ROVIO 论文推导及代码解析

崔华坤

目录

一、整体流程图

ROVIO 是一种基于 EKF 的视觉和 IMU 紧耦合的 VI-SLAM 框架，通过 IMU 数据来预测状态向量，通过视觉的光度误差约束来对状态向量进行更新，论文比较新颖的地方在于将路标点的参数化方式：在当前相机坐标系下用 bearing vector 和逆深度这三个自由度来表示，并在 IMU 预测阶段对路标点进行预测，在视觉更新时对其修正，不像其他的 VIO 框架一般仅在视觉阶段去计算。（作者说这种方式可以避免不可观状态量，且无需初始化，不明白为什么？）

下图是论文[1]中的流程图，下面进行详细解释：

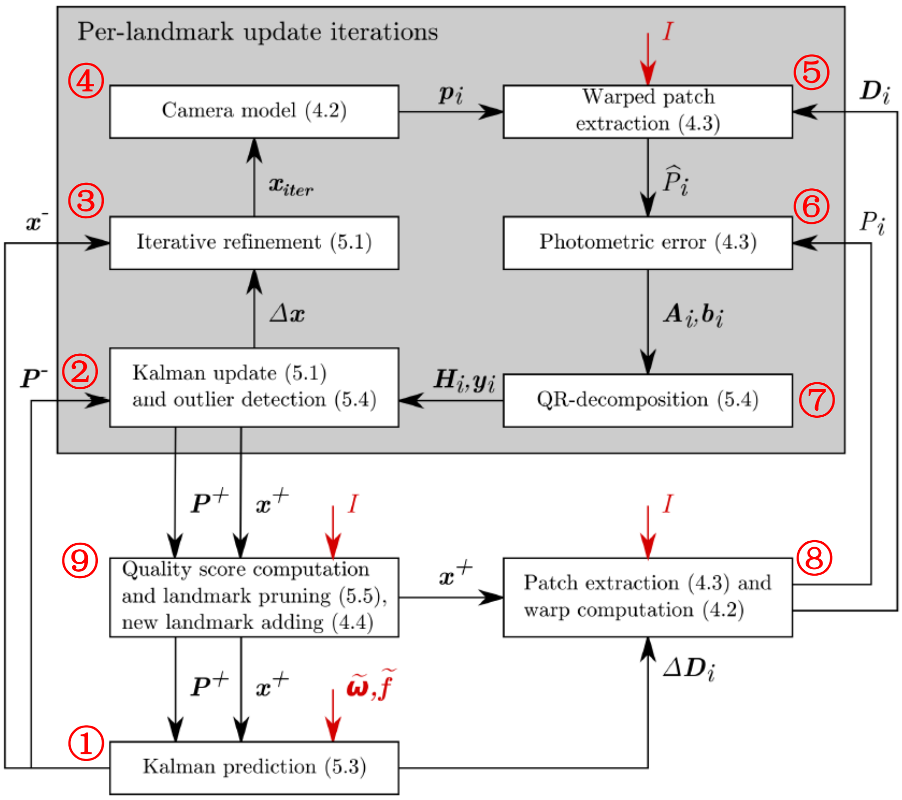

图 1 ROVIO 流程图

① **IMU 预测：**当新来一组 gyr 和 acc 数据（$\tilde{w}$和$\tilde{f}$）后，IMU 预测阶段需要做三件事情：一是预测当前时刻的状态向量 x，得到均值的先验x^-；二是预测协方差的先验P^-，并将x^-和P^-传给接下来的视觉更新过程；三是更新 Warping Matrix，用来校正不同视角下的图像映射变化，得到第 i 个路标点的D_i在当前时刻的增量：$\Delta D_i = \partial\mu^+/\partial\mu^-$。其中，$x^+$和$P^+$为上一时刻的后验；

② **视觉更新：**当新来一帧图像时，需要对状态向量进行更新，得到当前时刻的后验x^+和P^+，并进行异常点剔除；

③ **IEKF：**因上一步的单次 EKF 很难找到最优解，因此使用多次迭代的 EKF 来迭代优化，得到更准确的状态向量x_{iter}；

④ **相机模型：**根据 IEKF 计算的状态量x_{iter}，结合相机模型，计算特征点在当前帧上的像素坐标p_i，传给下一步用于下一帧图像的像素位置计算；

⑤ **像素坐标校正：**当新来一帧图像 I 后，计算上一帧图像中第 i 个特征点的像素位置p_i在当前帧 I 中的像素映射位置为：$\hat{P}_i = \pi\left(f\left(\pi^{-1}(p_i)\right)\right) + D_i P_{patch}$，其中$P_{patch}$为图像块中的相对坐标；

⑥ **光度误差：**根据上一步得到的当前帧中的特征点像素位置$\hat{P}_i$，及该特征点对应的图像金字塔的灰度值P_i，计算该特征点的光度误差：$e(\hat{P}_i) = P_i - I_i(\hat{P}_i)$，其中 e 为每一层金字塔的每个 patch 块的所有像素的灰度差之和；

⑦ ***QR* 分解：**根据上一步得到的光度误差，按照高斯牛顿思路进行求解，得到 Jacboain A 和误差项 b，这里并未直接对像素位置$\hat{P}_i$进行直接的优化更新，而是根据预测的$\hat{P}_i$对状态向量 x 进行视觉更新，并根据更新后的x_{iter}，对$\hat{P}_i$进行修正更新，并重新计算光度误差 e，然后进行多次迭代的 EKF，即图中上半部分灰色区域的单个路标点更新迭代过程；

