Lösungsskizzen zu Übungsserie 7

Lösungsskizze zu Aufgabe 7.1

Die Produktionsfunktion beschreibt allgemein den Zusammenhang zwischen Input und Output, d.h. sie gibt an wie viel Output man mit gegebenen Inputs erreichen kann. Wichtig ist, dass man zwischen der kurz- und der langfristigen Produktionsfunktion unterscheidet. Die kurzfristige Produktionsfunktion ist durch einen oder mehrere fixe Inputs gekennzeichnet, wohingegen bei der langfristigen Produktionsfunktion alle Inputs variabel sind. Typischerweise sind bei der kurzfristigen Produktionsfunktion der Input Arbeit variabel und der Input Kapital fixiert.

(a) Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass wir mit ganzzahligen (diskreten) Gütereinheiten rechnen und nicht mit kontinuierlichen, daher können wir die Grenzproduktivität der Arbeit nicht durch Ableiten ($GP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$) bestimmen, sondern müssen Differenzen verwenden $GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$. Wenn wir $K = 3$ fixieren, ergeben sich folgende Grenzproduktivitäten der Arbeit:

$$\begin{aligned} GP^{K=3}_{L:0\to 1} &= 15 \\ GP^{K=3}_{L:1\to 2} &= 18 - 15 = 3 \\ GP^{K=3}_{L:2\to 3} &= 19 - 18 = 1 \end{aligned}$$

Die Grenzproduktivität der Arbeit nimmt folglich mit steigendem Arbeitseinsatz ab.

(b) Für $K = 1$ erhalten wir die folgenden Grenzproduktivitäten der Arbeit:

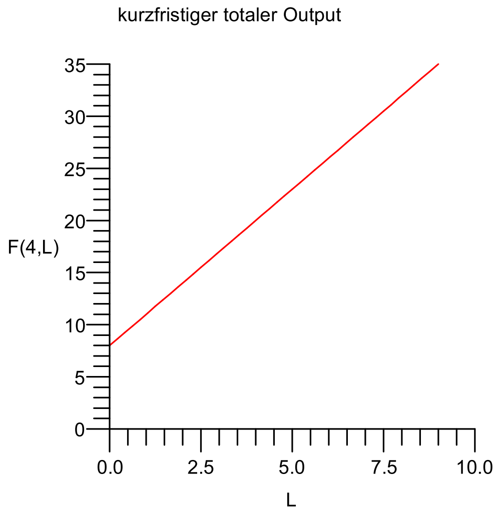
$$\begin{aligned} GP^{K=1}_{L:0\to 1} &= 4 \\ GP^{K=1}_{L:1\to 2} &= 10 - 4 = 6 \\ GP^{K=1}_{L:2\to 3} &= 12.5 - 10 = 2.5 \end{aligned}$$

Die Grenzproduktivität nimmt also zuerst mit steigendem Arbeitseinsatz zu und sinkt danach mit zusätzlicher Arbeit.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7.2

(a) Da $K = 4$ gilt, ist die kurzfristige Produktionsfunktion $F(4, L) = Q(L) = 8 + 3L$.

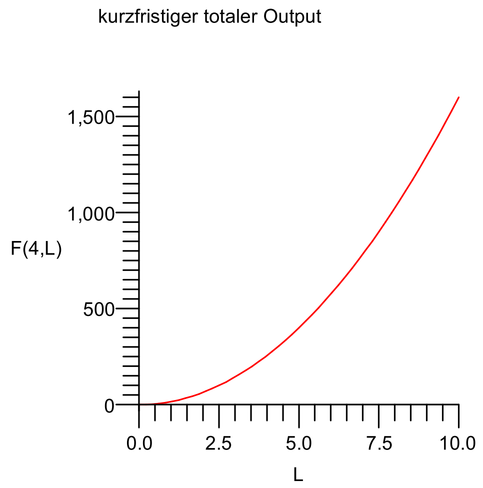
Diese Funktion ist in der folgenden Grafik dargestellt:



Die Grenzproduktivität $\frac{dQ(L)}{dL}$, die der Steigung der Geraden entspricht, beträgt immer 3 und ist somit konstant. Die Grenzproduktivität der Arbeit nimmt mit zunehmendem Einsatz des Faktors Arbeit bei konstantem Kapital $K = 4$ somit nicht ab.

(b) Da $K = 4$ gilt, ist die kurzfristige Produktionsfunktion $F(4, L) = Q(L) = 16L^2$.

