Rapport de projet Télécommunications (séquence 5)

GILLOTIN Damien, JOURDAN Pierre-Eliot (Groupe I)

2 Impact d'un canal de propagation multitrajets

2.1 Etude théorique

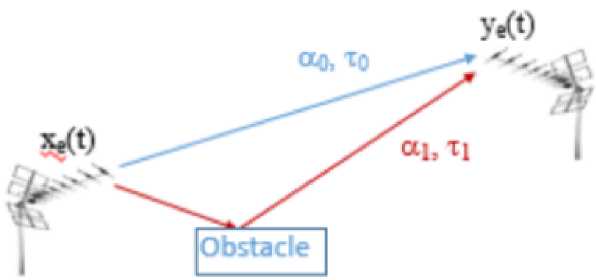


Figure 5: Canal multi trajets

1) *Ecrire ye(t) en fonction de xe(t) et des paramètres du canal (retards et coefficients d'atténuation).*

$$ye(t) = \alpha 0 \times xe(t - \tau 0) + \alpha 1 \times xe(t - \tau 1)$$

2) *En déduire la réponse impulsionnelle hc(t) du canal passe-bas équivalent.*

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha 0 \times x(t - \tau 0) + \alpha 1 \times x(t - \tau 1) \\ &= (\alpha 0 \times \delta(t - \tau 0) + \alpha 1 \times \delta(t - \tau 1)) * x(t) \\ &= hc(t) * x(t) \end{aligned}$$

D'où : $hc(t) = \alpha 0 \times \delta(t - \tau 0) + \alpha 1 \times \delta(t - \tau 1)$.

3) *On prendra* *$\tau 0 = 0$* *(ligne de vue directe),* *$\tau 1 = \tau 0 + Ts$* *(trajet réfléchi),* *$\alpha 0 = 1$* *et* *$\alpha 1 = 0, 5$.* *Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception hr(t) pour la séquence binaire transmise suivante 1110010.*

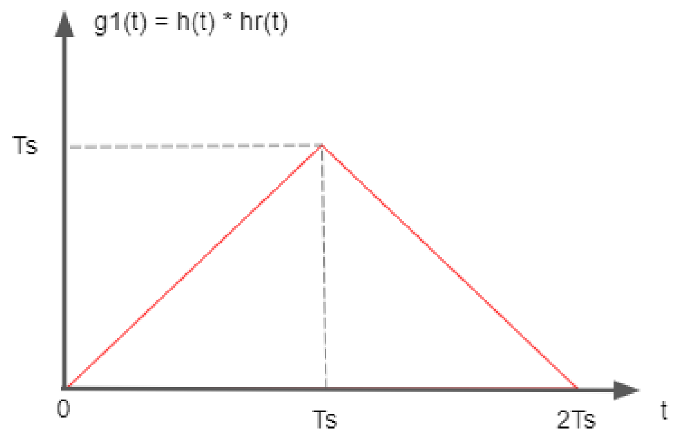
D'après le cours, on connait l'expression de g comme convolution de h(t), hr(t) (= h(t)) et hc(t) :

$$g(t) = h(t) * hc(t) * hr(t) = h(t) * hr(t) * hc(t).$$

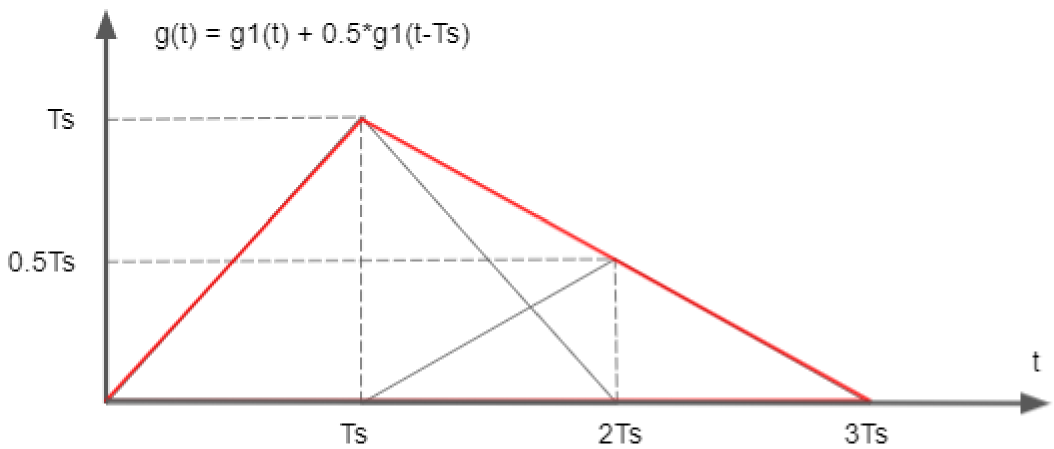
Notons g1(t) = h(t) ∗ hr(t), on a alors :

