JOURDAN
Pierre-Eliot
M2.

PROJET EDP - PARTIE THÉORIQUE

* PROBLÈME :

Soit $\Omega =]0;1[\times]0;1[\subset \mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega_n$ telle que $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$. On note $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et on considère le problème de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) \text{ sur } \Omega & (1) \\ u(x,y) = u_d(x,y) \text{ sur } \partial\Omega_d & (2) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) \text{ sur } \partial\Omega_n. & (3) \end{cases}$$

1) Établissons la formulation variationnelle du problème :

On note $H_0^1(\Omega) := \{ w \in H^1(\Omega) \,/\, \gamma_0(w) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \}$.

Soit $u \in H^2(\Omega)$. $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, l'équation (1) donne :

$\int_\Omega -\Delta u\, w\, dx = \int_\Omega f w\, dx.$

Appliquons la formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u\, w\, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla w\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx.$$

D'où : $\int_\Omega \nabla u \nabla w\, dx = \int_\Omega f w\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx.$ (4)

$\forall w \in H_0^1(\Omega)$.

On considère $u \in H^1(\Omega)$, solution de (4) et on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$.

D'une part, $\int_\Omega \nabla u \nabla w\, dx = \int_\Omega \nabla(v+u_d)\nabla w\, dx$

$= \int_\Omega \nabla v \nabla w\, dx + \int_\Omega \nabla u_d \nabla w\, dx$

par linéarité de l'application ∇ (gradient).

D'autre part, puisque $\partial\Omega = \partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d$, on a :

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx = \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\underbrace{\gamma_0(w)}_{=0 \text{ par hypothèse sur } H_0^1(\Omega)} dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx$$

Or, $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\nu_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\Big|_{\partial\Omega_n}\nu_i = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_n} = g$

d'après l'équation (3).

Donc $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\, dx = \int_{\partial\Omega_n} g\,\gamma_0(w)\, dx.$

Ainsi, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\, \gamma_0(w)\, dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx.}$$

La formulation variationnelle du problème peut donc s'écrire :

$a(v,w) = \ell(w)$ avec :

$$a : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (v,w) \mapsto \int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\ell : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ w \mapsto \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\, \gamma_0(w)\, dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx. \end{cases}$$

2) Montrons alors l'existence et l'unicité d'une solution du problème précédent :

* $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle , \rangle_{1,\Omega}$ défini dans l'énoncé est un Hilbert.

* Etude de ℓ : → Linéarité : la linéarité de ℓ est issue de la linéarité de l'intégrale et de γ_0.

→ Continuité de ℓ : $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\ell(w)| \leq \left|\int_\Omega f w \, dx\right| + \left|\int_{\partial\Omega_n} g\, \gamma_0(w)\, dx\right| + \left|\int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx\right|$$

$$\leq |\langle f, w\rangle_{L^2(\Omega)}| + |\langle g, \gamma_0(w)\rangle_{L^2(\partial\Omega_n)}| + |\langle u_d, w\rangle_{1,\Omega}|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\text{C.S.} \begin{cases} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} + |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \\ \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0\|) \|w\|_{L^2(\Omega)} + |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}. \end{cases}$$

avec $\|\gamma_0\| = \sup\limits_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ w \neq 0}} \dfrac{\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)}}{\|w\|_{H^1(\Omega)}}$.

Or, d'après l'inégalité de Poincaré, $\exists\, C_\Omega > 0 \,/\, \forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |w|_{1,\Omega}$. D'où ; $\forall w \in H_0^1(\Omega)$:

$$|\ell(w)| \leq \underbrace{(|u_d|_{1,\Omega} + C_\Omega(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0\|)}_{>0} |w|_{1,\Omega}.$$

Donc ℓ est bien continue.

* Étude de a : → Bilinéarité : la bilinéarité de a est issue de la linéarité de l'intégrale.
→ Continuité de a : $\forall (v, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,
$|a(v,w)| \leq |\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx| \leq |v|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$ d'après l'inég de Cauchy-Schwarz. Donc a est bien continue.
→ Coercivité de a : $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $a(w,w) = \int_\Omega \nabla w \nabla w \, dx = |w|_{1,\Omega}^2$ (d'après la définition de $\langle , \rangle_{1,\Omega}$). Donc a est bien coercive.

D'après le théorème de Lax-Milgram, $\exists ! \, v \in H_0^1(\Omega) \,/\, \forall w \in H_0^1(\Omega)$, $a(v,w) = \ell(w)$. Ainsi, le problème admet bien une unique solution.

3) Étudions à présent la formulation variationnelle discrète de ce problème (FV → FVh).
Soit V_h un sous espace vectoriel du Hilbert $H_0^1(\Omega)$, tel que $\dim(V_h) = n$. Soit $v_h \in V_h$ une solution du problème discret :
$\forall w_h \in V_h$, $a(v_h, w_h) = \ell(w_h)$.
Soit $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in V_h^n$ une base de V_h : $v_h = \sum_{i=1}^n v_i a_i$.
Donc, v_h solution de $(P_{FV_h}) \iff \forall j \in [\![1,n]\!]$, $a(v_h, a_j) = \ell(a_j)$.
$\iff \forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n v_i \, a(a_i, a_j) = \ell(a_j)$
$\iff \boxed{A v_h = b}$

(On renomme la base (a_i) en (η_i)).

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A_{ij} = a(a_i, a_j) = \int_\Omega \nabla a_i \nabla a_j \, dx$
$= \int_\Omega \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j \, dx$.

et $b \in \mathbb{R}^n \,/\, b_i = \ell(a_i) = \int_\Omega f a_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \underbrace{\gamma_0(a_i)}_{= \gamma_0(\eta_i) = \eta_i|_{\partial\Omega_n} = \eta_i} dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla a_i \, dx$

$\Rightarrow b_i = \int_\Omega f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \, \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla \eta_i^T \nabla \eta_k \, dx$
car $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$.

Existence et unicité de la solution discrète du système :

~~Soit~~ $H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert et d'après question 2), a est une forme bilinéaire continue et coercive de $H_0^1(\Omega)^2$ et f une forme linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$.

De plus V_h est un sev de $H_0^1(\Omega)$ de dimension $< +\infty$.

Alors, le problème discret (P_{FV_h}) : " Trouver $v_h \in V_h$ / $\forall w_h \in V_h$ $a(v_h, w_h) = \ell(w_h)$ " admet une unique solution d'après le Lemme de Céa.