高等数学 C

余沛
peiy_gzgs@qq.com

Guangzhou College of Technology and Business
广州工商学院

October 12, 2023

Outline

Outline

割圆术与圆的周长求解

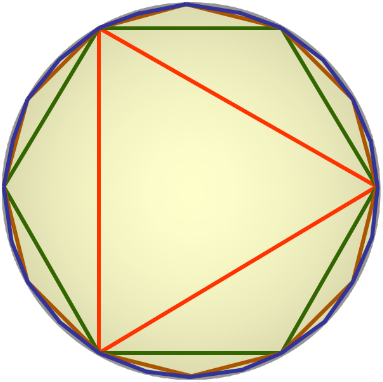


Figure: 割圆术示意图

- 刘徽 (生平不详. 魏景元四年（263 年）著有《九章算术注》10 卷.) 提出的方法. 他把圆周分成三等分、六等分、十二等分、二十四等分… 这样继续分割下去, 所得多边形的周长就无限接近于圆的周长.
- 思路: 单调有界数列有极限.
- 第 n 次等分所得到的的周长是多少？
- $2n \times R \times \sin \dfrac{2\pi}{2n}$

Outline

什么是数列

定义: 数列

数列是按照一定规律排列的一组数的集合，其中每个数都有一个确定的位置，称为索引或项号. 数列的一般形式可以表示为:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\},$$

定义: 数列是按照一定规律排列的一组数的集合，其中每个数都有一个确定的位置，称为索引或项号. 数列的一般形式可以表示为:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\},$$

注意，高等数学中体积的数列一般是具有无穷多项的.

一些例子:

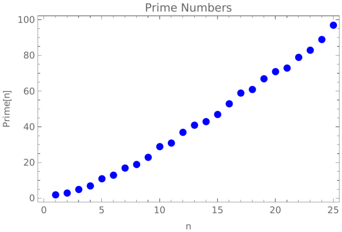
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;\\
&2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots;\\
&1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots;\\
&2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \dots.
\end{aligned}$$

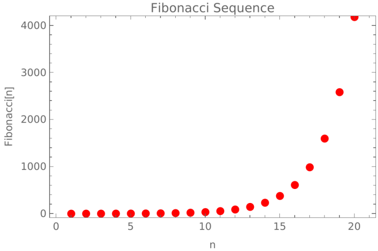
如果能找到数列的一般项次的表达式，就称之为通项公式. 这时候数列可以简单记为

$$\{a_n\} \quad \text{或} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

以更直接地描述数列的性质.

一些特例





$$\pi(k) = \sum_{j=2}^{k}\left[\frac{2}{j}\left(1+\sum_{s=1}^{[\sqrt{j}]}\left(\left[\frac{j-1}{s}\right]-\left[\frac{j}{s}\right]\right)\right)\right] + k + 1$$

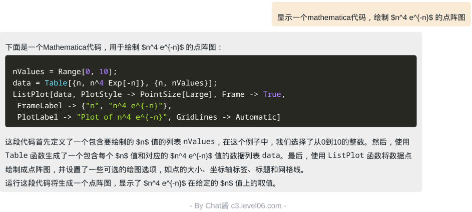
$$F(n) = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

动动手

- 代码展示-数学软件: Matlab, Mathematica, Maple, GNU Octave, ...
- 代码生成-大语言模型: chatGPT, chatGLM, Falcon, llama, ...

动动手

举例: 希望观察 n^4e^{-n} 数列.



显示一个mathematica代码，绘制 $n^4 e^{-n}$ 的点阵图

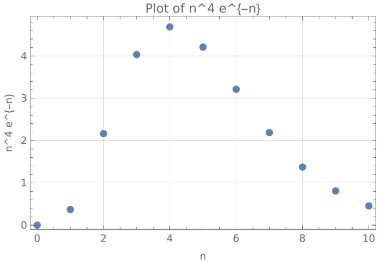
下面是一个Mathematica代码，用于绘制 $n^4 e^{-n}$ 的点阵图：

```
nValues = Range[0, 10];
data = Table[{n, n^4 Exp[-n]}, {n, nValues}];
ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[Large], Frame -> True,
 FrameLabel -> {"n", "n^4 e^{-n}"},
 PlotLabel -> "Plot of n^4 e^{-n}", GridLines -> Automatic]
```

这段代码首先定义了一个包含要绘制的 n 值的列表 nValues，在这个例子中，我们选择了从0到10的整数。然后，使用 Table 函数生成了一个包含每个 n 值和对应的 $n^4 e^{-n}$ 值的数据列表 data。最后，使用 ListPlot 函数将数据点绘制成点阵图，并设置了一些可选的绘图选项，如点的大小、坐标轴标签、标题和网格线。
运行这段代码将生成一个点阵图，显示了 $n^4 e^{-n}$ 在给定的 n 值上的取值。

- By Chat酱 c3.level06.com -

Figure: 对话



$$x_n = n^4e^{-n}. \tag{1}$$

定义: 数列极限与收敛数列

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 如果有: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得对于任意满足 $n > N$ 的 n, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

发散数列

不收敛于任意常数 a 的数列.

