$, (k<n), на яких буде досягається цей

мінімум, тобто $\min\limits_{j=1,\dots,n}\gamma_j^{N-1}=\gamma_{j_1}^{N-1}=\gamma_{j_2}^{N-1}=\dots=\gamma_{j_k}^{N-1}$

Далі розглянемо підгру $\Gamma^N$ гри $\Gamma_A$ з матрицею виграшів AN={ $a_{ij^{N-1}}$ }, i=1,…,m, jN-1∈JN-1. Матриця виграшів складається із стовпців даної матриці, номери яких визначаються безліччю індексів $J^{N-1}$. У цій підгрі $\Gamma^N$ знаходимо одну з оптимальних змішаних стратегій гравця 1: $\tilde{x}^N=(\tilde{\xi}_1^N,\dots,\xi_m^N)$.

Після знаходження $\tilde{x}^N$, Знаходимо вектор $\tilde{c}^N=(\tilde{\gamma}_1^N,\dots,\tilde{\gamma}_n^N)$ за правилом: $\tilde{c}^N=\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{\xi}_i^N a_i$

І розглянемо гру (2*n), в якій у гравця 1 дві чисті стратегії, а у гравця 2 - n чистих стратегій. Ця гра задається матрицею $\begin{bmatrix}\gamma_1^{N-1} & \dots & \gamma_n^{N-1}\\ \tilde{\gamma}_1^N & \dots & \tilde{\gamma}_n^{N-1}\end{bmatrix}$, розв'язуючи яку, знаходимо ймовірність використання гравцем 1 своєї стратегії. Це дає нам коефіцієнт $\varepsilon_N$.

Далі обчислюємо $x^N$, $c^N$ і переходимо до наступного кроку. Процес продовжуємо до тих пір, поки не виконається рівність $\varepsilon_N=0$, тому що по теоремі про мінімакс $\underline{v}^N\le v$, а їх рівність (що й потрібно) досягається в цьому випадку, або поки не буде досягнута необхідна точність обчислень.

Збіжність алгоритму гарантується теоремою.

**Теорема.** Нехай $\{x^N\}$, $\{v^N\}$ - послідовності, що визначаються рівностями (3), (4). Тоді справедливі наступні твердження:

1. $\underline{v}^{N-1}<\underline{v}^N$ тобто послідовність $\{v^{N-1}\}$ строго монотонно зростає.
2. $\lim\limits_{N\to\infty}\underline{v}^N=v$
3. $\lim\limits_{N\to\infty}x^N=x^*$, де $x^*\in X^*$ - оптимальна стратегія гравця 1.

Доведення цієї теореми досить рутинно. Його можна подивитися в [9].

## 1.2 Огляд задач, що зводяться до антагоністичної гри

При розв’язанні економічних задач, у тому числі й маркетингових, часто доводиться аналізувати ситуації, за яких стикаються інтереси двох або більше конкуруючих сторін, переслідуючих різні цілі, особливо це характерне для ринкової економіки. Такого роду ситуації називаються конфліктними. Математичною теорією розв’язання конфліктних ситуацій є теорія ігор. У грі можуть стикатися інтереси двох (гра парна) або декількох (гра множинна) супротивників; існує гра з нескінченною множиною гравців. Якщо у множинній грі гравці утворять коаліції, то гра називається коаліційною; якщо таких коаліцій дві, то гра зводиться до парної.

На промислових підприємствах теорія ігор може використовуватися для вибору оптимальних рішень, наприклад, при створенні раціональних запасів сировини, матеріалів, напівфабрикатів, коли протидіють дві тенденції: збільшення запасів, що гарантують безперебійну роботу виробництва, і скорочення запасів з метою мінімізації витрат на зберігання їх. Розв’язання подібних задач вимагає повної визначеності в формулюванні їх умов (правил гри): встановлення кількості гравців, можливих виграшів (програші розуміють як від’ємний виграш). Важливим елементом в умовах ігрових задач є стратегія, тобто сукупність правил, які залежно від ситуації у грі визначають однозначний вибір дій одного конкретного гравця. Якщо в процесі гри гравець застосовує декілька стратегій по черзі, то таку стратегію називають змішаною, а її елементи — чистими стратегіями. Кількість стратегій у кожного гравця може бути скінченною і нескінченною, залежно від цього ігри поділяють на скінченні та нескінченні.

Важливими поняттями є поняття оптимальної стратегії, ціни гри, середнього виграшу. Ціна гри V дорівнює математичному сподіванню M виграшу першого гравця, якщо обидва гравці виберуть оптимальні для себе стратегії P* і Q*:

$$V = M\,(P^*, Q^*).$$

Одним з основних видів ігор є матричні ігри, які називаються парними іграми з нульовою сумою (тобто один гравець виграє стільки, скільки програє другий), за умови, що кожний гравець має скінченну кількість стратегій. У цьому випадку парна гра формально задається матрицею A = (aij), елементи якої aij визначають виграш першого гравця (і, відповідно, програш другого), якщо перший гравець обере i-ту стратегію (i = 1,…, m), а другий обере j-ту стратегію (j = 1,…, n). Матриця A називається матрицею гри, або платіжною матрицею.

Існує багато методів вирішення матричних ігор, серед яких і методи наближеного рішення, наприклад, метод Брауна-Робінсона. У багатьох ігрових задачах у сфері економіки, а також у сфері маркетингу, невизначеність випливає не через свідому протидію супротивника, а через недостатню обізнаність щодо умов, в яких діють сторони, тобто коли невідомі стратегії сторін. Тоді до розгляду додається ще матриця ризиків. Для розв'язання таких задач використовуються критерії Лапласа, Вальда, Гурвіца та ін.

На основі методів рішення статистичних ігор можна сформулювати підходи до рішення різноманітних прикладних економічних задач.

**Зведення економічних колізій до ігрових задач**

Перші два етапи творчої складової процесу прийняття рішення утворюють основу ігрової моделі. Відомо багато прикладів успішного застосування ігрової моделі як у сфері виробничої діяльності, так і на макроекономічному рівні. У прикладах, що наводитимуться далі, обмежимося постановкою та інтерпретацією розв'язків ігрових задач. Наведемо деякі приклади ігрового моделювання в економіці, а також покажемо розширені можливості зведення економічних ситуацій до задач теорії ігор.

**Дилема ув'язненого та олігопольні ринки**

Два ув'язнених очікують рішення суду за спільно вчинене злодіяння. Запобігши можливості змови, їм висунули умови: якщо зізнаються обидва, то кожен отримає по п'ять років тюрми; якщо зізнається один, то він отримає лише один рік, а другий — 10 років; якщо ж обидва не зізнаються, то кожен отримає по два роки ув'язнення.

Побудову ігрової моделі почнемо з формулювання множин рішень для кожного з ув'язнених. Обидва вони мають для вибору дві взаємовиключні чисті стратегії: перша — зізнатися (s1 чи Ɵ1), друга — не зізнатися (s2 чи Ɵ2). Ефективність кожної з чистих стратегій для кожного з гравців відобразимо відповідно у вигляді функціоналів оцінювання:

$F' = (f'_{kj} : k = 1, 2; j = 1, 2); F'' = (f''_{kj} : k = 1, 2; j = 1, 2),$

де $f'_{kj}$ та $f''_{kj}$ – плата першого та другого ув'язненого відповідно, якщо перший гравець вибрав свою k-ту чисту стратегію $S_k$ (k = 1, 2), а другий – свою j – ту чисту стратегію $\theta_j$ (j = 1, 2).

