高等数学 C

余沛
peiy_gzgs@qq.com

Guangzhou College of Technology and Business
广州工商学院

October 11, 2023

Outline

Outline

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=e^x-1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=\sin(x)$ 和 $f(x)=\tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷小量.

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义，如果对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**：当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量，其中 n 是正整数.
- **指数函数**：当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**：当 x 趋近于 0 时，函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**：当 x 趋近于 1 时，函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = e^x - 1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和 $f(x) = \tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x) = \log(x)$ 是无穷小量.

无穷小量定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为无穷小量.

- **幂函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=x^n$ 是无穷小量, 其中 n 是正整数.
- **指数函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=e^x-1$ 是无穷小量.
- **三角函数**: 当 x 趋近于 0 时, 函数 $f(x)=\sin(x)$ 和 $f(x)=\tan(x)$ 是无穷小量.
- **对数函数**: 当 x 趋近于 1 时, 函数 $f(x)=\log(x)$ 是无穷小量.

函数的无穷小量的比较

当 $x \to 0$ 时, $x, x^2, 2x$ 都是无穷小量, 比较它们趋向于 0 的速度,

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0, x^2$ 比 x 要快得多; 称 x^2 是比 x 高阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2, 2x$ 与 x 大致相同; 称 $2x$ 与 x 是同阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty, x$ 比 x^2 要慢得多. 称 x 是比 x^2 较低阶无穷小.

等价无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

则称 β 与 α 是等价无穷小量, 记作 α β.

函数的无穷小量的比较

当 $x \to 0$ 时, $x, x^2, 2x$ 都是无穷小量, 比较它们趋向于 0 的速度,

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0, x^2$ 比 x 要快得多; 称 x^2 是比 x 高阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2, 2x$ 与 x 大致相同; 称 $2x$ 与 x 是同阶无穷小;
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty, x$ 比 x^2 要慢得多. 称 x 是比 x^2 较低阶无穷小.

等价无穷小

特别地, 如果有

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

则称 β 与 α 是等价无穷小量, 记作 α β.

Outline

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

定理（无穷小等价替换定理）

如果 $\alpha_1 \hookleftarrow \beta_1, \alpha_2 \hookleftarrow \beta_2$ 且极限 $\lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$ 存在，则

$$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Proof.

$$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

□

常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

定理（无穷小等价替换定理）

如果 $\alpha_1 \hookleftarrow \beta_1, \alpha_2 \hookleftarrow \beta_2$ 且极限 $\lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Proof.

$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$. $\square$

常用的等价无穷小: 当 $x \to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

定理（无穷小等价替换定理）

如果 $\alpha_{1\hookleftarrow}\beta_1, \alpha_{2\hookleftarrow}\beta_2$ 且极限 $\lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$ 存在，则

$$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Proof.

$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}.$ □

常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

例 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}\quad(\tan mx\sim mx,\sin nx\sim nx)$$

例 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2 x\sim x^2\right)$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

例 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}\quad(\tan mx\sim mx,\sin nx\sim nx)$$

例 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2 x\sim x^2\right)$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

例 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2},$$

$$(\ln[(x-1)+1]\sim x-1)$$

例 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

$$\left((1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2,\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2\right)$$

等价无穷小替换定理与常用的等价无穷小

例 3

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2},$$

$(\ln[(x-1)+1]\sim x-1)$

例 4

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

$$\left((1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2,\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Outline

Outline

增量，差分与函数连续性

增量

- $\Delta x : \Delta x = x_1 - x_0$，即自变量的增量 $=$ 终值 - 初值，或终值 $x_1 = x_0 + \Delta x$;
- $\Delta y : \Delta y = y_1 - y_0$，即因变量的增量 $=$ 终值 - 初值，或终值 $y_1 = y_0 + \Delta y$;

Δx，Δy 也被称为关于自变量，因变量的差分.

函数的连续性概念

函数的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x \to 0$ 时，相应因变量的增量 $\Delta y \to 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**，记作

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

.

初等函数在定义域范围内都是连续的.

不连续

否则，称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

初等函数在不包含于定义域的区间上都是不连续的.

图像与极限存在

如果是能采用图像方法精确描述的函数，图像上没有跳点，断点或者无穷大趋势，那么在该点上函数是连续的.

