高等数学 C

余沛
peiy_gzgs@qq.com

Guangzhou College of Technology and Business
广州工商学院

October 12, 2023

Outline

数列的极限与函数的极限

定义: 数列极限与收敛数列

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 如果有: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得对于任意满足 $n > N$ 的 n, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

发散数列

不收敛于任意常数 a 的数列.

数列的极限与函数的极限

定义: 数列极限与收敛数列

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a, 如果有: 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得对于任意满足 $n > N$ 的 n, 不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立, 那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

发散数列

不收敛于任意常数 a 的数列.

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛**于 L, 记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

函数极限的解析定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意给定的正实数 ϵ, 都存在正实数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-L|<\epsilon$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ **处收敛**于 L, 记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Outline

Outline

函数的无穷小量

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=e^x-1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=\sin(x)$ 和 $f(x)=\tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义，如果对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x)=x^n$ 是无穷小量，其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x)=e^x-1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x)=\sin(x)$ 和 $f(x)=\tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时，函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量，其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.

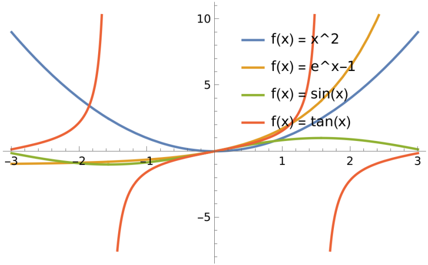


Figure: Enter Caption

函数的无穷小量

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- 指数函数: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- 三角函数: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.

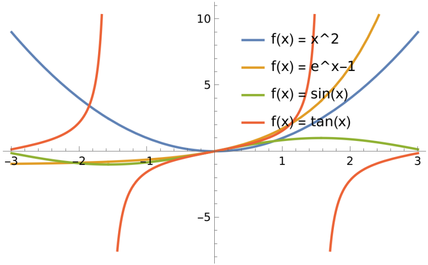


Figure: Enter Caption

函数的无穷小量

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.

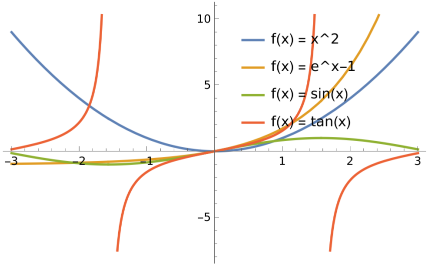


Figure: Enter Caption

函数的无穷小量

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.

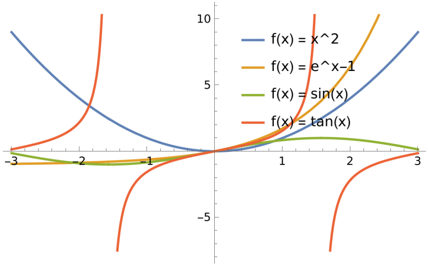
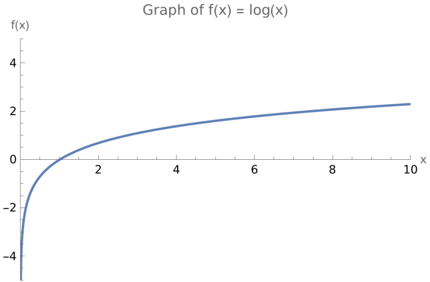


Figure: Enter Caption

函数的无穷小量

- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.



函数的无穷大量

无穷大量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 M, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷大量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷大量.

函数的无穷大量

无穷大量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 M, 存在正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷大量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷大量.

函数的无穷大量

无穷大量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义，如果对于任意给定的正数 M，存在正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷大量.

- **幂函数**：当 x 趋近于正无穷时，函数 $f(x)=x^n$ 是无穷大量，其中 n 是正整数.
- **幂函数**：当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x)=x^{-n}$ 是无穷大量，其中 n 是正整数.
- **指数函数**：当 x 趋近于正无穷时，函数 $f(x)=e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**：当 x 趋近于正无穷和 0 时，函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷大量.

函数的无穷大量

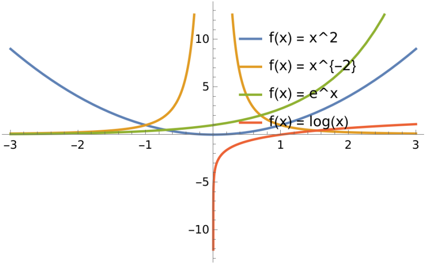
无穷大量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 M, 存在正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷大量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷大量.

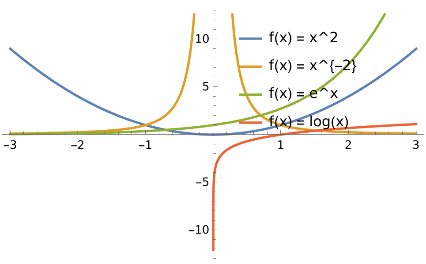
函数的无穷大量

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷大量.