$$g(t) = g1(t) * (\delta(t) + 0.5\times\delta(t - Ts)) = g1(t) + 0.5\times g1(t - Ts).$$

g1(t) est une convolution de deux fonctions porte de largeur Ts et de hauteur 1 (h(t) = hr(t) = $\Pi_{Ts}(t)$). On connaît, d'après le cours, l'allure de g1(t), fonction triangle centrée en Ts, de hauteur Ts :



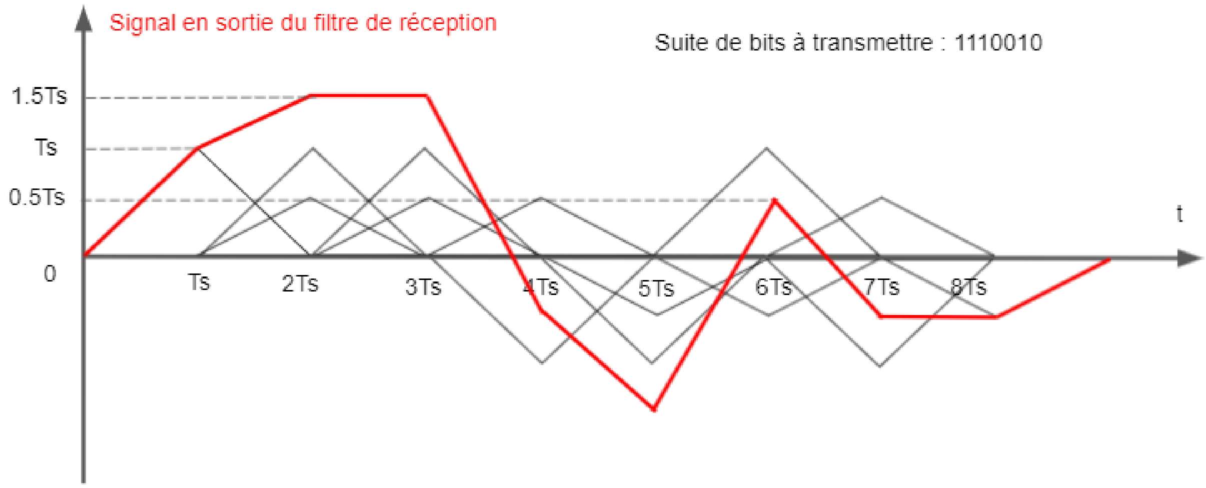
D'où la forme prise par g(t) :



Le signal sans bruit en sortie du filtre de réception a pour expression :

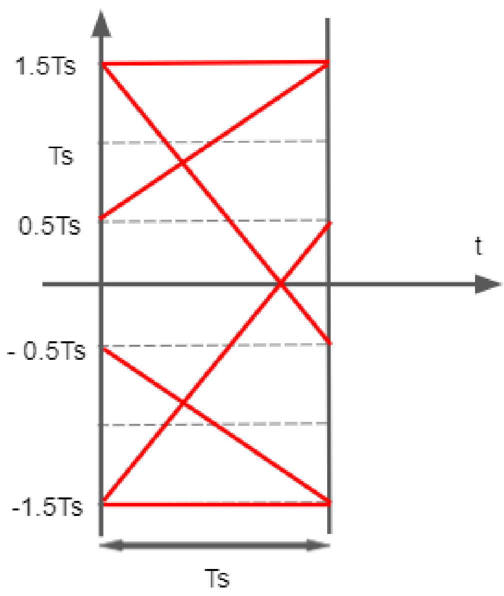
$$z(t) = \Sigma_k a_k \times g(t - kT_s)$$

Il est tracé en dessous :



4) *Tracer le diagramme de l'œil sans bruit en sortie du filtre de réception hr(t). Est-il possible de respecter le critère de Nyquist sur cette chaîne de transmission ?*

Le diagramme de l'œil, tracé sans bruit sur une durée Ts a partir du signal z(t) en sortie du filtre de réception, représente, sur un même tracé, tout ce qui peut se produire sur ce signal pendant Ts.
Ci-dessous son tracé :



D'après le diagramme tracé juste avant, on observe de l'interférence entre les symboles émis puisqu'en échantillonnant dans la durée Ts, on voit toujours (quel que soit l'instant d'échantillonnage considéré) apparaître plus de deux valeurs possibles alors que seulement deux valeurs sont possibles pour les symboles émis.

