МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І СИСТЕМ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ДИПЛОМНА РОБОТА СПЕЦІАЛІСТА

зі спеціальності 7.080201 «Інформатика»

на тему

«____»

Студента групи 501-ЕІ Фесюри Сергія Леонідовича

Керівник роботи
кадидат фіз.-мат. наук,
доцент Радченко Г. О.

Завідувач кафедри
доктор фіз.-мат. наук,
професор Губреєв Г.М.

Полтава 2012

РЕФЕРАТ

Дипломна робота спеціаліста: __ с., __ малюнки, __ додатки, __ джерел.

Об’єкт дослідження˜ матричні ігри.

Мета роботи˜ розроблення ефективного методу та його програмної реалізації знаходження оптимального розв’язку матричної гри.

Методи˜ симплексний, Брауна-Робінсона, графічний. Програма реалізована в середовищі Komodo Edit на мові JavaScript.

Відповідно до поставленого завдання у роботі досліджено викладені раніше підходи до розв’язування матричних ігор. Здійснена програмна реалізація трьох основних методів.

Ключові слова: ТЕОРІЯ ІГОР, МАТРИЧН ІГРИ, СИМПЛЕКС-МЕТОД, МЕТОД БРАУНА-РОБІНСОНА, ГРАФІЧНИЙ МЕТОД, МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Я буду розглядати тільки парні антагоністичні ігри, тобто такі, в яких приймають участь тільки два гравці, і виграш одного гравця рівний програшу іншого. Крім того, я приймаю, що кожен гравець має скінченну кількість стратегій: $U_1=\{a_1, a_2,..., a_m\}$ – множина стратегій першого гравця; $U_2=\{b_1, b_2, ... b_n\}$ – множина стратегій другого гравця.

Ці стратегії назваються чистими на відміну від змішаних, які я введу далі.

Множина U1 ∪ U2 — декартовий добуток множин стратегій гравців називається множиною ситуаці гри. Для кожної ситуації повинна бути визначена ціна гри. Так як гра антагоністична достатньо визначити виграш *a* одного з гравців, наприклад першого. Тоді виграш другого буде рівний (-*a*). Таким чином визначається матриця виграшів першого гравця (для другого гравця матриця виграшів буде -A):

$$A = \begin{array}{c c} & \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Визначення. Система Г = {U1, U2, A} називається матричною грою двох осіб. Розігрування матричної гри зводиться до вибору гравцем 1 i-го рядка матриці виграшів, а гравцем 2 - j-го стовпця. Після цього гравець 1 отримує виграш рівний a_{ij}, а гравець 2 - ($-a_{ij}$). При правильній грі гравець 1 може завжди гарантувати собі виграш, який назвемо нижнім значенням ціни гри. Позначимо його: $\underline{v} = \max_i \max_j a_{ij}$.

У свою чергу, гравець 2 може гарантувати собі програш, який назвемо верхнім значенням ціни гри. Позначимо його: $\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$. Чисті стратегії i* і j*, що відповідають $\underline{v}$ і $\bar{v}$ називаються максимінною і мінімаксною стратегіями.

Лемма 1. В матричній грі $\underline{v} \leqslant \bar{v}$.

Визначення. Ситуація (i*, j*) називається ситуацією рівноваги, якщо для i'=1, 2, ..., m, j'=1, 2, ..., n виконується нерівність:.$a_{ij'} \leq a_{i'j'} \leq a_{i'j}$ Ситуація рівноваги це така ситуація, від якої жодному з гравців не вигідно відхилятися. В цьому випадку стратегії i*, j* називають оптимальними стратегіями гравців. Щоб така ситуація існувала необхідно і достатньо рівність верхньої та нижньої цін гри, тобто $\underline{v}$ = $\bar{v}$ $= v$.

Визначення. Нехай (i*, j*) - ситуацією рівноваги в матричній грі. Тоді число $v = a_{i'j'}$ називається значенням або ціною гри. Наприклад, у грі Γ_A з матрицею

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ існує не одна ситуація рівноваги. В даній грі їх дві: (1, 1) і (1, 3).

Безліч всіх ситуацій рівноваги в матричній грі позначимо через Z(Г).

Лемма про масштаб 1. Нехай Г і Г' - дві матричні ігри з матрицею виграшів A = $\{a_{ij}\}$ і A' = $\{a'_{ij}\}$, причому A' = bA + a, b = const, a = const. Тоді Z(Г) = Z(Г') і n' = bn + a (де n' - значення ціни гри Г', n - значення ціни гри Г).

Ця лема має велике практичне значення, так як більшість алгоритмів для рішення матричних ігор засновано на припущенні, що матриця гри позитивна. У випадку, коли матриця має непозитивно елементи, слід додати до всіх елементів матриці число найбільше за абсолютною величиною, з усіх негативних елементів. Існують ігри, в яких ситуації рівноваги в чистих стратегіях не існує. Тоді гравцям буває не вигідно дотримуватися своїх мінімаксних і максимінних стратегій, так як вони можуть отримати більший виграш, відхилившись від них. В цьому випадку гравцям розумно діяти випадково, тобто вибирати стратегії довільно і не повідомляти про вибір суперника. Такі стратегії гравців будемо називати змішаними.

Визначення. Змішаною стратегією гравця називається повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій.

Так якщо гравець 1 має m чистих стратегій, то його змішана стратегія x - це набір чисел x = (x_1, x_2, ..., x_m), які задовольняють співвідношенням $x_i \geq 0$,$\sum x_i = 1$. Аналогічним чином визначається змішана стратегія у гравця 2.

Визначення. Оптимальними стратегіями гравців називаються стратегії, які при багаторазовому повторенні забезпечують гравцям максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий середній програш). Таким чином, процес гри при використанні гравцями своїх змішаних стратегій перетворюється на випадкове випробування, яке назвемо ситуацією в змішаних стратегіях. Вона позначається так (x, y), де x і y - змішані стратегії гравців 1 і 2 відповідно.

Для ситуації в змішаних стратегіях кожен гравець визначає для себе середній виграш, який виражається у вигляді математичного очікування його виграшів:.K(x, y) = $\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} a_{ij} x_i y_j$ Від матричної гри прийшли до нової гри $\bar{\Gamma}$ = {X, Y, K}, де X, Y - множини змішаних стратегій гравців, а K - функція виграшів в змішаних стратегіях. Таку гру називають змішаним розширенням матричної гри. Цілі гравців залишаються незмінними: гравець 1 бажає отримати максимальний виграш, а гравець 2 прагне звести свій програш до мінімуму. Тому для змішаного розширення гри, аналогічним чином визначаються верхнє і нижнє значення ціни гри, тільки тепер гравці вибирають свої змішані стратегії. Позначимо їх: $\bar{v} = \min_j \max_i K(x, y)$,

$$\underline{v} = \max_i \min_j K(x, y)$$

В цьому випадку залишається справедливою лема 1, тобто $\underline{v} \leqslant \bar{v}$

Визначення. Ситуація (x*, y*) в грі утворює ситуацію рівноваги, якщо для всіх x ∈ X, y ∈ Y виконується рівність: K (x, y *) ≤ K (x *, y *) ≤ K (x *, y). Щоб ситуація рівноваги в змішаному розширенні гри існувала необхідно і достатньо рівність верхньої та нижньої цін гри, тобто $\underline{v}$ = $\bar{v}$ = v, де v - ціна гри. Для випадку змішаного розширення гри також справедлива лема про масштаб. **Лемма про масштаб 2**. Нехай Γ_A і $\Gamma_{A'}$ - дві матричні ігри A' = aA + B, a = const, B - матриця з однаковими елементами b, тобто b_{ij} = b для всіх i, j. Тоді Z ($\bar{\Gamma}_A$) = Z ($\Gamma_{A'}$) і $n_{A'} = an_A + b$ (де nA / - значення ціни гри $\Gamma_{A'}$, n_A - значення ціни гри Γ_A).

Теорема. У змішаному розширенні матричної гри завжди існує ситуація рівноваги.

ВСТУП

Організації звичайно мають цілі, які суперечать цілям інших організацій-конкурентів. Тому робота менеджерів часто полягає у виборі рішення з урахуванням дій конкурентів. Для вирішення таких проблем призначені методи теорії ігор.

Теорія ігор - це розділ прикладної математики, який вивчає моделі і методи прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту.

Під конфліктом розуміється така ситуація, в якій зіштовхуються інтереси двох або більше сторін, що переслідують різні (найчастіше суперечливі) цілі. При цьому кожне рішення має прийматися в розрахунку на розумного суперника, який намагається зашкодити іншому учаснику гри досягти успіху.

З метою дослідження конфліктної ситуації будують її формалізовану спрощену модель. Для побудови такої моделі необхідно чітко описати конфлікт, тобто:

1. уточнити кількість учасників (учасники або сторони конфлікту називаються гравцями);
2. вказати на всі можливі способи (правила) дій гравців, які називаються стратегіями гравців;
3. розрахувати, якими будуть результати гри, якщо кожний гравець вибере певну стратегію (тобто з’ясувати виграші або програші гравців).

Основну задачу теорії ігор можна сформулювати так: визначити, яку стратегію має застосувати розумний гравець у конфлікті з розумним суперником, щоб гарантувати кожному з них виграш, при чому відхилення будь-якого з гравців від оптимальної стратегії може тільки зменшити його виграш.

Математична теорія ігор здатна не тільки вказати оптимальний шлях до вирішення деяких проблем, а й прогнозувати їх результат. Матричні ігри серйозно вивчаються фахівцями, так як вони досить прості і до них можуть бути зведені ігри загального виду. Тому теорія матричних ігор добре розвинена, існують різні методи пошуку рішення ігор.

Але в більшості випадків рішення матричних ігор являє собою важкий і громіздкий процес. Є приклади, коли навіть для матриць розміру 3*3, процес пошуку рішення досить трудомісткий.

Крім того, виграші гравців у кожній ситуації не завжди визначаються точними вимірами. В процесі збору даних про досліджуване явище, аналізу цих даних та введення при побудові моделі різних припущень накопичуються помилки. Вони ж можуть виражатися числами в матриці виграшів. Тому точність у визначенні значення гри та оптимальних стратегій гравців виправдана не завжди.

А також, слід зауважити, що похибка в оцінці гравцем свого виграшу не може привести до практично серйозних наслідків і невелике відхилення гравця від оптимальної стратегії не тягне за собою істотної зміни в його виграші.

Тому виникає потреба в розробці чисельних методів розв'язання матричних ігор. В даний час в теорії ігор відомі кілька способів наближеного рішення матричних ігор.

Мета випускної кваліфікаційної роботи вивчити деякі методи наближеного рішення матричних ігор, обгрунтувати їх алгоритми, і, по можливості, реалізувати на мові програмування.

Робота складається зі вступу, трьох параграфів і додатків, в яких приведена програма на мові JavaScript, що дозволяє знаходити наближене рішення матричної гри.

У першому параграфі наведений інформаційний огляд задач, що зводяться до матричних ігор, а також короткий огляд методів.

Параграф другий присвячений більш глибокому викладу різних методів розв’язання матричних ігор.

У третьому параграфі описано реалізацію деяких методів розв’язання ігор з описом архітектурних моментів програми.

1. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОГЛЯД

2.1 Огляд методів розв'язування антагоністичних ігор

Існує кілька основних методів розв'язання матричних ігор. Я розгляну основні з них. Це симплекс-метод, графічний метод, ітеративний метод Брауна-Робінсона та монотонний ітеративний алгоритм.

Симплекс-метод

Алгоритм симплекс-методу включає наступні етапи:

1. Складання першого опорного плану. Перехід до канонічної формі завдання лінійного програмування шляхом введення невід'ємних додаткових балансових змінних.

2. Перевірка плану на оптимальність. Якщо знайдеться хоча б один коефіцієнт індексного рядка менше нуля, то план не оптимальний, і його необхідно поліпшити.

3. Визначення опорних стовпця і рядка. З негативних коефіцієнтів індексного рядка вибирається найбільший за абсолютною величиною. Потім елементи стовпця вільних членів симплексного таблиці діляться на елементи того ж знака ведучого стовпця.

