Systèmes non-linéaires et robustesse : sujet de Travaux Pratiques

Objectifs du TP

- étudier un système masse/ressort ;
- concevoir un correcteur robuste aux incertitudes.

1 Système et modélisation

Le système que nous souhaitons commander est composé de deux masses m_1 et m_2 reliées par :

- un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 ;
- une force de frottement fluide f.

On peut agir sur le système en appliquant une force u sur la masse m_1. Notre objectif de commande concerne l'asservissement des positions des masses m_1 et m_2.

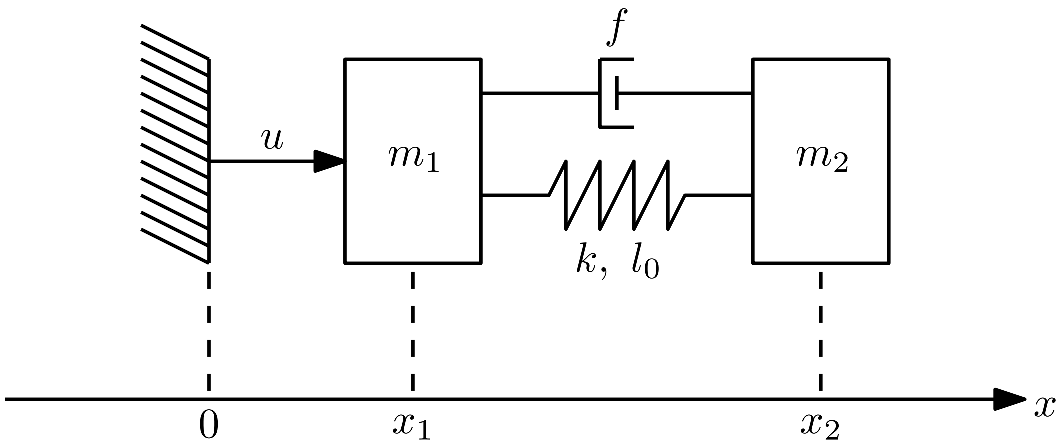

FIGURE 1 – Schéma de principe du système mécanique.

Question 1 : À partir du schéma 1 et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations du système étudié.

Question 2 : En effectuant les changements de variables $\tilde{x}_1 = x_1$ et $\tilde{x}_2 = x_2 - l_0$, écrire la représentation d'état du système étudié.

2 Commande du système

On considère que

- les masses m_1 et m_2 et la longueur à vide du ressort l_0 sont bien connues et ne varient pas ;
- seules les valeurs nominales k_0 et f_0 de la raideur k du ressort et du coefficient de frottement fluide f sont connus.

Les valeurs numériques sont : $m_1 = 1 \quad m_2 = 0.1 \quad f_0 = 0.02 \quad k_0 = 0.245$.

2.1 Étude du modèle nominal

Commençons par étudier le modèle nominal du système, c'est à dire quand $k = k_0$ et $f = f_0$.

Question 3 : Calculer numériquement les valeurs propres de la matrice d'état. Conclure.

Question 4 : La propriété de commandabilité nous assure de pouvoir atteindre n'importe quel point de l'espace d'état en temps fini. Quelle autre propriété est assurée lorsqu'un système est commandable ?

Question 5 : Rappeler le critère de commandabilité de Kalman et vérifier, à l'aide de `Matlab`, que le modèle nominal est commandable.

Question 6 : Avec `Matlab`, concevoir un retour d'état stabilisant pour le modèle nominal. Représenter les trajectoires des variables d'état de la réponse à un échelon.

2.2 Étude du modèle incertain

Vérification du correcteur nominal

On sait que les valeurs réelles de f et k sont comprises entre une valeur minimale et maximale. Notons $\theta_1 := f$ et $\theta_2 := k$ et considérons que

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 & \in & [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1] \\ \theta_2 & \in & [\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2] \end{array}$$

avec $\underline{\theta}_1 < \overline{\theta}_1 \in \mathbb{R}^+$ et $\underline{\theta}_2 < \overline{\theta}_2 \in \mathbb{R}^+$.

Question 7 : Avec la matrice de gain de retour d'état calculée précédemment, représenter les pôles de la boucle fermée $A(\theta) - BK$ pour un échantillon représentatif de valeurs de θ. Conclure.

On va chercher maintenant à avoir des garanties concernant la stabilité de la boucle fermée.

Question 8 : À partir de la définition de la stabilité, écrire les inégalités matricielles qui permettent de la garantir, en fonction de $A_{\mathrm{bf}}(\theta) = A(\theta) - BK$, avec la matrice K choisie précédemment.

Question 9 : Écrire $A(\theta)$ comme une fonction affine en θ_1 et θ_2. En déduire la forme polytopique de $A(\theta)$. Quel est l'intérêt de la forme polytopique par rapport à la forme affine ?

Question 10 : À l'aide de la toolbox `LMIedit` de `Matlab`, vérifier par la résolution de LMI le comportement observé à la question 6.

Élaboration d'un correcteur robuste

Maintenant, l'objectif est de concevoir un correcteur qui a directement des propriétés de robustesse. Pour se faire, on peut intégrer directement le correcteur K comme une variable de décision d'un problème à contraintes LMI.

Question 11 : À partir de la définition de la stabilité sur le système en boucle fermée, écrire les inégalités matricielles assurant cette propriété. Utiliser des changements de variables pour que ces inégalités soient linéaires en fonction des variables de décision.

Question 12 : À l'aide de la toolbox `LMIedit` de `Matlab`, résoudre le problème de faisabilité à contraintes LMI de la question 9 pour obtenir la matrice K du correcteur robuste.

Question 13 : Tracer les trajectoires d'état de la réponse à un échelon avec ce nouveau correcteur pour différentes valeurs de θ. Conclure.

2.3 Minimisation de la norme H_∞

Le correcteur obtenu dans la sous-section précédente est robuste mais n'est a priori pas mieux qu'un autre correcteur robuste. L'objectif ici est d'en choisir un optimal par rapport à un critère de performance.

Question 14 : Quel est l'intérêt de minimiser la norme H_∞ ?

Question 15 : À l'aide de la toolbox `LMIedit` de `Matlab`, calculer le gain K qui minimise la norme H_∞ de la boucle fermée

Question 16 : Tracer les trajectoires d'état de la réponse à un échelon avec ce nouveau correcteur pour différentes valeurs de θ. Conclure.