Die Produktionsfunktion ist in folgender Grafik dargestellt:



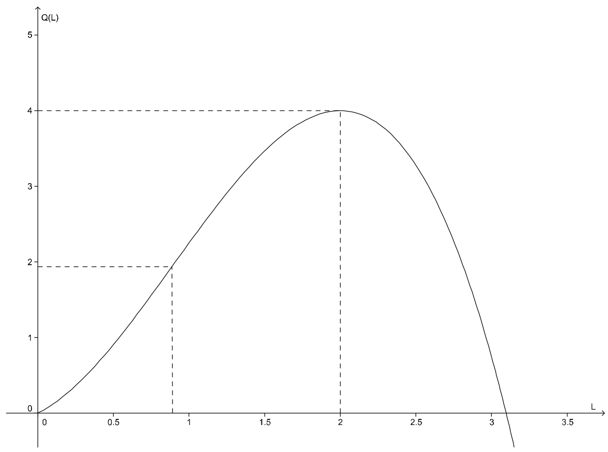
Die partiellen Ableitungen der Produktionsfunktion nach dem Faktor Arbeit sind gegeben durch:

$$\frac{\partial F(4, L)}{\partial L} = 32L \text{ und } \frac{\partial^2 F(4, L)}{\partial L^2} = 32 \ .$$

Da die zweite Ableitung positiv ist, schließen wir, dass die Grenzproduktivität mit zunehmendem Einsatz des Faktors L steigt.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7.3

Die kurzfristige Produktionsfunktion für $K = 1$ ist: $F(1, L) = Q(L) = L + 2L^2 - \frac{3}{4}L^3$. Die erste, zweite und dritte Ableitung nach L sind wie folgt: $Q'(L) = 1 + 4L - \frac{9}{4}L^2$, $Q''(L) = 4 - \frac{9}{2}L$ und $Q'''(L) = -\frac{9}{2}$. Eine grafische Darstellung ist wie folgt:



(a) Die Bedingungen $Q'(L^*) = 0$ und $Q''(L^*) < 0$ sind hinreichend für ein Maximum von $Q(L)$ an einer Stelle L^*.

$Q'(L) = 1 + 4L - \frac{9}{4}L^2 = 0$ gilt an folgenden Stellen: $L_1 = 2$ und $L_2 = -\frac{2}{9}$. Wir vernachlässigen L_2 da L in unserer Anwendung nicht negativ werden kann. Da $Q''(L_1) = Q''(2) = -5 < 0$, gilt $L^* = L_1 = 2$.

Das maximal mögliche, kurzfristige Produktionsniveau ist folglich $Q(L^*) = 4$. Um dieses Maximum zu erreichen, müssen 2 Einheiten Arbeit eingesetzt werden.

(b) Die Bedingungen $Q''(L^\circ) = 0$ und $Q'''(L^\circ) \neq 0$ sind hinreichend für einen Wendepunkt der kurzfristigen Produktionsfunktion an einer Stelle L°.

$Q''(L^\circ) = 0$ gilt an der Stelle $L^\circ = \frac{8}{9}$. Da $Q'''(\frac{8}{9}) = -\frac{9}{2} \neq 0$, gilt $L^\circ = \frac{8}{9}$.

Bis zum Wendepunkt ist die kurzfristige Produktionsfunktion konvex, danach ist sie konkav. Die Grenzproduktivität der Arbeit ist somit für alle $L < \frac{8}{9}$ zunehmend und für alle $L > \frac{8}{9}$ abnehmend.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7.4

Bisher haben wir Veränderungen im Produktionsoutput betrachtet, die aus einer Veränderung eines Inputs bei gleichzeitiger Fixierung aller anderen Inputs resultiert. Nun betrachten wir Veränderungen im Produktionsoutput, die aus einer simultanen Skalierung aller Inputs resultieren.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Produktionsfunktion $F(K, L)$

- *zunehmende Skalenerträge* hat, wenn für alle Kombinationen von Kapital und Arbeit (K, L) und alle $z > 1$ gilt: $F(zK, zL) > zF(K, L)$,
- *konstante Skalenerträge* hat, wenn für alle Kombinationen von Kapital und Arbeit (K, L) und alle $z > 1$ gilt: $F(zK, zL) = zF(K, L)$,
- *abnehmende Skalenerträge* hat, wenn für alle Kombinationen von Kapital und Arbeit (K, L) und alle $z > 1$ gilt: $F(zK, zL) < zF(K, L)$.

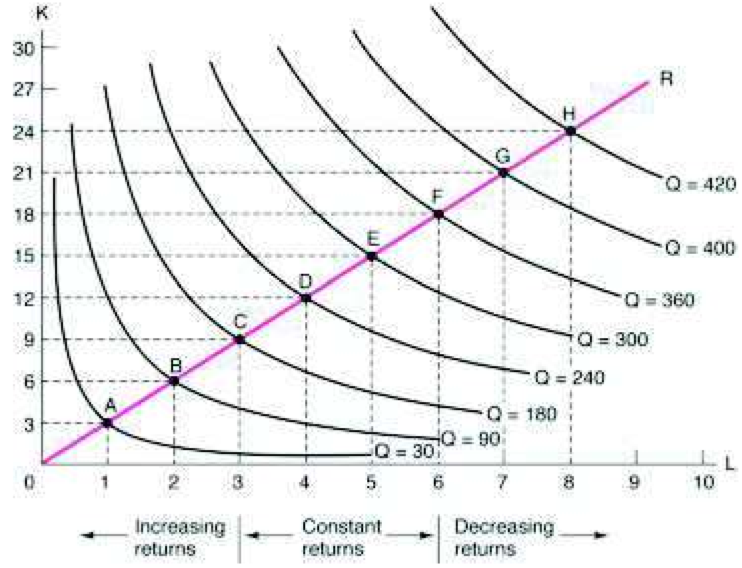
Betrachten wir die Funktion aus Aufgabe 7.2a): $F(K, L) = 2K + 3L$. Da $F(zK, zL) = 2(zK) + 3(zL) = z(2K + 3L) = zF(K, L)$ gilt, hat die Funktion konstante Skalenerträge.