Le critère de Nyquist ne pourra donc pas être respecté.

5) *En supposant que l'on échantillonne à t0 +mTs avec t0 = Ts et que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions avec un seuil à 0 (chaine de transmission pour canal AWGN), calculer le TEB de la liaison en fonction de Ts et σw, σ²w représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception hr(t).*

On a M = 2 (ordre de modulation) car on effectue un mapping binaire (symboles ∈ $\pm$ 1) donc :

$$\text{TEB} = \text{TES} = P\,[a_k = -1] \times P\,[\hat{a}_k = +1 \mid a_k = -1] + P\,[a_k = +1] \times P\,[\hat{a}_k = -1 \mid a_k = +1]$$

En considérant wm l'échantillon de bruit prélevé à l'instant t0 + mTs :

$P\,[\hat{a}_k = +1 \mid a_k = -1] = P\,[a_{k-1} = -1] \times P\,[-1.5 \times Ts + wm > 0] + P\,[a_{k-1} = +1] \times P\,[-0.5 \times Ts + wm > 0]$

$$= \frac{1}{2} \times P\,[wm > 1.5 \times Ts] + \frac{1}{2} \times P\,[wm > 0.5\,Ts]$$

$$= \frac{1}{2} \times Q\,(1.5 \times Ts / \sigma w) + \frac{1}{2} \times Q\,(0.5 \times Ts / \sigma w)$$

et

$P\,[\hat{a}_k = -1 \mid a_k = +1] = P\,[a_{k-1} = -1] \times P\,[0.5 \times Ts + wm < 0] + P\,[a_{k-1} = +1] \times P\,[1.5 \times Ts + wm < 0]$

$$= \frac{1}{2} \times P\,[wm < -0.5 \times Ts] + \frac{1}{2} \times P\,[wm < -1.5\,Ts]$$

$$= \frac{1}{2} \times Q\,(1.5 \times Ts / \sigma w) + \frac{1}{2} \times Q\,(0.5 \times Ts / \sigma w)$$

d'où $\text{TES} = \text{TEB} = 2 \times \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times Q\,(1.5 \times Ts / \sigma w) + \frac{1}{2} \times Q\,(0.5 \times Ts / \sigma w)]$

$$\text{TES} = \text{TEB} = \frac{1}{2} \times Q\,(1.5 \times Ts / \sigma w) + \frac{1}{2} \times Q\,(0.5 \times Ts / \sigma w)$$

avec $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

6) *Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ²w en fonction de N0 et de Ts.*

D'après la relation de Wiener-Lee :

$\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ne}(f) \times |Hr(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \times |Hr(f)|^2 df$ avec Hr(f) = TF [hr(t)].

On peut alors utiliser l'égalité de Parseval, on a :

$$\boxed{\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \times |hr(t)|^2 dt = N_0 \times \int_{-\infty}^{+\infty} |hr(t)|^2 dt = N_0 \times T_s}$$

car hr(t) = $\Pi_{Ts}(t)$.

7) *Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, Es, en fonction de Ts.*

D'après le cours, on a la formule :

$$\boxed{Es = Pr \times Ts}$$

avec Pr la puissance du signal reçu : r(t) = $\Sigma_k a_k \times he(t - kT_s)$ où he(t) = h(t) * hc(t) représente la forme d'onde reçue. On a donc, par définition de la puissance d'un signal :

$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(f)\, df$ avec $S_r(f) = \sigma_a^{\ 2}/T_s \times \left|H_e(f)\right|^2$ car les symboles ak sont de moyenne nulle ($\in \pm 1$) et sont indépendants.

$H_e(f) = H(f) \times H_c(f)$. On considère que P_r vaut la somme des amplitudes du signal au carré : $P_r = (1.5^2 + 0.5^2 + (-0.5)^2 + (-1.5)^2) = 5$.