Числовими еквівалентами платежів є терміни ув'язнення гравців, що беруться з протилежним знаком. У цьому випадку матриці платежів мають позитивний інгредієнт:

$$F' = F'^{+} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad F'' = F''^{+} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отримана гра не є антагоністичною. З точки зору економічної теорії дилема ув'язненого пояснює, чому продавці на олігопольному ринку намагаються досягти домовленості замість конкуренції, оскільки остання була би вигіднішою для покупців. У випадку, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм-продавців однорідної продукції, ціни характеризуються жорсткістю: жодна з фірм не може ні довіряти іншим, ні очікувати, що її конкурент призначить нижчу ціну.

Ситуація, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм, носить назву конкуренції серед не багатьох: випадок, коли є декілька продавців продукції, носить назву олігополії, а коли декілька покупців певного виду витрат — назву олігопсонії. Визначальною властивістю конкуренції серед не багатьох є те, що всі конкуруючі фірми можуть впливати на ціни продукції або витрати і при цьому прибуток кожної фірми залежить від стратегії всіх конкуруючих фірм. Слід відмітити важливу спільну рису між конкуренцією серед не багатьох і теорією ігор. В обох випадках результат (прибуток чи виграш) для одного учасника (фірми чи гравця) залежить від діяльності (витрат чи стратегій) решти учасників.

**Гра у “старі” та “нові” товари**

Нехай у нашому розпорядженні є три види “старих” товарів $s_1$, $s_2$, $s_3$, які надходять на ринок уже давно і попит на які добре відомий. З певного моменту в торговельну мережу починають надходити “нові” товари $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, які можуть замінити “старі”. Тобто “нові” товари зменшують попит на “старі” товари. З попередніх обстежень попиту відомі ймовірності продажу “старих” товарів у разі появи в торговельній мережі “нових” товарів. Для гри у “старі” та “нові” товари платіжна матриця разом зі значеннями $\alpha_k$ (k = 1, 2, 3) та $\beta_j$ (j = 1, 2, 3) запишеться у вигляді табл. 1.1. Оскільки $\alpha = \beta = 0{,}7$, то гра має сідлову точку, створювану мінімаксними стратегіями $s_{ko} = s_2$ та $\Theta_{jo} = \Theta_2$. Ці стратегії є стійкими у тому розумінні, що відхилення від них невигідне для обох гравців.

*Таблиця 1.1*

| “Нові” товари / “Старі” товари | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $\alpha_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 0,5 |
| $s_2$ | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,7 |
| $s_3$ | 0,7 | 0,5 | 0,6 | 0,5 |
| $\beta_j$ | 0,9 | 0,7 | 0,8 | — |

**Планування структури посівних площ**

Нехай аграрне підприємство (перший гравець) може посіяти одну з трьох культур. Його стратегії позначимо через $s_1$, $s_2$, $s_3$. Необхідно визначити, яку з культур сіяти, якщо за інших рівних умов урожаї цих культур залежать, головним чином, від погоди ($\Theta$), а план посіву має забезпечити найбільший дохід. Уважатимемо, що сільськогосподарське підприємство має надійний спосіб прогнозування погоди.

Визначаємо для другого гравця (“погода”) такі стани (стратегії): $\Theta_1$ — рік посушливий; $\Theta_2$ — рік нормальний; $\Theta_3$ — рік дощовий.

Нехай на основі досвіду відомо, що за сухої погоди з 1 га можна зняти $h_{k1}$ центнерів культури $s_k$ за нормальної — $h_{k2}$, за дощової — $h_{k3}$ (k = 1, 2, 3,). Нехай також відомі ціни: $c_k$ — ціна 1ц культури $s_k$ (k = 1, 2, 3) в умовних грошових одиницях (УГО). Приймемо, що:

$$f_{kj} = c_k h_{kj}, \quad k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

Якщо знехтувати вартістю насіння і витратами на обробіток ґрунту, отримуємо функціонал оцінювання

$$F^+ = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix},$$

тобто матрицю валових доходів підприємства від реалізації своєї продукції з 1 га за всіх можливих ситуацій. Нехай гра не має сідлової точки і перший гравець (аграрне підприємство) має хоча б одну оптимальну змішану стратеію $s_{p*}$, що визначається вектором.

Якщо V* — ціна гри, то для змішаної стратегії P* виконується нерівність:

$$f_{1j}p_1^* + f_{2j}p_2^* + f_{3j}p_3^* \geq V^*.$$

Очевидно, що ціна гри V* (число, яке знаходиться у лівій частині нерівності є величиною очікуваного валового доходу з 1 га за j-го стану погоди, якщо підприємство p1*-ту частку 1 га засіє культурою s1, p2*-ту частку 1 га — культурою s2, а p3*-ту частку 1 га — культурою s3.

Отже, засіявши поле культурами s1, s2, s3 у пропорції p1*, p2*, p3*, аграрне підприємство отримає за всіх погодних умов очікуваний валовий дохід, не менший числа V*. Зауважимо, що очікуваний валовий дохід з 1 га за j-го стану погоди буде принципово відмінним від фактичного, який є реалізацію випадкової величини А саме, за умови реалізації j-го стану погоди, підприємство, реалізувавши змішану стратегію sp*, одержить з імовірністю p1* фактичний валовий дохід fij; з імовірністю $p_2$* — f2j; з імовірністю p3* — f3j. Проте відповідно до закону великих чисел фактичний валовий дохід за кілька років з великою ймовірністю дорівнюватиме очікуваному валового доходу V*.

Викладений тут результат легко узагальнити на випадок, коли висіваються т культур, а стани погоди деталізовано. Крім того, аналогічні моделі можна побудувати для випадку, коли підприємство має можливість змінювати не лише культури, які воно висіває, а й способи (технології) обробки поля.

Розв’яжемо числовий приклад для даних, наведених у табл. 1.2.

Отже, функціонал оцінювання (матриця виграшу першого гравця) має вигляд:

$$F = F^{+} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

| Стратегія першого гравця (аграрне підприємство) | | Стратегія другого гравця (погода) | | | Ціна за 1ц в УГО |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Суха погода $\theta_1$ | Нормальна погода $\theta_1$ | Дощова погода $\theta_1$ | |
| Урожайність першої культури, ц/га | $s_1$ | 20 | 5 | 15 | 2 |
| Урожайність другої культури, ц/га | $s_2$ | 7,5 | 12,5 | 5 | 4 |
| Урожайність третьої культури, ц/га | $s_3$ | 0 | 7,5 | 10 | 8 |

Оскільки α+ < β-, то гра не має сідлової точки, а тому оптимальна стратегія першого гравця змішана. Для знаходження такої стратегії треба розв’язати задачу лінійного програмування:

$$Z = (t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{V} \to \min_{t_1, t_2, t_3}$$

за виконання умов

$$40t_1 + 30t_2 \geq 1;$$
$$10t_1 + 50t_2 + 60t_3 \geq 1;$$
$$30t_1 + 20t_2 + 50t_3 \geq 1;$$
$$t_1, t_2, t_3 \geq 0,$$

де

$$t_1 = \frac{p_1}{V}; \quad t_2 = \frac{p_2}{V}; \quad t_3 = \frac{p_3}{V}; \quad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V}.$$

Розв'язавши цю задачу, одержимо, що

$$P^* = (0{,}49;\ 0{,}40;\ 0{,}11);\ V^* = 31{,}5.$$

Тобто, за решти рівних умов, засіявши 49% поля першою культурою, 40% — другою, 11% — третьою культурою, аграрне підприємство отримає в середньому за низку років за різних погодних умов очікуваний максимальний валовий дохід не менший 31,5 ум. од. за рік.

