

## 第四章 运动链接

4.1 关节动画

4.2 正向运动学

4.3 逆向运动学

4.4 运动学应用

4.5 运动捕捉初步

# 关节动画

## ■ 有骨架动物的动画技术：

- 计算机动画技术中最具挑战性的课题之一；
- 促进了机器人等学科的发展；
- 使人类采用计算机动画技术模拟自身的行为和动作成了可能；



# 关节动画复杂性

## ❖ 建模

- 参数曲面和隐函数曲面（难以实现真实的人与动物）
- 三维扫描技术（问题得到了解决）

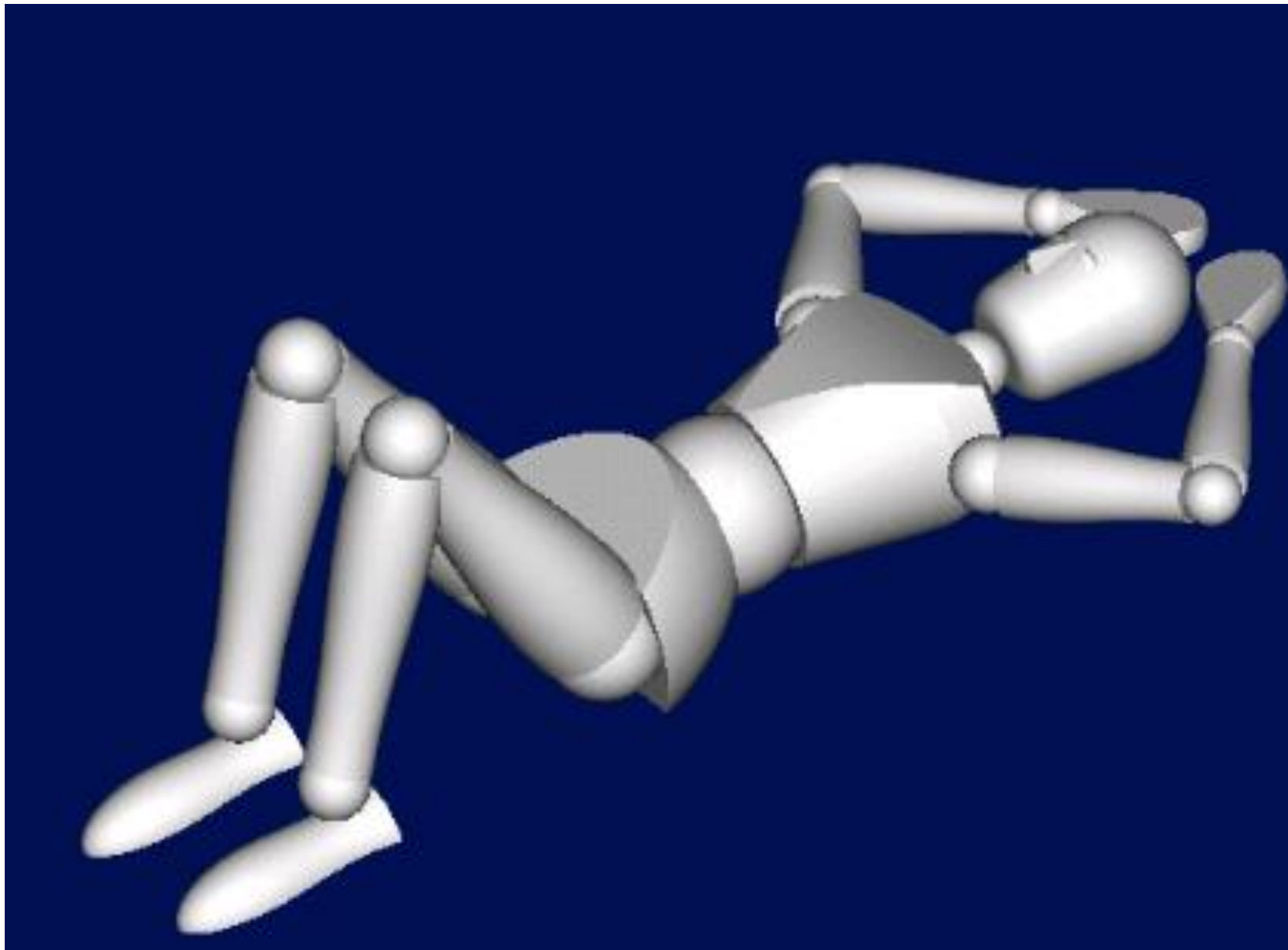
## ❖ 渲染

- 皮肤, 毛发, 皱纹等特效都已有很好的模型

## ❖ 运动控制

- 运动捕捉技术

# 关节动画复杂性-建模



# 关节动画复杂性-建模

## ❖ 建模

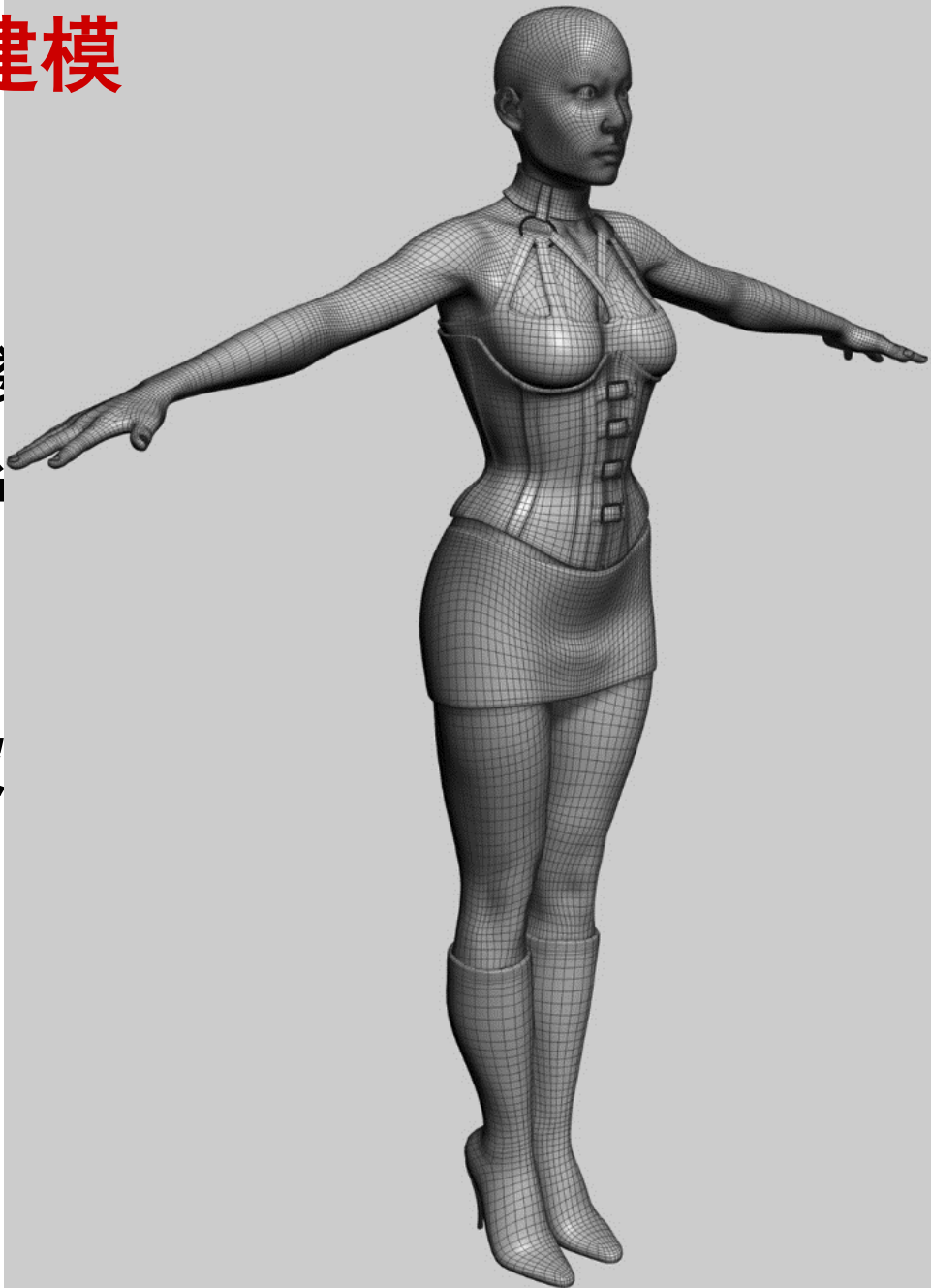
- 参数曲面和隐函数
- 三维扫描技术 (面)