Or, $\sigma_a^{\ 2} = E[\left|a_k\right|^2] = 1$ car $a_k \in \pm 1$. D'où le résultat :

$$\boxed{Es = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_a^{\ 2}/T_s) \times \left|H_e(f)\right|^2 df \times T_s = 5 \times T_s.}$$

8) *Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de Eb/N0, rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaîne étudiée.*

D'après 5), on a : TEB = $\frac{1}{2}$ ×Q (1.5×Ts / σw) + $\frac{1}{2}$ ×Q (0.5×Ts / σw)

D'après 6), on a : $\sigma_w^2 = N_0 \times T_s$

D'après 7), on a : Es = $5 \times T_s \Leftrightarrow T_s = E_s/5$

D'où : TEB = $\frac{1}{2} \times [Q(1.5 \times \sqrt{T_s/N_0}) + Q(0.5 \times \sqrt{T_s/N_0})]$

$= \frac{1}{2} \times [Q((1.5/\sqrt{5}) \times \sqrt{E_s/N_0}) + Q((0.5/\sqrt{5}) \times \sqrt{E_s/N_0})]$

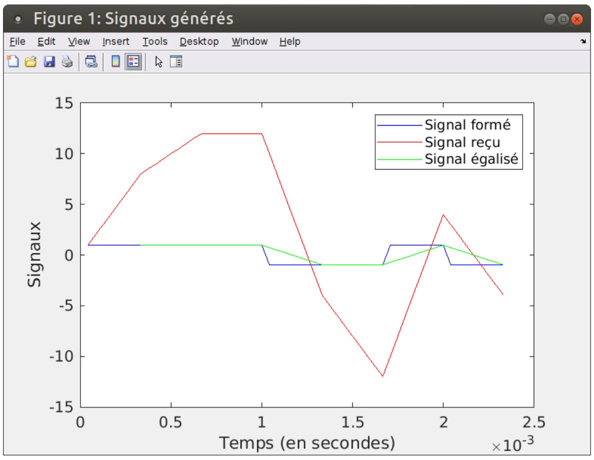
Or, $Es = Eb \times log2(M) = Eb$ car M =2.

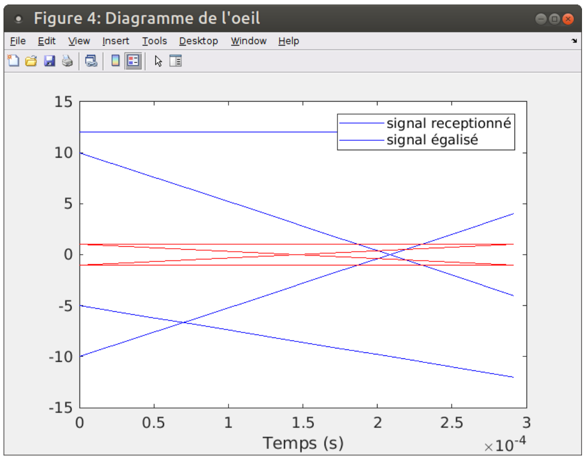
D'où l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction du rapport Eb/N0 :

$$\boxed{\text{TEB} = \frac{1}{2} \times [Q((1.5/\sqrt{5}) \times \sqrt{E_b/N_0}) + Q((0.5/\sqrt{5}) \times \sqrt{E_b/N_0})]}$$

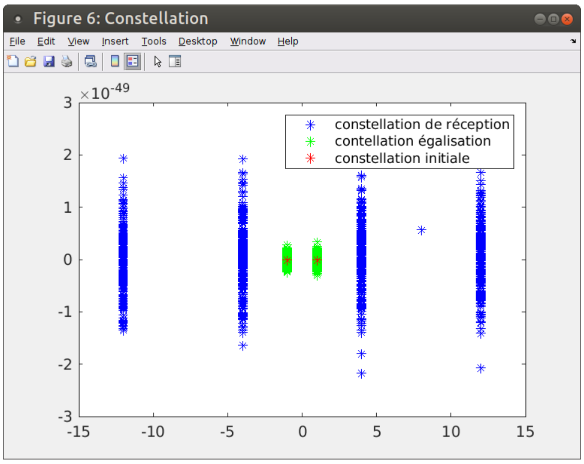
2.2 Implantation sous Matlab

3) (a) *Vérifiez que vous retrouvez bien les résultats obtenus dans votre étude théorique : forme du signal en sortie du filtre de réception hr(t) pour la séquence binaire 1110010, diagramme de l'œil.*





(b) *Visualisez la constellation obtenue en réception. Est-elle conforme à ce que vous attendiez ?*



La constellation obtenue est conforme à celle que nous attendions avec des valeurs à ±0.5Ts et ±1.5Ts.