4. Побудова нового опорного плану. Перехід до нового плану здійснюється в результаті перерахунку симплексного таблиці методом Жордана-Гаусса

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_i k, & \text{if } i \neq l; \\ \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, & \text{if } i = l; \end{cases}$$

Детальний опис рішення матричних ігор за допомогою симплекс-методу буде наведено в частині 2 даної роботи.

Графічний метод

Перший крок при використанні графічного методу полягає в поданні області допустимих розв'язків, у якій водночас задовольняються всі обмеження моделі. Умови невід'ємності змінних обмежують область їх допустимих значень першим квадрантом координатної площини (частина площини над віссю x_1 і справа від осі x_2). Інші межі простору розв'язків зображені прямими лініями, побудованими по рівняннях, що отримані заміною знака "≤" знаком "=" в обмеженнях. Області, в яких відповідні обмеження виконуються як нерівності (в нашому випадку - нерівності із знаком "<"), указуються стрілками, спрямованими вбік допустимих значень змінних. У кожній точці, що належить внутрішній області або межам *багатокутника розв'язків ABCDEF*, всі обмеження виконуються, тому розв'язки, що відповідають цим точкам, є допустимими. Серед безкінечного числа таких точок можна знайти точку оптимального розв'язку, якщо з'ясувати, в якому напрямку зростає цільова функція. На рис. 2.2 показано, як здійснюється така операція.

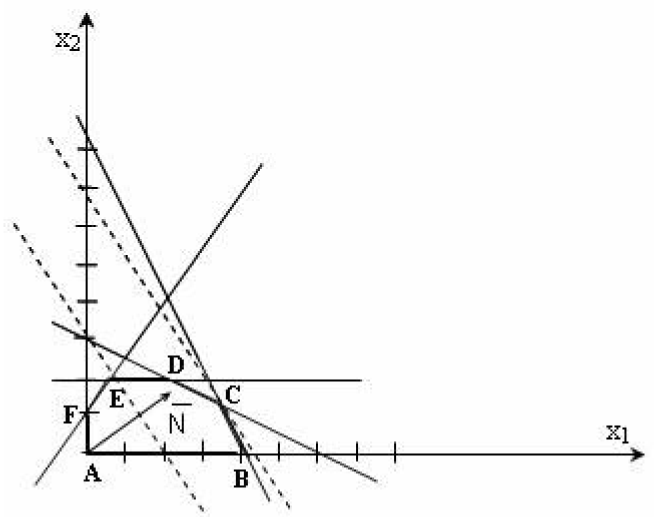


Рис. 2.2. Знаходження оптимального розв'язку ЗЛП графічним методом.

На графік наносять лінію рівня цільової функції $c_1x_1+c_2x_2=z_0$, де z_0 - довільне значення z. Будують вектор N (c_1, c_2), що є нормальним до ліній рівня цільової функції й визначає напрямок оптимізації z.

Лінію рівня зрушують паралельно самій собі вздовж вектора N доти, поки вона не вийде за межі області допустимих розв'язків. Остання точка цієї області й буде точкою оптимуму.

Очевидно, що оптимальному розв'язку відповідає точка С- точка перетину прямих (1) і (2). Значення x_1 та x_2 в точці С визначаються шляхом розв'язання системи рівнянь:

Зазначимо, що у випадку, коли лінії рівня z мають такий самий нахил, як пряма зв'язуючого обмеження (тобто такого, що проходить через оптимальну точку), матимемо безліч оптимумів на відрізку.

Ітеративний метод Брауна-Робінсона

Часто в практичних завданнях немає необхідності знаходити точне рішення матричної гри. Досить знайти наближене рішення, яке дає середній виграш, близький до ціни гри і наближені оптимальні стратегії гравців.

Орієнтовне значення ціни гри може дати вже простий аналіз матриці виграшів та визначення нижньої і верхньої цін гри. Якщо вони близькі, то пошуками точного рішення займатися не обов'язково, так як досить вибрати чисті мінімаксні стратегії. Якщо ж вони не близькі, можна отримати прийнятне для практики вирішення за допомогою чисельних методів розв'язання ігор, з яких розглянемо метод ітерацій.

Нехай розігрується матрична гра Γ_A з матрицею $A = \{a_{ij}\}$ розміру (m*n). Ідея методу - багаторазове фіктивне розігрування гри із заданою матрицею. Одне розігрування гри будемо називати партією, число яких необмежено.

У 1-й партії обидва гравці вибирають абсолютно довільні чисті стратегії. Нехай гравець 1 вибрав і-ю стратегію, а гравець 2 - j-у стратегію. У другій партії гравець 1 відповідає на хід гравця 2 тієї своєю стратегією, яка дає йому максимальний виграш. У свою чергу, гравець 2, відповідає на цей хід гравця 1 своєю стратегією, яка звертає його програш у мінімум. Далі третя партія.

З ростом числа кроків процесу змішані стратегії, які приписуються гравцям, наближаються до їх оптимальних стратегій. Цей процес наближеного знаходження оптимальних стратегій гравців називається *ітеративним,* а його кроки - ітераціями.

Детальний опис рішення матричних ігор за допомогою ітеративного методу Брауна-Робінсона буде наведено в частині 2 даної роботи.

Монотонний ітеративний алгоритм розв'язання матричних ігор

Пропонований для розгляду алгоритм реалізується тільки для одного гравця на відміну від методу Брауна-Робінсона, який працює для двох гравців. Алгоритм дозволяє знаходити точно і наближено оптимальну стратегію гравця 1 і значення ціни гри n. За допомогою алгоритму можна отримати задану точність рішення, причому число кроків, необхідних для досягнення результатів, слабо залежить від розмірності матриці виграшів.

Особливість цього алгоритму у здатності генерувати строго монотонно зростаючу послідовність оцінок ціни гри, що не властиво раніше запропонованого алгоритму.

Розглянемо змішане розширення $\bar{\Gamma}_A$ = (X, Y, K) матричної гри Γ_A з матрицею A розміру (m*n). Процес розігрування гри складається з декількох кроків. Нехай кожен з гравців має скінченне число стратегій.

Введемо наступні позначення:

a_i - i-й рядок матриці виграшів;

$x^N = (x_1^N, x_2^N, ..., x_m^N) \in \bar{X}$ - m-мірний вектор, наближення оптимальної стратегії першого гравця на N-кроці (N-номер кроку);

$c^N = (y_1^N, y_2^N, ..., y_n^N)$ - N-мірний вектор, який визначає середній накопичений виграш на N-кроці.

Задамо початкові умови. Нехай на 0-кроці $c^0 = a_{i_0}$, $X^0 = (0, ..., 1, ..., 0)$, де 1 займає $i_{0\text{-у}}$ позицію.

Визначимо ітеративний процес наступним чином: за відомим векторах x^{N-1}, c^{N-1} знаходимо вектори x^N і c^N, які обчислюються за такими формулами:

$$x^N = (1-\varepsilon_N)\, x^{N-1} + \varepsilon_N \tilde{x}^N;$$
$$c^N = (1-\varepsilon_N)\, c^{N-1} + \varepsilon_N \tilde{c}^N;$$

де параметр $0 \le \varepsilon_N \le 1$, а вектори $\tilde{x}^N, \tilde{c}^N$ вводяться далі.

Як зазначалося, вектор c^N визначає середній накопичений виграш гравця 1 на N кроці. Компоненти цього вектора - це числа. У гіршому випадку гравець 1 може отримати мінімальне з цих чисел. Приймемо його за нижню оцінку ціну гри, яку позначимо: $\underline{v}^{N-1} = \min_{j=1,\ldots,n} \gamma_j^{N-1}$

Запам'ятаємо безліч індексів $J^{N-1} = (j_1^{N-1}, \ldots, j_k^{N-1})$, (k<n), на яких буде досягається цей

мінімум, тобто $\min\limits_{j=1,\ldots,n} \gamma_j^{N-1} = \gamma_{j_1}^{N-1} = \gamma_{j_2}^{N-1} = \ldots = \gamma_{j_k}^{N-1}$

Далі розглянемо підгру Γ^N гри Γ_A з матрицею виграшів AN={ $a_{ij^{N-1}}$ }, i=1,…,m, jN-1∈JN-1. Матриця виграшів складається із стовпців даної матриці, номери яких визначаються безліччю індексів J^{N-1}. У цій підгрі Γ^N знаходимо одну з оптимальних змішаних стратегій гравця 1: $\tilde{x}^N = (\tilde{\xi}_1^N, \ldots, \xi_m^N)$.

Після знаходження $\tilde{x}^N$, Знаходимо вектор $\tilde{c}^N = (\tilde{\gamma}_1^N, \ldots, \tilde{\gamma}_n^N)$ за правилом: $\tilde{c}^N = \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{\xi}_i^N a_i$

І розглянемо гру (2*n), в якій у гравця 1 дві чисті стратегії, а у гравця 2 - n чистих стратегій. Ця гра задається матрицею $\begin{bmatrix} \gamma_1^{N-1} & \ldots & \gamma_n^{N-1} \\ \tilde{\gamma}_1^N & \ldots & \tilde{\gamma}_n^{N-1} \end{bmatrix}$, розв'язуючи яку, знаходимо ймовірність використання гравцем 1 своєї стратегії. Це дає нам коефіцієнт ε_N.

Далі обчислюємо x^N, c^N і переходимо до наступного кроку. Процес продовжуємо до тих пір, поки не виконається рівність $\varepsilon_N = 0$, тому що по теоремі про мінімакс $\underline{v}^N \le v$, а їх рівність (що й потрібно) досягається в цьому випадку, або поки не буде досягнута необхідна точність обчислень.

Збіжність алгоритму гарантується теоремою.

Теорема. Нехай $\{x^N\}$, $\{v^N\}$ - послідовності, що визначаються рівностями (3), (4). Тоді справедливі наступні твердження:

1. $\underline{v}^{N-1} < \underline{v}^N$ тобто послідовність $\{v^{N-1}\}$ строго монотонно зростає.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} \underline{v}^N = v$
3. $\lim\limits_{N\to\infty} x^N = x^*$, де $x^* \in X^*$ - оптимальна стратегія гравця 1.

Доведення цієї теореми досить рутинно. Його можна подивитися в [9].

1.2 Огляд задач, що зводяться до антагоністичної гри

При розв'язанні економічних задач, у тому числі й маркетингових, часто доводиться аналізувати ситуації, за яких стикаються інтереси двох або більше конкуруючих сторін, переслідуючих різні цілі, особливо це характерне для ринкової економіки. Такого роду ситуації називаються конфліктними. Математичною теорією розв'язання конфліктних ситуацій є теорія ігор. У грі можуть стикатися інтереси двох (гра парна) або декількох (гра множинна) супротивників; існує гра з нескінченною множиною гравців. Якщо у множинній грі гравці утворять коаліції, то гра називається коаліційною; якщо таких коаліцій дві, то гра зводиться до парної.

На промислових підприємствах теорія ігор може використовуватися для вибору оптимальних рішень, наприклад, при створенні раціональних запасів сировини, матеріалів, напівфабрикатів, коли протидіють дві тенденції: збільшення запасів, що гарантують безперебійну роботу виробництва, і скорочення запасів з метою мінімізації витрат на зберігання їх. Розв'язання подібних задач вимагає повної визначеності в формулюванні їх умов (правил гри): встановлення кількості гравців, можливих виграшів (програші розуміють як від'ємний виграш). Важливим елементом в умовах ігрових задач є стратегія, тобто сукупність правил, які залежно від ситуації у грі визначають однозначний вибір дій одного конкретного гравця. Якщо в процесі гри гравець застосовує декілька стратегій по черзі, то таку стратегію називають змішаною, а її елементи — чистими стратегіями. Кількість стратегій у кожного гравця може бути скінченною і нескінченною, залежно від цього ігри поділяють на скінченні та нескінченні.

Важливими поняттями є поняття оптимальної стратегії, ціни гри, середнього виграшу. Ціна гри V дорівнює математичному сподіванню M виграшу першого гравця, якщо обидва гравці виберуть оптимальні для себе стратегії P* і Q*:

$$V = M\,(P^*, Q^*).$$

Одним з основних видів ігор є матричні ігри, які називаються парними іграми з нульовою сумою (тобто один гравець виграє стільки, скільки програє другий), за умови, що кожний гравець має скінченну кількість стратегій. У цьому випадку парна гра формально задається матрицею А = (a_{ij}), елементи якої a_{ij} визначають виграш першого гравця (і, відповідно, програш другого), якщо перший гравець обере і-ту стратегію (і = 1,…, m), а другий обере j-ту стратегію (j = 1,…, n). Матриця А називається матрицею гри, або платіжною матрицею.