发散数列的确切定义是什么？

对于一个数列 a_n, 如果存在一个正实数 ϵ, 对于任意的正整数 N, 都存在一个项数 $n > N$, 使得 $|a_n| > \epsilon$, 那么这个数列 a_n 是发散的.

定义: 数列极限与收敛数列

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 如果有: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得对于任意满足 $n > N$ 的 n, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

发散数列

不收敛于任意常数 a 的数列.

发散数列的确切定义是什么？

对于一个数列 a_n, 如果存在一个正实数 ϵ, 对于任意的正整数 N, 都存在一个项数 $n > N$, 使得 $|a_n| > \epsilon$, 那么这个数列 a_n 是发散的.

定义: 数列极限与收敛数列

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 如果有: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得对于任意满足 $n > N$ 的 n, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

发散数列

不收敛于任意常数 a 的数列.

发散数列的确切定义是什么？

对于一个数列 a_n, 如果存在一个正实数 ϵ, 对于任意的正整数 N, 都存在一个项数 $n > N$, 使得 $|a_n| > \epsilon$, 那么这个数列 a_n 是发散的.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$. 根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$. 根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$.
根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$.
根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$.
根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0

为了证明数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0, 我们将使用数列收敛的定义.

- 设 $\epsilon > 0$, 我们需要找到一个正整数 N, 使得对于所有 $n \geq N$, 都有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| < \epsilon$.
- 由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|\sin(n)| \leq 1$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n)| \leq n^{-1}$.
- 取 $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $n^{-1} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$.

因此, 对于所有 $n \geq N$, 我们有 $|n^{-1}\sin(n) - 0| = n^{-1}|\sin(n)| \leq n^{-1} \leq \epsilon$.
根据数列收敛的定义, 数列 $n^{-1}\sin(n)$ 收敛到 0.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1

我们要证明数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1. **证明:** 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们需要找到一个正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 考虑 $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

为了使 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ 成立, 我们可以选择 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1$. 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - 1 + 1} = \epsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 根据极限的定义, 我们可以得出结论: 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛到 1.

Outline

收敛数列的性质

收敛数列是数学分析中的重要概念，它具有以下性质:

1. 收敛数列有唯一的极限.
2. 收敛数列的极限是有界的.
3. 收敛数列的子数列也收敛，并且收敛于相同的极限.
4. 收敛数列的和、差、积仍然是收敛数列，并且极限满足相应的运算规律.
5. 极限不为零收敛数列的倒数也是收敛数列，且极限的倒数等于原数列极限的倒数.

收敛数列的性质

收敛数列是数学分析中的重要概念，它具有以下性质：

1. 收敛数列有唯一的极限.
2. 收敛数列的极限是有界的.
3. 收敛数列的子数列也收敛，并且收敛于相同的极限.
4. 收敛数列的和、差、积仍然是收敛数列，并且极限满足相应的运算规律.
5. 极限不为零收敛数列的倒数也是收敛数列，且极限的倒数等于原数列极限的倒数.

收敛数列的性质

收敛数列是数学分析中的重要概念，它具有以下性质:

1. 收敛数列有唯一的极限.
2. 收敛数列的极限是有界的.
3. 收敛数列的子数列也收敛，并且收敛于相同的极限.
4. 收敛数列的和、差、积仍然是收敛数列，并且极限满足相应的运算规律.
5. 极限不为零收敛数列的倒数也是收敛数列，且极限的倒数等于原数列极限的倒数.

收敛数列的性质

收敛数列是数学分析中的重要概念，它具有以下性质：

1. 收敛数列有唯一的极限.
2. 收敛数列的极限是有界的.
3. 收敛数列的子数列也收敛，并且收敛于相同的极限.
4. 收敛数列的和、差、积仍然是收敛数列，并且极限满足相应的运算规律.
5. 极限不为零收敛数列的倒数也是收敛数列，且极限的倒数等于原数列极限的倒数.

收敛数列的性质

收敛数列是数学分析中的重要概念，它具有以下性质：

1. 收敛数列有唯一的极限.
2. 收敛数列的极限是有界的.
3. 收敛数列的子数列也收敛，并且收敛于相同的极限.
4. 收敛数列的和、差、积仍然是收敛数列，并且极限满足相应的运算规律.
5. 极限不为零收敛数列的倒数也是收敛数列，且极限的倒数等于原数列极限的倒数.