⑧ **Patch 提取及 Warp 计算：**这一步是根据 IMU 预测的 Warping Matrix 增量ΔD_i计算得到当前时刻整体的 Warping Matrix D_i；同时，当有新的图像进来后，对新特征点提取相应的金字塔图像块P_i；

⑨ **路标点质量评价及维护：**当有新图像进来时，对现有路标点进行质量评价，辞旧迎新，将新特征点的 bearing vector 和逆深度传给 patch 提取模块进行金字塔提取。

二、EKF 框架

为了思路清晰，这里先给出 EKF 的五个公式（根据《十四讲》第 10.1.3 节）：

2.1 状态向量的均值的预测方程

设运动方程为：

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_k) \tag{1}$$

其中，x 是状态向量，第 k-1 时刻的状态向量满足如下分布：$x_{k-1} \sim N(\hat{x}_{k-1}, \hat{P}_{k-1})$；$w_k \sim N(0, Q)$是噪声向量（如 acc 和 gyr 的各种噪声），u_k为运动数据（IMU 的 acc 和 gyr 数据）。

因为运动方程为非线性非高斯分布，因此按照 EKF 思路，在x_{k-1}的后验$\hat{x}_{k-1}$和$w_k = 0$处进行一阶线性展开可得：

$$\begin{aligned} x_k &\approx f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) + F \cdot (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + G \cdot w_k \\ &= f(\hat{x}_{k-1}, u_k) + F\delta x_{k-1} + G w_k \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$F = \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}|_{\hat{x}_{k-1}}$，$G = \frac{\partial f}{\partial w_k}|_0$。

那么，第 k 时刻的先验，即状态向量的预测值为：

$$\bar{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \tag{3}$$

2.2 状态向量协方差的预测方程

$$\bar{P}_k = F \cdot \hat{P}_{k-1} \cdot F^T + G \cdot Q \cdot G^T \tag{4}$$

2.3 卡尔曼增益

将观测方程进行一阶线性展开，为：

$$z_k \approx h(\bar{x}_k) + H \cdot (x_k - \bar{x}_k) + n_k \tag{5}$$

其中，$H = \frac{\partial h}{\partial x_k}|_{\bar{x}_k}$，那么卡尔曼增益可定义为：

$$K_k = \bar{P}_k \cdot H^T (H \cdot \bar{P}_k \cdot H^T + Q_k)^{-1} \tag{6}$$

2.4 状态向量的均值更新方程

$$\hat{x}_{k-1} = \bar{x}_k + K_k\big(z_k - h(\bar{x}_k)\big) \tag{7}$$

2.5 状态向量的协方差的更新方程

$$\hat{P}_k = (I - K_k H)\bar{P}_k \tag{8}$$

我们会在下面的推导中与 EKF 的五个公式(3, 4, 6~8)一一对应。

二、状态向量

2.1 状态向量

论文[1]（M. Bloesch 2017）式(55)给出了滤波器的所有状态向量，包括当前帧的位置、旋转、速度、Bias、Cam 和 Imu 的外参、当前帧看到的路标点：

$$\chi = \left(r, v, q, b_f, b_w, c, z, \mu_0, \cdots, \mu_N, \rho_0, \cdots, \rho_N\right) \tag{9}$$

ROVIO 中状态向量写法与个人习惯不同，主要体现在位置的表示上，平常习惯将位置写成从一个坐标系到另一个坐标系的平移$p_{I\leftarrow B}$，但 ROVIO 用不同坐标系下的向量$\vec{r}_{I\rightarrow B}$来表示；另外，路标点并非用世界系下坐标P_I或用第一次观测到该路标点的相机坐标系下的逆深度方式，而是将路标点都表示在当前相机坐标系下，即论文所说的 Robocentric 方式。

值得注意的是，因为代码中的状态向量与论文[1]的表述不同，但是与论文[3]（M. Bloesch 2016）相同，因此这里以论文[3]为依据，对状态向量进行详细说明，式(1)可写成：

$$\chi = \left({}^{I}\vec{r}_{I\rightarrow B}, {}^{B}v_B, q_{I\leftarrow B}, {}^{B}b_f, {}^{B}b_w, {}^{B}\vec{r}_{B\rightarrow C}, q_{C\leftarrow B}, {}^{C}\mu_0, \cdots, {}^{C}\mu_N, \rho_0, \cdots, \rho_N\right) \tag{10}$$

其中，

$r = {}^{I}\vec{r}_{I\rightarrow B} = p_{I\leftarrow B}$：为当前系统的位置，用在惯性世界系 I 中的从 I 系的坐标原点指向 IMU 局部系 B 的坐标原点的向量$\vec{r}$来表示；换句话说，${}^{I}\vec{r}_{I\rightarrow B}$表示 B 系原点在 I 系中的位置，即表示从 B 系到 I 系的平移$p_{I\leftarrow B}$；

$c = {}^{B}\vec{r}_{B\rightarrow C} = p_{B\leftarrow C}$：为 IMU 和 Camera 之间的位置关系，用在 B 系下的从 B 系的坐标原点指向相机系 C 的原点的向量来表示，即 C 系到 B 系的平移$p_{B\leftarrow C}$，也就是 C 系原点在 B 系中的位置；

