УДК 519.832.2

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В НЕЧЕТКИХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

П.П. Петтай

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор И.Ю. Попов

В статье приводится описание алгоритма нахождения оптимальных смешанных стратегий в антагонистических играх. Обосновывается неэффективность данного метода для одиночных игр и игр, в которых мы обладаем какой-либо дополнительной информацией о психологии поведения противника, которая по своей природе имеет нечеткий характер. Предложены новые правила выбора нечетких смешанных стратегий для антагонистических игр с нечеткой информацией. Рассмотрен расчетный пример.

Ключевые слова: теория игр, теория нечетких множеств, математические методы в экономике

Постановка задачи и классическое решение

Не многие исследования в области математики удостоены присуждения Нобелевской премии. Дело в том, что за абстрактные математические результаты Нобелевская премия не присуждается, но можно получить премию, если прикладные исследования будут признаны специалистами из других областей: физики, экономики, химии или медицины. Именно так произошло с теорией игр. Ее методы нашли многочисленные применения в военных науках, биологии, психологии, социологии, в области информационных технологий и, конечно же, в области экономики. Достаточно лишь сказать, что за 40 лет присуждения Нобелевских премий по экономике 5 раз премии присуждались за достижения в области теории игр.

В 1994 году Нобелевская премия по экономике была присуждена Джону Нэшу «за анализ равновесия в теории некоалиционных игр». До выхода в свет диссертации Джона Нэша исследования проводились основном в области игр *с нулевой суммой*, где суммарный выигрыш одних участников равен суммарному проигрышу других. Нэш исследовал игры с ненулевой суммой, в которых возможны ситуации, выгодные сразу для всех участников. Так, например, в случае спора руководства завода и профсоюза о повышении заработной платы он может закончиться забастовкой, что не выгодно сразу обоим участникам спора, тогда как от определенного соглашения все участники конфликта могут в общей сложности остаться в выигрыше. Нэш выделил специальный класс ситуаций в игре (т.е. фиксированных стратегий всех участников игры) – такие ситуации, от которых не выгодно отклоняться *в одиночку* никому из игроков. Позже такие ситуации были названы ситуациями *равновесия по Нэшу*.

Ситуации равновесия могут существовать и в *антагонистических* играх – играх двух игроков, в которых величина выигрыша одного численно равна величине проигрыша другого. Такие игры удобно представлять в форме матриц, строкам которых соответствуют стратегии 1-ого игрока, столбцам – стратегии 2-ого, а элементы матрицы $a_{i,j}$ показывают величину выигрыша 1-ого игрока (и, соответственно, проигрыша 2-ого), если 1-ый игрок изберет стратегию i, а 2-ой игрок – стратегию j. При выборе стратегии i гарантированный доход 1-ого игрока составит $\min_j a_{i,j}$, независимо от стратегии 2-ого игрока. Естественно стремиться максимизировать свой минимально возможный доход и избрать стратегию i: $\max_i(\min_j a_{i,j})$ – это принцип выбора *максиминной* стратегии. Похожие рассуждения можно применить и к действиям 2-ого игрока. При выборе стратегии j его максимально возможный проигрыш составит

$\max\limits_i a_{i,j}$. Естественно избрать такую стратегию, которая минимизировала бы максимально возможный проигрыш, т.е. избрать стратегию j: $\min\limits_j(\max\limits_i a_{i,j})$ – избрать *минимаксную* стратегию поведения. Можно легко доказать, что верно следующее неравенство: $\max\limits_i(\min\limits_j a_{i,j}) \le \min\limits_j(\max\limits_i a_{i,j})$ [1]. При этом, если достигается равенство, то соответствующая ему ситуация (i^*, j^*) будет *равновесной*, т.е. никому из игроков будет не выгодно отклоняться от нее в одиночку. Действительно, чтобы ситуация (i^*, j^*) была равновесной необходимо и достаточно, чтобы элемент a_{i^*, j^*} был максимальным в столбце и минимальным в строке. Как не сложно сообразить, в этом случае этот же элемент будет соответствовать гарантированному выигрышу 1-ого игрока при максиминной стратегии и гарантированному проигрышу 2-ого игрока при минимаксной стратегии, т.е. они совпадут. При этом совпасть они могут только для равновесных стратегий. В этом случае ситуация называется *решением игры*.