Outline

Outline

函数极限的数列定义

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ **处收敛于** L, 记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义, 这是为了排除 $x = a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ, 都存在正实数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小, 总存在一个足够小的 δ, 使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

函数极限的数列定义

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 L，对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛于** L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义，这是为了排除 $x=a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-L|<\epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小，总存在一个足够小的 δ，使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

函数极限的数列定义

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ **处收敛于** L, **记作** $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义, 这是为了排除 $x = a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ, 都存在正实数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小, 总存在一个足够小的 δ, 使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

函数极限的解析定义

函数极限的解析定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 L，对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ **处收敛**于 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

函数极限的解析定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 L，对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛**于 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义，这是为了排除 $x=a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-L|<\epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小，总存在一个足够小的 δ，使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

函数极限的解析定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意给定的正实数 ϵ, 都存在正实数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛于** L, 记作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义, 这是为了排除 $x=a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ, 都存在正实数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小, 总存在一个足够小的 δ, 使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

函数极限的解析定义

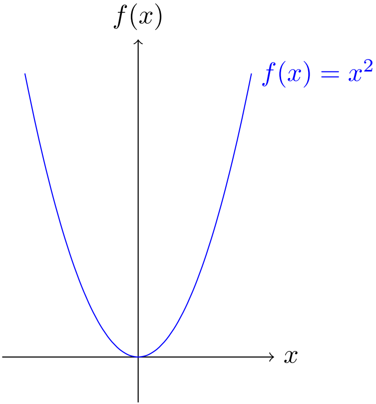
设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 L，对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛**于 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

注意:

- 函数极限的定义要求在去心邻域内有定义，这是为了排除 $x=a$ 的情况.
- 函数极限的定义要求对于任意给定的正实数 ϵ，都存在正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-L|<\epsilon$ 成立. 这意味着无论 ϵ 有多小，总存在一个足够小的 δ，使得函数值 $f(x)$ 与极限 L 的差的绝对值小于 ϵ.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

先来看函数 $f(x) = x^2$



函数 $f(x) = x^2$ 是一个抛物线, 开口朝上, 顶点位于原点.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.

定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.

证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有
  $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式
  $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon/M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有
  $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon/M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.

定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.

证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a|$.
- 由于 $|x-a|$ 和 $|x+a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x-a||x+a| \leq |x-a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a-a|, |a+a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon/M}$.
- 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 我们有 $|x-a||x+a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon/M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.
定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon/M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon/M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x\to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = x^2$ 在每一点都收敛

考虑函数 $f(x) = x^2$.

定理: 对于函数 $f(x) = x^2$, 对于任意实数 a, 当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.

证明:

- 给定任意实数 a, 我们需要证明当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 收敛于 a^2.
- 根据函数 $f(x) = x^2$ 的定义, 我们有 $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$.
- 由于 $|x - a|$ 和 $|x + a|$ 都是非负数, 所以我们可以使用不等式 $|x - a||x + a| \leq |x - a| \cdot M$, 其中 $M = \max(|a - a|, |a + a|)$.
- 对于任意给定的正实数 ϵ, 我们可以选择 $\delta = \sqrt{\epsilon / M}$.
- 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 我们有 $|x - a||x + a| < \delta \cdot M = \sqrt{\epsilon / M} \cdot M = \sqrt{\epsilon \cdot M}$.
- 由于 $\sqrt{\epsilon \cdot M}$ 是一个正实数, 所以我们可以得到 $|f(x) - a^2| < \sqrt{\epsilon \cdot M}$.

因此, 根据极限的定义, 我们可以得出 $\lim_{x \to a} f(x) = a^2$.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

先来看函数 $f(x) = \sin(1/x)$

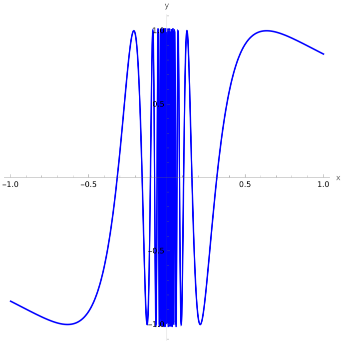


Figure: $f(x) = \sin(1/x)$

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\}=\frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\}=\frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n)=\sin((2n+1)\pi/2)=(-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限.
定理: 对于函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\}=\frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\}=\frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n)=\sin((2n+1)\pi/2)=(-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限.
定理: 对于函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\}=\frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\}=\frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n)=\sin((2n+1)\pi/2)=(-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = \frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限.
定理: 对于函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\}=\frac{1}{n\pi}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n)=\sin(n\pi)=0$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\}=\frac{1}{(2n+1)\pi/2}$, 其中 n 是非负整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n)=\sin((2n+1)\pi/2)=(-1)^n$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 不存在.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