${}^{C}\mu_i \in \mathcal{S}^2$：为归一化二维向量，表示当前相机看到的第 i 个路标点，在相机坐标系 C 中 xy 平面上的坐标；

ρ_i：为该路标点的在当前相机坐标系下的逆深度。

值得注意的是，在论文[1]中的$r = {}^{B}\vec{r}_{I\rightarrow B}$，与论文[3]和代码中是不同的，两者有如下关系：

$$p_{I\leftarrow B} = {}^{I}\vec{r}_{I\rightarrow B} = q_{I\leftarrow B} \cdot {}^{B}\vec{r}_{I\rightarrow B} \tag{11}$$

上式的物理意义是同一个向量在不同坐标系中的转化。为了形象说明，以下

图为例，则有：$p_{I\leftarrow B} = {}^{I}\vec{r}_{I\to B} = (1,1)$，而 ${}^{B}\vec{r}_{I\to B} = (0,\sqrt{2})$：

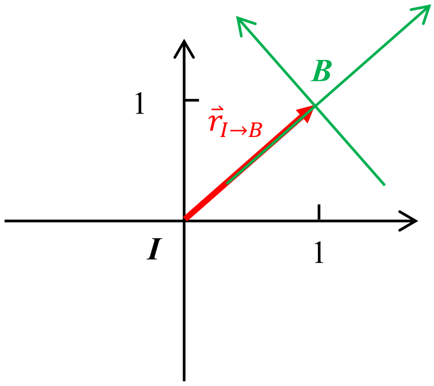

图 1 平移的例子

那么，进一步地，我们将论文中的状态向量写成熟悉的形式，大小为 15+6+3N：

$$\chi = \left(p_{I\leftarrow B}, {}^{B}v_B, q_{I\leftarrow B}, {}^{B}b_f, {}^{B}b_w, p_{B\leftarrow C}, q_{C\leftarrow B}, {}^{C}\mu_0, \cdots, {}^{C}\mu_{N-1}, \rho_0, \cdots, \rho_{N-1}\right) \quad (12)$$

2.2 bearing vector

首先根据代码，给出 bearing vector 的物理意义，代码对应在 Camera::bearingToPixel 和 Camera::pixelToBearing。假设一个路标点在相机坐标系下的坐标为$P_c = [x_c, y_c, z_c]$，在像素坐标系下的坐标为$P_{uv} = [u, v, 1]$，在归一化相机系下的坐标为$P_{cn} = [x_c/z_c, y_c/z_c, 1]$，对应的 bearing vector 为 b，则有：

$$P_{uv} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c}\begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = KP_{cn}$$

那么，bearing vector 为：

$$b = \frac{P_{cn}}{\|P_{cn}\|}$$

这里将P_{cn}归一化为所谓的 bearing vector 的意义是为了使P_{cn}平滑可导，因 ROVIO 将特征点表征在当前帧坐标系下，因此特征点的参数会随着相机的移动而移动，并且需要将其放到 EKF 的状态向量中，并使得误差项对其可导，而P_{cn}是有范围约束的，因此对其进行归一化得到无约束的状态量——bearing vector。下面对这一物理量进行详细说明：

方向向量（bearing vector）是用单位球上的三维单位向量来表示，模为 1，自由度为 2。为了平滑地表示方向向量的微分，ROVIO 采用一个旋转$\mu \in SO(3)$来表示方向向量，即单位球的轴e_z经过μ的旋转后，为该方向向量，如下所示：

$$n(\mu) \coloneqq \mu(e_z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \tag{13}$$

$$N(\mu) \coloneqq \left[\mu(e_x), \mu\left(e_y\right)\right] \in \mathbb{R}^{3\times 2} \tag{14}$$

e_x和e_y经过μ的旋转后，得到单位球的切空间$N(\mu)$。注意虽然用旋转μ来表示方向向量，但是因方向向量只有 2 个自由度，故需要用切空间上的 2D 增量来表示方向向量的扰动，如下图所示：

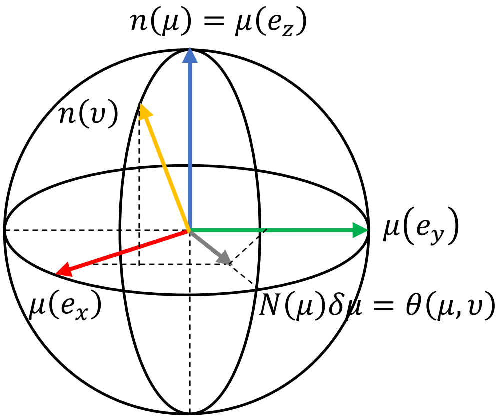

图 2 方向向量表示

定义方向向量的加减运算，来将单位球和切空间联系起来：

$$\boxplus: SO(3) \times R^2 \to SO(3) \qquad \mu \boxplus \delta\mu = exp[(N(\mu)\delta\mu)^\wedge] \otimes \mu \tag{15}$$

$$\boxminus: SO(3) \times SO(3) \to R^2 \qquad v \boxminus \mu = N(\mu)^T \theta(\mu, v) \tag{16}$$

$$\theta(\mu, v) = \theta\left(n(\mu), n(v)\right) = \frac{acos\left(n(v)^T n(\mu)\right)}{\|n(v) \times n(\mu)\|} n(v) \times n(\mu)$$