**4.4 Інвестування капіталу**

Інвестор взяв у борг гроші під 1,5% з метою інвестування цих засобів в акції різних компаній. Наявні два види акцій, норми прибутку яких є випадковими величинами і залежать від станів економічного середовища (випадкових обставин). На ринку можуть мати місце тільки дві ситуації: перша (Ө1) з імовірністю q = 0,2 і друга (Ө2)— з імовірністю q = 0,8.

Акції реагують на ці ситуації (стани економічного середовища) по-різному: курс акцій першого виду (s1) у першій ситуації зростає на 5%, а в другій — на 1,25%; курс акцій другого виду (s2) у першій ситуації падає на 1%, а в другій — зростає на 2,75%.

Необхідно найкращим чином розподілити наявний капітал між цими активами. Попередньо проаналізуємо ці акції з позиції таких їх характеристик, як сподівана норма прибутку (математичне сподівання норми прибутку) та величина ризику (дисперсія норми прибутку). Обчислимо ці характеристики:

$$m_1 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}\right) = 5 \times 0,2 + 1,25 \times 0,8 = 2;$$

$$m_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(q_j r_{2j}\right) = -1 \times 0,2 + 2,75 \times 0,8 = 2;$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}^2\right) - m_1^2 = 5^2 \times 0,2 + (1,25)^2 \times 0,8 - 2^2 = 2,25;$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{2} r_{2j}^2 - m_2^2 = (-1)^2 \times 0,2 + (2,75)^2 \times 0,8 - 2^2 = 2,25.$$

Хоча значення сподіваних норм прибутку і ризиків збіглися (m1 = m2 = 2; σ21 = σ22 = 2,25), у випадку інвестування всього капіталу в акції одного виду перевагу слід віддати акціям другого виду. На користь такого вибору свідчать такі міркування. У випадку придбання акцій тільки першого виду банкрутство інвестора може відбутися за настання другої ситуації (1,25 < 1,5), тобто з імовірністю q2 = 0,8. Якщо ж придбати акції тільки другого виду, то банкрутство інвестора відбудеться вже у випадку настання першої ситуації (-1 < 1,5,) тобто з імовірністю q1 = 0,2. Оскільки q1 = 0,2 < 0,8 = q2, то ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції другого виду менший за ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції першого виду. Але, як бачимо, повністю уникнути банкрутства при інвестуванні всього капіталу в акції другого виду неможливо.

Дослідимо ефект диверсифікації, тобто ефект від розподілу грошових ресурсів між обома активами в найбільш вигідних і безпечних пропорціях. Нехай x1 — частка капіталу, інвестованого в акції першого виду, тоді x2 = 1 - x1 — частка капіталу, інвестованого в акції другого виду, вектор X = (x1; x2) — структура портфеля акцій. Знайдемо характеристики портфеля. Його сподівана норма прибутку

$$m_П = m_1 x_1 + m_2 x_2 = 2x_1 + 2(1 - x_1) = 2;$$

величина ризику

$$\sigma_П^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 =$$
$$= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) x_1^2 - 2(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) x_1 + \sigma_2^2,$$

де $\rho_{12}$ — коефіцієнт кореляції між нормами прибутку акцій, обчислюваний за формулою

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (q_j r_{1j} r_{2j}) - m_1 m_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

З урахуванням того, що σ1 = σ2 = 1,5; р12 = -1 (тобто має місце абсолютно від'ємна кореляція), отримуємо, що величина ризику портфеля, як функція від частки x1, обчислюється формулою

σП2 = 9x12 – 9x1 + 2,25.

У даному випадку найкращим портфелем слід уважати портфель з найменшою величиною ризику. Позначимо його структуру через X = (x1; x2). При x1 функція досягає свого мінімального значення. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції для знаходження x1 слід скористатися рівнянням

$$\frac{d\sigma_П^2}{dx_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (9x_1^2 - 9x_1 + 2{,}25)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 18x_1 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1^* = 0{,}5; \quad x_2^* = 1 - x_1^* = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad X^* = (0{,}5;\ 0{,}5).$$

Отриманий результат вказує на те, що розподіл капіталу на рівні частки (по 50%) між акціями обох видів дає змогу, в певному сенсі, позбутися ризику (σП2 = 0). Окрім того, за такого розподілу грошей інвестору не загрожує банкрутство, оскільки для будь-якого стану економічного середовища норма прибутку портфеля, що має структуру X = (0,5; 0,5), становить 2% > 1,5% (переконайтесь у цьому самостійно).

Із задачею побудови оптимального портфеля цінних паперів у даному випадку мають безпосередній зв’язок дві матриці:

а) коваріаційна матриця:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}25 & -2{,}25 \\ -2{,}25 & 2{,}25 \end{pmatrix},$$

де $\sigma_{kj} = \sigma_k \sigma_j \rho_{kj}$ $(k = 1{,}2; \ \ j = 1{,}2)$;

б) матриця норм прибутку:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1{,}25 \\ -1 & 2{,}75 \end{pmatrix},$$

де $r_{kj}$ — величина норми прибутку акції $k$-го виду для $j$-го стану економічного середовища $(k = 1, 2; \ \ j = 1, 2)$.

Розглянемо парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею C. Легко переконатись у тому, що ця гра не має сідлової точки, а її розв’язком є пара оптимальних змішаних стратегій sp та qQ, яким відповідають вектори P = Q = (0,5; 0,5) = X.

При цьому ціна гри V = 0 = (σП)2.

Парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею F, також не має сідлової точки і при цьому оптимальній змішаній стратегії першого гравця (інвестора) відповідає вектор P = (0,5; 0,5) = X. Ціна цієї гри V = 2.

Збіг оптимальних змішаних стратегій, що є розв’язком обох розглянутих ігор, не випадковий.

### 4.5 Ігрова модель задачі побудови портфеля активів

Лауреат Нобелівської премії Г.Марковіц у своїх дослідженнях вивчав імовірнісну модель ринку активів. У його моделі норма прибутку кожного активу розглядається як випадкова величина

$$R_k = \frac{C_k - C_k^0 + Д_k}{C_k^0} \times 100\%, \qquad k = 1,\dots, m,$$

де C k0 — ціна активу на початок даного періоду Ck– ціна активу (випадкова величина) на кінець даного періоду; Дk– дивіденди (теж випадкова величина), нараховані протягом даного періоду. Конкретне значення норми прибутку k-го активу залежить від стану економічного середовища, тобто визначається ситуацією, що склалася на ринку. Розмірність множини Θ станів економічного середовища може бути довільною, але ми вважатимемо її скінченною і рівною n, тобто Θ = (Θ1;...; Θn). Кожному стану ринку Θj поставимо у відповідність імовірність настання його qi. Всі ці ймовірності згрупуємо у вектор Q = (q1;...; qn). Очевидно, що компоненти вектора Q мають задовольняти співвідношенням.