## ❖ 渲染

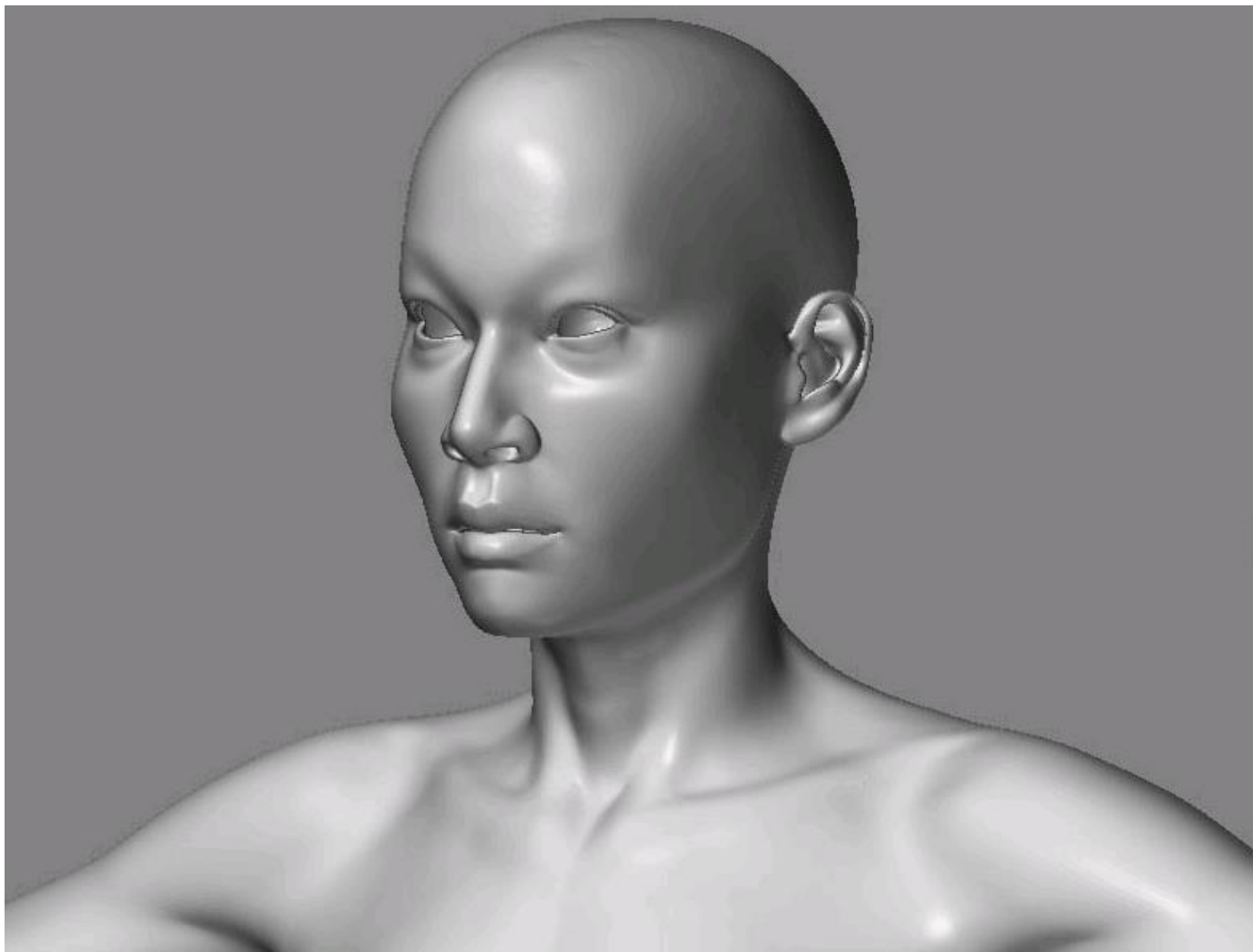
- 皮肤, 毛发, 皱

## ❖ 运动控制

- 运动捕捉技术



## 关节动画复杂性-建模



## 关节动画复杂性-渲染



# 关节动画复杂性-渲染





# 关节动画复杂性

## 关节角色的运动控制很困难

### ❖ 自由度(DOF)很多

¶ 人体有**200**多个自由度

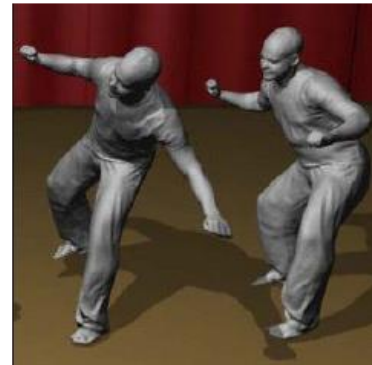
¶ 人体/动物运动涉及**大量的自由度**，其运动的确定非常复杂；

### ❖ 关节角色的运动需具有**平衡性和协调性**

¶ 运动看上去相对直观、简单，但任何动作都是**自然平衡和环境**的多重影响的结果，是许多因素的协同作用所致；（Demo）

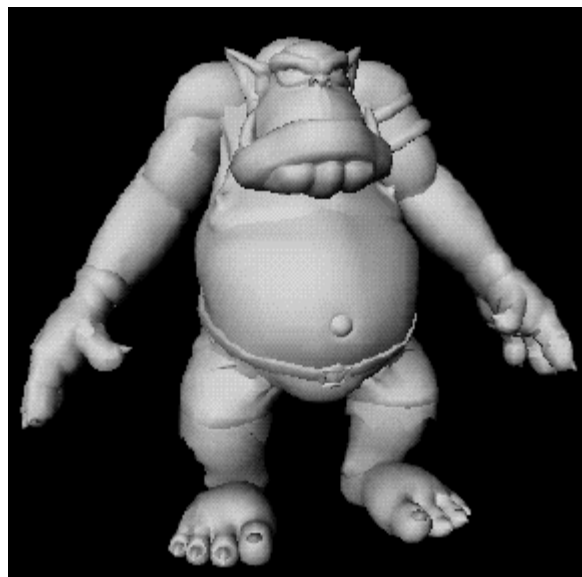
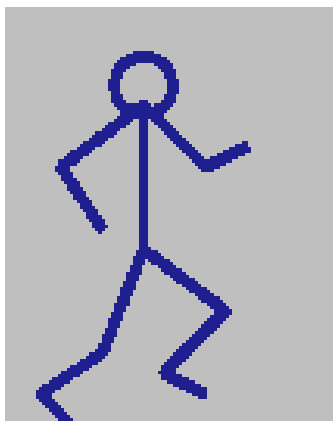
### ❖ 关节角色的运动应体现**个性与风格**