其中，$\theta(\mu, v)$是两个向量的$n(\mu)$和$n(v)$的旋转角轴，模为两个向量的旋转夹角，轴垂直于两个向量所在的平面。

方向向量的微分性质有：

$$\frac{\partial n(\mu)}{\partial \mu} = -n(\mu)^\wedge N(\mu) \tag{17}$$

证明如下：（这与论文[1]的公式(32)差一个负号？！）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\mu)}{\partial \mu} &= \lim_{\delta\mu \to 0} \frac{n(\mu) \boxplus \delta\mu - n(\mu)}{\delta\mu} \\
&= \lim_{\delta\mu \to 0} \frac{exp[(N(\mu)\delta\mu)^\wedge] n(\mu) - n(\mu)}{\delta\mu} \\
&= \lim_{\delta\mu \to 0} \frac{[1 + (N(\mu)\delta\mu)^\wedge] n(\mu) - n(\mu)}{\delta\mu}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta\mu \to 0} \frac{(N(\mu)\delta\mu)^\wedge n(\mu)}{\delta\mu}$$

$$= \lim_{\delta\mu \to 0} \frac{-\left(n(\mu)\right)^\wedge (N(\mu)\delta\mu)}{\delta\mu}$$

$$= -n(\mu)^\wedge N(\mu)$$

三、IMU 预测

首先，我们给出连续形式下的状态向量的导数的运动方程，先给出 PVQB 和外参，再给出 bearing vector 和逆深度。

3.1 连续形式的 PVQB 和外参的运动方程

每次获得的不含 bias 和噪声的 acc 和 gyr 数据为：

$$ {}^{B}f_{I\to B} = {}^{B}\tilde{f}_{I\to B} - {}^{B}b_f - {}^{B}n_f \tag{18}$$

$$ {}^{B}\omega_{I\to B} = {}^{B}\widetilde{\omega}_{I\to B} - {}^{B}b_w - {}^{B}n_w \tag{19}$$

其中，${}^{B}\tilde{f}_{I\to B}$，${}^{B}\widetilde{\omega}_{I\to B}$为含有 bias 和噪声的原始数据，${}^{B}n_f$，${}^{B}n_w$为对应的噪声。

论文[3]的式(47~51)及论文[1]的式(67~68)给出连续形式下的运动学方程，即给出了根据 IMU 数据预测状态向量的方法，这里的状态向量为不含误差值，我们将其先写成如下形式，下面再进行证明：

$$\dot{p}_{I\leftarrow B} = {}^{I}v_B = q_{I\leftarrow B}\, {}^{B}v_B \tag{20}$$

$$ {}^{B}\dot{v}_B = -{}^{B}\omega_{I\to B}^{\wedge} \cdot {}^{B}v_B + {}^{B}f_{I\to B} + q_{I\leftarrow B}{}^{T} \cdot {}^{I}g \tag{21}$$

$$\dot{q}_{I\leftarrow B} = q_{I\leftarrow B}\, {}^{B}\omega_{I\to B}^{\wedge} \tag{22}$$

$$ {}^{B}\dot{b}_f = {}^{B}n_{b_f} \tag{23}$$

$$ {}^{B}\dot{b}_w = {}^{B}n_{b_w} \tag{24}$$

$$\dot{p}_{B\leftarrow C} = {}^{B}n_c \tag{25}$$

$$\dot{q}_{C\leftarrow B} = {}^{B}n_z \tag{26}$$

注意上面的$\dot{q}_{I\leftarrow B}$与论文[3]中不同，这是因为实在看不懂作者定义的⊞和⊟运算，索性弃之不用，延用 IMU 预积分论文[4]（C. Forster 2017）公式(29)的写法（详细可参考秦永元《惯性导航》第一版 P238）。

另外，上面 ${}^{B}\dot{v}_B$ 的证明如下：

$$
\begin{aligned}
{}^{B}\dot{v}_B &= \left(\dot{q_{I\leftarrow B}{}^{T}\ {}^{I}v_B}\right) = \dot{q}_{I\leftarrow B}{}^{T}\ {}^{I}v_B + q_{I\leftarrow B}{}^{T}\ {}^{I}\dot{v}_B \\
&= \left[q_{I\leftarrow B}\cdot {}^{B}\widehat{\omega}_{I\to B}^{\wedge}\right]^{T}\ {}^{I}v_B + q_{I\leftarrow B}{}^{T}\left({}^{I}\hat{f}_B + {}^{I}g\right) \\
&= -{}^{B}\widehat{\omega}_{I\to B}^{\wedge}\cdot {}^{B}v_B + {}^{B}\hat{f}_B + q_{I\leftarrow B}{}^{T}\cdot {}^{I}g
\end{aligned}
$$

3.2 连续形式的 bearing vector 和逆深度的运动方程

因为 ROVIO 的路标点是在当前 IMU 坐标系下表示的，虽然路标点在世界系中的位置不动，但是在 IMU 系中却是运动的，因此也需要随着 IMU 进行预测。下面根据路标点在世界系中的位置导数为零这一条件，对路标点的运动方程进行推导，这里直接给出结果，推导可参考附录 5.2（还没推导出来）：

$$\dot{\mu} = N(\mu)^{T}\left(\widehat{w}_c + n(\mu)^{\wedge}\frac{\hat{v}_c}{d(\rho)}\right) + n_{\mu} \tag{27}$$

$$\dot{\rho} = -n(\mu)^{T}\frac{\hat{v}_c}{d^{'}(\rho)} + n_{\rho} \tag{28}$$

3.3 离散形式的运动方程

这里以欧拉离散形式为例，对上面的连续形式进行离散化，对应到代码 ImuPrediction:: evalPrediction()函数中，其中 B_1、B_2 为相邻的两次 IMU 数据：