Існує багато методів вирішення матричних ігор, серед яких і методи наближеного рішення, наприклад, метод Брауна-Робінсона. У багатьох ігрових задачах у сфері економіки, а також у сфері маркетингу, невизначеність випливає не через свідому протидію супротивника, а через недостатню обізнаність щодо умов, в яких діють сторони, тобто коли невідомі стратегії сторін. Тоді до розгляду додається ще матриця ризиків. Для розв'язання таких задач використовуються критерії Лапласа, Вальда, Гурвіца та ін.

На основі методів рішення статистичних ігор можна сформулювати підходи до рішення різноманітних прикладних економічних задач.

Зведення економічних колізій до ігрових задач

Перші два етапи творчої складової процесу прийняття рішення утворюють основу ігрової моделі. Відомо багато прикладів успішного застосування ігрової моделі як у сфері виробничої діяльності, так і на макроекономічному рівні. У прикладах, що наводитимуться далі, обмежимося постановкою та інтерпретацією розв'язків ігрових задач. Наведемо деякі приклади ігрового моделювання в економіці, а також покажемо розширені можливості зведення економічних ситуацій до задач теорії ігор.

Дилема ув'язненого та олігопольні ринки

Олігопо́лія (англ. *Oligopoly*) - структура ринку, при якій в одній галузі домінує невелика кількість конкуруючих фірм, при цьому хоча б одна або дві з них, виробляють значну долю продукції даної галузі, а поява нових продавців ускладнена чи неможлива. Товар, реалізований олігополістичними фірмами, може бути як диференційованим так і стандартизованим.

Два ув’язнених очікують рішення суду за спільно вчинене злодіяння. Запобігши можливості змови, їм висунули умови: якщо зізнаються обидва, то кожен отримає по п’ять років тюрми; якщо зізнається один, то він отримає лише один рік, а другий — 10 років; якщо ж обидва не зізнаються, то кожен отримає по два роки ув’язнення.

Побудову ігрової моделі почнемо з формулювання множин рішень для кожного з ув’язнених. Обидва вони мають для вибору дві взаємовиключні чисті стратегії: перша — зізнатися (s_1 чи Θ_1), друга — не зізнатися (s_2 чи Θ_2). Ефективність кожної з чистих стратегій для кожного з гравців відобразимо відповідно у вигляді функціоналів оцінювання:

$F' = (f'_{kj} : k = 1, 2; j = 1, 2);$

$F'' = (f''_{kj} : k = 1, 2; j = 1, 2),$

де f'_{kj} та f''_{kj} – плата першого та другого ув’язненого відповідно, якщо перший гравець вибрав свою k-ту чисту стратегію S_k (k = 1, 2), а другий – свою j – ту чисту стратегію θ_j (j = 1, 2).

Числовими еквівалентами платежів є терміни ув’язнення гравців, що беруться з протилежним знаком. У цьому випадку матриці платежів мають позитивний інгредієнт:

$$F' = F'^{+} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad F'' = F''^{+} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отримана гра не є антагоністичною. З точки зору економічної теорії дилема ув’язненого пояснює, чому продавці на олігопольному ринку намагаються досягти домовленості замість конкуренції, оскільки остання була би вигіднішою для покупців. У випадку, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм-продавців однорідної продукції, ціни характеризуються жорсткістю: жодна з фірм не може ні довіряти іншим, ні очікувати, що її конкурент призначить нижчу ціну.

Ситуація, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм, носить назву конкуренції серед не багатьох: випадок, коли є декілька продавців продукції, носить назву олігополії, а коли декілька покупців певного виду витрат — назву олігопсонії. Визначальною властивістю конкуренції серед не багатьох є те, що всі конкуруючі фірми можуть впливати на ціни продукції або витрати і при цьому прибуток кожної фірми залежить від стратегії всіх конкуруючих фірм. Слід відмітити важливу спільну рису між конкуренцією серед не багатьох і теорією ігор. В обох випадках результат (прибуток чи виграш) для одного учасника (фірми чи гравця) залежить від діяльності (витрат чи стратегій) решти учасників.

Гра у "старі" та "нові" товари

Нехай у нашому розпорядженні є три види "старих" товарів s_1, s_2, s_3, які надходять на ринок уже давно і попит на які добре відомий. З певного моменту в торговельну мережу починають надходити "нові" товари θ_1, θ_2, θ_3, які можуть замінити "старі". Тобто "нові" товари зменшують попит на "старі" товари. З попередніх обстежень попиту відомі ймовірності продажу "старих" товарів у разі появи в торговельній мережі "нових" товарів. Для гри у "старі" та "нові" товари платіжна матриця разом зі значеннями α_k ($k = 1, 2, 3$) та β_j ($j = 1, 2, 3$) запишеться у вигляді табл. 1.1. Оскільки $\alpha = \beta = 0{,}7$, то гра має сідлову точку, створювану мінімаксними стратегіями $s_{ko} = s_2$ та $\Theta_{jo} = \Theta_2$. Ці стратегії є стійкими у тому розумінні, що відхилення від них невигідне для обох гравців.

Таблиця 1.1

"Нові" товари / "Старі" товари	θ_1	θ_2	θ_3	α_k
s_1	0,5	0,6	0,8	0,5
s_2	0,9	0,7	0,8	0,7
s_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	0,7	0,8	—

4.4 Інвестування капіталу

Інвестор взяв у борг гроші під 1,5% з метою інвестування цих засобів в акції різних компаній. Наявні два види акцій, норми прибутку яких є випадковими величинами і залежать від станів економічного середовища (випадкових обставин). На ринку можуть мати місце тільки дві ситуації: перша (Θ_1) з імовірністю q = 0,2 і друга (Θ_2)— з імовірністю q = 0,8.

Акції реагують на ці ситуації (стани економічного середовища) по-різному: курс акцій першого виду (s_1) у першій ситуації зростає на 5%, а в другій — на 1,25%; курс акцій другого виду (s_2) у першій ситуації падає на 1%, а в другій — зростає на 2,75%.

Необхідно найкращим чином розподілити наявний капітал між цими активами. Попередньо проаналізуємо ці акції з позиції таких їх характеристик, як сподівана норма прибутку (математичне сподівання норми прибутку) та величина ризику (дисперсія норми прибутку). Обчислимо ці характеристики:

$$m_1 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}\right) = 5\times 0{,}2 + 1{,}25\times 0{,}8 = 2;$$

$$m_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(q_j r_{2j}\right) = -1\times 0{,}2 + 2{,}75\times 0{,}8 = 2;$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}^2\right) - m_1^2 = 5^2\times 0{,}2 + (1{,}25)^2\times 0{,}8 - 2^2 = 2{,}25;$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{2} r_{2j}^2 - m_2^2 = (-1)^2\times 0{,}2 + (2{,}75)^2\times 0{,}8 - 2^2 = 2{,}25.$$

Хоча значення сподіваних норм прибутку і ризиків збіглися ($m_1 = m_2 = 2$; $\sigma_{21} = \sigma_{22} = 2{,}25$), у випадку інвестування всього капіталу в акції одного виду перевагу слід віддати акціям другого виду. На користь такого вибору свідчать такі міркування. У випадку придбання акцій тільки першого виду банкрутство інвестора може відбутися за настання другої ситуації (1,25 < 1,5), тобто з імовірністю $q_2 = 0{,}8$. Якщо ж придбати акції тільки другого виду, то банкрутство інвестора відбудеться вже у випадку настання першої ситуації (-1 < 1,5,) тобто з імовірністю $q_1 = 0{,}2$. Оскільки $q_1 = 0{,}2 < 0{,}8 = q_2$, то ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції другого виду менший за ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції першого виду. Але, як бачимо, повністю уникнути банкрутства при інвестуванні всього капіталу в акції другого виду неможливо.

Дослідимо ефект диверсифікації, тобто ефект від розподілу грошових ресурсів між обома активами в найбільш вигідних і безпечних пропорціях. Нехай x_1 — частка капіталу, інвестованого в акції першого виду, тоді x_2 = 1 - x1 — частка капіталу, інвестованого в акції другого виду, вектор X = (x_1; x_2) — структура портфеля акцій. Знайдемо характеристики портфеля. Його сподівана норма прибутку

$$m_П = m_1 x_1 + m_2 x_2 = 2x_1 + 2(1 - x_1) = 2$$

величина ризику

$$\sigma_П^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2 p_{12} \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 p_{12} \sigma_1 \sigma_2) x_1^2 - 2(\sigma_2^2 - p_{12} \sigma_1 \sigma_2) x_1 + \sigma_2^2$$

де p_{12} – коефіцієнт кореляції між нармами прибутку акцій, обчислюваний за формулою

$$p_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (q_j r_{1j} r_{2j}) - m_1 m_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

З урахуванням того, що $\sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}5$; $p_{12} = -1$ (тобто має місце абсолютно від’ємна кореляція), отримуємо, що величина ризику портфеля, як функція від частки x1, обчислюється формулою

σП₂ = 9x12 – 9x1 + 2,25.

У даному випадку найкращим портфелем слід уважати портфель з найменшою величиною ризику. Позначимо його структуру через X = (x_1; x_2). При x_1 функція досягає свого мінімального значення. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції для знаходження x_1 слід скористатися рівнянням

$$\frac{d\sigma_П^2}{dx_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(9x_1^2 - 9x_1 + 2{,}25\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 18x_1 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1^* = 0{,}5; \quad x_2^* = 1 - x_1^* = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad X^* = (0{,}5;\ 0{,}5).$$

Отриманий результат вказує на те, що розподіл капіталу на рівні частки (по 50%) між акціями обох видів дає змогу, в певному сенсі, позбутися ризику ($\sigma П_2 = 0$). Окрім того, за такого розподілу грошей інвестору не загрожує банкрутство, оскільки для будь-якого стану економічного середовища норма прибутку портфеля, що має структуру X = (0,5; 0,5), становить 2% > 1,5% (переконайтесь у цьому самостійно).

Із задачею побудови оптимального портфеля цінних паперів у даному випадку мають безпосередній зв'язок дві матриці:

а) коваріаційна матриця:

$$C=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}25 & -2{,}25\\ -2{,}25 & 2{,}25\end{pmatrix}$$

де $\sigma_{kj}=\sigma_k\,\sigma_j\,\rho_{kj}\left(k=1{,}2\,;\,j=1{,}2\right);$

б) матриця норм прибутку

$$R=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1{,}25\\ -1 & 2{,}75\end{pmatrix}$$

де r_k – величина норми прибутку акції k-го виду для j-го стану економічного середовища (k = 1,2; j = 1,2);

Розглянемо парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею C. Легко переконатись у тому, що ця гра не має сідлової точки, а її розв'язком є пара оптимальних змішаних стратегій sp та qQ, яким відповідають вектори P = Q = (0,5; 0,5) = X.

При цьому ціна гри V = 0 = $(\sigma\Pi)_2$.

Парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею F, також не має сідлової точки і при цьому оптимальній змішаній стратегії першого гравця (інвестора) відповідає вектор P = (0,5; 0,5) = X. Ціна цієї гри V = 2.

Збіг оптимальних змішаних стратегій, що є розв'язком обох розглянутих ігор, не випадковий.

4.5 Ігрова модель задачі побудови портфеля активів

Лауреат Нобелівської премії Г.Марковіц у своїх дослідженнях вивчав імовірнісну модель ринку активів. У його моделі норма прибутку кожного активу розглядається як випадкова величина

$$R_k = \frac{C_k - C_k^0 + Д_k}{C_k^0} \times 100\%, \qquad k = 1,\ldots,\ m,$$

де C_k^0 — ціна активу на початок даного періоду C_k– ціна активу (випадкова величина) на кінець даного періоду; $Д_k$– дивіденди (теж випадкова величина), нараховані протягом даного періоду. Конкретне значення норми прибутку k-го активу залежить від стану економічного середовища, тобто визначається ситуацією, що склалася на ринку. Розмірність множини Θ станів економічного середовища може бути довільною, але ми вважатимемо її скінченною і рівною n, тобто Θ = (Θ_1;...; Θ_n). Кожному стану ринку Θ_j поставимо у відповідність імовірність настання його qi. Всі ці ймовірності згрупуємо у вектор Q = (q_1;...; q_n). Очевидно, що компоненти вектора Q мають задовольняти співвідношенням.