¶ 每个人体或动物角色均有一定的个性，如何抽取**描述角色个性的参数**是有骨架角色动画的重要问题；



# 关节角色的运动控制

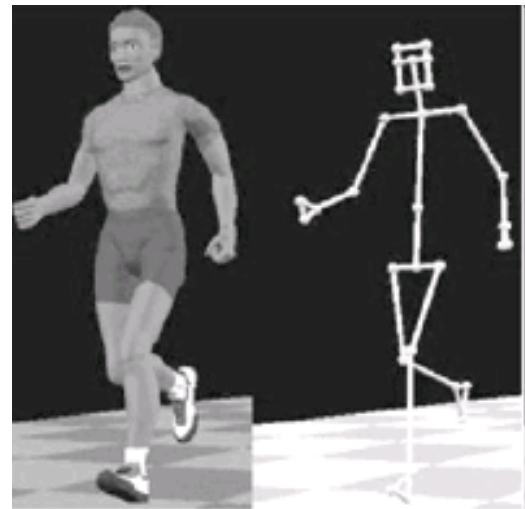
## 关节角色的抽象骨架(Skeleton)



# 关节动画复杂性

## ■ 骨架动画

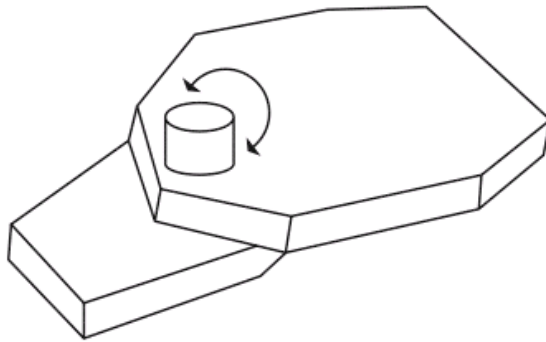
- **骨架控制**三维动画角色的运动；
- 角色的**骨架定义**为一系列骨件，而包裹这些骨件的“**皮肤**”则是一个顶点网；
- 每个顶点的**位置**因受到一个或多个骨件运动的影响而变化；
- 因此，只要定义好角色模型的**骨架动作**就可以实现栩栩如生的动画了；
- 定义为**皮肤顶点的运动**则以**数学公式**的方式生成。