$$p_{I\leftarrow B_2} = p_{I\leftarrow B_1} + \Delta t\cdot q_{I\leftarrow B_1}{}^{B_1}v_{B_1} \tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{B_2}v_{B_2} &= {}^{B_1}v_{B_1} + \Delta t\left(-{}^{B_2}\omega_{I\to B_2}^{\wedge}\cdot {}^{B_1}v_{B_1} + {}^{B_2}f_{I\to B_2} + q_{I\leftarrow B_1}{}^{T}\cdot {}^{I}g\right) \\
&= \left(I - \Delta t^{B_2}\omega_{I\to B_2}^{\wedge}\right)^{B_1}v_{B_1} + \Delta t\left({}^{B_2}f_{I\to B_2} + q_{I\leftarrow B_1}{}^{T}\cdot {}^{I}g\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$q_{I\leftarrow B_2} = q_{I\leftarrow B_1}exp\left(\Delta t^{B_2}\omega_{I\to B_2}^{\wedge}\right) \tag{31}$$

$${}^{B_2}b_f = {}^{B_1}b_f + \Delta t^{B_1}\hat{n}_{b_f} \tag{32}$$

$${}^{B_2}b_w = {}^{B_1}b_w + \Delta t^{B_1}\hat{n}_{b_w} \tag{33}$$

$$p_{B_2\leftarrow C} = p_{B_1\leftarrow C} + \Delta t\,{}^{B}n_c \tag{34}$$

$$q_{C\leftarrow B_2} = exp\left(\Delta t\,{}^{B}n_z{}^{\wedge}\right)q_{C\leftarrow B_1} \tag{35}$$

$$\mu_{k+1} = exp\left\{\Delta t\left[\left(I - n(\mu_k)n(\mu_k)^{T}\right)\widehat{w}_c + n(\mu_k)^{\wedge}\frac{\hat{v}_c}{d(\rho_k)} + N(\mu_k)n_{\mu}\right]\right\}\mu_k \tag{36}$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k - \Delta t n(\mu)^T \frac{\hat{v}_c}{d^{'}(\rho)} + \Delta t n_\rho \tag{37}$$

其中，$q_{I\leftarrow B_2}$可参考论文[4]（C. Forster 2017）的公式(30)，这与论文[3]的公式(56)完全相同，不知在数学上是否有更深层次的吻合。

上面的离散形式的运动方程就对应了前面公式(3)的预测方程：$\bar{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0)$。

3.4 离散形式的协方差预测

为了预测状态向量的均值和协方差，我们需要根据前面公式(2)对上一节中的离散运动方程进行一阶线性展开成如下形式：

$$x_k \approx f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) + F\delta x_{k-1} + G\delta w_k$$

下面我们需要计算其中的 Jacobian 矩阵$F = \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}|_{\hat{x}_{k-1}}$和$G = \frac{\partial f}{\partial w_k}|_0$。

根据定义，可计算出 F 并写成矩阵形式如下，注意实际上 F 需要对所有状态向量求导，这里只写了关于 $PVQB$ 的 Jacobian，代码对应在 ImuPrediction:: jacPreviousState()中：

$$F = \begin{bmatrix} I & \Delta t \cdot q_{I\leftarrow B_1} & -\Delta t\left(q_{I\leftarrow B_1}{}^{B_1}v_{B_1}\right)^\wedge & 0 & 0 \\ 0 & I - \Delta t^{B_2}\omega_{I\rightarrow B_2}^\wedge & \Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\left({}^I g\right)^\wedge & -\Delta t I & -\Delta t\left({}^{B_1}v_{B_1}\right)^\wedge \\ 0 & 0 & I & 0 & -\Delta t q_{I\leftarrow B_1}\Gamma\left(\Delta t^{B_2}\omega_{I\rightarrow B_2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{38}$$

其中，根据论文[3]的公式(31)定义有：

$$\Gamma(\varphi) = \frac{\partial exp(\varphi^\wedge)}{\partial \varphi}$$

上式中的部分推导可查看附录 5.1。

另外，关于噪声的 Jacobian 矩阵 G 可计算并写出矩阵形式（未推导出来），代码对应在 ImuPrediction:: jacNoise()，注意 G 是关于所有状态向量的噪声项的导数，噪声项的大小为 15+6+3N：

$$w_k = \left(n_p, n_v, n_q, n_{b_f}, n_{b_w}, n_c, n_z, n_{\mu_0}, \cdots, n_{\mu_{N-1}}, n_{\rho_0}, \cdots, n_{\rho_{N-1}}\right)$$

$$G=\begin{bmatrix} \Delta tI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta tI & -\Delta t\left({}^{B_1}v_{B_1}\right)^{\wedge} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta t q_{I\leftarrow B_1}\Gamma\left(\Delta t^{B_2}\omega_{I\rightarrow B_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta tI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta tI \end{bmatrix} \tag{39}$$

这样，就可以使用上面的公式(4)对协方差进行预测：

$$\bar{P}_k = F\hat{P}_{k-1}F^T + GQG^T$$

其中，初始值$P_k = 0$，$F^{(21+3N)\times(21+3N)}$，$G^{(21+3N)\times(21+3N)}$，Q 为所有噪声项w_k的对角协方差矩阵。