Уважається, що можливі значення норми прибутку k-го активу (k = 1,... m) для всіх можливих станів ринку Θ_j = (1,…n) є відомими і відображаються випадковою величиною R_k = (r_{k1};…; r_{kn}), тобто актив k-го виду приносить r_{k1} одиниць прибутку з розрахунку на кожну одиницю вкладень, якщо економічне середовище знаходитиметься в своєму j-му стані. СПР має можливість інвестувати свої ресурси більш як в один актив, утворити портфель, тобто розподілити свої ресурси між різними активами в найвигіднішій і безпечній пропорції. А тому інвестор (СПР) хоче оптимізувати структуру портфеля X = (x_1;…;x_m) шляхом визначення оптимальних розмірів часток x_k (k = 1,…m), які відповідають вартості активів кожного виду в загальному обсязі інвестованих у портфель ресурсів.

У своїй моделі Марковіц відштовхується від того, що інвестор для прийняття інвестиційних рішень в якості критеріїв оптимальності використовує лише дві характеристики активів та їх портфелів: сподівану норму прибутку (у формі математичного сподівання) та величину ризику (у формі дисперсії).

Вибір цих кількісних характеристик у якості критеріїв оптимальності дає можливість розглядати задачу побудови портфеля як двокритеріальну. До речі, інвестор схильний вкласти весь свій капітал лише в актив одного виду, якщо цей актив, порівняно з будь-яким портфелем, буде найкращим за обома цими критеріями одночасно, тобто матиме найбільшу сподівану норму прибутку та найменшу величину ризику.

Якщо вважати відомими закони розподілу випадкових величин $R_k(1, \ldots, m)$, то не становитиме великих труднощів обчислення математичних сподівань $m_k = M(R_k)$ та коваріацій $\sigma_{kj} = cov(R_k; R_j)(k = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, m)$.

Якщо відома структура портфеля $X = (x_1; \ldots; x_m)$, то норма прибутку цього портфеля обчислюється за формулою

$$R_П = \sum_{k=1}^{m} (x_k R_k)$$

а його характеристики (сподівана норма прибутку портфеля і дисперсія) – за формулою

$$m_П = M(R_П) = \sum_{k=1}^{m} (x_k) m_k \;\; ; \;\; \sigma_П^2 = D(R_П) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (x_k x_j \sigma_{kj}) \;\; .$$

Ураховуючи зроблені раніше викладки, можна стверджувати, що задача оптимізації структури портфеля пов'язана з декількома матрицями, кожну з яких можна вибрати в якості функціонала оцінювання статистичної гри. Розглянемо функціонал оцінювання

$$R = R^+ = (r_{kj}^+ : l = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

у k-му рядку якого розміщено можливі значення норми прибутку R_k активу k-го виду, а в j-му стовпчику — величини норм прибутків активів усіх видів, що відповідають j-му стану ринку (k = 1,…, m; j = 1,…, n). Змішану стратегію першого гравця, якій відповідає вектор P = (p_1;…; p_m) у грі, що визначається матрицею R, можна тепер інтерпретувати як портфель, а ймовірність p_k — як частку капіталу, інвестованого в актив k-го виду (k = 1,…, m). Розв'язок гри в чистих стратегіях відповідатиме «однорідному» портфелю, тобто портфелю, складеному тільки з активів одного виду. А вибір розв'язку гри у змішаних стратегіях вказує на факт формування портфеля з різних активів. За виконання певних умов оптимальна змішана стратегія з вектором P = (p_1;…; p_m) відповідає ефективному портфелю.

Аналогічна відповідність має місце між оптимальними змішаними стратегіями гравців у парній грі з нульовою сумою, що визначається, з одного боку, коваріаційною матрицею C = (σ_{kj}: k = 1,… m; j = 1,… m), з іншого — ефективним портфелем.

Оптимізація структури портфеля відіграє особливу роль у сучасній економічній теорії та практиці. Можна стверджувати, що будь-яка економічна проблема зводиться до задачі найкращого розподілу ресурсів (матеріальних, фінансових, трудових тощо), наявних у розпорядженні СПР (інвестора) між активами різних видів.

4.6 Формування портфеля інвестиційних проектів

СПР вивчає m інвестиційних проектів (їх пронумеровано від 1 до m) щодо вибору серед них найнадійніших з подальшим включенням їх в інвестиційний портфель, враховуючи при цьому свої реальні можливості.

Вибрані найбільш надійні інвестиційні проекти утворюють деяку підмножину множини наявних m проектів. Цю підмножину інтерпретуватимемо як нечітку підмножину всіх інвестиційних проектів. Згідно з означенням нечіткої на елементах множини всіх інвестиційних проектів необхідно визначити функцію належності нечіткій множині, а з її допомогою кожному проекту поставити у відповідність певне значення з проміжку [0;1]. Це значення називається ступенем належності проекту до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів. У прикладному аспекті ступінь належності проекту до вказаної нечіткої множини може відображати суб’єктивну міру того, наскільки цей проект відповідає поняттю найбільш надійного (з позиції СПР).

Припустимо, що відомі величини μ_{kj} — значення функцій належності k-го проекту (k = 1,…, m) до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів в умовах j-го стану економічного середовища (j = 1,…, n). У розгорнутому вигляді ситуація прийняття інвестиційного рішення характеризується матрицею (функціоналом оцінювання):

$$M = M^{+} = \left(\mu_{kj}^{+} : k = 1,\ldots,\ m;\ j = 1,\ldots,n\right) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix},$$

де елементи $\mu_{kj}^{+} \in [0;1]\left(k=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\right)$,при цьому μ_{kj} – це суб'єктивна міра надійності k-го проекту, тобто μ_{kj} – це міра степеня належності k-го проекту до портфеля найбільш надійних проектів у разі реалізації j-го стану економічного середовища.

Нехай парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею платежів M = (μ_{kj}), не має сідлової точки. Тоді розв'язком цієї гри є оптимальна змішана стратегія першого гравця, що їй відповідає вектор P* = (p_1*;…; p), компонента p_k* якого є питомою вагою k-го проекту в структурі портфеля.

4.7 Формування «валютного кошика»

Використовуватимо наступні позначення: R_k — норма прибутку валюти k-го виду ((k = 1,…, m); m — кількість різних валют, що складають кошик; X = (x_1;…; x_m) — структура «валютного кошика»; x_k — частка капіталу, інвестованого у валюту k-го виду; $R_П$— норма прибутку «валютного кошика», тобто:

$$R_{П} = \sum_{k=1}^{m}(x_k R_k)$$

Вважатимемо, що множина станів ринку іноземних валют (станів економічного середовища) дискретна зі скінченною кількістю елементів. Нехай T — кількість станів економічного середовища; r_{kj} — значення, що приймає норма прибутку валюти k-го виду (k = 1,…, m) в умовах j-го стану економічного середовища (j = 1,…, n), при цьому значення r_{kj} відомі. Тоді ситуацію прийняття рішення щодо створення «валютного кошика» можна охарактеризувати функціоналом оцінювання R+ = (r_{kj}+ : k = 1,…, m; j = 1,…, n).

Аналогічно теорії Марковіца: сподівана норма прибутку валюти k-го виду — це математичне сподівання відповідної дискретної випадкової величини R_k:

$$m_k = M(R_k) = \sum_{j=1}^{n} (q_j r_{kj}), k = 1, \ldots, m;$$

ступінь ризику – дисперсія норми прибутку R_k

$$\sigma_k^2 = D(R_k) = \sum_{j=1}^{n} (q_j r_{kj}^2) - m_k^2, k = 1, \ldots, m,$$

де Q=(q_1;...;q_n) - імовірності настання можливих сценаріїв.

Характеристиками "валютного кошика" зі структурою $X = (x_1; \ldots; x_m)$ є його сподівана норма прибутку

$$m_П = M(R_П) = \sum_{k=1}^{m} (x_k m_k)$$

та ступінь ризику – дисперсія норми прибутку $R_П$

$$\sigma = D(R_П) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (x_k x_i \sigma_{ki})$$

де $\sigma = cov(R_k; R_i) = \sum_{j=1}^{n} (q_j r_{kj} r_{ij}) - m_k m_i$.

Математична модель задачі обрання оптимальної (раціональної) структури X = (x_1; … ; x_m) «валютного кошика» має вигляд моделі задачі вибору оптимальної структури портфеля у полі відповідної інформаційної ситуації.

Існує низка добре відпра-цьованих методів розв’язування цих задач. Якщо матриця R = (r_{kj} : k = 1,…, m; j = 1,…, n) не має сідлового елемента, то задачу вибору оптимальної структури «валютного кошика» можна звести до відшукання оптимальної раціональної змішаної стратегії відповідної гри двох осіб з нульовою сумою.

Розглянемо гру двох осіб, що задається платіжною матрицею $R = R^+$. Якщо нижня ціна гри

$$\alpha^+ = \max_{k=1,\ldots m} \alpha_k^+ = \max_{k=1,\ldots m} \min_{j=1,\ldots,n} r_{kj}$$

не дорівнює верхній ціні гри

$$\beta^- = \max_{j=1,\ldots n} \beta_k^+ = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{k=1,\ldots m} r_{kj}$$

то оптимальним розв’язком гри є сукупність змішаних стратегій гравців, що визначається векторами $P^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ та $Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ відповідно, а ціна гри

$$V^* = \sum_{k=1}^{m} (p_k^* q_j^* r_{kj})$$

(у цій грі як перший гравець виступає СПР, банк, його клієнт та ін.,як другий – валютний ринок.)

Якщо мають місце строгі нерівності $q_j^* > 0$ одночасно для усіх j = 1, ..., n, то

$$R_{p^*} = \sum_{k=1}^{m} (p_k^* R_k) = V^* e = const$$

Це означає, що «валютний кошик» зі структурою $P^* = (p_1^*;\ldots;\ p_m^*)$ є безризиковим, оскільки для будь-якого розподілу ймовірності щодо станів валютного ринку його дисперсія дорівнює нулю: $\sigma_p{*}2 = D(R_p{*}) = 0$. Таким чином, за цих умов ігровий підхід на базі платіжної матриці $R = (r_{kj} : k = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots\ n)$ дозволяє знайти безризиковий «валютний кошик», причому в полі будь-якої інформаційної ситуації. Більш того, у ситуації , коли економічне середовище активно протидіє досягненню найбільшої ефективності рішень, формування суб'єктом ризику «валютного кошика» можливе лише на базі теоретико-ігрових методів.

Зазначимо, що у полі першої інформаційної ситуації формування «валютного кошика» з мінімальною дисперсією може ґрунтуватись також на розв'язанні парної гри з нульовою сумою, коли в якості платіжної матриці використовується коваріаційна матриця $C = (\sigma_{kj} : k = 1,\ldots\ m;\ j = 1,\ldots\ n)$.

1.3 Ігри з природою

Планування структури посівних площ

Нехай аграрне підприємство (перший гравець) може посіяти одну з трьох культур. Його стратегії позначимо через s_1, s_2, s_3. Необхідно визначити, яку з культур сіяти, якщо за інших рівних умов урожаї цих культур залежать, головним чином, від погоди (Θ), а план посіву має забезпечити найбільший дохід. Уважатимемо, що сільськогосподарське підприємство має надійний спосіб прогнозування погоди. Визначаємо для другого гравця (“погода”) такі стани (стратегії): Θ_1 — рік посушливий; Θ_2 — рік нормальний; Θ_3 — рік дощовий.