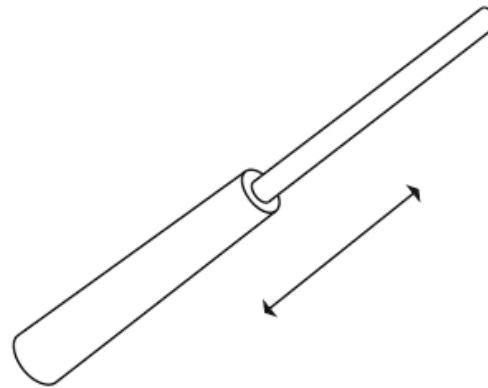
# 关节动画

## ■ 骨架结构的关键

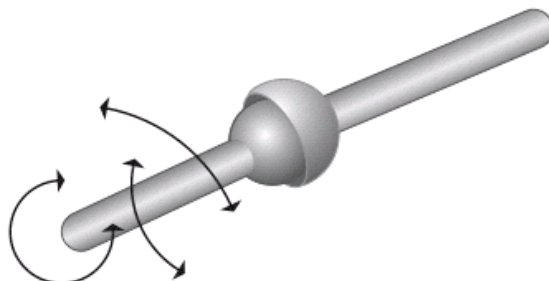
- 关节结构——**关节链结构**



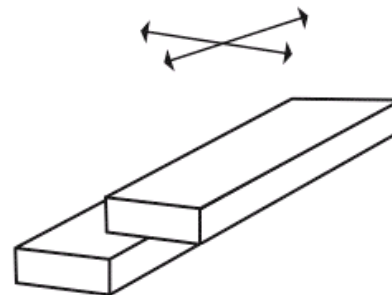
旋转关节 Revolute joint



Prismatic joint 棱柱关节



球形关节 Ball-and-socket joint



Planar joint 平面关节

# 关节链结构

- ✚ 如何有效地描述关节链结构
- ✚ 如何有效地控制关节链结构的运动

## ➤ 运动学(kinematics)方法 \*

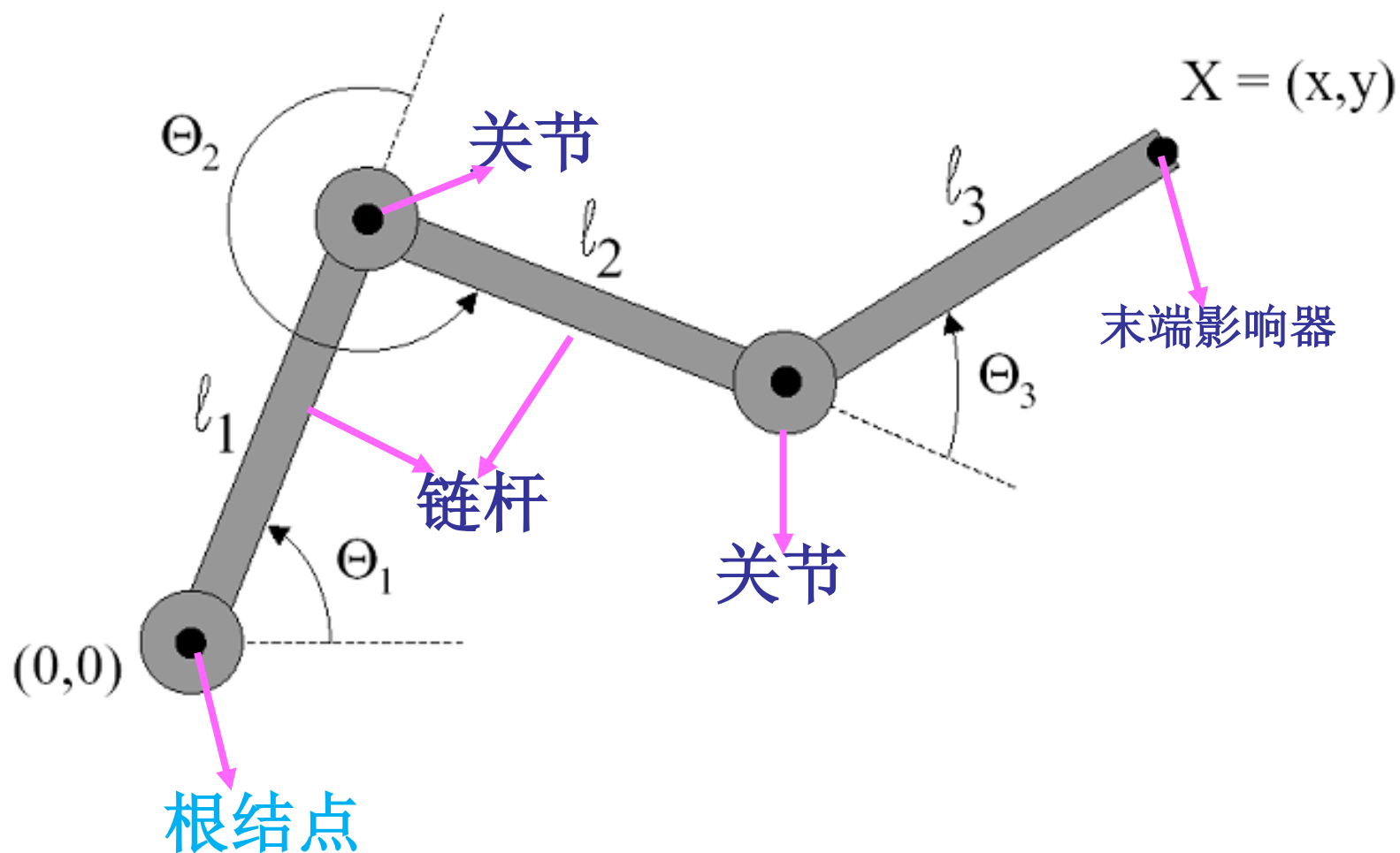
- 物体的位置, 速度, 加速度, 方向, 角速度, 角加速度

## ➤ 动力学(dynamics)方法

- 力, 动力学方程

基于物理  
的动画

# 关节链结构的基本概念

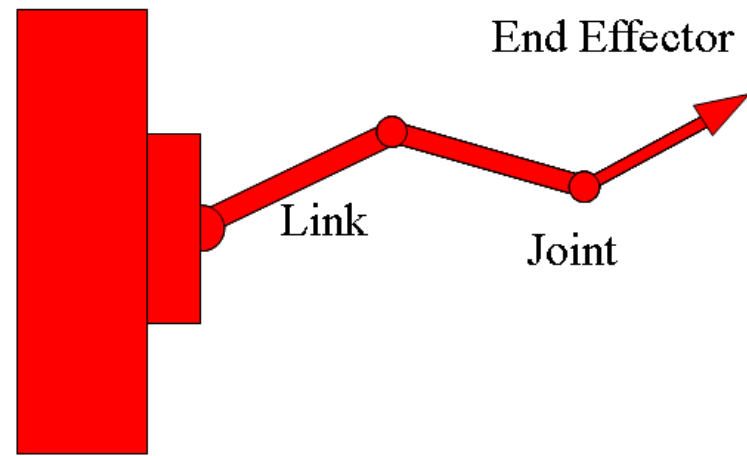


# 关节链结构的基本概念

现实世界  
中有哪些？

## 关节链

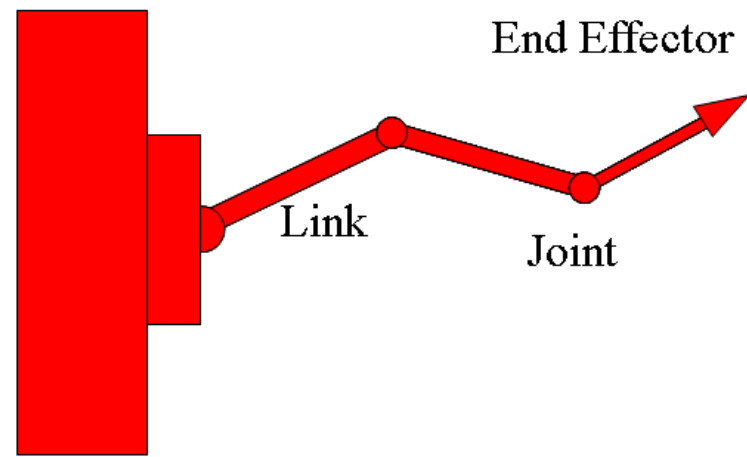
- ❖ 一系列依次相连的刚体连接而成的开链；
- ❖ 两刚体的连接点称为关节(joint)；
- ❖ 连接两相邻关节的刚体称为链杆(link)；
- ❖ 计算机动画中将关节限制为旋转关节，相邻刚体在其连接关节处只能做相对旋转运动，不能做平移运动；



# 关节链结构的基本概念

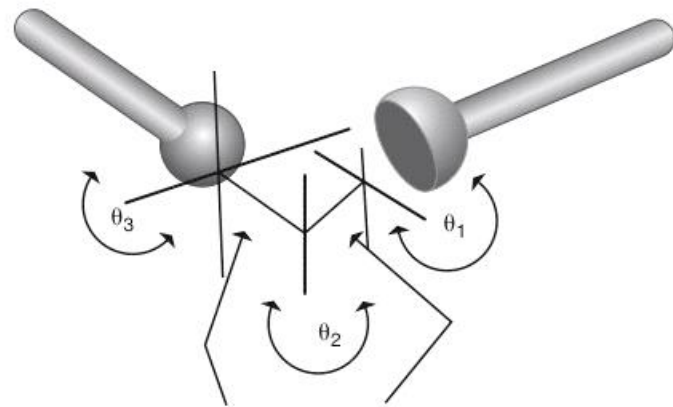
## ✚根结点和末端影响器

- ❖ 关节链的起点为根（基）结点；
- ❖ 其自由末端为末端影响器(end effector)；





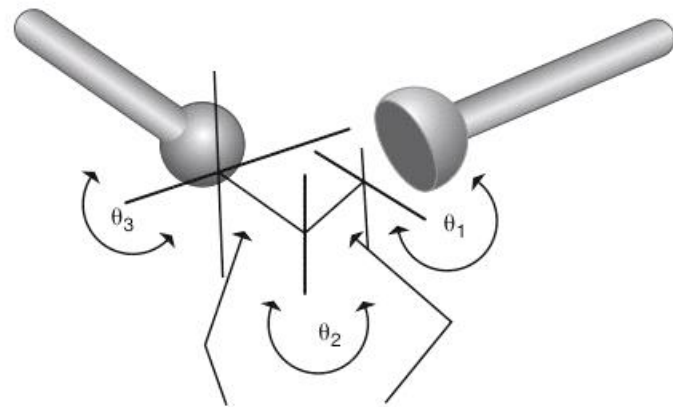
# 关节链结构的基本概念



## 自由度 (DOF)

- ❖ 描述关节沿某个轴或者某一维运动的**变量 $\phi$**
- ❖ 关节一般具有**1-6**个自由度 ( $\phi_1 \dots \phi_N$ )
- ❖ 自由度的值**随时间变化**便可以得到骨架动画
- ❖ 广义的自由度可以指物体的**任何可变参数**
  - 无约束刚体的自由度为**6** (**位置+朝向**)

# 关节链结构的基本概念



## 自由度 (DOF)

❖ 关节自由度一般都有相应的取值范围

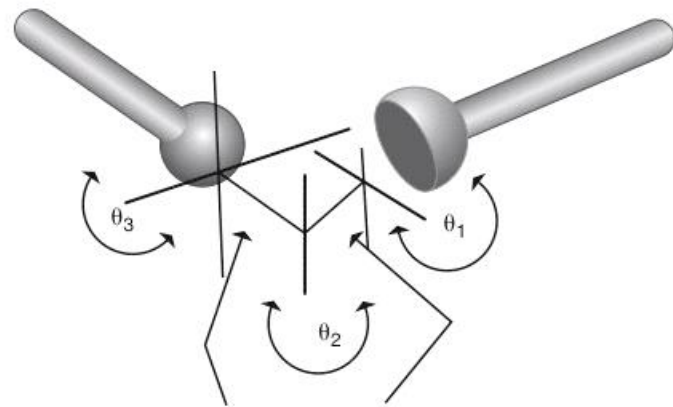
➤ 肘关节一般为 $0^{\circ}$ - $150^{\circ}$

❖ 关节链的自由度

注意区分与关节自由度的差异

➤ 完全确定一个关节链结构的状态所需要的独立变量的个数

# 关节链结构的基本概念



## 关节链的状态空间

(state space)