函数的连续性概念

函数的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x \to 0$ 时，相应因变量的增量 $\Delta y \to 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**，记作

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

.

初等函数在定义域范围内都是连续的.

不连续

否则，称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

初等函数在不包含于定义域的区间上都是不连续的.

图像与极限存在

如果是能采用图像方法精确描述的函数，图像上没有跳点，断点或者无穷大趋势，那么在该点上函数是连续的.

函数的连续性概念

函数的连续性

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x \to 0$ 时，相应因变量的增量 $\Delta y \to 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**，记作

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

.

初等函数在定义域范围内都是连续的.

不连续

否则，称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

初等函数在不包含于定义域的区间上都是不连续的.

图像与极限存在

如果是能采用图像方法精确描述的函数，图像上没有跳点，断点或者无穷大趋势，那么在该点上函数是连续的.

函数的连续性概念

函数的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x \to 0$ 时，相应因变量的增量 $\Delta y \to 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**，记作

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

.

初等函数在定义域范围内都是连续的.

不连续

否则，称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

初等函数在不包含于定义域的区间上都是不连续的.

图像与极限存在

如果是能采用图像方法精确描述的函数，图像上没有跳点，断点或者无穷大趋势，那么在该点上函数是连续的.

Outline

分段函数的连续性

可以通过研究左极限和右极限是否存在并相等的办法来研究.

函数极限的数列定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个去心邻域 $(a, b)/\{x\}$ 内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该去心邻域上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ **处收敛于** L, 记作 $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

定义: 左极限

设函数 $f(x)$ 在某个区间 $(\boldsymbol{a - \epsilon, a})$ 内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该区间上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处具有左极限 L, 记作 $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

分段函数的连续性

同理, 右极限应该这样定义:

定义: 右极限

设函数 $f(x)$ 在某个区间 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{\epsilon})$ 内有定义, 如果存在常数 L, 对于任意定义在该区间上收敛到 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处具有左极限 L, 记作 $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

与函数的连续定义类似, 我们可以模仿性地给出左连续, 右连续的概念和与连续的概念.

定义: 左连续, 右连续与连续

若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点左连续.
若 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.
若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

分段函数的连续性

有了左连续和右连续的概念，我们可以对分段函数间断点的连续性问题进行分析.

间断点分类：情况

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{左右极限都存在}\begin{cases}\text{左右极限相等}\\ \text{左右极限不相等}\end{cases}\\ \text{左右极限至少一个不存在}\end{cases}$$

间断点分类：名称

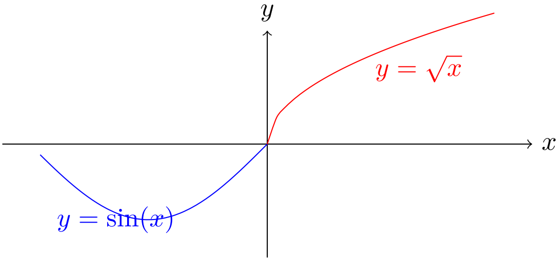
$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点（跃点）}\end{cases}\\ \text{第二类间断点}\end{cases}$$

Outline

分段函数的连续性

可去间断点

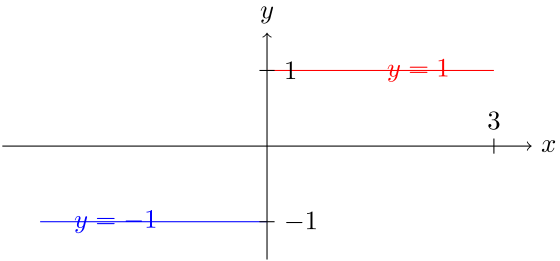
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{if } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{otherwise} \end{cases}$$



分段函数的连续性

跳跃间断点

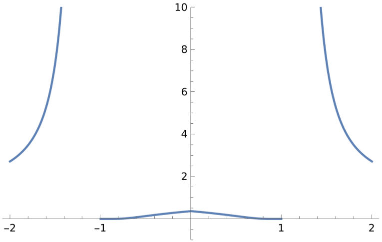
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$



分段函数的连续性

第二类间断点

$$f(x) = e^{\frac{1}{|x|-1}}$$



分段函数的连续性

判断间断点

Dirichlet 函数 $D(x)$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Riemann 函数 $R(x)$

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{if } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ gcd(p,q) = 1, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Outline

四则运算性质

若函数 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续, 则它们的和、差、积、商（分母不为 0 ）在 x_0 处也连续.