Тем не менее, на практике ситуаций равновесия может оказаться несколько, что не дает возможности однозначно предсказать исход игры для случая, когда игроки выбирают максиминную и минимаксную стратегии соответственно. Что еще хуже, если равенства нет, то ситуации равновесия в игре не существует! Для решения указанной проблемы был предложен метод решения матричных игр в *смешанных стратегиях*. Данный метод удобен для *многократно повторяющихся* игр. В основе метода лежит идея *рандомизации* выбора стратегий игроками [2].

По определению, *смешанной стратегией* 1-ого игрока называется набор неотрицательных чисел $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, удовлетворяющий условию $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$. В этом случае x_i интерпретируется как вероятность применения 1-ым игроком i-ой стратегии. Аналогично, набор неотрицательных чисел $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, удовлетворяющий условию $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$ является смешанной стратегией 2-ого игрока, y_j интерпретируется как вероятность выбора 2-ым игроком j-ой стратегии. Если задать смешанные стратегии игроков, то математическое ожидание выигрыша 1-ого игрока составит $F(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$. Если 1-ый игрок по-прежнему будет руководствоваться максиминными соображениями, то ему необходимо выбрать такое распределение вероятностей своих стратегий (т.е. такой набор чисел $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$), при котором он сможет максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш $\max\limits_{x\in X}\left[\min\limits_{y\in Y}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j\right]$, где $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Аналогично, руководствуясь минимаксной стратегией, 2-ой игрок изберет такое распределение вероятностей, чтобы минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш: $\min\limits_{y\in Y}\left[\max\limits_{x\in X}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j\right]$. В этом случае *оптимальными смешанными стратегиями* игроков (x^*, y^*) будут называться такие стратегии, при которых достигается ситуация *равновесия* в игре, т.е. равенство $\max\limits_{x\in X}\left[\min\limits_{y\in Y}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j\right] = \min\limits_{y\in Y}\left[\max\limits_{x\in X}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j\right]$. Джон фон Нейман доказал *фундаментальную теорему* теории матричных игр, согласно которой *любая игра имеет решение (т.е. ситуацию равновесия) в смешанных стратегиях*.

Существуют различные методы нахождения решений матричных игр в смешанных стратегиях, одним из наиболее простых из которых является переход к решению эквивалентной задачи линейного программирования $f_1(x) = x_{m+1} \to \max$ при ограничениях $D_1 = \{x \in R^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i \geq x_{m+1}, j = \overline{1,n}; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; x_i \geq 0, i = \overline{1,m}\}$ для 1-ого игрока.

Для 2-ого игрока получим, соответственно, задачу $f_2(y) = y_{n+1} \to \min$ при ограничениях $D_2 = \{y \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \leq y_{n+1}, i = \overline{1,m}; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; y_j \geq 0, j = \overline{1,n}\}$. При этом, не сложно заметить, что задачи 1-ого и 2-ого игроков являются двойственными друг другу, а значит, оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают. Отсюда по сути уже следует существование решения в смешанных стратегиях.

Критика метода смешанных стратегий и переход к нечеткости

Как было показано ранее, в *чистых* стратегиях в игре может *не существовать* ситуации равновесия.

Ориентация на оптимальные смешанные стратегии позволяет первому игроку максимизировать наименьший *ожидаемый* выигрыш 1-ого игрока и минимизировать наибольший *ожидаемый* проигрыш 2-ого игрока. Однако такой выбор может быть оправдан лишь для *многократно повторяющихся* игр. В отдельной игре каждый из игроков даже при реализации «оптимальной» смешанной стратегии может очень сильно проиграть! В отдельных играх смешанные стратегии не только *не обещают максимального выигрыша*, но даже *не защищают от максимально возможного проигрыша*, т.е. каждый игрок может принять *худшее* из всех возможных решений!