- 定义关节链所有可能姿态的**向量空间**
- 状态空间的每一个向量(状态向量)定义了关节链结构的一种**姿态**(pose)

$$\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N]$$

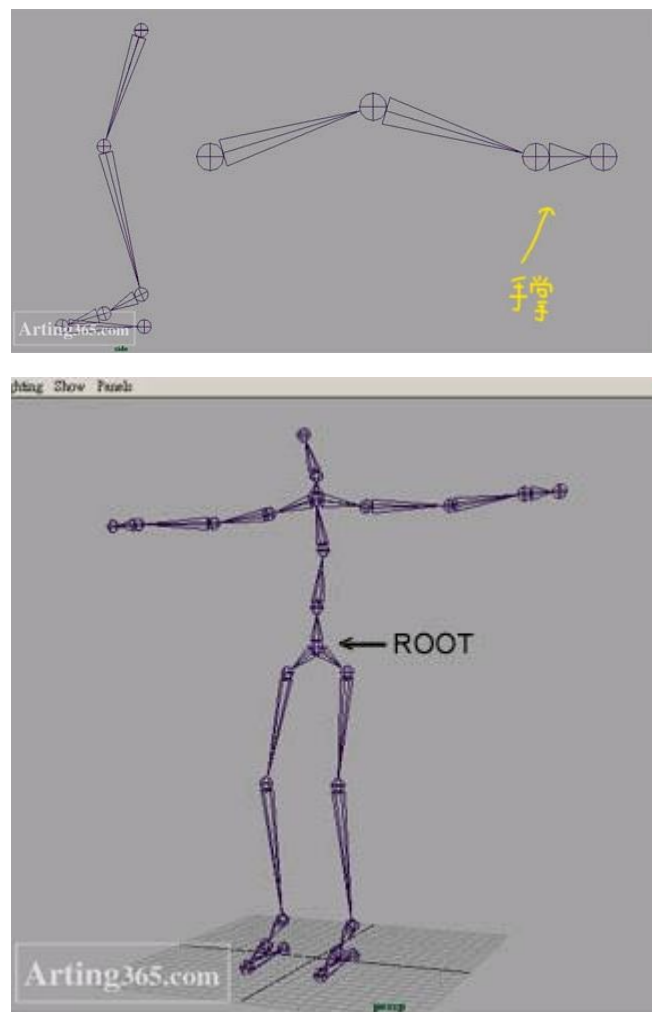
- 状态空间的**维数**等于关节链结构的自由度

$$\Theta = (x, y, z, \xi, \varphi, \psi)$$

- 一条关节链的运动等价于在其状态空间中定义一条**N维的运动路径**

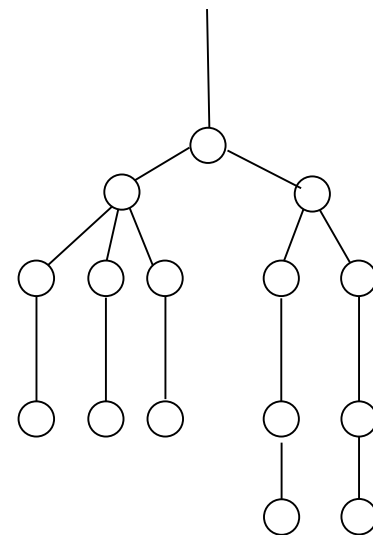
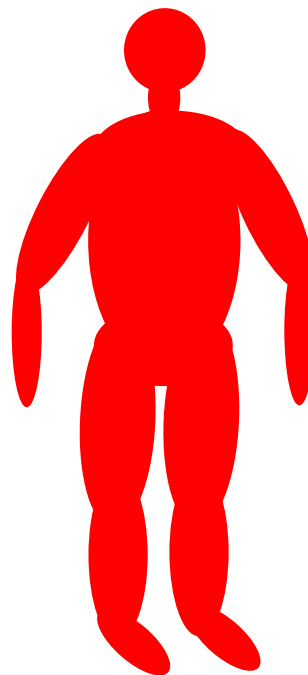
# 关节链结构的基本概念

- ❖ 一条关节链结构的**运动**等价于在其状态空间中定义**一条N维的运动路径**；
- ❖ 一条关节链通常**不足以**定义一个复杂的骨架；
- ❖ 需将多个关节链结构**有约束地**连接起来构造复杂的模型；



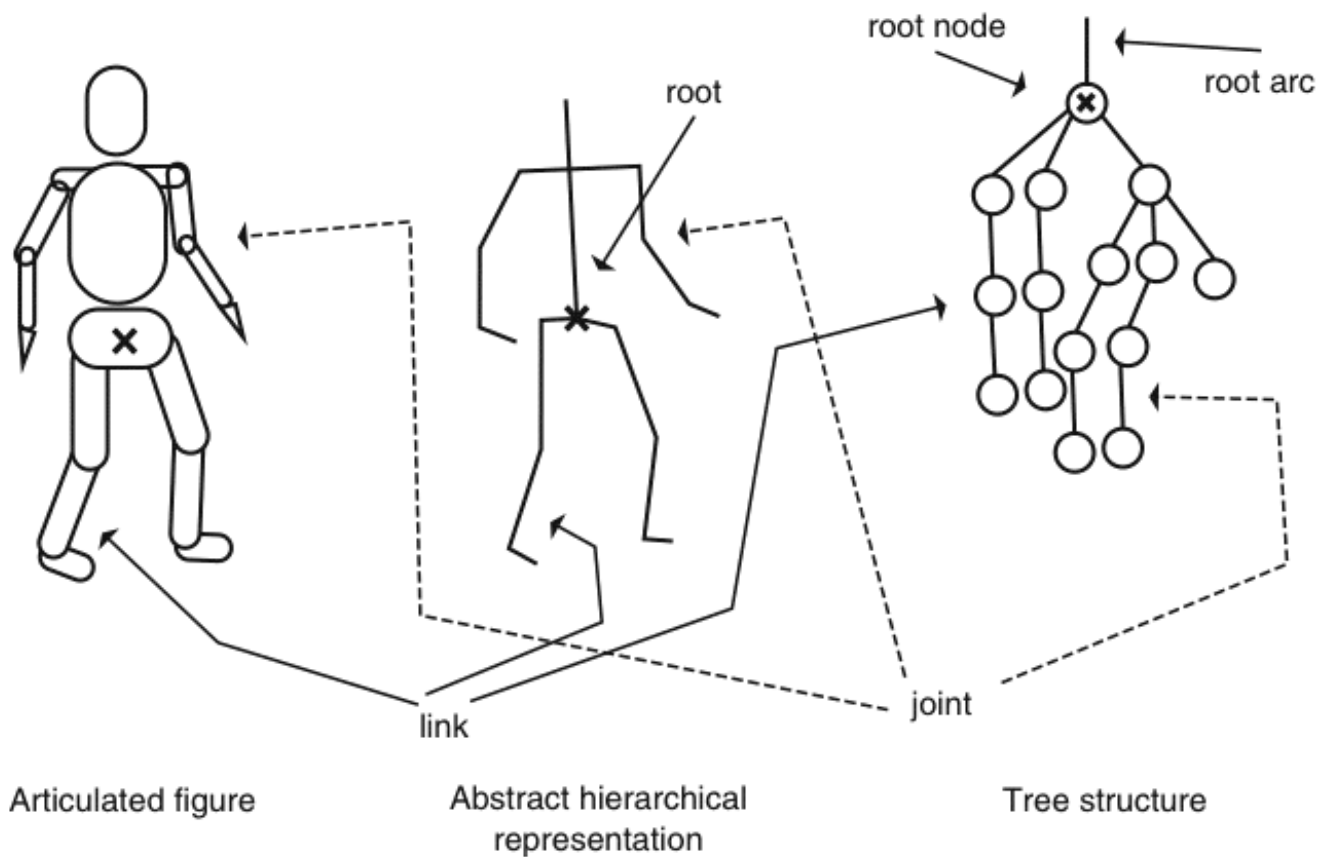
# 复杂骨架层次结构

- ❖ 大部分骨架结构在一些关节处具有多个分支；
- ❖ 所有的链杆在关节处形成了一个网状结构；
- ❖ 将复杂骨架表达为关节的**树状**层次结构；
- ❖ 树中每个结点均对应一个关节；