NB: l'échelle des ordonnées est en 10^{-49}

(c) *Mesurez le TEB et expliquez la valeur obtenue.*

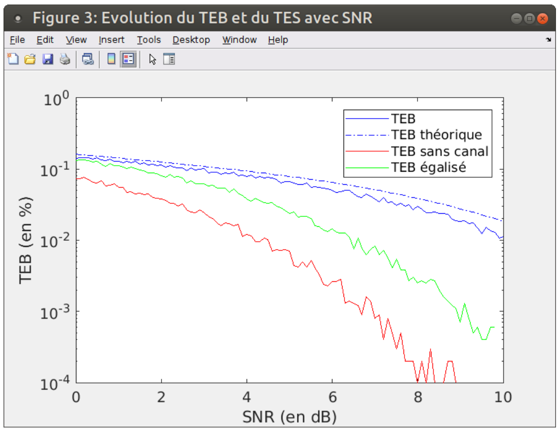
```
>> projet

TEB =

     0
```

Nous obtenons un TEB nul car, même si le critère de Nyquist n'est pas respecté, le signal échantillonné est de même signe que le symbole émis. Le symbole retrouvé est donc le même que le symbole émis (donc le même bit).

4) (a) *Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée. Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission.*

(b) *Comparer, en les traçant sur une même figure, le TEB de la chaîne de transmission implantée et le TEB obtenu pour la même chaîne de transmission sans filtrage canal (canal AWGN).*

Nous avons le TEB de la chaîne de transmission qui suit celle calculée théoriquement. Nous voyons que sans canal, le TEB est bien moindre car il n'y a pas d'interférences entre symboles. Pour pallier cela, nous ajoutons l'égaliseur ce qui nous permet d'améliorer le TEB.



3 Egalisation ZFE

3.2 Etude à réaliser

1) *Déterminer les coefficients de l'égaliseur à implanter pour égaliser le canal multitrajet considéré précédemment (figure 5 avec τ0 = 0, τ1 = τ0 + Ts, α0 = 1, α1 = 0, 5).*

On cherche à résoudre le système matriciel décrit dans l'énoncé (et donc déterminer les coefficients ck). D'après la question 2.1 3), on a : z(t) = $\Sigma_k a_k \times g(t - kT_s) = g(t)$ (car les coefficients ak sont tels que :$a_0 = 1\ et\ \forall k\ non\ nul,\ a_k = 0$, il s'agit d'un dirac) le signal sans bruit en sortie du filtre de réception et son graphe associé. En supposant qu'on échantillonne à t0 = Ts, et en prenant K = N = 3, on peut trouver les coefficients ck solutions du système :
On a : z(*t0*) = z(Ts) = Ts, z(2Ts) = 0.5Ts et z(3Ts) = z(4Ts) = 0.
Donc :

$$c_0 = 1/z(t_0) = 1/T_s$$
$$c_1 \times z(t_0) = -c_0 \times z(t_0 + T_s) \Leftrightarrow c_1 = -1/(2T_s)$$
$$c_2 \times z(t_0) = -c_1 \times z(t_0 + T_s) - c_0 \times z(t_0 + 2T_s) \Leftrightarrow c_2 = 1/(4T_s)$$
$$c_3 \times z(t_0) = -c_2 \times z(t_0 + T_s) - c_1 \times z(t_0 + 2T_s) - c_0 \times z(t_0 + 3T_s) \Leftrightarrow c_3 = -1/(8T_s)$$

2) *Implanter la chaîne avec égalisation sous Matlab.*

(a) *Sans bruit :*

i) Déterminer, par simulation, les coefficients de l'égaliseur en plaçant un Dirac à l'entrée de la chaîne (phase d'apprentissage du canal de propagation). Ils pourront être comparés à ceux calculés précédemment.

```
>> C

C =

    0.1250
   -0.0625
    0.0312
   -0.0156
    0.0078
   -0.0039
    0.0020
   -0.0010
    0.0005
   -0.0002
```