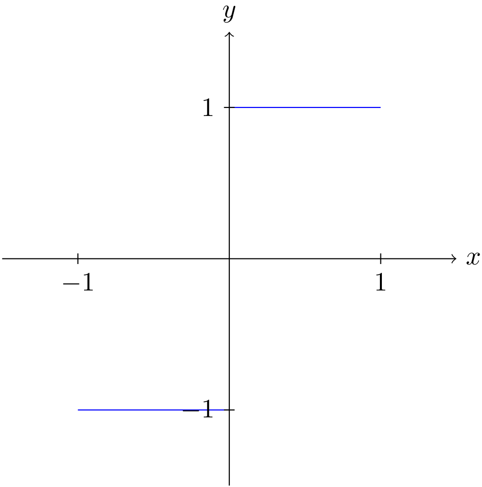


Figure: $f(x) = \text{sgn}(x)$ 的函数图像

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.

定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.

证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x=0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x)=\text{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x)=\text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\}=\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n)=\text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right)=1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\}=-\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n)=\text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right)=-1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n)=-1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x)=\text{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \text{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \text{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

符号函数在 $x = 0$ 处的不收敛性

考虑符号函数 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限.
定理: 对于符号函数 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, 当 x 趋近于零时, 极限不存在.
证明: 我们可以通过构造两个不同的数列来证明这一点.

- 首先, 考虑数列 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, x_n 趋近于零. 此时, $f(x_n) = \mathrm{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.
- 接下来, 考虑数列 $\{y_n\} = -\frac{1}{n}$, 其中 n 是正整数.
  - 当 n 趋近于正无穷时, y_n 趋近于零. 此时, $f(y_n) = \mathrm{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$.
  - 因此, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.
- 由于存在两个不同的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得它们都趋近于零, 但对应的函数值却趋于不同的极限.

所以符号函数 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处的极限不存在.

Outline

函数极限的性质

- **极限存在性**: 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，当且仅当左极限和右极限存在且相等.
- **极限唯一性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则该极限是唯一的.
- **局部有界性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 是有界的.
- **局部保号性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限且不为零，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 保持与极限符号相同.
- **函数极限的四则运算**: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则以下极限也成立:
  - $(f+g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之和.
  - $(f-g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之差.
  - $(f\cdot g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之积.
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之商（假设 $g(x)\neq 0$）.

函数极限的性质

- **极限存在性**: 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，当且仅当左极限和右极限存在且相等.
- **极限唯一性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则该极限是唯一的.
- **局部有界性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 是有界的.
- **局部保号性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限且不为零，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 保持与极限符号相同.
- **函数极限的四则运算**: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则以下极限也成立:
  - $(f+g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之和.
  - $(f-g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之差.
  - $(f \cdot g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之积.
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之商（假设 $g(x) \neq 0$）.

函数极限的性质

- **极限存在性**: 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，当且仅当左极限和右极限存在且相等.
- **极限唯一性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则该极限是唯一的.
- **局部有界性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 是有界的.
- **局部保号性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限且不为零，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 保持与极限符号相同.
- **函数极限的四则运算**: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则以下极限也成立:
  - $(f+g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之和.
  - $(f-g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之差.
  - $(f\cdot g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之积.
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之商（假设 $g(x)\neq 0$）.

函数极限的性质

- **极限存在性**: 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，当且仅当左极限和右极限存在且相等.
- **极限唯一性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则该极限是唯一的.
- **局部有界性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 是有界的.
- **局部保号性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限且不为零，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 保持与极限符号相同.
- **函数极限的四则运算**: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = a$ 处有极限，则以下极限也成立:
  - $(f + g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之和.
  - $(f - g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之差.
  - $(f \cdot g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之积.
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之商（假设 $g(x) \neq 0$）.

函数极限的性质

- **极限存在性**: 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，当且仅当左极限和右极限存在且相等.
- **极限唯一性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则该极限是唯一的.
- **局部有界性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 是有界的.
- **局部保号性**: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有极限且不为零，则存在一个邻域 $N(a)$，在该邻域内函数 $f(x)$ 保持与极限符号相同.
- **函数极限的四则运算**: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有极限，则以下极限也成立:
  - $(f+g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之和.
  - $(f-g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之差.
  - $(f\cdot g)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之积.
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限之商（假设 $g(x)\neq 0$）.

Thank you for your attention!
Questions?

Homeworks: page 36: 20, 22, 27, 30; page 78: 3