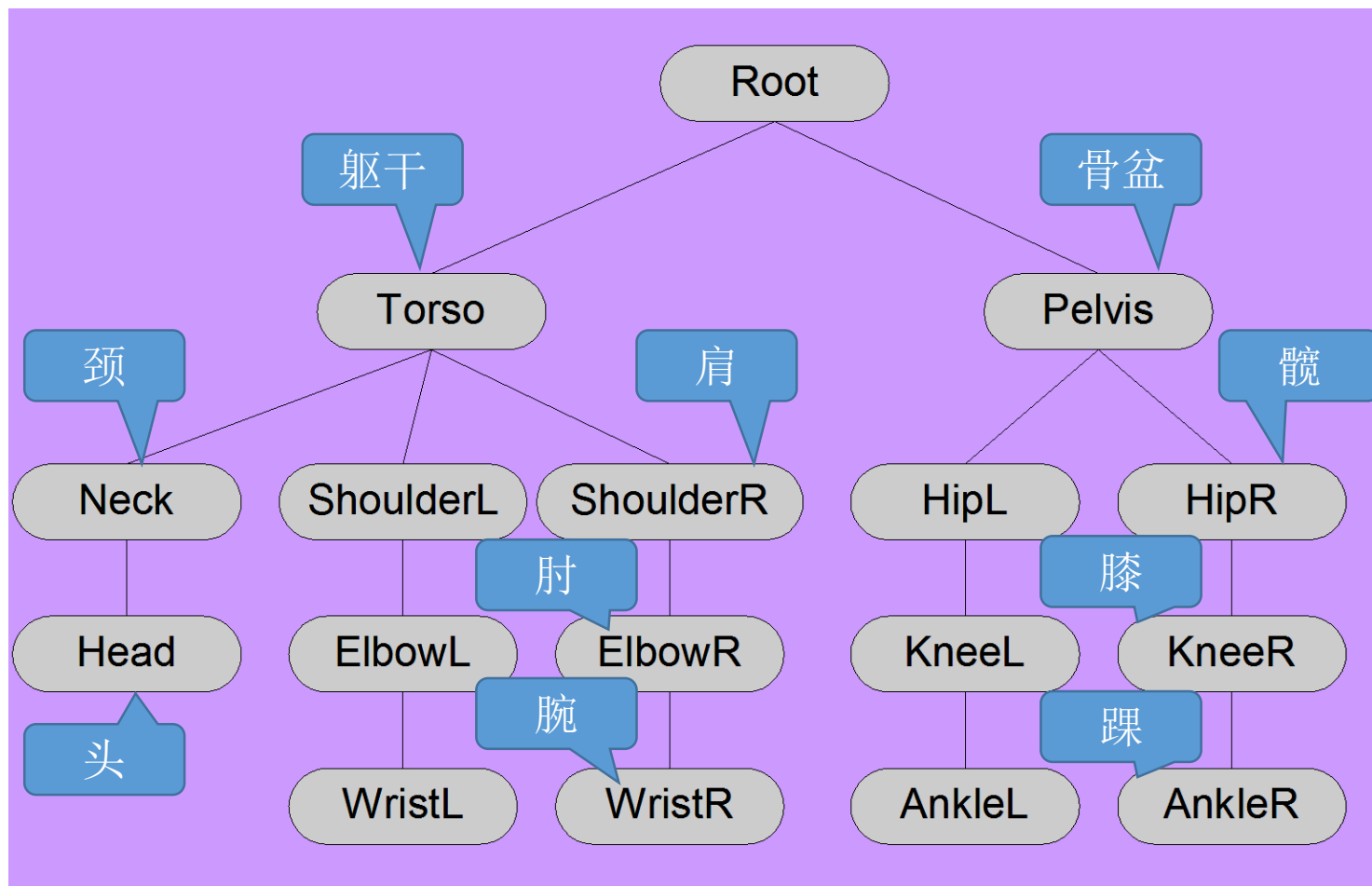
# 复杂骨架层次结构

## 人体关节层次结构



# 复杂骨架层次结构

## 人体关节层次结构



# 复杂骨架层次结构

## ■ 骨架结构的运动控制：

- ❖ 利用**树结构**将复杂的多分支关节**结构分解**成许多开的**单链结构**；
- ❖ 对每个**单链结构**应用运动控制技术；



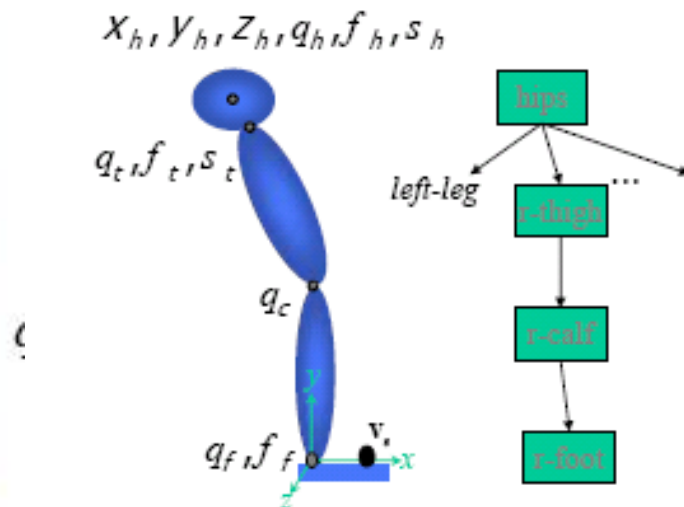
1 DOF: knee



2 DOF: wrist



3 DOF: arm





# 人体关节类型

## ✚ 不可动关节 (Synarthroses, Immovable Joint)

- ❖ 头盖骨之间就是靠这种关节紧密结合，牢固的保护着里面的重要器官

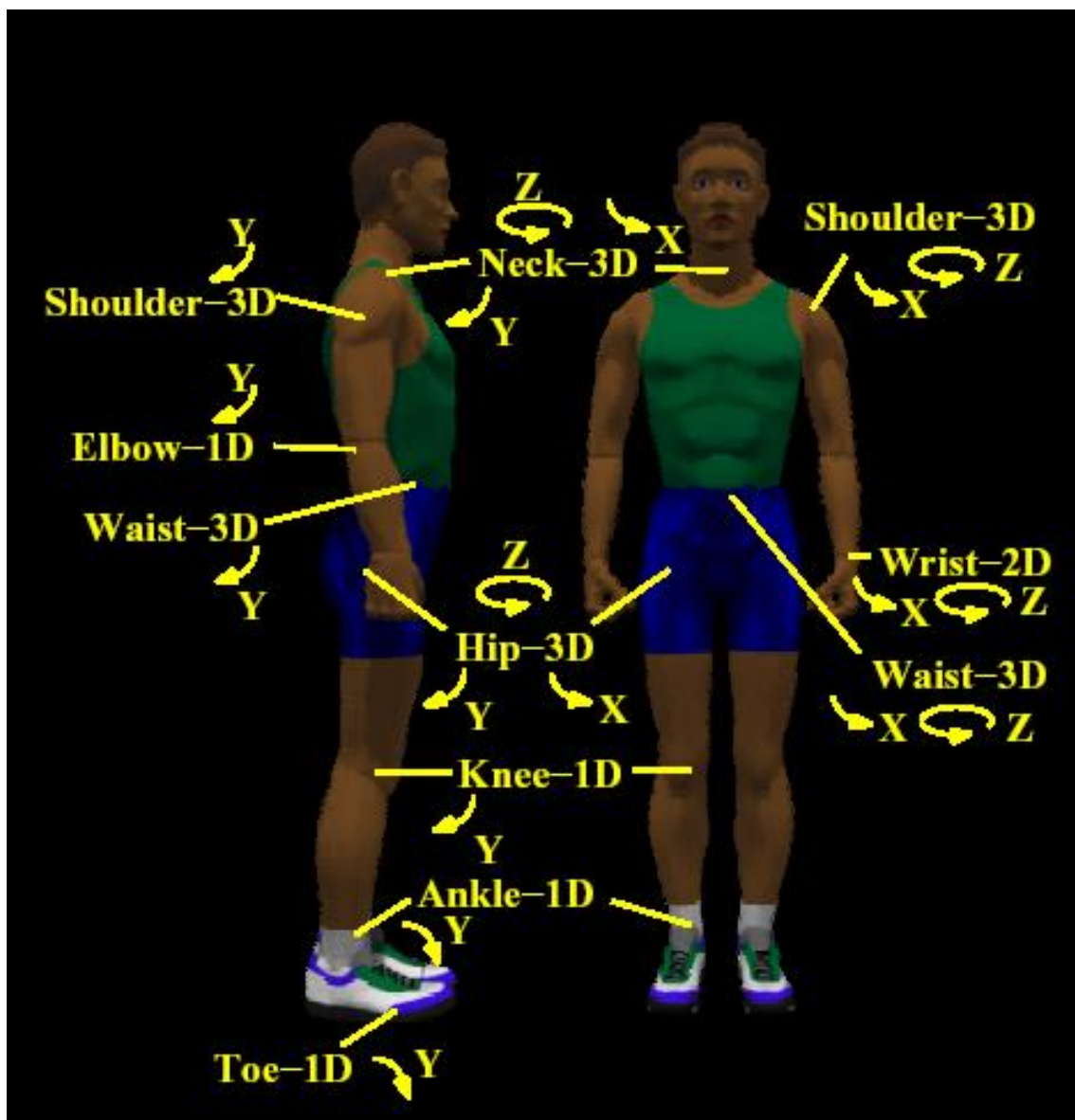
## ✚ 少动关节 (Amphiarthroses, Partially Movable Joint)