Выбор максиминных и минимаксных стратегий хорошо подходит для *осторожных* игроков. Он позволяет не проиграть слишком много, не выиграть слишком мало. Но некоторые игроки могут быть более склонны к риску, и ориентироваться на те стратегии, которые *могут* обеспечить им *максимально возможный* выигрыш, некоторые стараются максимизировать *средний ожидаемый* выигрыш, т.е. выбор минимакса или максимина не является единственно возможным хорошим в некотором смысле решением.

Наконец, ориентация на смешанные стратегии подразумевает отсутствие какой-либо информации о психологии соперника, предполагая лишь, что он *действует рационально*. Однако, как заметил Герберт Саймон в своей *теории ограниченной рациональности*, большинство людей рациональны только отчасти и эмоциональны либо иррациональны в остальных ситуациях. Выбор рационального решения нередко подразумевает какие-либо сложные вычисления, которыми игроки могут не владеть или же они могут не иметь возможности их осуществить (из-за трудоемкости вычислений, отсутствия всей необходимой информации или каких-либо еще причин). Возможно также, что затраты на принятие оптимального решения могут быть недопустимо высоки и не окупят возможных преимуществ, поэтому рационально в такой ситуации будет принять какое-либо другое «достаточно хорошее» решение.

На практике мы можем иметь о противнике какую-либо дополнительную информацию и на ее основе делать какие-либо предположения относительно его поведения. При этом наши предположения практически всегда носят *нечеткий* характер. К примеру, наши предположения могут иметь такой вид: «если противник *самоуверен*, то, *скорей всего*, он выберет стратегию максимизации максимального дохода».

Оперировать с подобными высказываниями и принимать на их основе количественное рациональное решение помогает аппарат созданной Лотфи Заде *теории нечетких множеств*. В отличие от классической теории множеств, где каждый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать какому-либо множеству, в теории нечетких множеств предполагается, что любой элемент x принадлежит множеству A с некоторой *степенью принадлежности* $\mu_A(x) \in [0,1]$. Пара $(A, \mu_A(x))$ образует *нечеткое множество*. Несмотря на кажущееся сходство с вероятностной мерой, функция принадлежности по своей природе имеет совершенно другой характер. Так, если бы мы с вероятностью 0,7 предполагали, что наш противник склонен к риску, то это означало бы лишь, что из 100 встречавшихся нам похожих в каком-либо смысле противников примерно 70 были склонны к риску. Такие данные хороши в условиях *полной неопределенности* относительно нашего противника и при наличии *необходимой статистики*. Степень принадлежности равная 0,7 к множеству противников склонных к риску можно интерпретировать примерно, как что противник скорей склонен к риску, чем не склонен, но уверенность в этом не полная. Такая уверенность хоть и субъективна, но зато не предполагает наличия каких-либо статистических данных, учитывает *конкретного* противника и, так или иначе, формализует всю совокупность наших знаний о нем и нашего опыта. Если мы играем с ребенком или домохозяйкой, или же мы играем с каким-либо ученым, опытным игроком, специалистом в данной области, то такие знания глупо не учитывать, хотя они, конечно же, не гарантируют правильность наших предположений. Часто мы, так или иначе, знаем нашего противника и можем, хотя бы на интуитивном уровне, предполагать, чем он будет руководствоваться при принятии решения.

В общем случае наши предположения могут носить достаточно сложный характер. К примеру, мы можем предполагать, что «если противник *опытный* и *ведет себя самоуверенно*, то он будет руководствоваться принципом оптимальных смешанных стратегий, если выпавшая стратегия будет *не слишком плохой*». Если противник *осторожный,* то он будет руководствоваться максиминной стратегией. Если противник *склонен к риску* и *не опытен*, то он выберет стратегию, соответствующую максимально возможному доходу. Таким образом, мы можем составить целую базу нечетких правил. При этом нам необходимо эвристически или аналитически задать степени принадлежности противника к каждому из нечетких множеств. Также необходимо научиться осуществлять логические операции над нечеткими множествами. Так, в первом примере нам необходимо обработать целых три нечетких множества: A={*опытный противник*}, B={*самоуверенный противник*} и C={*не слишком плохая стратегия*} и на основе их обработки осуществить процедуру *нечеткого вывода*. Методам обработки подобных высказываний посвящен следующий раздел данной статьи.

