PDE 阅读笔记

编者

2025 年 10 月 29 日

目录

第一章 热方程的能量估计 1

1.1 问题设置 1

1.2 基本能量不等式 1

1.3 进一步阅读 1

第二章 Sobolev 空间速查 3

2.1 基本定义 3

2.2 紧嵌入 3

2.3 参考资料 3

第一章　热方程的能量估计

1.1　问题设置

考虑在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的热方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0, T]. \tag{1.1}$$

经典能量方法基于对 $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$ 的演化进行积分估计。

1.2　基本能量不等式

定理 1.1 (能量衰减)**.** *若 u 是 Eq. (1.1) 的平滑解，则*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + 2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

证明思路. 将 Eq. (1.1) 与 u 相乘并积分，对 Laplace 项做分部积分即可得到结论。该推导说明能量沿时间单调递减。 □

1.3　进一步阅读

更完整的背景与推广可参考 **evans2010** 的第 2 章。

第二章 Sobolev 空间速查

2.1 基本定义

设 $1 \leq p \leq \infty$，Sobolev 空间

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}$$

配以半范数 $|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$。

2.2 紧嵌入

定理 2.1 (Rellich–Kondrachov). *令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 Lipschitz 区域，$1 \leq p < p^* < \infty$。若 $kp < n$ 且 $p^* = \frac{np}{n-kp}$，则嵌入*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

对所有 $1 \leq q < p^*$ 紧致。

2.3 参考资料

经典教材 **gilbarg2001** 第 7 章给出了完整证明以及边界正则性的细节。