

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ КОНДРАТЮКА  
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І СИСТЕМ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ДИПЛОМНА РОБОТА СПЕЦІАЛІСТА  
зі спеціальності 7.04030201 «Інформатика»

на тему

**«Методи розв’язування матричних ігор та їх програмна реалізація»**

Студента групи 501-ЕІ Фесюри Сергія Леонідовича

Керівник роботи

кандидат фіз.-мат. наук,

доцент Радченко Г. О.

Завідувач кафедри

доктор фіз.-мат. наук,

професор Губрєєв Г.М.

Полтава 2012

Теорія ігор - це розділ прикладної математики, який вивчає моделі і методи прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту.

Під конфліктом розуміється така ситуація, в якій зіштовхуються інтереси двох або більше сторін, що переслідують різні (найчастіше суперечливі) цілі. При цьому кожне рішення має прийматися в розрахунку на розумного суперника, який намагається зашкодити іншому учаснику гри досягти успіху.



## *Для побудови формалізованої спрощеної моделі необхідно чітко описати конфлікт*

- уточнити кількість учасників ;
- вказати на всі можливі стратегії гравців;
- розрахувати, якими будуть результати гри, якщо кожний гравець вибере певну стратегію.



## *Основна задача теорії ігор*

Яку стратегію має застосувати розумний гравець у конфлікті з розумним суперником, щоб гарантувати кожному з них виграш, причому відхилення будь-якого з гравців від оптимальної стратегії може тільки зменшити його виграш.



## *Верхня та нижня ціна гри*

При правильній грі гравець 1 може завжди гарантувати собі виграш, який назвемо нижнім значенням ціни гри. Позначимо його:  $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$ . У свою чергу, гравець 2 може гарантувати собі програш, який назвемо верхнім значенням ціни гри. Позначимо його:  $\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$ . Чисті стратегії  $i^*$  і  $j^*$ , що відповідають і називаються максимінною і мінімаксною стратегіями



## Сідлова точка

Ситуація  $(i^*, j^*)$  називається ситуацією рівноваги, якщо для  $i \in 1, 2, \dots, m, j \in 1, 2, \dots, n$  виконується нерівність:  $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$ . Якщо ситуація рівноваги для гри існує, то така гра називається грою з сідловою точкою, а елемент  $a_{i^*j^*}$  матриці  $A$ , що їй відповідає називається сідловою точкою цієї матриці. Ситуація рівноваги це така ситуація, від якої жодному з гравців не вигідно відхилятися. В цьому випадку стратегії  $i^*, j^*$  називають оптимальними стратегіями гравців. Щоб така ситуація існувала необхідно і достатньо рівність верхньої та нижньої цін гри, тобто  $\underline{v} = v = \bar{v}$ .



- Мішаною стратегією гравця називається повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій
- Оптимальними стратегіями гравців називаються стратегії, які при багаторазовому повторенні забезпечують гравцям максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий середній програш). Таким чином, процес гри при використанні гравцями своїх мішаних стратегій перетворюється на випадкове випробування, яке назовемо ситуацією в мішаних стратегіях. Вона позначається так  $(x, y)$ , де  $x$  і  $y$  - мішані стратегії гравців 1 і 2 відповідно.



# *Основна теорема матричних ігор (фон Неймана)*

- В мішаних стратегіях гра двох осіб з нульовою сумою завжди має сідлову точку.

## *Основні методи розв'язування матричних ігор*

- Зведення матричної гри до задач ЛП
- Ітеративний метод Брауна-Робінсона
- Монотонний ітеративний алгоритм



# *Ітеративний метод Брауна-Робінсона*

- Ідея методу – багатократний фіктивний розіграш гри з заданою матрицею виграшу.
- Недолік: мала швидкість збіжності.

$$\begin{aligned}\bar{v}_k &= \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^k = \sum_{j=1}^n a_{i_{k+1}j} \eta_j^k \\ \underline{v}_k &= \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \xi_i^k = \sum_{i=1}^m a_{ij_{k+1}} \xi_i^k \\ \max_k (\underline{v}_k / k) &\leq v \leq \min_k (\bar{v}_k / k) \\ v &= \frac{(\bar{v}_k + \underline{v}_k)}{2}\end{aligned}$$