Уважається, що можливі значення норми прибутку k-го активу (k = 1,... m) для всіх можливих станів ринку Θj = (1,…n) є відомими і відображаються випадковою величиною Rk = (rk1;…; rkn), тобто актив k-го виду приносить rk1 одиниць прибутку з розрахунку на кожну одиницю вкладень, якщо економічне середовище знаходитиметься в своєму j-му стані. СПР має можливість інвестувати свої ресурси більш як в один актив, утворити портфель, тобто розподілити свої ресурси між різними активами в найвигіднішій і безпечній пропорції. А тому інвестор (СПР) хоче оптимізувати структуру портфеля X = (x1;…;xm) шляхом визначення оптимальних розмірів часток xk (k = 1,…m), які відповідають вартості активів кожного виду в загальному обсязі інвестованих у портфель ресурсів.

У своїй моделі Марковіц відштовхується від того, що інвестор для прийняття інвестиційних рішень в якості критеріїв оптимальності використовує лише дві характеристики активів та їх портфелів: сподівану норму прибутку (у формі математичного сподівання) та величину ризику (у формі дисперсії).

Вибір цих кількісних характеристик у якості критеріїв оптимальності дає можливість розглядати задачу побудови портфеля як двокритеріальну. До речі, інвестор схильний вкласти весь свій капітал лише в актив одного виду, якщо цей актив, порівняно з будь-яким портфелем, буде найкращим за обома цими критеріями одночасно, тобто матиме найбільшу сподівану норму прибутку та найменшу величину ризику.

Якщо вважати відомими закони розподілу випадкових величин $R_k$ $(k=1,\ldots,m)$, то не становитиме великих труднощів обчислення математичних сподівань $m_k=M(R_k)$ та коваріацій $\sigma_{kj}=\operatorname{cov}(R_k;R_j)$ $(k=1,\ldots,m;\ \ j=1,\ldots,m)$.

Якщо відома структура портфеля $X=(x_1;\ldots;x_m)$, то норма прибутку цього портфеля обчислюється за формулою

$$R_\Pi=\sum_{k=1}^{m}(x_kR_k),$$

а його характеристики (сподівана норма прибутку портфеля і дисперсія) — за формулами

$$m_\Pi=M(R_\Pi)=\sum_{k=1}^{m}(x_km_k); \qquad \sigma_\Pi^2=D(R_\Pi)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_kx_j\sigma_{kj}).$$

Ураховуючи зроблені раніше викладки, можна стверджувати, що задача оптимізації структури портфеля пов’язана з декількома матрицями, кожну з яких можна вибрати в якості функціонала оцінювання статистичної гри. Розглянемо функціонал оцінювання

$$R=R^+=\left(r_{kj}^+ : k=1,\ldots,\ m;\ j=1,\ldots,n\right)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix},$$

у k-му рядку якого розміщено можливі значення норми прибутку Rk активу k-го виду, а в j-му стовпчику — величини норм прибутків активів усіх видів, що відповідають j-му стану ринку (k = 1,…, m; j = 1,…, n). Змішану стратегію першого гравця, якій відповідає вектор P = (p1;…; pm) у грі, що визначається матрицею R, можна тепер інтерпретувати як портфель, а ймовірність pk — як частку капіталу, інвестованого в актив k-го виду (k = 1,…, m). Розв’язок гри в чистих стратегіях відповідатиме «однорідному» портфелю, тобто портфелю, складеному тільки з активів одного виду. А вибір розв’язку гри у змішаних стратегіях вказує на факт формування портфеля з різних активів. За виконання певних умов оптимальна змішана стратегія з вектором P = (p1;…; pm) відповідає ефективному портфелю.

Аналогічна відповідність має місце між оптимальними змішаними стратегіями гравців у парній грі з нульовою сумою, що визначається, з одного боку, коваріаційною матрицею C = (σkj: k = 1,… m; j = 1,… m), з іншого — ефективним портфелем.

Оптимізація структури портфеля відіграє особливу роль у сучасній економічній теорії та практиці. Можна стверджувати, що будь-яка економічна проблема зводиться до задачі найкращого розподілу ресурсів (матеріальних, фінансових, трудових тощо), наявних у розпорядженні СПР (інвестора) між активами різних видів.

### 4.6 Формування портфеля інвестиційних проектів

СПР вивчає m інвестиційних проектів (їх пронумеровано від 1 до m) щодо вибору серед них найнадійніших з подальшим включенням їх в інвестиційний портфель, враховуючи при цьому свої реальні можливості.

Вибрані найбільш надійні інвестиційні проекти утворюють деяку підмножину множини наявних m проектів. Цю підмножину інтерпретуватимемо як нечітку підмножину всіх інвестиційних проектів. Згідно з означенням нечіткої на елементах множини всіх інвестиційних проектів необхідно визначити функцію належності нечіткій множині, а з її допомогою кожному проекту поставити у відповідність певне значення з проміжку [0;1]. Це значення називається ступенем належності проекту до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів. У прикладному аспекті ступінь належності проекту до вказаної нечіткої множини може відображати суб’єктивну міру того, наскільки цей проект відповідає поняттю найбільш надійного (з позиції СПР).

Припустимо, що відомі величини μkj — значення функцій належності k-го проекту (k = 1,…, m) до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів в умовах j-го стану економічного середовища (j = 1,…, n). У розгорнутому вигляді ситуація прийняття інвестиційного рішення характеризується матрицею (функціоналом оцінювання):

$$M = M^{+} = \left(\mu_{kj}^{+} : k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n\right) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix},$$

де елементи $\mu_{kj}^{+} \in [0;\ 1]$ $(k = 1,\ldots, m;\ \ j = 1,\ldots, n)$, при цьому $\mu_{kj}$ — це суб'єктивна міра надійності $k$-го проекту, тобто $\mu_{kj}$ — це міра степеня належності $k$-го проекту до портфеля найбільш надійних проектів у разі реалізації $j$-го стану економічного середовища.

Нехай парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею платежів M = (μkj), не має сідлової точки. Тоді розв'язком цієї гри є оптимальна змішана стратегія першого гравця, що їй відповідає вектор P* = (p1*;…; p), компонента pk* якого є питомою вагою k-го проекту в структурі портфеля.

### 4.7 Формування «валютного кошика»

Використовуватимо наступні позначення: Rk — норма прибутку валюти k-го виду ((k = 1,…, m); m — кількість різних валют, що складають кошик; X = (x1;…; xm) — структура «валютного кошика»; xk — частка капіталу, інвестованого у валюту k-го виду; RП— норма прибутку «валютного кошика», тобто:

$$R_{\Pi} = \sum_{k=1}^{m} (x_k R_k)$$

Вважатимемо, що множина станів ринку іноземних валют (станів економічного середовища) дискретна зі скінченною кількістю елементів. Нехай т — кількість станів економічного середовища; rkj — значення, що приймає норма прибутку валюти k-го виду (k = 1,…, m) в умовах j-го стану економічного середовища (j = 1,…, n), при цьому значення rkj відомі. Тоді ситуацію прийняття рішення щодо створення «валютного кошика» можна охарактеризувати функціоналом оцінювання R+ = (rkj+ : k = 1,…, m; j = 1,…, n).

Аналогічно теорії Марковіца: сподівана норма прибутку валюти k-го виду — це математичне сподівання відповідної дискретної випадкової величини Rk:

$$m_k = \mathrm{M}(R_k) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj}\right), \quad k = 1,\dots,m;$$

ступінь ризику — дисперсія норми прибутку $R_k$

$$\sigma_k^2 = D(R_k) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj}^2\right) - m_k^2, \quad k = 1,\dots,m,$$

де $Q = (q_1;\dots;q_n)$ — імовірності настання можливих сценаріїв.