复合运算性质

若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi\left(x_0\right)$ 处也连续, 则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续, 即有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\varphi\left(x_0\right)\right]$

反函数的连续性

单调递增 (递减) 且连续的函数, 其反函数也单调递增 (递减) 且连续.

基本初等函数的连续性

$x^n(x>0, n>1)$, $\sin(x)$, e^x 是连续的.

Why?

反函数连续性扩张定义

$x^n(x>0, n>0)$, $\arcsin(x)$, $\log x$, 在其定义域上是连续的.

加点四则运算和复合运算

$$\left(\frac{\lg(100+x)}{4^x+\arcsin x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\tan\frac{e^{\arccos x}}{2}}\cdot\csc^2\frac{\log x}{2}.$$

Outline

基本初等函数的连续性

开区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.
闭区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

有什么区别呢？**函数在端点上的连续性.**

基本初等函数的连续性

开区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.
闭区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

有什么区别呢? **函数在端点上的连续性.**

基本初等函数的连续性

开区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.
闭区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

有什么区别呢？函数在端点上的连续性.

连续函数的性质

连续函数在区间上的连续性

基本初等函数的连续性

开区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.
闭区间连续: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点都连续, 在 a 点右连续, 在 b 点左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

有什么区别呢？**函数在端点上的连续性.**

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联？**函数端点的连续性.**

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.
(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联? 函数端点的连续性.

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.
(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联？**函数端点的连续性.**

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.
(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联? **函数端点的连续性.**

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.
(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联？**函数端点的连续性.**

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.

(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

连续函数的性质

连续函数在闭区间上的连续性

定义: 最大值和最小值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得对任意的 $x \in I$, 有

$$f\left(x_2\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right),$$

则称 $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$ 分别为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值和最小值, 点 x_1, x_2 叫做 $y=f(x)$ 的最大值点和最小值点.

最值定理

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

与 I 的开闭性的关联？**函数端点的连续性.**

$$f(x)=x^{-1}, \quad x \in(0,1).$$

以及推论: 闭区间上的连续函数是有界的.
(开区间, 半开半闭区间则没有这个结论)

连续函数的性质

连续函数在闭区间上的连续性

介值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 为 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则任给值 $c : m < c < M$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$.

如何证明？二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

例题

证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$f(x) : x^5 - 3x - 1,\ f(1) = -3,\ f(2) = 32 - 6 - 1 = 25,\ f(1) \cdot f(2) = -75.$$

介值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, M 和 m 为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则任给值 $c: m<c<M$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=c$.

如何证明? 二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)=0.$$

例题

证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$f(x): x^5-3x-1,\ f(1)=-3,\ f(2)=32-6-1=25,\ f(1)\cdot f(2)=-75.$$

连续函数的性质

连续函数在闭区间上的连续性

介值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, M 和 m 为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则任给值 $c: m<c<M$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=c$.

如何证明？二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)=0.$$

例题

证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$f(x): x^5-3x-1,\quad f(1)=-3,\quad f(2)=32-6-1=25,\quad f(1)\cdot f(2)=-75.$

介值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，M 和 m 为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则任给值 $c: m<c<M$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

如何证明？二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=0.$$

例题

证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$f(x): x^5-3x-1,\ f(1)=-3,\ f(2)=32-6-1=25,\ f(1)\cdot f(2)=-75.$$

连续函数的性质

连续函数在闭区间上的连续性

介值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，M 和 m 为 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，则任给值 $c : m < c < M$，存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = c$.

如何证明？二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi) = 0.$$

例题

证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$f(x) : x^5 - 3x - 1,\ f(1) = -3,\ f(2) = 32 - 6 - 1 = 25,\ f(1) \cdot f(2) = -75.$$

介值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 为 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则任给值 $c : m < c < M$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$.

如何证明？二分逼近与二分求解.

推论

若函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

例题

证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

$$f(x) : x^5 - 3x - 1,\ f(1) = -3,\ f(2) = 32 - 6 - 1 = 25,\ f(1) \cdot f(2) = -75.$$

Thank you for your attention!

Questions?

Homework: Page 82: 28, 31, 36.