高等数学 C

余沛
peiy_gzgs@qq.com

Guangzhou College of Technology and Business
广州工商学院

October 12, 2023

Outline

Outline

极限的定义

定义：数列极限与收敛数列的定义

对于数列 $\{x_n\}$ 和常数 a，如果有：对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得对于任意满足 $n > N$ 的 n，不等式

$$|x_n - a| < \epsilon$$

都成立，那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者数列 $\{x_n\}$ **收敛**，并且收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$$x_n \to a (n \to \infty).$$

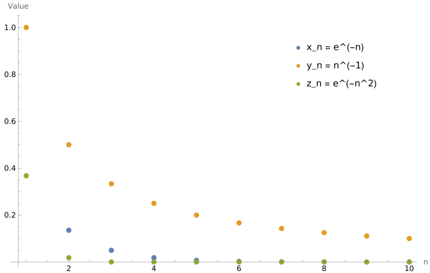


Figure: 三种收敛数列

极限的定义

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 L，对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)` = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处收敛于 L，记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

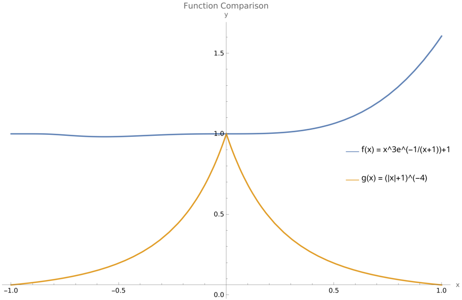


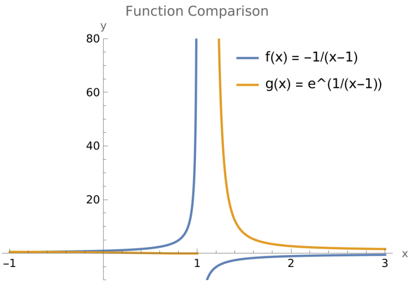
Figure: 两种在 $x=0$ 处收敛的函数

无穷小量与无穷大量

定义：无穷小量

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义，如果对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷小量，记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$



无穷小量与无穷大量

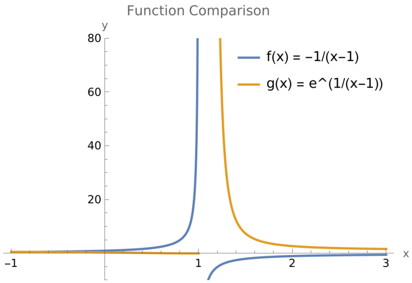
定义：无穷大量

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义，如果对于任意给定的正数 M，存在正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷大量，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

注意

注意分辨 $-\infty$，$+\infty$ 和 ∞.



Outline

极限的基本运算：四则运算

极限的四则运算

对于 $x_0, A, B, k \in \mathbb{R}$，如果有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} g(x) = B$，则有：

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B,$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [kf(x)] = kA,$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = AB,$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

注意

注意这些运算的复合形式.

极限的基本运算：四则运算

极限的四则运算

对于 $x_0, A, B, k \in \mathbb{R}$, 如果有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} g(x) = B$, 则有:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [kf(x)] = kA$,
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = AB$,
4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

注意

注意这些运算的复合形式.

极限的基本运算：四则运算

极限的四则运算

对于 $x_0, A, B, k \in \mathbb{R}$, 如果有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} g(x) = B$, 则有:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [kf(x)] = kA$,
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = AB$,
4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

注意

注意这些运算的复合形式.

极限的基本运算：四则运算

极限的四则运算

对于 $x_0, A, B, k \in \mathbb{R}$, 如果有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} g(x) = B$, 则有:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [kf(x)] = kA$,
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = AB$,
4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

注意

注意这些运算的复合形式.

极限的基本运算：四则运算

极限的四则运算

对于 $x_0, A, B, k \in \mathbb{R}$, 如果有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} g(x) = B$, 则有:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
2. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} [kf(x)] = kA$,
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = AB$,
4. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

注意

注意这些运算的复合形式.