*Характеристиками «валютного кошика»* зі структурою $X = (x_1;\dots;x_m)$ є його сподівана норма прибутку

$$m_\Pi = \mathbf{M}(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}(x_k m_k)$$

та ступінь ризику — дисперсія норми прибутку $R_\Pi$

$$\sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(x_k x_l \sigma_{kl}),$$

де $\sigma_{kl} = \mathrm{cov}(R_k; R_l) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj} r_{lj}\right) - m_k m_l.$

Математична модель задачі обрання оптимальної (раціональної) структури X = (x1;…; xm) «валютного кошика» має вигляд моделі задачі вибору оптимальної структури портфеля у полі відповідної інформаційної ситуації.

Існує низка добре відпра-цьованих методів розв’язування цих задач. Якщо матриця R = (rkj : k = 1,…, m; j = 1,…, n) не має сідлового елемента, то задачу вибору оптимальної структури «валютного кошика» можна звести до відшукання оптимальної раціональної змішаної стратегії відповідної гри двох осіб з нульовою сумою.

Розглянемо гру двох осіб, що задається платіжною матрицею $R = R^+$. Якщо нижня ціна гри

$$\alpha^+ = \max_{k=1,\dots,m} \alpha_k^+ = \max_{k=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} r_{kj}$$

не дорівнює верхній ціні гри

$$\beta^- = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j^- = \min_{j=1,\dots,n} \max_{k=1,\dots,m} r_{kj},$$

то, як це зазначалось у розділі 3, оптимальним розв'язком гри є сукупність змішаних стратегій гравців, що визначаються векторами $P^* = (p_1^*;\dots;p_m^*)$ та $Q^* = (q_1^*;\dots;q_n^*)$ відповідно, а ціна гри

$$V^* = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_k^* q_j^* r_{kj})$$

(у цій грі як перший гравець виступає СПР, банк, його клієнт та ін., як другий — валютний ринок).

Згідно з теоремою 3.1, якщо мають місце строгі нерівності $q_j^* > 0$ одночасно для усіх $j = 1,\dots,n$, то

$$R_{P^*} = \sum_{k=1}^{m}\left(p_k^* R_k\right) = V^* e = \text{const}.$$

Це означає, що «валютний кошик» зі структурою P* = (p1*;…; pm*) є безризиковим, оскільки для будь-якого розподілу ймовірності щодо станів валютного ринку його дисперсія дорівнює нулю: σp*2 = D(Rp*) = 0. Таким чином, за цих умов ігровий підхід на базі платіжної матриці R = (rkj : k = 1,…, m; j = 1,… n) дозволяє знайти безризиковий «валютний кошик», причому в полі будь-якої інформаційної ситуації. Більш того, у ситуації I5, коли економічне середовище активно протидіє досягненню найбільшої ефективності рішень, формування суб'єктом ризику «валютного кошика» можливе лише на базі теоретико-ігрових методів.

Зазначимо, що у полі першої інформаційної ситуації (I1) формування «валютного кошика» з мінімальною дисперсією може ґрунтуватись також на розв'язанні парної гри з нульовою сумою, коли в якості платіжної матриці використовується коваріаційна матриця C = (σkj : k = 1,… m; j = 1,… n).

## 1.3 Ігри з природою

Використання теорії матричних ігор в військово-морській справі

## 1.4 Нечіткі змішані стратегії

# 2 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

## 2.1 Приведення матричної антагоністичної гри до задач лінійного програмування

**Алгоритм поиска решения матричной антагонистической игры, заданной платежной матрицей, имеющей размерность m×n при больших значениях m и n, сводится к алгоритму симплекс-метода решения пары взаимодвойственных задач линейного программирования. Покажем, как привести конечную матричную антагонистическую игру к двум взаимодвойственных задачам линейного программирования.**

**Пусть антагонистическая игра задана платёжной матрицей A, имеющей размерность m×n, и эта игра является не вполне определённой. Необходимо найти решение игры, т.е. определить оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков:**

$$P^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*),\ Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$$

**где $P^*$ и $Q^*$ - векторы, компоненты которых $p_i^*$ и $p_j^*$ характеризуют вероятности применения чистых стратегий i и j соответственно первым и вторым игроками и соответственно для них выполняются соотношения:**

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1,\ q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} q_1^* & q_2^* & \cdots & q_n^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ . \\ p_m^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Найдём сначала оптимальную стратегию первого игрока $P^*$. Эта стратегия должна обеспечить выигрыш первому игроку не меньше V, т.е. ≥V , при любом поведении второго игрока, и выигрыш, равный V , при его оптимальном**

**поведении, т.е. при стратегии Q*.**

**Цена игры V нам пока неизвестна. Без ограничения общности, можно предположить её равной некоторому положительному числу V>0. Действительно, для того, чтобы выполнялось условие V > 0, достаточно, чтобы все элементы матрицы А были неотрицательными. Этого всегда можно добиться с помощью аффинных преобразований: прибавляя ко всем элементам матрицы А одну и ту же достаточно большую положительную константу М; при этом цена игры увеличится на М, а решение не изменится. Итак, будем считать V > 0.**

**Предположим, что первый игрок А применяет свою оптимальную стратегию Р*, а второй игрок В свою чистую стратегию j -ю, тогда средний выигрыш (математическое ожидание) первого игрока А будет равен:**

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{mj} p_m^*$$

**Оптимальная стратегия первого игрока (А ) обладает тем свойством, что при любом поведении второго игрока (В) обеспечивает выигрыш первому игроку, не меньший, чем цена игры V; значит, любое из чисел $a_j$ не может быть меньше V (≥ V). Следовательно, при оптимальной стратегии, должна выполняться следующая система неравенств:**

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* & + & a_{21}p_2^* & + & \ldots & + & a_{m1}p_m^* & \geq & V \\ a_{12}p_1^* & + & a_{22}p_2^* & + & \ldots & + & a_{m2}p_m^* & \geq & V \\ . & . & . & + & . & . & . & . & . \\ a_{1n}p_1^* & + & a_{2n}p_2^* & + & \ldots & + & a_{mn}p_m^* & \geq & V \end{cases} \quad \textbf{(1.8.1)}$$

**Разделим неравенства (1.8.1) на положительную величину *V* (правые части системы (1.8.1)) и введём обозначения:**

$$y_1 = \frac{p_1^*}{V}, \quad y_2 = \frac{p_2^*}{V}, \quad \ldots, y_m = \frac{p_m^*}{V} \quad \textbf{(1.8.2)}$$

**$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ ..,\ y_m \geq 0$, (1.8.3)**

**Тогда условия (1.8.1) запишутся в виде:**

$$\begin{cases} a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \geq & 1 \\ a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{m2}y_m & \geq & 1 \\ . & . & . & + & . & . & . & . & . \\ a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & + & a_{mn}y_m & \geq & 1 \end{cases} \quad (1.8.4)$$

**где $y_1, y_2, \dots y_m$ - неотрицательные переменные. В силу (1.8.2) и того, что $p_1^* + p_2^* + \dots + p_m^* = 1$ переменные $y_1, y_2, \dots, y_m$ удовлетворяют условию, которое обозначим через F:**

$$F = y_1 + y_2 + \dots + y_m = \frac{1}{V} \quad (1.8.5)$$

**Поскольку первый игрок свой гарантированный выигрыш (V) старается сделать <u>максимально возможным</u> (V→ max) , очевидно, при этом правая часть (1.8.5) - $\frac{1}{V}$ →min - принимает минимальное значение. Таким образом, <u>задача решения антагонистической игры для первого игрока свелась к следующей математической задаче:</u>**