3.5 Warping Matrix 预测

在接下来的视觉更新过程中，需要根据 IMU 更新两幅图像的映射关系，即 Warping Matrix。这里用 D 表示，D 为 2×2 的映射矩阵，用来将上一帧的块坐标p_j映射到当前帧的块坐标上，因每幅图像的块坐标与图像像素坐标一致，即将p_j映射到当前帧的图像像素坐标上。D 的物理意义是计算两帧图像的坐标轴映射关系，从而将一幅图像上的块坐标映射到另一幅图像上，这样可以避免因两帧图像之间的投影变换关系，导致即使像素块中心点坐标一致，但是光度误差却不同，比如因为旋转导致的块不匹配。假设上一帧图像的任一点的像素坐标为p_1，方向向量为μ_1，在当前帧上的对应点的像素坐标为p_2，方向向量为μ_2，则有：

$$p_2 = \pi(\mu_2) = \pi\left(f(\mu_1)\right) = \pi\left(f\left(\pi^{-1}(p_1)\right)\right) \tag{40}$$

那么，D 可以定义为：

$$D^{2\times2} = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} = \frac{\partial\pi(\mu_2)}{\partial\mu_2}\frac{\partial f(\mu_1)}{\partial\mu_1}\frac{\partial\pi^{-1}(p_1)}{\partial p_1} \tag{41}$$

其中，$\mu_2 = f\left(\mu_1\right)$表示通过 IMU 预测得到的方向向量。

那么，经过 n 个 IMU 传播之后的 Warping Matrix 为：

$$D = \frac{\partial\pi(\mu_{n+1})}{\partial\mu_{n+1}}\left(\frac{\partial f(\mu_n)}{\partial\mu_n}\cdots\frac{\partial f(\mu_1)}{\partial\mu_1}\right)\frac{\partial\pi^{-1}(p_1)}{\partial p_1} \tag{42}$$

因此，对于当获得第 i 个 IMU 时，只要计算$\frac{\partial f(\mu_i)}{\partial\mu_i}$，并乘上之前的值即可完成 Warping Matrix 的预测。

下面给出$\frac{\partial f(\mu_i)}{\partial\mu_i}$，代码对应在 ImuPrediction::evalPrediction() 中的 bearingVectorJac_变量，详细推导可查看附录 5.3（未推导出来）：

$$\frac{\partial f(\mu_i)}{\partial \mu_i} = M(\mu_{i+1})^T \left\{ \Delta t\big(q_m n(\mu_i)\big)^\wedge \Gamma(d_m) \left[-\frac{1}{d(\rho_i)} \hat{v}_c{}^\wedge - \left(n(\mu_i)^T \widehat{w}_c I + n(\mu_i) \widehat{w}_c{}^T \right) \right] + q_m \right\} M(\mu_i) \tag{43}$$

其中，

$$M(\mu_{i+1}) = \left[-\mu_{i+1}(e_y), \mu_{i+1}(e_x) \right]$$

$$d_m = \Delta t \left[(I - n(\mu_k) n(\mu_k)^T) \widehat{w}_c + n(\mu_k)^\wedge \frac{\hat{v}_c}{d(\rho_k)} + N(\mu_k) n_\mu \right]$$

$$q_m = exp(d_m)$$

四、视觉更新

ROVIO 的视觉跟踪部分有点类似光流：当第 k 帧图像到来时，首先跟踪上一帧即第 k-1 帧图像的特征点，若跟踪成功的点数少于阈值 N 个，则提取新的 FAST 角点，并计算 Shi-Tomasi 得分挑选出得分较高的角点；当第 k+1 帧图像到来时，通过 IMU 预测，可估计出第 k 帧的特征点在第 k+1 帧中的像素位置。

4.1 光度误差方程

ROVIO 的视觉约束采用的是光度误差，为：

$$e_{l,j}(p, P, I, D) = P_l(p_j) - aI_l(ps_l + Dp_j) - b \tag{44}$$

其中，P_l是上一帧图像在第 l 层的图像块，p_j是上一帧图像块中的第 j 个位置，注意p_j是块坐标系下的坐标，若图像块尺寸为 8×8，则$p_j \in [-2,3]$；I_l是当前帧在第 l 层的图像，p 是当前帧第 0 层中与上一帧p_j点对应的像素位置，注意 p 是图像坐标系下的坐标，如$p(350,240)$；$s_l = 0.5^l$表示下采样的尺度，即对 p 值进行缩放；ps_l相当于是图像块的中心点坐标，Dp_j是在此中心点基础上的相对偏移量；a 和 b 是相邻两帧之间亮度变化的模型参数；

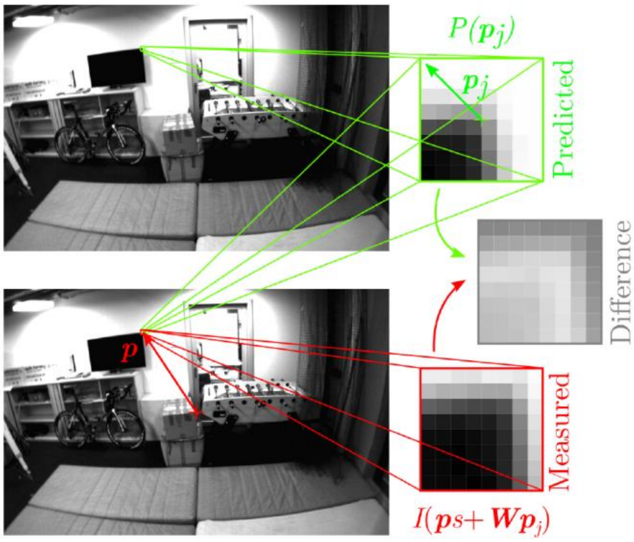

图 2 光度误差

4.2 光度误差方程 G-N 求解

下面利用 G-N 法优化上面光度误差方程中的当前帧像素位置 p，我们只关心金字塔零层上的像素坐标，即$s_0=1$，将光度误差进行一阶线性展开：

$$e(\hat{p}+\delta p,P,I,D)=A(\hat{p},I,D)\delta p+e(\hat{p},P,I,D) \tag{45}$$

其中，A 为图像梯度：

$$A(\hat{p},I,D)=\frac{\partial e}{\partial p}=-a\frac{\partial I_0}{\partial p}$$