Процедура обработки нечетких правил в антагонистических играх

Определим классическим образом основные логические операции над нечеткими множествами [3–5].

- Объединение (соответствует логической операции «или»):
  $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.
- Пересечение (соответствует логической операции «и»):
  $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.
- Дополнение (соответствует логической операции «не»): $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Тогда обработку нечетких правил вида: {Пi: если (x есть A_i) *и* (y есть B_i), то z_i}, где A_i, B_i – некоторые нечеткие множества, а z_i – конкретное решение можно произвести следующим образом.

Сначала оценим степень нашей уверенности в результате. Для конкретного противника определяем степень истинности для предпосылок каждого правила $\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_i}(y_0)$. Для нашего примера, уверенность в том, что противник изберет стратегию z_i составит $\alpha_i = \min[\mu_{A_i}(x_0), \mu_{B_i}(y_0)]$, т.к. использовалась операция дизъюнкции, т.е. логического пересечения двух высказываний.

Затем определяем уверенность α_i для каждой из возможных стратегий. Если мы считаем, что противник выберет стратегию z_i, то оптимальным решением по этой стратегии для него будет некоторое решение j^*. Нашим оптимальным ответом будет выбор решения $i^* : \max_i a_{i,j^*}$.

Теперь мы можем воспользоваться *модифицированным вариантом смешанных стратегий*, для выбора оптимальной стратегии, основанной на обработке базы нечетких правил. Определим вероятности выбора каждого из допустимых решений как $p_i = \frac{\alpha_i}{\sum_i \alpha_i}$. Теперь мы можем считать, что с вероятностью p_i противник будет руководствоваться стратегией z_i, согласно которой он выберет решение j^*, на которое мы с этой же вероятностью ответим решением $i^* : \max_i a_{i,j^*}$.

Расчетный пример

Продемонстрируем предложенную идею на конкретном примере.

Предположим, что как нам, так и нашему сопернику известна следующая матрица игры: $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}$.

Из матрицы видно, что как мы, так и наш противник должны выбрать одно из 4 решений. В каждой строке матрицы есть как положительные, так и отрицательные выигрыши, соответственно, данная игра может быть как выигрышной, так и проигрышной для каждого из игроков. Если мы попытаемся руководствоваться максиминной стратегией, то выберем решение 1 или решение 2 (т.к. в этом случае мы проиграем не больше 5 у.е., а при выборе решения 3 или 4 был риск проиграть 7 у.е.). Руководствуясь минимаксной стратегией, наш противник выберет решение 1 (т.к. в этом случае он проиграет не более 4 у.е., тогда как при выборе другого решения для него был риск проиграть больше). $5 \neq 4$, а значит ситуации равновесия по Нэшу в данной игре нет. Действительно, при *таком* выборе возможна реализация одной из двух ситуаций: или мы выиграем 2 у.е., или проиграем 3. Однако, если бы мы точно знали, что противник будет руководствоваться минимаксной стратегией, то выбрали бы решение 3, что гарантировала бы нам выигрыш 4 у.е., т.е. указанные ситуации не являются равновесными, т.к. отклоняться от них выгодно. Итак, в чистых стратегиях указанная игра ситуаций равновесия не имеет.

Предположим для примера, что мы сформулировали следующую базу из 3-х нечетких правил:

$П_1$: {Если противник *неопытный* или *склонен к риску*, то он выберет решение по принципу максимизации максимума возможного дохода}.

$П_2$: {Если противник *осторожный*, то он выберет решение по минимаксному принципу}.

$П_3$: {Если противник *опытный*, то он выберет решение по минимаксному принципу, если средний выигрыш при таком решении будет *не слишком низким* и решение, максимизирующее средний выигрыш *в противном случае*}.