Нехай на основі досвіду відомо, що за сухої погоди з 1 га можна зняти h_{k1} центнерів культури s_k за нормальної — h_{k2}, за дощової — h_{k3} (k = 1, 2, 3,). Нехай також відомі ціни: c_k — ціна 1ц культури s_k (k = 1, 2, 3) в умовних грошових одиницях (УГО). Приймемо, що:

$$f_{kj} = c_k h_{kj}, \quad k = 1,\ 2,\ 3; \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

Якщо знехтувати вартістю насіння і витратами на обробіток ґрунту, отримуємо функціонал оцінювання

$$F^+ = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix},$$

тобто матрицю валових доходів підприємства від реалізації своєї продукції з 1 га за всіх можливих ситуацій. Нехай гра не має сідлової точки і перший гравець (аграрне підприємство) має хоча б одну оптимальну змішану стратеію s_{p^*}, що визначається вектором.

Якщо V* — ціна гри, то для змішаної стратегії P* виконується нерівність:

$$f_{1j}p_1^* + f_{2j}p_2^* + f_{3j}p_3^* \geq V^*.$$

Очевидно, що ціна гри V* (число, яке знаходиться у лівій частині нерівності є величиною очікуваного валового доходу з 1 га за j-го стану погоди, якщо підприємство p1*-ту частку 1 га засіє культурою s_1, p_2*-ту частку 1 га — культурою s_2, а p_3*-ту частку 1 га — культурою s_3.

Отже, засіявши поле культурами s_1, s_2, s_3 у пропорції p_1*, p_2*, p_3*, аграрне підприємство отримає за всіх погодних умов очікуваний валовий дохід, не менший числа V*. Зауважимо, що очікуваний валовий дохід з 1 га за j-го стану погоди буде принципово відмінним від фактичного, який є реалізацію випадкової величини А саме, за умови реалізації j-го стану погоди, підприємство, реалізувавши змішану стратегію s_p*, одержить з імовірністю p_1* фактичний валовий дохід f_{ij}; з імовірністю p_2* — f_{2j}; з імовірністю p_3* — f_{3j}. Проте відповідно до закону великих чисел фактичний валовий дохід за кілька років з великою ймовірністю дорівнюватиме очікуваному валового доходу V*.

Викладений тут результат легко узагальнити на випадок, коли висіваються типи культур, а стани погоди деталізовано. Крім того, аналогічні моделі можна побудувати для випадку, коли підприємство має можливість змінювати не лише культури, які воно висіває, а й способи (технології) обробки поля.

Розв’яжемо числовий приклад для даних, наведених у табл. 1.2.

Отже, функціонал оцінювання (матриця виграшу першого гравця) має вигляд:

$$F = F^{+} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

Стратегія першого гравця (аграрне підприємство)		Стратегія другого гравця (погода)			Ціна за 1ц в УГО
		Суха погода θ_1	Нормальна погода θ_1	Дощова погода θ_1	
Урожайність першої культури, ц/га	s_1	20	5	15	2
Урожайність другої культури, ц/га	s_2	7,5	12,5	5	4
Урожайність третьої культури, ц/га	s_3	0	7,5	10	8

Оскільки $\alpha+ < \beta-$, то гра не має сідлової точки, а тому оптимальна стратегія першого гравця змішана. Для знаходження такої стратегії треба розв’язати задачу лінійного програмування:

$$Z=(t_1+t_2+t_3)=\frac{1}{V}\to \min_{t_1,t_2,t_3}$$

за виконання умов

$$40t_1+30t_2\geq 1 \quad ;$$

$$10t_1+50t_2+60t_3\geq 1 \quad ;$$

$$30t_1+20t_2+50t_3\geq 1 \quad ;$$

$$t_1, t_2, t_3\geq 0 \quad ,$$

де

$$t_1=\frac{P_1}{V} \quad ; \quad t_2=\frac{P_2}{V} \quad ; \quad t_3=\frac{P_3}{V} \quad ; \quad t_1+t_2+t_3=\frac{1}{V} \quad .$$

Розв’язавши цю задачу, одержимо, що

$$P^{¿}=(0{,}49\,;0{,}40\,;0{,}11) \quad ; \quad V^{¿}=31{,}5 \quad .$$

Тобто, за решти рівних умов, засіявши 49% поля першою культурою, 40% — другою, 11% — третьою культурою, аграрне підприємство отримає в середньому за низку років за різних погодних умов очікуваний максимальний валовий дохід не менший 31,5 ум. од. за рік.

Використання теорії матричних ігор в військово-морській справі

Розподіл ресурсів і обгрунтування систем озброєння є найбільш розповсюдженими ситуаціями в воєнно-морській справі. Ситуації даного типу складаються тоді, коли наявних ресурсів (виділеного наряду сил, зброї, технічних засобів і матеріально-технічного оснащення) не вистачає для виповнення кожної із запланованих дій найбільш ефективним шляхом або коли невідомі кокретні значення некерованих параметрів, а також їх можливий розподіл. В даній проблемі при багаточисельності матеріальних зв’язків і обмежень вирішуюче значення мають інтереси сторін, які беруть участь, проінформованість їх про оточуюче середовище та одне про одного. Отже, по своїй суті, ситуації розподілу ресурсів і обгрунтування систем озброєння є конфліктними, формалізація їх природнім образом здійснюється на мові теорії ігор.

Зазвичай, сторони, які беруть участь в конфліктній ситуації розподільчого типу, переслідують протилежні цілі, тому їх математичними моделями можуть бути антагоністичні ігри. В тих випадках, коли розподіл ресурсів має кінцеве число варіантів (стратегій), для побудови моделей і їх рішення використовується матричних ігор.

Побудова теоретико-ігрової моделі двостороннього розподілу ресурсів, її рішення і реалізація отриманого рішенняв процесі розробки практичних рекомендацій здійснюється, як викладено в попередніх паараграфах. При цьому сила теоретико-ігрового підходу (як і будь-якого іншого математичного методу) до вибору оптимального варіанта розподілу ресурсів чи оптимальної системи озброєння полягає в спільності та широті застосування, що наглядно ілюструються наступними прикладами практичного (воєнно-морського), хоча, можливо і умовного значення.

Задача про побудову протиповітряної оборони військового-морської бази

Припустимо, що для організації протиповітряної оборони воєнно-морської бази можна використовувати два типа рухомих систем зенітних ракетних комплексів(ЗРК-1 і ЗРК-2). Система ЗРК-1 призначена для знищення високолітаючих повітряних цілей, а ЗРК-2 – для знищення низьколітаючих цілей. Потрібно визначити оптимальний склад комлексів з врахуванням тактики дій повітряного противника, який може атакувати ВМБ як на малих, так і на великих висотах.

Очевидно, що для заданих умов оптимізація можлива тільки з позиції теоретико-ігрового підходу, тобто шляхом використання принципів оптимальності теорії ігор та максимінного критерія. Для визначення оптимального складу зенітних комплексів потрібно побудувати теоретико-ігрову модель, а саме матричну гру.

Доволі просто встановити. Що сторона А(гравець 1) для організації ПВО може використовувати ЗРК-1 (1-ша стратегія) чи ЗРК-2 (2-га стратегія), а сторона В (гравець 2) може атакувати воєнно-морську базу на великих висотах (1-ша стратегія) чи на малих висотах (2-га стратегія). Нехай можливість враження самольота сторони

В в залежності від висоти його польоту тією чи іншою системою ЗРК є такою, що матриця виграшів гравця 1 має вигляд (див. табл. 1.3.1).

Таблиця 1.3.1

Теоретико-ігрова модель розподілу комплексів

	1	*2*	$\min_i a_{ij}$
1	*0,8*	*0,2*	*0,2*
2	*0,4*	*0,6*	*0,4*
$\max_i a_{ij}$	*0,8*	*0,6 (минимакс)*	

Із таблиці 1.3.1 видно, що максимін не рівний мінімаксу, тому рішення гри існує лише в змішаних стратегіях. Знаходимо розв`язок гри:

$$x^* = (1/4, 3/4) \quad ; \quad y^* = (1/2, 1/2) \quad ; \quad v = 0{,}5 \quad .$$

Для реалізації отриманого рішення використаємо поняття "фізична суміш стратегій". Параметрами цієї стратегії є пропорції, в яких змішується окремі зразки військової техніки. Для даного прикладу під фізичною сумішшю стратегій потрібно розуміти структуру ПВО, яка включає в себе зенітні комплекси ЗРК-1 та ЗРК-2 в відношенні 1:3. Але фізична суміш стратегій являє собою чисту стратегію, тому що вона рекомендується для використання з ймовірністю рівній одиниці. В зв’язку з цим резонно ствердження , що фізична суміш стратегій повинна бути представлена як одна із чисельнихстратегій в матриці виграшів гравця 1. Доповнимо матрицю гри фізичними сумішами стратегій гравців 1 та 2, а потім знайдемо рішення нової гри (див. табл. 1.3.2).

Із таблиці 1.3.2 видн, що 3*3 гра має сідлову точку *(x*,y*)*. Отже, стратегії *x** та *y** являються єдиними стратегіями, які складають рішення як нової, так і вихідної гри. Слід зазначити, що отриманий результат не є випадковим співпадінням, а є закономірним для будь-якої матричної гри, якщо тільки фізична суміш стратегій має реальний зміст.

Таблиця 1.3.2

Теоретико-ігрова модель розподілу комплексів

	1	*2*	$y^*=(1/2;1/2)$	$\min_i a_{ij}$
1	*0,8*	*0,2*	*0,5*	*0,2*
2	*0,4*	*0,6*	*0,5*	*0,4*
$x^*=(1/4;3/4)$	*0,5*	*0,5*	*0,5*	*0,5 (минимакс)*
$\max_i a_{ij}$	*0,8*	*0,6*	*0,5 (минимакс)*	

Слід зазначити, що повітряного ворого можна розглядати як деякий некерований(випадковий) параметр, який впливає на ефективність системи ПВО військового-морської бази і ймовірнісний розподіл якого невідомо. В такому сенсі пропорція ЗРК-1 та ЗРК-2 вираховується для найменш сприятливих розподілів y^* значень даного параметра. Розглядаючи вибір висот для літаків, атакуючих військово-морську базу, пропорцію ЗРК-1 та ЗРК-2 чи їх кількість можна приймати за некерований параметр ("природу"), який впливає на ефективність ПВО, і визначити оптимальні висоти вже в сенсі найменш сприятливого розподілу даного параметру.

Задача про транспортні кораблі

Сторона В здійснює перевезення вантажів на одиночних транспортах, а також організовуючи конвої, які залежно від складу даляться на малі та великі. Для зриву перевезень сторона А використовує підводні човни, які діють по одинці і завісами. Нехай за деякий період часу сторона А знищила число транспортів сторони В, яке наведене в табл. 1.3.3

Таблиця 1.3.3

Число знищених транспортів (матриця виграшів гравця 1)

		Способи дій сторони Б (стратегії гравця II)			
		Одиночні трнспорти 1	Малі конвої 2	Великі конвої 3	$\min_j a_{ij}$
Способи дій сторони А (стратегії гравця 1)	Одиночні пл 1	8	4	2	2
	Завіси 2	3	6	10	3 (максимін)
$\max_i a_{ij}$		8	6 (міні-макс)	10	

Потрібно на підставі наявних статистичних даних визначити відсоткове співвідношення числа підводних човнів, які доцільно використовувати поодинці і в завісах, а також співвідношення числа транспортів, яким доцільно здійснювати перехід самостійно і в складі малих та великих конвоїв.

З табл. 1.3.3 видно, що підводні човни, діючи в завісах, потопили 19 транспортів, а діючи поодинці 14 транспортів. При цьому сторона В приблизно втрачала однакове число транспортів, які йшли самостійно і у складі конвоїв. Виходячи з цього, здавалося б, стороні А вигідно використовувати підводні човни тільки в завісах, а стороні В зберегти структуру перевезень. Однак таке міркування не враховує можливої зміни в діях противника. Очевидно, що використання тільки завіс викличе вагоме збільшення перевезень вантажів на одиночних транспортах, що вимагатиме організації одиночних дій підводних човнів і т. д. Отже, необхідний аналіз двостороннього розподілу, тобто на основі теоретико-ігрового підходу. Для цього побудуємо 2*3-гру (табл. 1.3.3) і знайдемо оптимальні стратегії гравців.

Шляхом графічного побудови знаходимо, що $y_3^* = 0$. В результаті отримано гру з матрицею виграшем гравця 1

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

і знайдемо $x^* = (3/7, 4/7)$; $y^0 = (2/7, 5/7)$; $v = 36/7$. Оптимальна стратегія y^* для гравця 2 в 2*3-грі виходить з вектора y^0 через додавання нульової компоненти, яка відповідає третій стратегії, тобто $y^* = (2/7, 5/7, 0)$.