那么，增量方程可写成：

$$A(\hat{p},I,D)^T A(\hat{p},I,D)\delta p=-A(\hat{p},I,D)^T e(\hat{p},P,I,D) \tag{46}$$

通过上式可解得δp，用于对跟踪特征点位置 p 的迭代优化。ROVIO 并非直接求解上面的增量方程，而是通过对 A 进行 QR 分解来求解δp：

$$A=\frac{\partial e}{\partial p}=[Q_1 \quad Q_2]\begin{bmatrix}R_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_1R_1\\0\end{bmatrix} \tag{47}$$

其中，Q 为正交矩阵，R 为上三角矩阵。

将分解后的 A 代回一阶展开式中，并将Q_1移到光度误差上：

$$Q_1(\hat{p},I,D)^T e(\hat{p}+\delta p,P,I,D)=R_1(\hat{p},I,D)\delta p+Q_1(\hat{p},I,D)^T e(\hat{p},P,I,D)$$

$$\Longrightarrow y(\hat{p}+\delta p,P,I,D)=R_1(\hat{p},I,D)\delta p+y(\hat{p},P,I,D) \tag{48}$$

其中，$y(\hat{p},P,I,D)=Q_1(\hat{p},I,D)^T e(\hat{p},P,I,D)$，为新的光度误差；$R_1(\hat{p},I,D)=Q_1{}^T\frac{\partial e}{\partial p}=\frac{\partial y}{\partial p}$；$\hat{p}=\pi\left(\bar{\mu}_k d(\bar{\rho}_k)\right)$

4.3 观测方程

分析可知，上面的光度误差仅与 bearing vector 和逆深度有关，那么，下面将新光度误差在方向向量的先验$\bar{\mu}_k$和$\bar{\rho}_k$处进行一阶线性展开：

$$y\left(\pi\left(\mu_k d(\rho_k)\right)\right)$$

$$\approx y\left(\pi\left(\bar{\mu}_k d(\bar{\rho}_k)\right)\right)+\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial \pi\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial P_c}\frac{\partial P_c}{\partial x}\bigg|_{\bar{\mu}_k,\bar{\rho}_k}(x_k-\bar{x}_k)+\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial \pi\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial P_c}\frac{\partial P_c}{\partial n_u}\bigg|_{0,0}n_u$$

$$=y\left(\pi\left(\bar{\mu}_k d(\bar{\rho}_k)\right)\right)+H(x_k-\bar{x}_k)+H_n n_u$$

其中，H 的尺寸为 2×3N，N 为特征点个数，代码对应到 ImgUpdate::jacState()

$$H=\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial \pi\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial P_c}\frac{\partial P_c}{\partial x}\bigg|_{\bar{\mu}_k,\bar{\rho}_k}=R_1(\hat{p},I,D)\frac{\partial \pi\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial P_c}\frac{\partial P_c}{\partial x}\bigg|_{\bar{\mu}_k,\bar{\rho}_k} \tag{49}$$

代码中是：F = -A_red_*c_J_*featureOutputJac_.template block<2,mtState::D_>(0,0);

没看懂里面的 featureOutputJac 在 transformFeatureOutputCT_.jacTransform()中是对应的$\frac{\partial P_c}{\partial x}$？是怎么推导出来的？

4.4 更新状态向量和协方差

对应代码在 LWF::Update:: performUpdateEKF()：

卡尔曼增益为：

$$K_k=\bar{P}_k\cdot H^T {P_y}^{-1} \tag{50}$$

其中，$P_y=H\bar{P}_k H^T+H_n Q_k {H_n}^T$。

状态向量的均值和协方差更新为：

$$\hat{x}_{k-1}=\bar{x}_k+K_k\left(z_k-h(\bar{x}_k)\right) \tag{51}$$

$$\hat{P}_k=\bar{P}_k-K_k P_y {K_k}^T=\bar{P}_k-K_k P_y\left(\bar{P}_k\cdot H^T {P_y}^{-1}\right)^T$$

$$=\bar{P}_k-K_k P_y {P_y}^{-1} H\bar{P}_k=(I-K_k H)\bar{P}_k \tag{52}$$

五、附录

5.1 运动方程的 Jacobian 部分矩阵推导

1. 速度运动方程关于旋转的 Jacobian：

$$\frac{\partial f_v}{\partial q_{I\leftarrow B_1}} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\Delta t\left(exp(\varphi^\wedge)q_{I\leftarrow B_1}\right)^T\ {}^I g - \Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\ {}^I g}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T(1-\varphi^\wedge)\ {}^I g - \Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\ {}^I g}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\varphi^\wedge\ {}^I g}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\left({}^I g\right)^\wedge\varphi}{\varphi} = \Delta t q_{I\leftarrow B_1}{}^T\left({}^I g\right)^\wedge$$