**определить неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств (1.8.4), системе общих ограничений (1.8.3) и минимизировали целевую функцию F:**

$$F = y_1 + y_2 + \dots + y_m \rightarrow \min$$

**Это типичная задача линейного программирования (двойственная) и она может быть решена симплекс - методом. Таким образом, решая задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $P^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ игрока А.**

**Найдём теперь оптимальную стратегию $Q^*= (q_1^*, q_2^*,\ldots, q_n^*)$ игрока В. Всё будет аналогично решению игры для игрока А, с той разницей, что игрок В стремиться не максимизировать, а минимизировать выигрыш (по сути дела его проигрыш), а значит, не минимизировать, а максимизировать величину $\frac{1}{V}$, т.к. V →min. Вместо условий (1.8.4) должны выполняться условия:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1 \end{cases} \quad (1.8.6)$$

**где**

$$x_1 = \frac{q_1^*}{V}, \quad x_2 = \frac{q_2^*}{V}, \quad \ldots, x_n = \frac{q_n^*}{V} \quad (1.8.7)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, .., x_n \ge 0 \quad (1.8.8)$$

**Требуется так выбрать переменные $x_1, x_2, .., x_n$, чтобы они удовлетворяли условиям (1.8.6), (1.8.8) и обращали в максимум линейную функцию цели $F^/$:**

$$F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to max$$

**. Таким образом, <u>задача решения антагонистической игры для второго игрока свелась к следующей математической задаче:</u>**

**определить неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, .., x_n$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств (1.8.6), системе общих ограничений (1.8.8) и максимизировать целевую функцию $F^/$:**

$$F' = x_1 + x_2 + .. + x_n \to \min$$

**Это типичная задача линейного программирования (прямая) и она может быть**

**решена симплекс - методом. Таким образом, решая прямую задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $Q^{*}= (q_1^{*}, q_2^{*},\ldots, q_n^{*})$ игрока В.**

**Подведём итог.**

| **Задача второго игрока**<br>**минимизация проигрыша V** | **Задача первого игрока**<br>**максимизация выигрыша V** |
|---|---|
| **Целевая функция** | |
| $F^{/}= x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n = \frac{1}{V} \rightarrow \max$ | $F = y_1+y_2+y_3+\ldots+y_m = \frac{1}{V} \rightarrow \min$ |
| **Функциональные ограничения** | |
| $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1$<br>$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1$<br>———————————<br>$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1$ | $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge 1$<br>$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge 1$<br>———————————<br>$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge 1$ |
| **Общие (прямые) ограничения** | |
| $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, .., x_n \ge 0$ | $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, .., y_m \ge 0$ |

Задачи обоих игроков образуют пару симметричных взаимодвойственных задач линейного программирования, и, поэтому нет необходимости решать обе эти задачи, т.к. найдя решение одной из них, можно найти и решение другой.

**Примечание**

Из сведения задачи решения конечной матричной антагонистической игры к задаче линейного программирования (ЗЛП) можно сделать заключение по поводу существования решения антагонистической игры $m \times n$, не опираясь на теорему фон Неймана.

Пусть задача о нахождении оптимальной стратегии $P^{*}= (p_1^{*}, p_2^{*}, \ldots, p_m^{*})$ игрока А сведена к задаче линейного программирования с условиями неравенствами (1.8.4) и минимизируемой функцией (1.8.5). Всегда ли существует её решение? Известно, что решение задачи линейного программирования может и не существовать; оно отсутствует, если:

1. функциональные и общие условия - равенства или неравенства - вообще не имеют допустимых неотрицательных решений;
2. допустимые решения существуют, но среди них нет оптимального, так как минимизируемая функция не ограничена снизу.

Посмотрим, как обстоит дело в нашем случае. Допустимые решения ЗЛП в нашем случае всегда существуют. Действительно, с помощью аффинных преобразований сделаем элементы платёжной матрицы А строго положительными, например, прибавив достаточно большое положительное число **M** к каждому элементу платёжной матрицы, и обозначим наименьший элемент матрицы А через **μ**:

$$\boldsymbol{\mu} = \min_{i}\min_{j} a_{ij}$$

Положим теперь $y_1 = 1/\mu$, $y_2 = y_3 = ... = y_m = 0$. Нетрудно видеть, что эта система значений переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ представляют собой допустимое решение ЗЛП - все они неотрицательны, и их совокупность удовлетворяет условиям (1.8.4).
Теперь убедимся, что линейная функция (1.8.5) не может быть неограниченной снизу. Действительно, все $y_1, y_2, y_3, ..., y_m$ неотрицательны, а коэффициенты при них в в выражении (1.8.5) положительные (равные единицам), значит, функция F в формуле (1.8.5) тоже неотрицательна, значит, она ограничена снизу (нулём) и решение задачи линейного программирования (а следовательно, и игры m × n) существует.

Пример1. Решить игру с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

1. В соответствии с алгоритмом определим, существуют ли в ней доминируемые стратегии, чтобы исключить их. Доминируемых стратегий нет.
2. Поскольку матрица содержит отрицательные числа, то нужно добиться, чтобы все её элементы были неотрицательны, прибавив ко всем её элементам число, равное модулю наименьшего числа матрицы. Минимальный элемент матрицы равен - 0,1, его модуль равен 0,1. Прибавим ко всем элементам платёжной матрицы число, равное 0,1 , в результате получим:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Умножим все элементы полученной матрицы на 10, чтобы удобнее проводить последующие вычисления.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Проведённые аффинные преобразования на оптимальных стратегиях не скажутся, а цену игры мы восстановим, сделав обратные преобразования (разделим полученную сумму на 10 и отнимем 0,1).

Припишем строкам вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда среднее значение (математическое ожидание) выигрыша игрока А при применении игроком В своей первой стратегии равен $1{\cdot}p_1 + 7{\cdot}p_2 + 5{\cdot}p_3$ (первый столбец поэлементно умножаем на вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ и полученные произведения суммируем). Это выигрыш не может быть меньше гарантированной цены игры V: $1 \cdot p_1 + 7 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 \geq V$. Аналогично для других стратегий игрока B.

$$\begin{cases} p_1 + 7 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 \geq V \\ 4 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \geq V \\ 6 \cdot p_1 + 2 \cdot p_3 \geq V \\ p_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенства на V и введём обозначения $y_i = p_i/V$ (i = 1, 2, 3.):

$$\begin{cases} y_1 + 7 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \geq 1 \\ 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 1 \\ 6 \cdot y_1 + 2 \cdot y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 = (p_1 + p_2 + p_3)/V = \frac{1}{V}$$

Игрок А стремиться повысить цену игры (V→ max). Поэтому F → min.