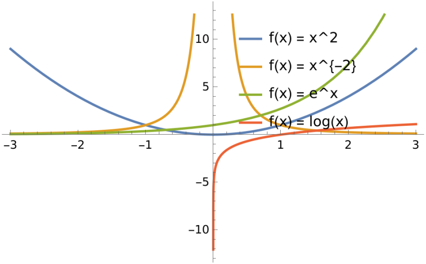
函数的无穷大量

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x)=e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷大量.



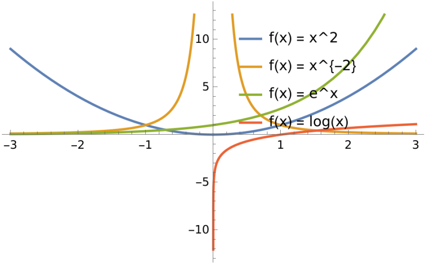
函数的无穷大量

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^{-n}$ 是无穷大量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时, 函数 $f(x) = e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷大量.



函数的无穷大量

- **幂函数**: 当 x 趋近于正无穷时，函数 $f(x) = x^n$ 是无穷大量，其中 n 是正整数.
- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = x^{-n}$ 是无穷大量，其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于正无穷时，函数 $f(x) = e^x$ 是无穷大量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于正无穷和 0 时，函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷大量.



Outline

函数的无穷小量

无穷小量的性质:

- 无穷小量与有限常数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量的和、差仍为无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量的性质:

- 无穷小量与有限常数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量的和、差仍为无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量的性质:

- 无穷小量与有限常数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量的和、差仍为无穷小量.

函数的无穷小量

无穷小量的性质:

- 无穷小量与有限常数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量.
- 无穷小量的和、差仍为无穷小量.

Outline

函数的无穷小量的比较

定义: 高阶无穷小

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果当 x 趋近于 a 时, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))$.

幂函数: 当 x 趋近于 1 时, 幂函数 $f(x)=x^n$ $(n>1)$ 是比幂函数 $g(x)=x^{n-1}$ 高阶的无穷小量, 即 $f(x)=o(g(x))$.

函数的无穷小量的比较

定义: 高阶无穷小

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果当 x 趋近于 a 时, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))$.

幂函数: 当 x 趋近于 1 时, 幂函数 $f(x)=x^n$ $(n>1)$ 是比幂函数 $g(x)=x^{n-1}$ 高阶的无穷小量, 即 $f(x)=o(g(x))$.

函数的无穷小量的比较

定义: 高阶无穷小

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果当 x 趋近于 a 时, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))$.

幂函数: 当 x 趋近于 1 时, 幂函数 $f(x)=x^n$ $(n>1)$ 是比幂函数 $g(x)=x^{n-1}$ 高阶的无穷小量, 即 $f(x)=o(g(x))$.

函数的无穷小量的比较

当 $x \to 0$ 时, $x, x^2, 2x$ 都是无穷小量, 比较它们趋向于 0 的速度,

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0, x^2$ 比 x 要快得多; 称 x^2 是比 x 高阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2, 2x$ 与 x 大致相同; 称 $2x$ 与 x 是同阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty, x$ 比 x^2 要慢得多. 称 x 是比 x^2 较低阶无穷小.

同阶无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = L,$$

则称 β 与 α 是同阶无穷小量, 记作 $\alpha \sim \beta$.

等价无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

则称 β 与 α 是等价无穷小量.

函数的无穷小量的比较

当 $x \to 0$ 时, $x, x^2, 2x$ 都是无穷小量, 比较它们趋向于 0 的速度,

- $\lim_{x\to0} \frac{x^2}{x} = 0$, x^2 比 x 要快得多; 称 x^2 是比 x 高阶无穷小;
- $\lim_{x\to0} \frac{2x}{x} = 2$, $2x$ 与 x 大致相同; 称 $2x$ 与 x 是同阶无穷小;
- $\lim_{x\to0} \frac{x}{x^2} = \infty$, x 比 x^2 要慢得多. 称 x 是比 x^2 较低阶无穷小.

同阶无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = L,$$

则称 β 与 α 是同阶无穷小量, 记作 $\alpha \sim \beta$.

等价无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

则称 β 与 α 是等价无穷小量.

函数的无穷小量的比较

当 $x \to 0$ 时, $x, x^2, 2x$ 都是无穷小量, 比较它们趋向于 0 的速度,

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$, x^2 比 x 要快得多; 称 x^2 是比 x 高阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$, $2x$ 与 x 大致相同; 称 $2x$ 与 x 是同阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$, x 比 x^2 要慢得多. 称 x 是比 x^2 较低阶无穷小.

同阶无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = L,$$

则称 β 与 α 是同阶无穷小量, 记作 $\alpha \sim \beta$.

等价无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

则称 β 与 α 是等价无穷小量.

Thank you for your attention!

Questions? Homework: page79: 9, 10