Таким чином , на підставі теоретико-ігрового аналізу можна зробити висновок, що стороні А доцільно використовувати підводні човни поодинці і в завісах в відношенні 3:4, а стороні В здійснювати перевезення на одиночних транспортах і малими конвоями в відношені 2:5. В цьому випадку можна вважати, що ефек тивність такого двостороннього розподілу сил еквівалентна математичному сподіванню виграшу в наведеній грі.

Зрозуміло, розглядаючи розподіл підводних човнів (так само як і розподіл транспортів), правомірно приймати протилежну сторону за випадковий параметр, розподіл якого невідомо, і визначати оптимальний спосіб для умов найменш сприятливого розподілу цього параметра.

1.4 Нечіткі змішані стратегії

У 1994 році Нобелівська премія з економіки була присуджена Джону Нешу «за аналіз рівноваги в теорії некоаліційних ігор». До виходу в світ дисертації Джона Неша дослідження проводились основному в області ігор з нульовою сумою, де сумарний виграш одних учасників дорівнює сумарному програшу інших. Неш досліджував гри з ненульовою сумою, в яких можливі ситуації, вигідні відразу для всіх учасників. Так, наприклад, у разі суперечки керівництва заводу і профспілки про підвищення заробітної плати він може закінчитися страйком, що не вигідно відразу обом учасникам суперечки, тоді як від певної угоди всі учасники конфлікту можуть в цілому залишитися у виграші. Неш виділив спеціальний клас ситуацій в грі (тобто фіксованих стратегій всіх учасників гри) - такі ситуації, від яких не вигідно відхилятися поодинці нікому з гравців. Пізніше такі ситуації були названі ситуаціями рівноваги по Нешу.

В чистих стратегіях в грі може не існувати ситуації рівноваги. Орієнтація на оптимальні змішані стратегії дозволяє першому гравцеві максимізувати найменший очікуваний виграш першого гравця і мінімізувати найбільший очікуваний програш другого гравця. Однак такий вибір може бути виправданий лише для багаторазово повторюваних ігор. В окремій грі кожен з гравців навіть при реалізації «оптимальною» змішаної стратегії може дуже сильно програти. В окремих іграх змішані стратегії не тільки не обіцяють максимального виграшу, але навіть не захищають від максимально можливого програшу, тобто кожен гравець може прийняти найгірше з усіх можливих рішень!

Вибір максимінної і мінімаксної стратегій добре підходить для обережних гравців. Він дозволяє не програти занадто багато, не виграти занадто мало. Але деякі гравці можуть бути більш схильні до ризику, і орієнтуватися на ті стратегії, які можуть забезпечити їм максимально можливий виграш, деякі намагаються максимізувати середній очікуваний виграш, тобто вибір мінімаксу або максиміну не є єдиноможливим хорошим в деякому сенсі рішенням.

Нарешті, орієнтація на змішані стратегії передбачає відсутність будь-якої інформації про психологію суперника, припускаючи лише, що він діє раціонально. Однак, як зауважив Герберт Саймон у своїй теорії обмеженої раціональності, більшість людей раціональні тільки частково й емоційні або ірраціональні в інших ситуаціях. Вибір раціонального рішення нерідко несе в собі складні обчислення, якими гравці можуть не володіти або ж вони можуть не мати можливості їх здійснити (через трудомісткість обчислень, відсутності всієї необхідної інформації або яких-небудь ще причин). Можливо також, що витрати на прийняття оптимального рішення можуть бути неприпустимо високі і не окуплять можливих переваг, тому раціонально в такій ситуації буде прийняти будь-яке інше «досить хороше» рішення.

На практиці ми можемо мати про противника будь-яку додаткову інформацію і на її основі робити які-небудь припущення щодо його поведінки. При цьому наші припущення практично завжди носять нечіткий характер. Приміром, наші припущення можуть мати такий вигляд: «якщо противник самовпевнений, то, скоріше за все, він вибере стратегію максимізації максимального доходу».

Оперувати з подібними висловлюваннями і приймати на їх основі кількісне раціональне рішення допомагає апарат створеної Лотфі Заде теорії нечітких множин. На відміну від класичної теорії множин, де кожен елемент може або належати, або не належати якомусь безлічі, в теорії нечітких множин передбачається, що будь-який елемент x належить безлічі A з деяким ступенем приналежності $\mu_A(x) \in [0,1]$. Пара $(A, \mu_A(x))$ утворює нечітку множина. Незважаючи на удавану подібність з ймовірнісної мірою, функція приналежності за своєю природою має зовсім інший характер. Так, якщо б ми з імовірністю 0,7 припускали, що наш супротивник схильний до ризику, то це означало б лише, що з 100 зустрічашихся нам схожих в якомусь сенсі супротивників приблизно 70 були схильні до ризику. Такі дані хороші в умовах повної невизначеності щодо нашого противника і при наявності необхідної статистики. Ступінь приналежності рівна 0,7 до безлічі противників схильних до ризику можна інтерпретувати приблизно, так якщо противник скоріше схильний до ризику, ніж не схильний, але впевненість у цьому не повна. Така впевненість хоч і суб'єктивна, але зате не передбачає наявності будь-яких статистичних даних, враховує конкретного супротивника і, так чи інакше, формалізує всю сукупність наших знань про нього і нашого досвіду. Якщо ми граємо з дитиною або домогосподаркою, або ж ми граємо з яких-небудь вченим, досвідченим гравцем, фахівцем в цій галузі, то такі знання нерозумно не враховувати, хоча вони, звичайно ж, не гарантують правильність наших припущень. Часто ми, так чи інакше, знаємо нашого противника і можемо, хоча б на інтуїтивному рівні, припускати,що він буде керуватися при прийнятті рішення.

У загальному випадку наші припущення можуть носити досить складний характер. Наприклад, ми можемо припускати, що «якщо противник досвідчений і поводиться самовпевнено, то він буде керуватися принципом оптимальних змішаних стратегій, якщо випала стратегія буде не занадто поганий». Якщо противник обережний, то він буде керуватися максимина стратегією. Якщо противник схильний до ризику і не досвідчений, то він вибере стратегію, відповідну максимально можливого доходу. Таким чином, ми можемо скласти цілу базу нечітких правил. При цьому нам необхідно евристично або аналітично задати ступеня приналежності противника до кожного з нечітких множин. Також необхідно навчитися здійснювати логічні операції над нечіткими множинами. Так, у першому прикладі нам необхідно обробити цілих три нечітких множини: A = {досвідчений противник}, B = {самовпевнений противник} і C = {не дуже погана стратегія} і на основі їх обробки здійснити процедуру нечіткого виводу. Методів обробки подібних висловлювань присвячений наступний розділ цієї статті.

Процедура обробки нечітких правил в антагоністичних іграх

Визначимо класичним чином основні логічні операції над нечіткими множинами.

- Об'єднання (відповідає логічній операції «або»):

  $\mu_{A \cup B}$= max [$\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$]

- Перетин (відповідає логічної операції «і»):

  $\mu_A(x)$= min [$\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$]

- Доповнення (відповідає логічної операції «не»):

  $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_{\overline{A}}(x)$

Тоді обробку нечітких правил види: {$П_i$: якщо ($x \in A_i$) та ($y \in B_i$), то z_i}, де, $A_i B_i$ - деякі нечіткі множини, а z_i - конкретне рішення можна здійснити наступним чином.

Спочатку оцінимо ступінь нашої впевненості в результаті. Для конкретного супротивника визначаємо ступінь істинності для передумов кожного правила $\mu_{Ai}(x_0)$, $\mu_{Bi}(y_0)$. Для прикладу, впевненість в тому, що противник обере стратегію z_i складе $a_i = \min[\mu_{Ai}(x_0), \mu_{Bi}(y_0)]$, так як використовувалася операція диз'юнкції, тобто логічного перетину двох висловлювань.

Потім визначаємо впевненість a_i для кожної з можливих стратегій. Якщо ми вважаємо, що противник вибере стратегію z_i, то оптимальним рішенням з цієї стратегії для нього буде якtсь рішення j^*. Оптимальною відповіддю буде вибір рішення $i^*: max_i a_{ij}$.

Тепер можна скористатися *модифікованим варіантом змішаних стратегій*, для вибору оптимальної стратегії, заснованої на обробці бази нечітких правил. Визначимо ймовірності вибору кожного з допустимих рішень як $p_i = \frac{a_i}{\sum_i a_i}$. Тепер ми можемо вважати, що з імовірністю p_i противник буде керуватися стратегією z_i, згідно з якою він вибере рішення j^*, на яке ми з цією ж вірогідністю відповімо рішенням $i^*: max_i a_{ij}$.

2 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Приведення матричної антагоністичної гри до задач лінійного програмування

Алгоритм пошуку рішення матричної антагоністичної гри, заданої платіжною матрицею, що має розмірність $m \times n$ при великих значеннях m і n, зводиться до алгоритму симплекс-методу розв'язання пари взаємодвоїстих задач лінійного програмування. Наводиться метод, за допомогою якого можна привести скінченну матричну антагоністичну гру до двох взаємодвоїстих задач лінійного програмування.

Нехай антагоністична гра задана платіжною матрицею A, що має розмірність $m \times n$, і ця гра є не цілком визначеною. Необхідно знайти рішення гри, тобто визначити оптимальні змішані стратегії першого і другого гравців:

$P^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$, $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$

де P^* і Q^* - вектори, компоненти яких p_i^* і p_j^* характеризують ймовірності застосування чистих стратегій i та j відповідно першим і другим гравцями і відповідно для них виконуються співвідношення:

$p_1^* + p_2^* + \dots + p_m^* = 1$, $q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^* = 1$

$$\begin{matrix} p_1^* \\ p_1^* \\ \dots \\ p_m^* \\ \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію першого гравця P^*. Ця стратегія повинна забезпечити виграш першого гравця не менше V, тобто $\geq V$, при будь-якій поведінці другого гравця, і виграш, рівний V, при його оптимальній поведінці, тобто при стратегії Q^*.

Ціна гри V нам поки невідома. Без обмеження загальності, можна припустити її рівною деякому позитивному числу $V > 0$. Дійсно, для того, щоб виконувалася умова V> 0, достатньо, щоб всі елементи матриці A були невід'ємними. Цього можна домогтися за допомогою афінних перетворень: додаючи до всіх елементів матриці A одну і ту ж досить велику позитивну константу M; при цьому ціна гри збільшиться на M, а рішення не зміниться. Отже, будемо вважати V> 0.