Outline

多项式的情形

多项式函数 $P_n(x)$

记多项式函数为 $P_n(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

情形一

一般地，用极限四则运算法则可得到

$$\lim_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_n.$$

即

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

多项式的情形

情形二

记 $R(x)=\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$, 其中 $p_n(x), q_m(x)$ 分别是 n 次和 m 次多项式函数（此时也称 $R(x)$ 为有理函数），且 $q_m\left(x_0\right) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x)=R\left(x_0\right)=\frac{p_n\left(x_0\right)}{q_m\left(x_0\right)}.$$

例: 求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2 x^2+4 x+1}{3 x^4+x^3-2 x^2+4 x+2}.$$

多项式的情形

情形三

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0}{b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & k<l,\\ \dfrac{a_k}{b_l} & k=l,\\ \infty & k>l.\end{cases}$$

例: 求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^2+x-4}.$$

Outline

定理: 复合函数的极限

复合函数的极限

如果 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=a$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, 则有 $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=a$.

补充推论: 幂指函数的极限

设 $\lim f(x)=a(a>0), \lim g(x)=b$, 则有

$$\mathrm{limf}(x)^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=a^b.$$

定理：复合函数的极限

复合函数的极限

如果 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若 $\lim_{u\to u_0} f(u)=a$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, 则有 $\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0} f(u)=a$.

补充推论：幂指函数的极限

设 $\lim f(x)=a(a>0), \lim g(x)=b$, 则有

$$\mathrm{limf}(x)^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=a^b.$$

Outline

极限的三明治法则

定理: 极限的三明治法则

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足以下条件:

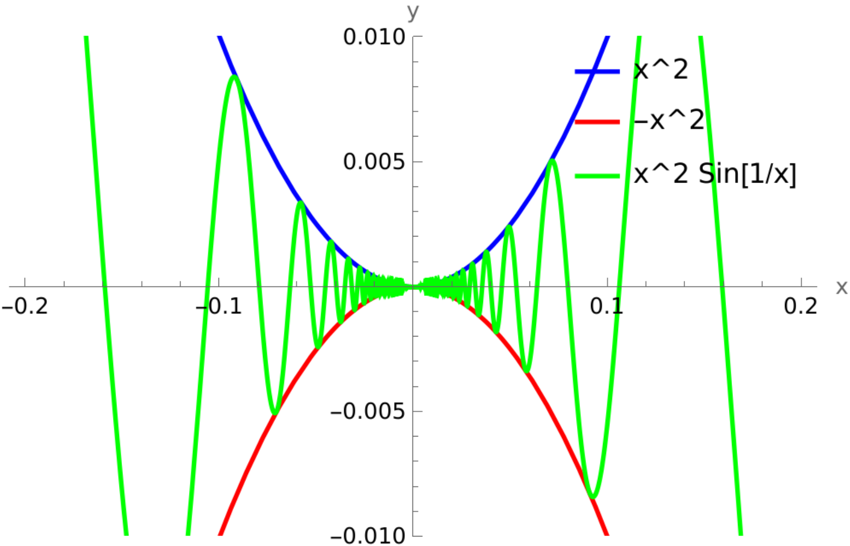
- 对于 a 的某个邻域中的所有 x, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
- 当 $g(x) \to L(x \to a)$ 和 $g(x) \to L(x \to a)$ 同时成立.

则当 x 趋近于 a 时, $f(x)$ 也趋近于 L.

例子

考虑函数 $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 我们想要计算 $\lim_{x\to 0} f(x)$. 我们可以使用夹逼定理来求解.
首先, 我们可以证明对于所有 x, 有 $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. 其次, 当 x 趋近于 0 时, $-x^2$ 和 x^2 都趋近于 0. 因此, 根据夹逼定理, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

极限的三明治法则



单调收敛法则

定理

单调有界数列收敛.

Outline

Outline

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$

结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

原因：回顾割圆术.

例子

求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

.

Outline

结论

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

原因: 考虑自然对数的增长率问题:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h/x)}{x\cdot h/x}\\ &= \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)\\ &= \frac{1}{x}\log_a e,\end{aligned}$$

例子

求:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x, \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{\frac{4x}{4}} = e^4,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{\frac{x}{-2}}\cdot(-2) = e^{-2}.$$

Thank you for your attention!

Questions?
Homework: Page79: 11 (1) —(8) , Page81: 23、24