En numérique, Ts → Ns ce qui nous donne :

$c_0 = 1/8 = 0.125$

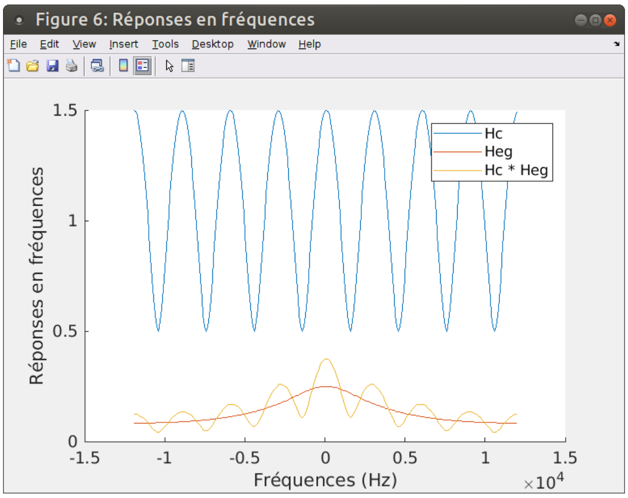
$c1 = -1/16 = -0.0625$

$c_2 = 1/32 = 0.0312$

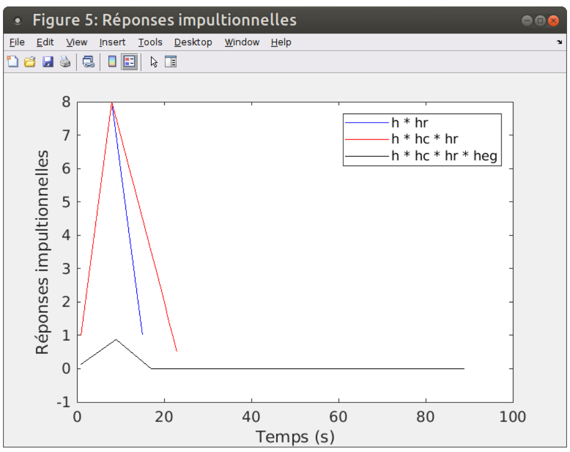
$c_3 = -1/64 = -0.0156$

Les résultats expérimentaux sont en accord avec les résultats théoriques.

ii) Tracer la réponse en fréquence du canal de propagation, la réponse en fréquence de l'égaliseur, le produit des deux. Que peut-on conclure ?

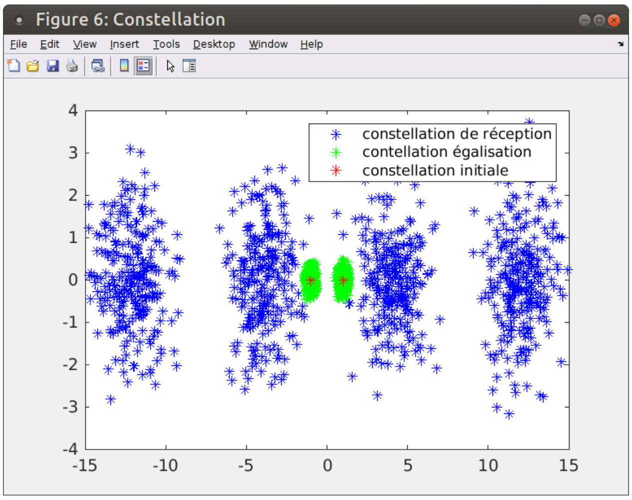


iii) Tracer la réponse impulsionnelle de la chaîne de transmission échantillonnée à Ns avec et sans égalisation. Que peut-on conclure ?



Nous voyons ici que le critère de nyquist peut être respecté avec avec t0 = Ts. En effet, on a g(t0) = 1 ≠ 0 et g(t0+kTs) = 0. Donc l'égaliseur est efficace car il permet de compenser les interférences entre symboles.

iv) Générer une information binaire à transmettre dans la chaîne avec égalisation. Comparer les constellations obtenues avant et après égalisation



Ici, nous avons affiché les constellations obtenues avec SNR = 10dB et pour une transmission de 10000 bits.
Nous pouvons voir que la constellation obtenue avec égalisation se rapproche drastiquement de celle initialement transmise.