2. 旋转运动方程关于旋转的 Jacobian：

$$\frac{\partial f_q}{\partial q_{I\leftarrow B_1}} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{exp(\varphi^\wedge)q_{I\leftarrow B_1}exp\left(\Delta t^{B_2}\omega^\wedge_{I\to B_2}\right)\cdot\left[q_{I\leftarrow B_1}exp\left(\Delta t^{B_2}\omega^\wedge_{I\to B_2}\right)\right]^T}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{exp(\varphi^\wedge)}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{I+\varphi^\wedge}{\varphi} = I$$

3. 旋转运动方程关于 gyr bias 的 Jacobian：

$$\frac{\partial f_q}{\partial\ {}^B b_w} = \frac{\partial q_{I\leftarrow B_1}exp\left(\Delta t^{B_2}\omega^\wedge_{I\to B_2}\right)}{\partial\ {}^B b_w}$$

$$= \frac{\partial q_{I\leftarrow B_1}exp\left(\Delta t^{B_2}\omega^\wedge_{I\to B_2}\right)}{\partial\left(\Delta t^{B_2}\omega_{I\to B_2}\right)}\cdot\frac{\partial\Delta t\left({}^B\widetilde{\omega}_{I\to B} - {}^B b_w\right)}{\partial\ {}^B b_w}$$

$$= -\Delta t q_{I\leftarrow B_1}\Gamma\left(\Delta t^{B_2}\omega_{I\to B_2}\right)$$

5.2 bearing vector 的连续运动方程推导

根据路标点在世界系中的位置导数为零，对(22)式左右两边对时间 t 求导，其中随时间变化的变量有四个：$p_{I\leftarrow C}$、$q_{C\leftarrow I}$、μ、ρ，得：

$$0 = \frac{\partial p_{I\leftarrow C}}{\partial t} + \frac{\partial q_{C\leftarrow I}{}^T\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial q_{C\leftarrow I}}\frac{\partial q_{C\leftarrow I}}{\partial t} + \frac{\partial q_{C\leftarrow I}{}^T\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial q_{C\leftarrow I}{}^T\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial d(\rho)}\frac{\partial d(\rho)}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{A-1}$$

对于上式进行分别讨论：

1）

$$\frac{\partial p_{I\leftarrow C}}{\partial t} = \frac{\partial\ {}^I\vec{r}_{I\to C}}{\partial t} = \frac{\partial\left({}^I\vec{r}_{I\to B} + q_{I\leftarrow B}\ {}^B\vec{r}_{B\to C}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(p_{I\leftarrow B} + q_{I\leftarrow B}p_{B\leftarrow C}\right)}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial p_{I\leftarrow B}}{\partial t} + \frac{\partial q_{I\leftarrow B}}{\partial t}p_{B\leftarrow C} + q_{I\leftarrow B}\frac{\partial p_{B\leftarrow C}}{\partial t}$$

根据连续形式的运动方程可得：

$$\frac{\partial p_{I\leftarrow C}}{\partial t} = q_{I\leftarrow B}\,{}^{B}v_B + \left(q_{I\leftarrow B}\,{}^{B}\omega_{I\to B}^{\wedge}\right)p_{B\leftarrow C} + 0 = q_{I\leftarrow B}\left({}^{B}v_B + {}^{B}\omega_{I\to B}^{\wedge}p_{B\leftarrow C}\right)$$

2）(为何下面推导少个负号？！)

$$\frac{\partial {q_{C\leftarrow I}}^{T}\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial q_{C\leftarrow I}} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\left(exp(\varphi^{\wedge})q_{C\leftarrow I}\right)^{T}\mu d(\rho) - {q_{C\leftarrow I}}^{T}\left(\mu d(\rho)\right)}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{{q_{C\leftarrow I}}^{T}(1-\varphi^{\wedge})\mu d(\rho) - {q_{C\leftarrow I}}^{T}\left(\mu d(\rho)\right)}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-{q_{C\leftarrow I}}^{T}\varphi^{\wedge}\mu d(\rho)}{\varphi}$$

$$= {q_{C\leftarrow I}}^{T}\mu^{\wedge}d(\rho)$$

3）

$$\frac{\partial q_{C\leftarrow I}}{\partial t} = \widehat{w}_c = q_{C\leftarrow B}\,{}^{B}\omega_{I\to B}$$

4）

$$\frac{\partial {q_{C\leftarrow I}}^{T}\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial \mu} = {q_{C\leftarrow I}}^{T}\frac{\partial n(\mu)}{\partial \mu}d(\rho) = -{q_{C\leftarrow I}}^{T}n(\mu)^{\wedge}N(\mu)d(\rho)$$

5）

$$\frac{\partial {q_{C\leftarrow I}}^{T}\left(\mu d(\rho)\right)}{\partial d(\rho)}\frac{\partial d(\rho)}{\partial \rho} = {q_{C\leftarrow I}}^{T}\mu d'(\rho)$$

将上面各式代入式(A-1)后，在等式两边乘上$q_{C\leftarrow I}$

5.3 Warping Matrix 预测推导

六、参考文献

[1] M. Bloesch. IEKF-based visual-inertial odometry using direct photometric feedback. 2017.

[2] M. Bloesch. Robust visual inertial odometry using a direct ekf-based approach. 2015. IEEE.

[3] M. Bloesch. A primer on the differential calculus of 3d orientations. 2016. arXiv.

[4] C. Forster. On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry. 2017.