Припустимо, що перший гравець A застосовує свою оптимальну стратегію P^*, а другий гравець B свою чисту стратегію j, тоді середній виграш (математичне очікування) першого гравця A буде рівним:

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + ... + a_{mj} p_n^*$$

Оптимальна стратегія першого гравця (A) володіє тією властивістю, що при будь-якій поведінці другого гравця (B) забезпечує виграш першого гравця, не менший, ніж ціна гри V; значить, будь-яке з чисел a_j не може бути менше V (≥ V). Отже, при оптимальної стратегії, повинна виконуватися наступна система нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + ... + a_{m1} p_m^* \geqslant V \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + ... + a_{m2} p_m^* \geqslant V \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + ... + a_{mn} p_m^* \geqslant V \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Розділимо нерівності (2.1.1) на позитивну величину *V* (праві частини системи (2.1.1)) і введемо позначення:

$$y_1 = \frac{p_1^*}{V}, \; y_2 = \frac{p_2^*}{V}, \; ..., \; y_m = \frac{p_m^*}{V} \quad (2.1.2)$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; .., \; y_m \geq 0, \; (2.1.3)$$

Тоді умови (2.1.1) запишуться в вигляді:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geqslant 1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geqslant 1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

де $y_1, y_2, ... y_m$ – невід'ємні змінні. В силу (2.1.2) и того, що $p_1^* + p_2^* + … + p_m^* = 1$ змінні $y_1, y_2, ..., y_m$ задовольняють умові, яку позначимо через F:

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_m = \frac{1}{V} \quad (2.1.5)$$

Оскільки перший гравецт свій гарантовани виграш (V) сарається зробити максимально можливим (V → max), очевидно що при цьому права частина (2.1.5) - $\frac{1}{V}$ →min приймає мінімальне значення. Таким чином задача рішення антагонстичної гри для першого гравця звелась до наступної математичної задачі:

Визначити невід'ємні значення змінних $y_1, y_2, ... y_m$,щоб вони задовольняли системі функціональних лінійних обмежень в вигляді нерівностей(2.1.4), системі загальних обмежень (2.1.3) и мінімізували цільову функцію F:

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_m \rightarrow \min$$

Це типова задача лінійного програмування (двійкова) і вона може бути вирішена симплекс-методом. Таким чином, вирішуючи задачу лінійного програмування, ми можемо знайти оптимальну стратегію $P^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ гравця А.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ гравця В. Все буде аналогічно рішенню гри для гравця А, з тією різницею, що гравець В прагне не максимізувати, а мінімізувати виграш (по суті справи його програш), а значить, не мінімізувати, а максимізувати величину $\frac{1}{V}$, Тому що V → min. Замість умов (2.1.4) повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant 1 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

де

$$x_1 = \frac{q_1^*}{V}, x_2 = \frac{q_2^*}{V}, ..., x_n = \frac{q_m^*}{V} \quad (2.1.7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, .., x_n \geq 0 \ (2.1.8)$$

Потрібно так вибрати змінні $x_{1,}$ $x_{2,}$ .., $x_{n,}$ щоб вони задовольняли умовам (2.1.6), (2.1.8) і приводили в максимум лінійну функцію мети $F^{/}$:

$$F' = x_1 + x_2 + x_n = \frac{1}{V} \to max$$

Таким чином, завдання вирішення антагоністичної гри для другого гравця звелася до наступного математичної задачі:

Визначити невід'ємні значення змінних x_1, x_2, .., $x_{n,}$ щоб вони задовольняли системі функціональних лінійних обмежень у вигляді нерівностей (2.1.6), системі загальних обмежень (2.1.8) і максимізувати цільову функцію $F^{/}$:

$$F' = x_1 + x_2 + .. + x_n \to \min$$

Це типова задача лінійного програмування (пряма) і вона може бути вирішена симплекс - методом. Таким чином, вирішуючи пряму задачу лінійного програмування, ми можемо знайти оптимальну стратегію $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ гравця B.

Підіб'ємо підсумок.

Завдання другого гравця мінімізація програшу V	Завдання першого гравця максимізація виграшу V
Цільова функція	
$F' = x_1 + x_2 + x_n = \frac{1}{V} \to max$	$F = y_1 + y_2 + ... + y_m = \frac{1}{V} \to min$
Функціональні обмеження	
$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leqslant 1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leqslant 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geqslant 1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geqslant 1 \end{cases}$
Загальні (прямі) обмеження	
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, .., x_n \geq 0$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, .., y_m \geq 0$

Завдання обох гравців утворюють пару симетричних взаємодвоїстих задач лінійного програмування, і, тому немає необхідності вирішувати обидві ці завдання, тому що знайшовши вирішення однієї з них, можна знайти і рішення іншої.

Примітка.

З відомостей завдання приведення кінцевої матричної антагоністичної гри до задачі лінійного програмування (ЗЛП) можна зробити висновок з приводу існування рішення антагоністичної гри m × n, не спираючись на теорему фон Неймана.

Нехай задача про знаходження оптимальної стратегії $P^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ гравця А зведена до задачі лінійного програмування з умовами нерівностями (2.1.4) і мінімізується функцією (2.1.5). Чи завжди існує її рішення? Відомо, що рішення задачі лінійного програмування може і не існувати; воно відсутнє, якщо:

1. функціональні та загальні умови - рівності або нерівності - взагалі не мають допустимих невід'ємних рішень;
2. допустимі рішення існують, але серед них немає оптимального, так як мінімізується функція не обмежена знизу.

Подивимося, як йде справа в нашому випадку. Допустимі рішення ЗЛП в нашому випадку завжди існують. Дійсно, за допомогою афінних перетворень зробимо елементи платіжної матриці А строго позитивними, наприклад, додавши досить велике позитивне число **M** до кожного елементу платіжної матриці, і позначимо найменший елемент матриці А через **μ:**

$$\mu = \min_{ij} \min a_{ij}$$

Покладемо тепер $y_1 = 1/\mu$, $y_2 = y_3 = ... = Y_m = 0$. Неважко побачити, що ця система значень змінних $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ має допустиме рішення ЗЛП - всі вони не негативні, і їх сукупність задовольняє умовам (2.1.4).

Тепер переконаємося, що лінійна функція (2.1.5) не може бути необмеженою знизу. Дійсно, всі $y_1, y_2, y_3, ..., y_m$ не негативні, а коефіцієнти при них в у виразі (2.1.5) позитивні (рівні одиницям), значить, функція F у формулі (2.1.5) теж невід’ємна, значить, вона обмежена знизу (нулем) і рішення задачі лінійного програмування (а отже, і ігри m × n) існує.

Приклад. Вирішити гру з матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

1. Відповідно до алгоритму визначимо, чи існують в ній доміновані стратегії, щоб виключити їх. Домінованих стратегій немає.

2. Оскільки матриця містить негативні числа, то потрібно зробити так, щоб усі її елементи були не негативні, додавши до всіх її елементів число, рівне модулю найменшого числа матриці. Мінімальний елемент матриці дорівнює -0,1, його модуль дорівнює 0,1. Додамо до всіх елементів платіжної матриці число, рівне 0,1, в результаті отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Помножимо всі елементи отриманої матриці на 10, щоб зручніше проводити подальші обчислення.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Проведені афінні перетворення на оптимальних стратегіях не позначаться, а ціну гри я відновлю, зробивши зворотні перетворення (розділю отриману суму на 10 і відніму 0,1).

Припишемо рядкам ймовірності p_1, p_2, p_3

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тоді середнє значення (математичне очікування) виграшу гравця А при застосуванні гравцем В своєї першої стратегії дорівнює $1p_1 + 7p_2 + 5p_3$ (перший стовпець поелементно множиться на ймовірності p_1, p_2, p_3 та отримані добутки підсумовуються). Цей виграш не може бути менший гарантованої ціни гри V:

$$1p_1 + 7p_2 + 5p_3 \geq V.$$

Аналогічно для інших стратегій гравця В.

$$\begin{cases} p_1 + 7p_2 + 5p_3 \geqslant V \\ 4p_1 + 2p_2 + 3p_3 \geqslant V \\ 6p_1 + 2p_3 \geqslant V \\ p_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Розділимо обидві частини нерівності на V і введемо позначення:

$$y_i = p_i / V \ (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 + 5y_3 \geqslant 1 \\ 4y_1 + 2y_2 + 3p_3 \geqslant 1 \\ 6y_1 + 2y_3 \geqslant 1 \\ y_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$F = y_1 + y_2 + y_3 = (p_1 + p_2 + p_3)/V = \frac{1}{V}$$

Гравець А прагнути підвищити ціну гри (V → max). Тому F → min.

Отримано завдання лінійного програмування:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 + 5y_3 \geqslant 1 \\ 4y_1 + 2y_2 + 3p_3 \geqslant 1 \\ 6y_1 + 2y_3 \geqslant 1 \\ y_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Аналогічно припишемо стовпцям ймовірності q_1, q_2, q_3.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тоді середній програш гравця В при застосуванні гравцем А його першої стратегії дорівнює $1q_1 + 4q_2 + 6q_3$ (1-й рядок поелементно множиться на ймовірності q_1, q_2, q_3 та отримані добутки підсумовуються). Цей програш не може бути більше ціни гри V: $1q_1 + 4q_2 + 6q_3 \leq V$. Аналогічно для інших стратегій гравця А.

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 + 6q_3 \leqslant V \\ 7q_1 + 2q_2 + 0q_3 \leqslant V \\ 5q_1 + 3q_2 + 2q_3 \leqslant V \\ q_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Розділимо обидві частини нерівностей на V і введемо позначення

$$x_i = q_i / V \ (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leqslant 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leqslant 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 1 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 = (q_1 + q_2 + q_3)/V = \frac{1}{V}$$

Гравець B прагне знизити ціну гри ($V \to \min$), тому $F^{/} \to \max$.

Отримано завдання лінійного програмування:

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leqslant 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leqslant 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 1 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Отримані завдання є взаємнодвоїстими завданнями лінійного програмування. Будь-яку з них можна вирішити симплекс-методом . Остаточний результат має такий вигляд:

$y_1 = 3/28$; $p_1 = 3/8$; $x_1 = 1/7$; $q_1 = 1/2$;

$y_1 = 0$; $p_1 = 0$; $x_2 = 0$; $q_2 = 0$;

$y_1 = 5/28$; $p_1 = 5/8$; $x_3 = 1/7$; $q_3 = 1/2$;

$F^{/} = 2/7$; $V = 3\frac{1}{12}$; $F = 2/7$; $V = 3\frac{1}{12}$;

Отже, оптимальні стратегії:

$P^* = (3/8;\ 0;\ 5/8)$, $Q^* = (1/2;\ 0;\ 1/2)$,

ціна гри для модифікованої задачі V = 3,5,

а для вихідної завдання $V^{/} = 3{,}5 / 10 - 0{,}1 = 0{,}25$.

3.2 Використання методу Брауна-Робінсона в розв'язанні матричних ігор

припустимо, що за перші k розігрування гравець 1 використовував i-ю чисту стратегію ξ_i^k разів (i=1,…,m), а гравець 2 j-ю чисту стратегію η_j^k разів (j=1,…,n). Тоді їх змішаними стратегіями будуть вектори $x^k = (\xi_1^k/k,...,\xi_m^k/k), y^k = (\eta_1^k/k,...,\eta_n^k/k)$.

Гравець 1 стежить за діями гравця 2 і з кожним своїм ходом бажає отримати якомога більший виграш. Тому у відповідь на застосування гравцем 2 своєї змішаної стратегії y_k, він буде використовувати чисту стратегію $i_k +1$, яка забезпечить йому найкращий результат при розігруванні (k +1)-ої партії. Гравець 2 надходить аналогічно. В гіршому випадку кожен з них може отримати:

$$\bar{v}^k = \max_i \sum_j^n a_{ij}\eta_j^k = \sum_j^n a_{i_{k+1}}\eta_j^k$$

$$\underline{v}^k = \min_j \sum_i^m a_{ij}\xi_i^k = \sum_i^m a_{ij_{k+1}}\xi_i^k$$

де $\bar{v}^k$ - найбільше значення програшу гравця 2 і $\underline{v}^k$ - найменше значення виграшу гравця 1.

Розглянемо відносини, які визначають середні значення програшу гравця 2 і виграшу гравця 1:

$$\bar{v}^k/k = \max_i \sum_j^n a_{ij}\eta_j^k/k = \sum_j^n a_{i_{k+1}j}\eta_j^k/k$$

$$\underline{v}^k/k = \min_j \sum_i^m a_{ij}\xi_i^k/k = \sum_i^m a_{ij_{k+1}}\xi_i^k/k$$

Нехай ν - ціна матричної гри $Г_A$. Її значення буде більше виграшу гравця 1, але менше програшу гравця 2, тобто

$$\max_k \underline{v}^k/k \le v \le \min_k \bar{v}^k/k. \qquad (3.2.1)$$

Таким чином, отриманий ітеративний процес, що дозволяє знаходити наближене рішення матричної гри, при цьому ступінь близькості наближення до істинного значення гри визначається довжиною інтервалу

$$\left[\max_k \underline{v}^k/k, \min_k \bar{v}^k/k\right].$$

Збіжність алгоритму гарантується наступною теоремою.

Теорема. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\min\limits_k \bar{v}^k/k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\max\limits_k \underline{v}^k/k\right)=v$.

Схема доказу.