Заметим, что данная база, конечно же, не претендует на полноту. Однако, что есть, то есть. Если мы считаем необходимым, то можем дополнить правила.

Зададим соответствующие нечеткие множества:

A={опытный противник}. Мы можем считать, например, что, если противник играет в эту игру не более чем в 3-ий раз, то он точно неопытный, если более чем в 20-ый – точно опытный. Промежуточные результаты мы можем, например, аппроксимировать с помощью прямой, задав функцию принадлежности следующим образом:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0,\ x\le 3\\ \dfrac{x-3}{21-3},\ 3<x\le 20\\ 1,\ x>20\end{cases}.$$

B={осторожный противник}. Формализовать конкретно выбор функции принадлежности здесь достаточно сложно. Но можно исходить при оценке из наших интуитивных (экспертных) соображений. К примеру, если мы точно уверены, что противник осторожный, то задать $\mu_B(y_0)=1$, если к осторожным мы его причислить никак не можем, то задать $\mu_B(y_0)=0$, если сложно сказать, т.е. данных, на основе которых мы можем делать хоть какие-то предположения у нас совершенно недостаточно, то задать $\mu_B(y_0)=0.5$ и т.д.

C={противник склонный к риску}. Заметим, что противники склонные к риску неосторожны и наоборот, т.е. можно считать, что $C=\overline{B}$ (дополнение к множеству B).

D={средний выигрыш слишком низкий}. К примеру, мы можем считать, что средний выигрыш при решении точно слишком низкий, если он отрицательный, и точно не слишком низкий, если составляет более 2/3 максимально возможного выигрыша. Для простоты снова аппроксимируем промежуточные значения с помощью прямой, и зададим соответствующую функцию принадлежности следующим образом:

$$\mu_D(z)=\begin{cases}1,\ z\le 0\\ \dfrac{\frac{2}{3}z_{\max}-z}{\frac{2}{3}z_{\max}-0},\ 0<z<\frac{2}{3}z_{\max}\\ 0,\ z\ge\frac{2}{3}z_{\max}\end{cases}$$

Рассчитаем значения степени принадлежности нашего противника к каждому из указанных нечетких множеств. Пусть мы знаем, что противник играет в 9-ый раз. Тогда $\mu_A(x_0)=\dfrac{9-3}{21-3}=\dfrac{1}{3}$. Пусть мы предполагаем, что противник скорей осторожный, чем нет, но точно не уверены. Тогда предположим, что $\mu_B(y_0) = 0.7$. Наконец, максимально возможный выигрыш противника в нашей игре равен $z_{\max} = 7$. Если он изберет минимаксную стратегию, то, согласно этой стратегии, как было замечено ранее, оптимальным для него будет решение 1. В этом случае его средний выигрыш составит

$$z = -\frac{2+(-3)+4+(-5)}{4} = \frac{1}{2}\text{, следовательно, } \mu_D(z) = \frac{\frac{2}{3}\cdot 7 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot 7 - 0} = \frac{25}{28}$$

Теперь рассчитаем степень уверенности в каждом из решений противника.

Для *максимизации максимума дохода* будем иметь: $\alpha_1 = \max[1-\frac{1}{3}, 1-0.7] = \frac{2}{3} \approx 0.67$. Мы взяли функцию максимума, т.к. «или», $1-\frac{1}{3}$, т.к. «неопытный» - дополнение к опытному, $1-0.7$, т.к. «склонный к риску» – дополнение к «осторожному».

Аналогично, для *минимаксного* принципа по правилу П$_2$: $\alpha_2 = 0.7$ (т.к. принадлежность к множеству осторожных противников мы уже определили).

Для *минимаксного* принципа по правилу П$_3$: $\alpha_3 = \min\left[\frac{1}{3}, 1-\frac{25}{28}\right] = \frac{3}{28}$. Взяли минимум, т.к. противник должен быть опытным «и» выигрыш должен быть не слишком низкий, $1-\frac{25}{28}$, т.к. «не слишком низкий» - дополнение к «слишком низкий».