Wir können die Skaleneigenschaften von $F(K, L) = K^2L^2$, der Funktion aus Aufgabe 7.2b) analog prüfen: $F(zK, zL) = (zK)^2(zL)^2 = z^4K^2L^2 > zK^2L^2 = zF(K, L)$ gilt für alle $z > 1$. Folglich hat die Funktion zunehmende und somit keine konstanten Skalenerträge.

Um zu prüfen ob konstante Skalenerträge im Fall der Produktionsfunktion aus Aufgabe 7.1 gegeben sind, vergleichen wir $F(zK, zL)$ mit $zF(K, L)$ für spezifische Werte für K, L und z (wobei $z > 1$). Wenn es mindestens eine Konfiguration von K, L und z gibt, für die die beiden Ausdrücke $F(zK, zL)$ und $zF(K, L)$ nicht gleiche Werte annehmen, dann hat F keine konstanten Skalenerträge. Zum Beispiel: Für $K = 1$, $L = 1$ und $z = 2$ gilt: $F(zK, zL) = F(2, 2) = 13$ und $zF(K, L) = 2F(1, 1) = 8$. Folglich hat die Funktion keine konstanten Skalenerträge.
Wir hätten auch an einer anderen Stelle nachschauen können, z.B. für $K = 2$, $L = 2$ und $z = \frac{3}{2}$ gilt: $F(zK, zL) = F(3, 3) = 19$ und $zF(K, L) = \frac{3}{2} \cdot F(2, 2) = 19.5$.

Bemerkung:
Im Gegensatz zu obiger Definition könnten wir zunehmende, konstante und abnehmende Skalenerträge auch "lokal" d.h. für spezifische Bereiche von (K, L) und z definieren (anstatt sie "global" zu definieren d.h. die Eigenschaft für alle (K, L) und $z > 1$ zu verlangen.). Eine solche Definition würde es erlauben, dass Funktionen unterschiedliche Skaleneigenschaften in unterschiedlichen Bereichen aufweisen. Unten stehende, dem Lehrbuch von Frank (2010, S. 281) entnommene Grafik illustriert einen solchen Fall, in dem die Produktionsfunktion in jeweils unterschiedlichen Bereichen zunehmende, konstante und abnehmende Skalenerträge aufweist.

Die Produktionsfunktion weist lokal steigende Skalenerträge auf: Z.B. von $F(3, 1) = 30$ zu $F(6, 2) = 90$ findet eine Verdopplung von Kapital und Arbeit statt, die aber eine Verdreifachung des Outputs zur Folge hat.
Die Produktionsfunktion weist lokal konstante Skalenerträge auf: Z.B. von $F(12, 4) = 240$ zu $F(15, 5) = 300$ werden die beiden Faktoren je um 25% erhöht wodurch sich der Output ebenfalls um 25% erhöht.



Fallende Skalenerträge sind lokal ebenfalls zu beobachten: Von $F(21,7) = 400$ zu $F(24,8) = 420$ werden die beiden Faktoren Kapital und Arbeit um ca. 14% erhöht, aber der Output erhöt sich dadurch nur um 5%.

Lösungsskizze zu Aufgabe 7.A

Aus der Aufgabe kann lediglich die verbrachte Gesamtzeit pro Aufgabe (je eine Stunde), der totale Ertrag aus einer Aufgabe (8 Punkte bei A bzw. 6 Punkte bei B) und damit der durchschnittliche Ertrag pro Aufgabe berechnet werden, nicht aber der Grenzertrag. Um festzustellen, ob Markus seine Zeit optimal eingeteilt hat, müssten wir jedoch den Grenzertrag kennen. Wäre der Grenzertrag bei beiden Aufgaben gleich gross und bestünde die Prüfung nur aus diesen beiden Aufgaben, hätte Markus seine Zeit optimal eingeteilt. Allerdings wäre intuitiv denkbar, dass bei Aufgabe A die letzten beiden Punkte schwerer zu holen gewesen sind als die nächsten zwei Punkte bei Aufgabe B. Dann wäre der Grenzertrag bei Aufgabe B höher als bei Aufgabe A und Markus hätte seine Zeit nicht optimal eingeteilt.