Лемма. Для будь-якої матриці A і $\forall\varepsilon>0$ існує таке k_0, що

$$\min_{k_0}\bar{v}^k/k-\max_{k_0}\underline{v}^k/k<\varepsilon.$$

При граничному переході в нерівності (3.2.1) при $k\to\infty$ маємо:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\max_k \underline{v}^k/k\right)\le v\le \lim_{k\to\infty}\left(\min_k \bar{v}^k/k\right). \qquad (3.2.2)$$

Звідси отримуємо оцінку різниці границь:

$$0\le \lim_{k\to\infty}\left(\min_k \bar{v}^k/k\right)-\lim_{k\to\infty}\left(\max_k \underline{v}^k/k\right).$$

З леми випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\left(\min_k \bar{v}^k/k-\max_k \underline{v}^k/k\right)<\varepsilon .$$

На основі нерівності (1) маємо:: $\begin{array}{l}\liminf\limits_{k\to\infty}\left(\min\limits_k \bar{v}^k/k\right)\ge v\\ \limsup\limits_{k\to\infty}\left(\max\limits_k \underline{v}^k/k\right)\le v\end{array}$.

Отже, в силу обмеженості границь

$$\lim_{k\to\infty}\left(\min_k \bar{v}^k/k\right)-\lim_{k\to\infty}\left(\max_k \underline{v}^k/k\right)<\varepsilon .$$

Отримуємо оцінку для різниці меж:

$$0\le \lim_{k\to\infty}\left(\min_k \bar{v}^k/k\right)-\lim_{k\to\infty}\left(\max_k \underline{v}^k/k\right)<\varepsilon \quad \text{для } \forall\varepsilon>0.$$

Можемо зробити висновок, що $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\min\limits_k \bar{v}^k/k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\max\limits_k \underline{v}^k/k\right)$. Залишилося показати рівність границь v. Це випливає з нерівності (2).

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\min\limits_k \bar{v}^k/k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\max\limits_k \underline{v}^k/k\right)=v$.

Приклад. *Знайти наближене рішення гри з матрицею*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Нехай гру почне гравець 2. Він довільно обирає одну зі своїх чистих стратегій. Припустимо, що він вибрав свою 1-у стратегію, а гравець 1 відповідає своїй 2-й стратегією. Занесемо дані в таблицю.

Номер партії	Стратегії другого гравця	Виграш гравця 1 при його стратегіях			Стратегії першого гравця	Програш гравця 2 при його стратегіях			υ	ω	ν
		1	2	3		1	2	3			
1	1	0	4	2	2	4	1	2	4	1	5/2

У стовпці υ знаходиться найбільший середній виграш 4 гравця 1, отриманий ним у першій партії; в стовпці ω варто найменший середній програш 1, отриманий гравцем 2 в першій партії; в стовпці ν знаходиться середнє арифметичне $\nu=(\upsilon+\omega)/2=5/2$, тобто наближене значення ціни гри, отримане в результаті програвання однієї партії.

Так як гравець 1 вибрав 2-у стратегію , то гравець 2 може програти:

4, якщо застосує свою 1-у стратегію;

1, якщо застосує свою 2-у стратегію;

2, якщо застосує свою 3-ю стратегію.

Оскільки він бажає програти якомога менше, то у відповідь застосує свою 2-у стратегію.

Тоді перший гравець отримає виграш рівний 3, 1, 0 відповідно при своїх 1-й, 2-й, 3-й стратегіях, а його сумарний виграш за дві партії складе:

0 +3 = 3 при його 1 - й стратегії;

4 +1 = 5 при його 2-й стратегії;

2 +0 = 2 при його 3-й стратегії.

З усіх сумарних виграшів найбільшим є 5, який виходить при 2-й стратегії гравця 1. Значить, у цій партії він повинен вибрати саме цю стратегію.

При 1-й стратегії гравця 1 гравець 2 програє 4, 1, 2 відповідно 1-й, 2-й, 3-й його стратегіям, а сумарний програш за обидві партії складе:

4 +4 = 8 при його 1-й стратегії;

1 +1 = 2 при його 2-й стратегії;

2 +2 = 4 при його 3-й стратегії.

Всі отримані дані занесемо в таблицю. У стовпець υ ставиться найбільший сумарний виграш гравця 1 за дві партії, поділений на кількість партій, тобто 5/2; в стовпець ω ставиться найменший сумарний програш гравця 2, поділений на кількість партій, тобто 2/2; в стовпець ν ставиться середнє арифметичне цих значень, тобто 7/2.

Номер партії	Стратегії другого гравця	Виграш гравця 1 при його стратегіях			Стратегії першого гравця	Програш гравця 2 при його стратегіях			υ	ω	ν
		1	2	3		1	2	3			
1 2	1 2	0 3	4 5	2 2	2 2	4 8	1 2	2 4	4 5/2	1 2/2	5/2 7/2

У третій партії гравець 2 вибирає свою 2-у стратегію, так як з усіх сумарних програшів найменшим є 2.

Таким чином, продовжуючи цей процес далі, складемо таблицю розігрування гри за 20 ітерацій (партій).

Номер партії	Стратегії другого гравця	Виграш гравця 1 при його стратегіях			Стратегії першого гравця	Програш гравця 2 при його стратегіях			υ	ω	ν
		1	2	3		1	2	3			
1	1	0	4	2	2	4	1	2	4	1	5/2
2	2	3	5	2	2	8	2	4	5/2	2/2	7/2
3	2	6	6	2	1	8	5	5	6/3	5/3	11/6
4	2	9	7	2	1	8	8	6	9/4	6/4	15/8
5	3	10	9	5	1	8	11	7	10/5	7/5	17/10
6	3	11	11	8	1	8	14	8	11/6	8/6	19/12
7	1	11	15	10	2	12	15	10	15/7	10/7	25/14
8	3	12	17	13	2	16	16	12	17/8	12/8	27/16
9	3	13	19	16	2	20	17	14	19/9	14/9	33/18
10	3	14	21	19	2	24	18	16	21/10	16/10	37/20
11	3	15	23	22	2	28	19	18	23/11	18/11	41/22
12	3	16	25	25	2	32	20	20	25/12	20/12	45/24
13	2	19	26	25	2	36	21	22	26/13	21/13	47/26
14	2	22	27	25	2	40	22	24	27/14	22/14	49/28

15	2	25	27	25	2	44	23	26	27/15	23/15	50/30
16	2	28	29	25	2	48	24	28	29/16	24/16	53/32
17	2	31	30	25	1	48	27	29	31/17	27/17	58/34
18	2	34	31	25	1	48	30	30	34/18	30/18	64/36
19	2	37	32	25	1	48	33	31	37/19	31/19	68/38
20	3	38	34	28	1	48	36	32	38/20	32/20	70/40

З таблиці видно, що в 20-ти програних партіях стратегії 1, 2, 3 для другого гравця зустрічаються відповідно 2, 10, 8 разів, отже, їх відносні частоти рівні 2/20, 10/20, 8/20. Стратегії 1, 2, 3 для гравця 1 зустрічаються відповідно 8, 12, 0 раз, отже, їх відносні частоти рівні 8/20, 12/20, 0, а наближене значення ціни гри одно 70/40.

Таким чином, отримали наближене рішення ігри: x_{20}= (1/10, 1/2,*2/5),*y_{20}= (2/5, 3/5, 0), ν = 1,57.

Такий ітеративний процес веде гравців до мети повільно. Часто для отримання оптимальних стратегій, які дають гравцям виграш, доводиться проробляти сотні ітерацій. При цьому швидкість збіжності помітно погіршується зі зростанням розмірності матриці і зростанням числа стратегій гравців. Це також є наслідком не монотонності послідовностей $\bar{v}^k$ і $\underline{v}^k$. Тому, практична цінність цього методу має місце, коли обчислення проводяться на досить швидкодіючих обчислювальних машинах. Але поряд з таким недоліком можна виділити і гідності методу ітерацій:

1. Цей метод дає можливість знайти орієнтовне значення ціни гри і наближено обчислити оптимальні стратегії гравців.
2. Складність і обсяг обчислень порівняно слабко зростають у міру збільшення числа стратегій гравців (m і n).

3.3Використання графічного методу в розв’язанні матричних ігор

В ігор розморності 2*n чи m*2 завжди є рішення, що містить не більше двох активних стратегій для кожного з гравців. Якщо знайти ці активні стратегії, то гра 2*n або m*2 зводиться до гри 2*2. Тому ігри 2*n і m*2 вирішують зазвичай графоаналітичним методом.

Розглянемо рішення матричної гри на прикладі.

Приклад.

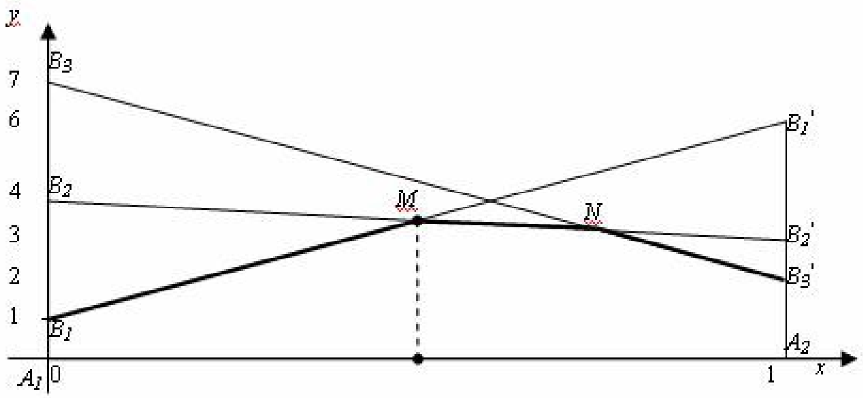
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рішення.

				α_i
	1 6	4 3	7 2	1 2
β_i	6	4	7	2 4

$\alpha = 2$, $\beta = 4$ $\alpha \neq \beta$, Тому гра не має сідлової точки, і рішення має бути в змішаних стратегіях.

1. Будуємо графічне зображення гри.



Якщо гравець *B* застосує стратегію $B_{1,}$ то виграш гравця *A* при застосуванні стратегії A_1 дорівнює $a_{11} = 1$, а при використанні A_2 виграш дорівнює $a_{21} = 6$, тому відкладаємо відрізки $A_1B_1 = 1$, $A_2B_1' = 6$ на перпендикулярах в A_1 і A_2 і з'єднуємо їх відрізком. Аналогічно для стратегій B_2 і B_3 будуємо відрізки B_2B_2' і $B_3\,B_3'$.

2. Виділяємо нижню межу виграшу $B_1\ M\ N\ B_3'$ і знаходимо найбільшу ординату цієї нижньої межі, ординату точки *M,* яка дорівнює ціні ігри γ.
3. Визначаємо пару стратегій, що перетинаються в точці оптимуму *M.*

   У цій точці перетинаються відрізки B_2B_2' і B_1B_1', відповідні стратегіям B_1 і B_2 гравця *B.* Отже, стратегію B_3 йому застосовувати невигідно. Виключаємо з матриці третій стовпець і вирішуємо гру 2 х 2 аналітично:

$$\begin{cases} p_1+6\,p_2=\gamma; \\ 4\,p_1+3\mathrm{p}_2=\gamma; \\ p_1+p_2=1. \end{cases}$$

$$p_1+6\,p_2=4\,p_1+3\,p_2;$$
$$3\,p_2=3\,p_1;$$
$$p_1=p_2=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} q_1+4\,q_2=\dfrac{7}{2}; \\ q_1+q_2=1 \end{cases}$$

$$3\,q_2=\frac{5}{2}\quad,\quad q_2=\frac{5}{6}\quad,\quad q_1=\frac{1}{6}$$

Відповідь: γ = 7/2; P_A = (1/2, 1/2); Q_B = (1/6; 5/6, 0).

3 ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Структура та опис програмного забезпечення

Моя дипломна робота повністю реалізована на JavaScript. Це дає змогу розширити кількість пристроїв, які зможуть виконувати програму без потреби перекомпіляції. Поділяється на клієнтську та серверну частини.

ЛІТЕРАТУРА

1. http://nodebeginner.ru/
2. http://enyojs.com/#documentation
3. http://javascript.ru/manual
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций
5. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций
6. Крушевский А.В. - Теория игр
7. http://math.semestr.ru/
8. Решение матричных игр в нечетких смешанных стратегиях. П.П. Петтай
9. Матричные игры. [Сборник переводов]. Под ред. Воробьёва И.Н. М., Физматгиз, 1961
10. Суздаль В. Г. С89 Теория игр для флота. М., Воениздат, 1976.