Заметим, что в случае *не очень низкого* среднего выигрыша по минимаксному принципу *опытный* противник выберет, как и во втором правиле, минимаксное решение. Таким образом, минимаксное решение принимается в одном из двух случаев, устраивает любой, а значит, здесь логика «или», следовательно, степень уверенности в минимаксном решении должна быть рассчитана как $\beta_2 = \max[\alpha_2, \alpha_3] = \max[0.7, \frac{3}{28}] = 0.7$

Наконец, для принципа *максимизации среднего выигрыша* мы будем иметь: $\alpha_4 = \min\left[\frac{1}{3}, \frac{25}{28}\right] = \frac{1}{3} \approx 0.33$.

Не следует удивляться тому, что сумма полученных уверенностей для всех правил превышает 1, ведь указанные множества *не* являются взаимоисключающими. К примеру, противник может быть одновременно и опытным, и осторожным, или, напротив, быть при этом склонным к риску (скорей всего, разумному). Однако для подсчета соответствующих вероятностей нам необходимо провести нормировку.

$p_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_2 + \alpha_4} = \frac{0.67}{0.67+0.7+0.33} \approx \frac{2}{5}$ – оценка вероятности выбора противником стратегии максимизации максимума дохода. Аналогично, $p_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 + \beta_2 + \alpha_4} \approx \frac{2}{5}$ – вероятность выбора минимаксной стратегии, $p_3 = \frac{\alpha_4}{\alpha_1 + \beta_2 + \alpha_4} \approx \frac{1}{5}$ - вероятность выбора стратегии максимизации среднего выигрыша.

По принципу *максимизации максимума* доходов противник выберет решение 3 или 4, т.к. в этом случае у него есть шанс получить 7 у.е., а при любом другом решений он выиграет не более 5 у.е. Тогда, каждый из этих выборов будем считать равновероятным с $p_4 = \frac{1}{5}$. Если он выберет решение 3, то нашим оптимальным ответом будет *решение 3*. Если он выберет стратегию 4, то нашим оптимальным ответом будет *решение 4* (совпадение случайно!). По *минимаксному* принципу противник выберет решение 1, нашим оптимальным ответом будет *решение 3*. Наконец, по принципу *максимизации среднего выигрыша* (сумма значений в столбце, взятая с обратным знаком) противник выберет решение 1 или решение 3. Их также можно считать равновероятными с вероятностями $p_5 = \frac{1}{10}$, но нашим оптимальным ответом в любом случае здесь будет *решение 3*.

Просуммируем соответствующие вероятности для каждого из наших оптимальных ответов. Решение 3 мы должны принять с вероятностью $p_6 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ и решение 4 с вероятностью $p_7 = \frac{1}{5}$. Это и есть оптимальные смешанные стратегии. На практике их можно реализовать, к примеру, по методу *пропорциональной рулетки*: разбить рулетку на 5 одинаковых секторов, 1 закрасить черным цветом, 4 – белым. Если стрелка укажет на белый сектор, то выбрать решение 3, если на черный – решение 4.

Заключение

В статье обоснована неэффективность классического метода смешанных стратегий для одиночных игр и игр, в которых мы обладаем какой-либо дополнительной информацией о психологии поведения противника. Подобная информация практически всегда носит нечеткий характер. Для антагонистических игр с нечеткой информацией предложены правила выбора оптимальных смешанных нечетких стратегий. За рамками рассмотрения статьи остались методы принятия решений для неантагонистических игр с нечеткой информацией, игр с нечеткими выигрышами, игр с несчетным нечетким множеством возможных решений. В дальнейшем планируется провести исследование указанных задач.

Литература

1. Петросян Л.А. и др. Теория игр. – М.: Высшая школа, Книжный дом «Университете». – 1998. – 304 с.
2. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета. – 2008. – 395 с.
3. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб: БХВ-Петербург. – 2005. – 736 с.
4. Кричевский М.Л. Интеллектуальные методы в менеджменте. – СПб: Питер. – 2005. – 304 с.
5. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком. – 2007. – 288 с.