Получили задачу линейного программирования:

$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + 7 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 \geq 1 \\ 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 1 \\ 6 \cdot y_1 + 2 \cdot y_3 \geq 1 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Аналогично припишем столбцам вероятности $q_1$, $q_2$, $q_3$.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда средний проигрыш игрока В при применении игроком А его первой стратегии равен $1 \cdot q_1 + 4 \cdot q_2 + 6 \cdot q_3$ (1-ю строку поэлементно умножаем на вероятности $q_1$,$q_2$, $q_3$ и полученные произведения суммируем). Этот проигрыш не может быть больше цены игры V: $1 \cdot q_1 + 4 \cdot q_2 + 6 \cdot q_3 \leq V$. Аналогично для других стратегий игрока А.

$$\begin{cases} q_1 + 4 \cdot q_2 + 6 \cdot q_3 \leq V \\ 7 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 \leq V \\ 5 \cdot q_1 + 3 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3 \leq V \\ q_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на $V$ и введём обозначения $x_i = q_i / V$ ($i$ = 1, 2, 3)

$$\begin{cases} x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \le 1 \\ 7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \le 1 \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \le 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 = (q_1 + q_2 + q_3)/V = \frac{1}{V}$$

Игрок B стремится понизить цену игры (V→min), поэтому $F^/$ → max.
Получили задачу линейного программирования:
$F' = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \le 1 \\ 7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \le 1 \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \le 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Полученные задачи являются взаимно двойственными задачами линейного программирования. Решим любую из них симплекс-методом. Окончательный результат - таблица имеет следующий вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| y1 | 3/28 | | p1= | 3/8 |
| y2 | 0 | | p2= | 0 |
| y3 | 5/28 | | p3= | 5/8 |
| $F^/$ | 2/7 | | V= | 3 1/2 |
| x1 | 1/7 | | q1= | 1/2 |
| x2 | 0 | | q2= | 0 |
| x3 | 1/7 | | q3= | 1/2 |
| F | 2/7 | | V= | 3 1/2 |

Итак, оптимальные стратегии:
$P^*$=(3/8; 0; 5/8), $Q^*$=(1/2; 0; 1/2),
цена игры:
для модифицированной задачи V= 3,5 ,
а для исходной задачи $V^/$ = 3,5/10-0,1 = 0,25.

type="square" side="right"припустимо, що за перші k розігрування гравець 1 використовував i-у чисту стратегію ilo-full-src="http://ua-referat.com/dopb71362.zip" src="http://ua-referat.com/dopb71362.zip" v:shapes="_x0000_i1044" height="21" width="13" type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1044" drawaspect="Content" objectid="_1335730848" $_i^k$ разів

(i = 1, ..., m), а гравець 2 j-у чисту стратегію type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1045" drawaspect="Content" objectid="_1335730849" разів (j = 1, ..., n). Тоді їх

змішаними стратегіями будуть вектори type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1046" drawaspect="Content" objectid="_1335730850" .
Гравець 1 стежить за діями гравця 2 і з кожним своїм ходом бажає отримати якомога більший виграш. Тому у відповідь на застосування гравцем 2 своєї змішаної стратегії $y^{k,}$ він буде використовувати чисту стратегію i $_{k+1,}$ яка забезпечить йому найкращий результат при розігруванні (k +1)-ой партії. Гравець 2 вчинять аналогічно. У гіршому випадку кожен з них може отримати:

$$\bar{\nu}^k = \max_i \sum_j^n a_{ij}\eta_j^k = \sum_j^n a_{i_{k+1}}\eta_j^k$$

$$\underline{\nu}^k = \min_j \sum_i^m a_{ij}\xi_i^k = \sum_i^m a_{ij_{k+1}}\xi_i^k$$

type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1047" drawaspect="Content" objectid="_1335730851"

де type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1048" drawaspect="Content"

objectid="_1335730852" - Найбільше значення програшу гравця 2 і type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1049" drawaspect="Content" objectid="_1335730853" - Найменше значення виграшу гравця 1.
Розглянемо відносини, які визначають середні значення програшу гравця 2 і виграшу гравця 1:

$$\bar{\nu}^k / k = \max_i \sum_j^n a_{ij}\eta_j^k / k = \sum_j^n a_{i_{k+1}j}\eta_j^k / k$$

$$\underline{\nu}^k / k = \min_j \sum_i^m a_{ij}\xi_i^k / k = \sum_i^m a_{ij_{k+1}}\xi_i^k / k$$

Нехай ν - ціна матричної гри Γ $_{A.}$ Її значення буде більше виграшу гравця 1, але менше програшу гравця 2, т. е.

$$\max_k \underline{\nu}^k / k \le \nu \le \min_k \bar{\nu}^k / k \quad . (1)$$

Таким чином, отриманий ітеративний процес, що дозволяє знаходити наближене рішення матричної гри, при цьому ступінь близькості наближення до істинного значення гри визначається довжиною інтервалу

$$\left[\max_k \underline{\nu}^k / k, \min_k \bar{\nu}^k / k\right].$$

Збіжність алгоритму гарантується наступної теоремою.

**Теорема.** $\lim_{k\to\infty}(\min_k \bar{\nu}^k / k) = \lim_{k\to\infty}(\max_k \underline{\nu}^k / k) = \nu$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1053" drawaspect="Content" objectid="_1335730854" .
Схема докази.
*Лема. Для будь-якої матриці A і "e> 0 існує таке k $_{0,}$ що*

$$\min_{k_0} \bar{\nu}^k / k - \max_{k_0} \underline{\nu}^k / k < \varepsilon$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1054" drawaspect="Content" objectid="_1335730855" .

При граничному переході в нерівності (1) при k ® ¥ маємо:

$$\lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k) \le \nu \le \lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k)$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1055" drawaspect="Content" objectid="_1335730857" . (2)

Звідси отримуємо оцінку різниці меж:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k) - \lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k)$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1056" drawaspect="Content" objectid="_1335730858" .

З *леми* випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k - \max_k \underline{\nu}^k / k) < \varepsilon$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1057" drawaspect="Content" objectid="_1335730859" .

На підставі нерівності (1) маємо: $$\lim_{k\to\infty} \inf(\min_k \bar{\nu}^k / k) \ge \nu \qquad \lim_{k\to\infty} \sup(\max_k \underline{\nu}^k / k) \le \nu$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1058" drawaspect="Content" objectid="_1335730860" .

Отже, в силу обмеженості меж

$$\lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k) - \lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k) < \varepsilon$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1059" drawaspect="Content" objectid="_1335730861" .

Отримуємо оцінку для різниці меж:

$$0 \le \lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k) - \lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k) < \varepsilon$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1060" drawaspect="Content" objectid="_1335730862" для "e> 0.

Можемо зробити висновок, що $\lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k) = \lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k)$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1061" drawaspect="Content" objectid="_1335730863" . Залишилося показати рівність меж *n*. Це випливає з нерівності (2).

Отже, $\lim_{k\to\infty} (\min_k \bar{\nu}^k / k) = \lim_{k\to\infty} (\max_k \underline{\nu}^k / k) = \nu$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1062" drawaspect="Content" objectid="_1335730864" .

**Приклад.** *Знайти наближене рішення гри з матрицею*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1063" drawaspect="Content" objectid="_1335730865" .