- ❖ 脊椎骨之间的连结，虽然允许有限度的活动，其稳定度对保护里面的脊髓更重要

## ✚ 可动关节 (Diarthroses, Freely Movable Joint)

- ❖ 大部分关节属于这一类

# 人体关节的自由度



# 人体关节类型--可动关节

- ✚ 铰链(屈戌)型关节 (Hinge Joint)
- ✚ 枢轴型关节 (Pivot Joint)
- ✚ 球窝型关节 (Ball and Socket Joint)
- ✚ 滑动型关节 (Gliding Joint)
- ✚ 马鞍型关节 (Saddle-shaped Joint)

人体关节大致可分为屈戌关节(如手部的指间关节)、蜗状关节(如踝关节)、车轴关节(如桡尺近端关节)、椭圆关节(如桡腕关节和枕寰关节)、鞍状关节(如拇指侧的腕掌关节)、球窝关节(如肩关节)、杵臼关节(如髋关节)、平面关节(如跗骨之间的关节)八种类型。

# 铰链(屈戌)型关节--Hinge Joint

在铰链关节中，一端骨突起的表面刚刚卡在另一端骨的凹陷处，这种关节仅仅允许在**一个平面内运动**，即只能做屈伸运动，如指间关节、肘关节、膝关节、踝关节及手指间的关节

**一个旋转自由度**



# 球窝型关节--Ball and Socket Joint

球窝关节由关节球和包绕它的杯状腔构成。这种关节具有最大的自由度, 可作各个方向的运动, 如屈伸、内收、外展、旋转、环转等运动, 如**肩关节**和**髋关节**就属于这种类型

**三个旋转自由度**



# 关节链的表示-DH表示法

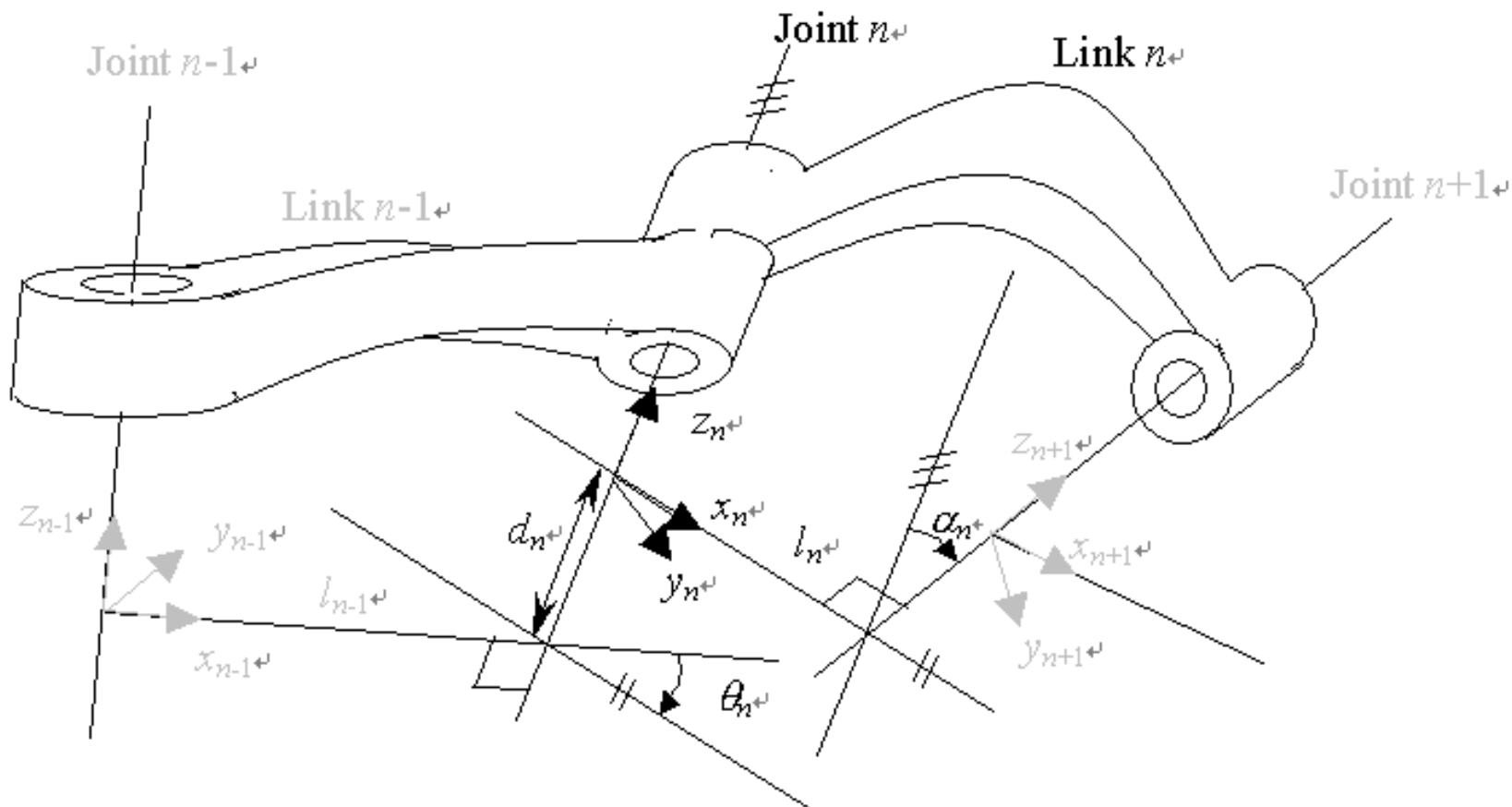
- ✚ DH表示法由 Denavit 和 Hartenberg 于 1955年提出, 在机器人领域得到广泛应用
- ✚ DH表示法通过对每一链杆建立局部坐标系来描述链杆相对于其相邻链杆的运动

# 关节链的表示-DH表示法

✚ 四个独立的参数用于定义相邻链杆的局部坐标系之间的变换关系

- 链杆长度  $L_n$
- 相邻链杆间的距离  $d_n$
- 扭角  $\alpha_n$
- 夹角  $\theta_n$

# 关节链的表示-DH表示法





# 关节链的表示-DH表示法

- $O_n, x_n, y_n, z_n$  是第  $n$  个链杆的局部坐标系
- $Z_n$  轴为第  $n$  个关节的旋转轴方向
- $X_n$  轴垂直于  $Z_n$  并且指向第  $n+1$  个关节
- 坐标原点  $O_n$  取为  $Z_n$  轴与  $Z_{n+1}$  轴的公共法线与  $Z_n$  轴的交点
- $Y_n$  轴由右手法则确定