# *Монотонний ітеративний алгоритм*

$$x_N = (\xi_1^N, \dots, \xi_m^N) \in X \quad c_N = (\gamma_1^N, \dots, \gamma_n^N) \in R^N$$

$$x_N = (1 - \alpha_N)x_{N-1} + \alpha_N \tilde{x}_N \quad c_N = (1 - \alpha_N)c_{N-1} + \alpha_N \tilde{c}_N$$

$$0 \leq \alpha_N \leq 1$$

$$\underline{v}_{N-1} = \min_{j=1, \dots, n} \gamma_j^{N-1}$$



## *Критика відшукування розв'язку матричних ігор в мішаних стратегіях*

- В окремій грі гравець може дуже сильно програти.
- Деякі гравці можуть орієнтуватися на ті стратегії, які можуть забезпечити їм максимально можливий виграш, вони намагаються максимізувати середній очікуваний виграш, тобто вибір мінімаксу або максиміну не є єдиноможливим хорошим в деякому сенсі рішенням
- орієнтація на мішані стратегії передбачає відсутність будь-якої інформації про психологію суперника



# Алгоритм роботи програми





# *Архітектура програми*

- Використання однієї матриці для всіх методів
- Кожна програмна функція, що відповідає за знаходження розв'язку гри відповідним методом має уніфікований інтерфейс для отримання виразу задачі гри, що дозволяє легко розширити програму новими методами
- Великі за обсягом задачі передаються на сервер протоколом WebSocket.
- Фреймворк EnyoJS.
- Матричну гру можна записати в файл та передати в браузер за допомогою Drag and Drop



## *Серверна частина*

- Реалізовано на тій же мові, що й клієнтську.
- В якості серверної платформи використовується nodejs.
- Графіки на сервері будуються за допомогою модуля node-оз-canvas
- Обмін інформацією з клієнтом кодується в формат JSON.
- При передачі графік будується в форматі png та при передачі кодується в base64



# Опис роботи програми

Задача.

5 8 1

3 4 6

1 2 7

Player A

3

5	8	1	0
3	4	6	0
1	2	7	0
0	0	0	0

+

+

- ☒ Симплекс-метод
- ☐ метод Брауна-Робінсона
- ☐ Графічний метод

- ☐ Обрахувати на цьому пристрої
- ☒ Відправити на сервер

# Результат рішення симплекс-методом

Рішення:

Для першого гравця:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

3 обмеженнями:

$$5x_1 + 3x_2 + 1x_3 \geq 1$$

$$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$1x_1 + 6x_2 + 7x_3 \geq 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1..3$$

Для другого гравця:

$$\Phi = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

3 обмеженнями:

$$5y_1 + 8y_2 + 1y_3 \leq 1$$

$$3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \leq 1$$

$$1y_1 + 2y_2 + 7y_3 \leq 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1..3$$

Використавши симплекс  
метод

Результат:

$$x^*(0.71; 0; 0.29)$$

$$y^*(0.43; 0.57; 0)$$

$$\text{Ціна гри} = 3.86$$



# *Перевіримо результат, обравши метод Брауна-Робінсона.*

- ☐ Симплекс-метод
- ☒ метод Брауна-Робінсона
- ☐ Графічний метод

- ☐ Обрахувати на цьому пристрої
- ☒ Відправити на сервер

Після використання методу Брауна-Робінсона

Після 1000 ітерацій ми маємо:

$$x^*(0.7; 0; 0.3)$$

$$y^*(0.43; 0.57; 0)$$

$$\text{Ціна гри} = 3.88$$

# Задача розмірності $2*N$

3 3 -5 2

5 4 8 1,5

Player A				
B	3	3	-5	2
	5	4	8	1,5
	0	0	0	0
	0	0	0	0
				+
+				

- ☒ Симплекс-метод
- ☐ метод Брауна-Робінсона
- ☐ Графічний метод

- ☐ Обрахувати на цьому пристрої
- ☒ Відправити на сервер



# Симплекс-метод

Рішення:

Для першого гравця:

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

З обмеженнями:

$$8x_1 + 10x_2 \geq 1$$

$$8x_1 + 9x_2 \geq 1$$

$$0x_1 + 13x_2 \geq 1$$

$$7x_1 + 6.5x_2 \geq 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1..2$$

Для другого гравця:

$$\Phi = y_1 + y_2 \rightarrow \max$$

З обмеженнями:

$$8y_1 + 8y_2 + 0y_3 + 7y_4 \leq 1$$

$$10y_1 + 9y_2 + 13y_3 + 6.5y_4 \leq 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1..4$$

Використавши симплекс метод

Результат:

$$x^*(0; 0; 0.04; 0.96)$$

$$y^*(0.48; 0.52)$$

$$\text{Ціна гри} = 11.74$$



# Метод Брауна-Робінсона

- ☐ Симплекс-метод
- ☒ метод Брауна-Робінсона
- ☐ Графічний метод

- ☐ Обрахувати на цьому пристрої
- ☒ Відправити на сервер

Після використання методу Брауна-Робінсона

Після 1000 ітерацій ми маємо:

$x^*(0; 0; 0.03; 0.97)$

$y^*(0.48; 0.52)$

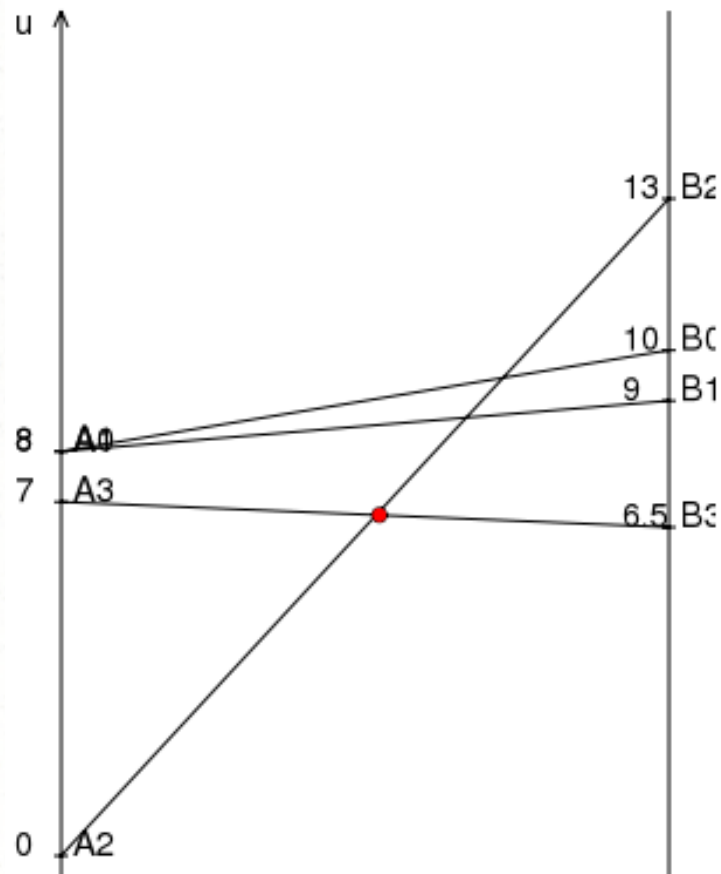
Ціна гри = 11.75



# Графічний метод

- ☐ Симплекс-метод
- ☐ метод Брауна-Робінсона
- ☒ Графічний метод

- ☐ Обрахувати на цьому пристрої
- ☒ Відправити на сервер



$$x^*(0; 0; 0.04; 0.96)$$

$$y^*(0.48; 0.52)$$

$$\text{Ціна гри} = 11.74$$



# *Розв'язування гри в нечітких стратегіях*

Нехай маємо матрицю

-3 8 -5

5 5 2

1 6 5

Нехай маємо базу з двох правил:

$P_1$  : {Якщо супротивник не схильний до ризику, то обере стратегію мінімаксу}.

$P_2$  : {Якщо супротивник досвідчений та схильний до ризику, то обере стратегію максимізації максимуму}.



# Введення правил в програму

Якщо

обережний ▾ &

то

мінімакс ▾

Якщо

досвідчений ▾ & схильний до ризику ▾ &

то

максимізація максимуму ▾

+

Коефіцієнт обережності опонента

Коефіцієнт досвідченості опонента

Мінімально прийнятна частка максимально можливого виграшу

Отримати результат



## *Результат*

Нехай вважаємо, що коефіцієнт обережності 0,6, а коефіцієнт досвіду 0,8.

Після виконання команди “Отримати результат маємо”:

$$x^* = (0.6; 0; 0.4; 0)$$



## *Висновки*

- Матричні ігри — найбільш досліджений розділ теорії ігор
- Основна область застосування теорії ігор — економіка
- В даній дипломній роботі було реалізовано основні алгоритми розв'язування матричних ігор. А саме симплекс-метод, метод Брауна-Робінсона та графічний метод.



## *Висновки*

Також було реалізовано алгоритм, що при обчисленні враховує прогнозування поведінки супротивника на основі попередніх відомостей про нього. Цей алгоритм буде змішану стратегію, в якій враховано ступінь впевненості в виборі супротивником кожної своєї стратегії.



## *Висновки*

Програма має можливість проводити складні обчислення на стороні сервера, що значно зменшує навантаження на пристрій. Це особливо актуально у випадку планшету чи мобільного телефону. Було протестовано на планшеті HP TouchPad з операційною системою WebOS та браузером на основі WebKit та телефоні HTC Desire Z з операційною системою Android та браузером на основі WebKit.