Нехай гру почне гравець 2. Він довільно вибирає одну зі своїх чистих стратегій. Припустимо, що він вибрав свою 1-у стратегію, а гравець 1 відповідає своїй 2-ій стратегією. Занесемо дані в таблицю.

| но-заходів партії | стратегія друга гравця | виграш гравця 1 при його стратегіях | | | стратегія перший гравця | програш гравця 2 при його стратегіях | | | u | w | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 5 / 2 |

У стовпці u знаходиться найбільший середній виграш 4 гравці 1, отриманий ним в першій партії; у стовпці w варто найменший середній програш 1, отриманий гравцем 2 в першій партії; у стовпці n знаходиться середнє арифметичне n = (u + w) / 2 = 5 / 2, тобто наближене значення ціни гри, отриманий в результаті програвання однієї партії.
Так як гравець 1 вибрав 2-у стратегію, то гравець 2 може програти:
4, якщо застосує свою 1-у стратегію;
1, якщо застосує свою 2-у стратегію;
2, якщо застосує свою 3-ю стратегію.
Оскільки він бажає програти якомога менше, то у відповідь застосує свою 2-у стратегію.
Тоді перший гравець отримає виграш рівний 3, 1, 0 відповідно при своїх 1-й, 2-й, 3-й стратегіях, а його сумарний виграш за дві партії складе:
0 +3 = 3 при його 1-й стратегії;
4 +1 = 5 при його 2-й стратегії;
2 +0 = 2 при його 3-й стратегії.
З усіх сумарних виграшів найбільшим є 5, який виходить при 2-й стратегії гравця 1. Значить, у цій партії він повинен вибрати саме цю стратегію.
При 1-й стратегії гравця 1 гравець 2 програє 4, 1, 2 відповідно 1-й, 2-й, 3-й його стратегіям, а сумарний програш за обидві партії складе:
4 +4 = 8 при його 1-й стратегії;
1 +1 = 2 при його 2-й стратегії;
2 +2 = 4 при його 3-й стратегії.
Всі отримані дані занесемо в таблицю. У стовпець u ставиться найбільший сумарний виграш гравця 1 за дві партії, поділений на кількість партій, тобто 5 / 2; в стовпець w ставиться найменший сумарний програш гравця 2, поділений на кількість партій, тобто 2 / 2; в стовпець n ставиться середнє арифметичне цих значень, тобто 7 / 2.

| но-заходів пар тії | стратегія друга гравця | виграш гравця 1 при його стратегіях | | | стратегія перший гравця | програш гравця 2 при його стратегіях | | | u | w | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 5 / 2 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 8 | 2 | 4 | 5 / 2 | 2 / 2 | 7 / 2 |

У третій партії гравець 2 вибирає свою 2-у стратегію, так як з усіх сумарних програшів найменшим є 2.
Таким чином, продовжуючи цей процес далі, складемо таблицю розігрування гри за 20 ітерацій (партій).

| но-заходів пар тії | Страте-гія друга гравця | виграш гравця 1 при його стратегіях | | | Страте-гія перший гравця | програш гравця 2 при його стратегіях | | | u | w | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 5 / 2 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 8 | 2 | 4 | 5 / 2 | 2 / 2 | 7 / 2 |
| 3 | 2 | 6 | 6 | 2 | 1 | 8 | 5 | 5 | 6 / 3 | 5 / 3 | 11 / 6 |
| 4 | 2 | 9 | 7 | 2 | 1 | 8 | 8 | 6 | 9 / 4 | 6 / 4 | 15 / 8 |
| 5 | 3 | 10 | 9 | 5 | 1 | 8 | 11 | 7 | 10 / 5 | 7 / 5 | 17/10 |
| 6 | 3 | 11 | 11 | 8 | 1 | 8 | 14 | 8 | 11 / 6 | 8 / 6 | 19/12 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 11 | 15 | 10 | 2 | 12 | 15 | 10 | 15 / 7 | 10 / 7 | 25/14 |
| 8 | 3 | 12 | 17 | 13 | 2 | 16 | 16 | 12 | 17 / 8 | 12 / 8 | 27/16 |
| 9 | 3 | 13 | 19 | 16 | 2 | 20 | 17 | 14 | 19 / 9 | 14 / 9 | 33/18 |
| 10 | 3 | 14 | 21 | 19 | 2 | 24 | 18 | 16 | 21/10 | 16/10 | 37/20 |
| 11 | 3 | 15 | 23 | 22 | 2 | 28 | 19 | 18 | 23/11 | 18/11 | 41/22 |
| 12 | 3 | 16 | 25 | 25 | 2 | 32 | 20 | 20 | 25/12 | 20/12 | 45/24 |
| 13 | 2 | 19 | 26 | 25 | 2 | 36 | 21 | 22 | 26/13 | 21/13 | 47/26 |
| 14 | 2 | 22 | 27 | 25 | 2 | 40 | 22 | 24 | 27/14 | 22/14 | 49/28 |
| 15 | 2 | 25 | 27 | 25 | 2 | 44 | 23 | 26 | 27/15 | 23/15 | 50/30 |
| 16 | 2 | 28 | 29 | 25 | 2 | 48 | 24 | 28 | 29/16 | 24/16 | 53/32 |
| 17 | 2 | 31 | 30 | 25 | 1 | 48 | 27 | 29 | 31/17 | 27/17 | 58/34 |
| 18 | 2 | 34 | 31 | 25 | 1 | 48 | 30 | 30 | 34/18 | 30/18 | 64/36 |
| 19 | 2 | 37 | 32 | 25 | 1 | 48 | 33 | 31 | 37/19 | 31/19 | 68/38 |
| 20 | 3 | 38 | 34 | 28 | 1 | 48 | 36 | 32 | 38/20 | 32/20 | 70/40 |

З таблиці видно, що в 20-ти програних партіях стратегії 1, 2, 3 для другого гравця зустрічаються відповідно 2, 10, 8 разів, отже, їх відносні частоти рівні 2 / 20, 10/20, 8 / 20. Стратегії 1, 2, 3 для гравця 1 зустрічаються відповідно 8, 12, 0 раз, отже, їх відносні частоти рівні 8 / 20, 12/20, 0, а наближене значення ціни гри одно 70/40.

Таким чином, отримали наближене рішення гри: $x^{20}$ = (1 / 10, 1 / 2, 2 / *5), y* $^{20}$ = (2 / 5, 3 / 5, 0), n = 1,57.

Такий ітеративний процес веде гравців до мети повільно. Часто для отримання оптимальних стратегій, що дають гравцям виграш, доводиться проробляти сотні ітерацій. При цьому швидкість збіжності помітно погіршується із зростанням розмірності матриці і зростанням числа стратегій гравців. Це також є наслідком не монотонності послідовностей type="Embed"

progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1064" drawaspect="Content" objectid="_1335730866" і type="Embed" progid="Equation.3" shapeid="_x0000_i1065" drawaspect="Content" objectid="_1335730867" . Тому, практична цінність цього методу має місце, коли обчислення проводяться на досить швидкодіючих обчислювальних машинах. Але поряд з таким недоліком можна виділити і достоїнства методу ітерацій:

1. Цей метод дає можливість знайти орієнтовне значення ціни гри і наближено обчислити оптимальні стратегії гравців.
2. Складність і обсяг обчислень порівняно слабко зростають у міру збільшення числа стратегій гравців (m і n).

Для розглянутого алгоритму наведена реалізація на мові Pascal (див. додаток).

ЛІТЕРАТУРА


1. http://nodebeginner.ru/
2. http://enyojs.com/#documentation
3. http://javascript.ru/manual
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций
5. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций
6. Крушевский А.В. - Теория игр
7. http://math.semestr.ru/
8. Решение матричных игр в нечетких смешанных стратегиях. П.П. Петтай
9. Матричные игры. [Сборник переводов]. Под ред. Воробьёва И.Н. М., Физматгиз, 1961