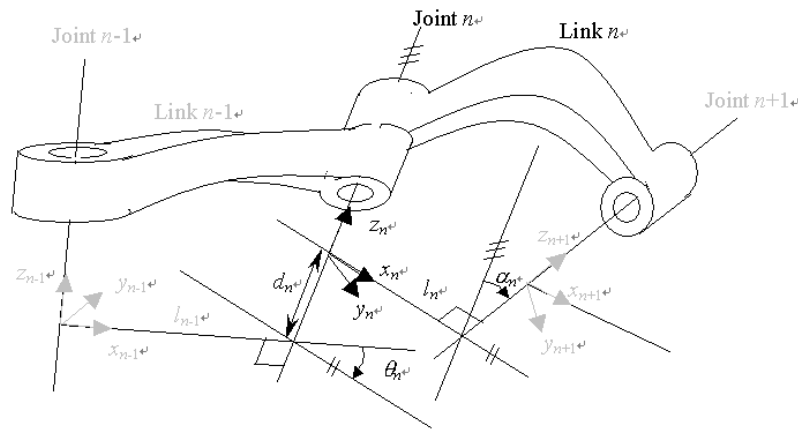
# 关节链的表示-DH表示法

- $L_n$  为  $Z_{n+1}$  轴与  $Z_n$  轴沿  $X_n$  轴的距离
- $a_n$  为  $Z_{n+1}$  轴与  $Z_n$  轴关于  $X_n$  轴的夹角
- $d_n$  为  $X_n$  轴与  $X_{n-1}$  轴沿  $Z_n$  轴的距离
- $\theta_n$  为  $X_n$  轴与  $X_{n-1}$  轴关于  $Z_n$  轴的夹角
- $(L_n, a_n)$  称为链杆参数
- $(d_n, \theta_n)$  称为关节参数

# 关节链的表示-DH表示法

## 第 $i$ 个局部坐标系到第 $i-1$ 个局部坐标系之间的变换关系

1. 绕 $z_{i-1}$ 轴旋转 $\theta_i$ 角, 使 $x_{i-1}$ 轴与 $x_i$ 轴平行
2. 沿 $z_i$ 轴方向平移 $d_i$ , 使 $x_{i-1}$ 轴与 $x_i$ 轴共线
3. 沿 $x_{i-1}$ 轴平移 $L_{i-1}$ , 使 $0_{i-1}$ 与 $0_i$ 重合
4. 绕 $x_i$ 轴旋转 $\alpha_{i-1}$ 角, 使第 $i-1$ 个坐标系与第 $i$ 个坐标系重合



# 关节链的表示-DH表示法

四个变换复合的结果为第  $i$  个局部坐标系到第  $i-1$  个局部坐标系的变换矩阵:

$$T_i^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ l_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} & 1 \end{bmatrix}$$

# 关节链的表示-DH表示法

利用传递性, 可以得到第  $i$  个局部坐标系关于基坐标系的变换矩阵为:

$$T_i^0 = T_1^0 T_2^1 \dots T_i^{i-1}$$

$T_n^0$  可以描述末端影响器关于基坐标系的方位

# 关节链结构的运动求解技术

$$E = MT_n^{(0)} E'$$

$E(x,y,z)$ : 末端影响器关于世界坐标系的坐标

$E'(x',y',z')$ : 末端影响器关于第n个局部坐标系的坐标

$M$ : 第n个局部坐标系到世界坐标系的变换矩阵

$T_n^0$  和  $M$  只与定义关节链结构的独立参数有关, 这些独立参数构成一个状态矢量, 因此  $E$  是一个状态矢量的函数

# 关节链结构的运动求解技术

$$e=f(\Phi)$$

$$\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_i, \dots \Phi_m)$$

末端影响器  
关于世界坐  
标系的方位

关节链结构的状态向量

# 关节链的表示-AP表示法

■1988年，轴位置关节表示法 (*Axis-position joint*, AP) ;

■需要存储:

- 每个关节的**位置**;
- 每个关节轴线的**方向**;
- 指向每个关节所连的**链杆指针**;

■描述相邻链杆的关系时需要**七个**参数

## DH表示法与AP表示法的区别

■DH表示法比较经济，没有任何冗余信息，但只能表示**单链结构**;

■AP表示法可以方便地表示**多分支**的关节结构;

■描述相邻链杆的关系时:

- AP表示法需要**七个**参数;
- DH只需要**四个**。



## 第四章 运动链接

4.1 关节动画

4.2 正向运动学

4.3 逆向运动学

4.4 运动学应用

4.5 运动捕捉初步

# 关节链结构

- ✚ 如何有效地描述关节链结构
- ✚ 如何有效地控制关节链结构的运动

## ➤ 运动学(kinematics)方法 \*

- 物体的运动独立于产生运动的力
- 物体的位置,速度,加速度,方向,角速度,角加速度

## ➤ 动力学(dynamics)方法

- 物体的运动由所受的力控制
- 力, 动力学方程

基于物理  
的动画

# 运动学模型

- 骨架结构的运动要受到整体**连接性**的限制；
- 一个连杆引起其周围的连杆运动，连杆本身具有限制；
- 由于这些限制必须在**所有**的插值位置上有效，所以不能轻易的使用关键帧系统；
- 设关节链的末端影响器关于世界坐标系的方位为**X**，关节链结构的状态向量为  $\Theta$ ；

$$X = f(\Theta)$$

# 运动学模型

## 正向运动学(Forward Kinematics)

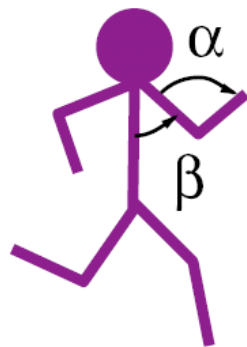
- 通过给定状态向量  $\Theta$  来确定各关节的位置及末端影响器的位置  $X$ ，正向求解过程：

$$X = f(\Theta)$$

## 逆向运动学(Inverse Kinematics)

- 目标驱动法，给定末端影响器的方位  $X$ ，然后逆向求解关节链结构的状态向量  $\Theta$ ，进而求得各关节的空间位置，逆向运动学方程可描述为：

$$\Theta = f^{-1}(X)$$



Forward:  $A = f(\alpha, \beta)$

Inverse:  $\alpha, \beta = f^{-1}(A)$

# 正向运动学

✚ 给定状态向量  $\Phi$ , 需要确定各个关节

$$\mathbf{e} = \mathbf{f}(\Phi) \quad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i, \dots, \Phi_m)$$

# 正向运动学

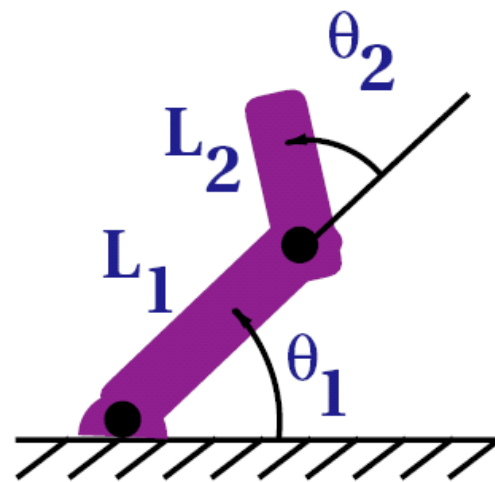
## 二链杆关节链结构的运动过程

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

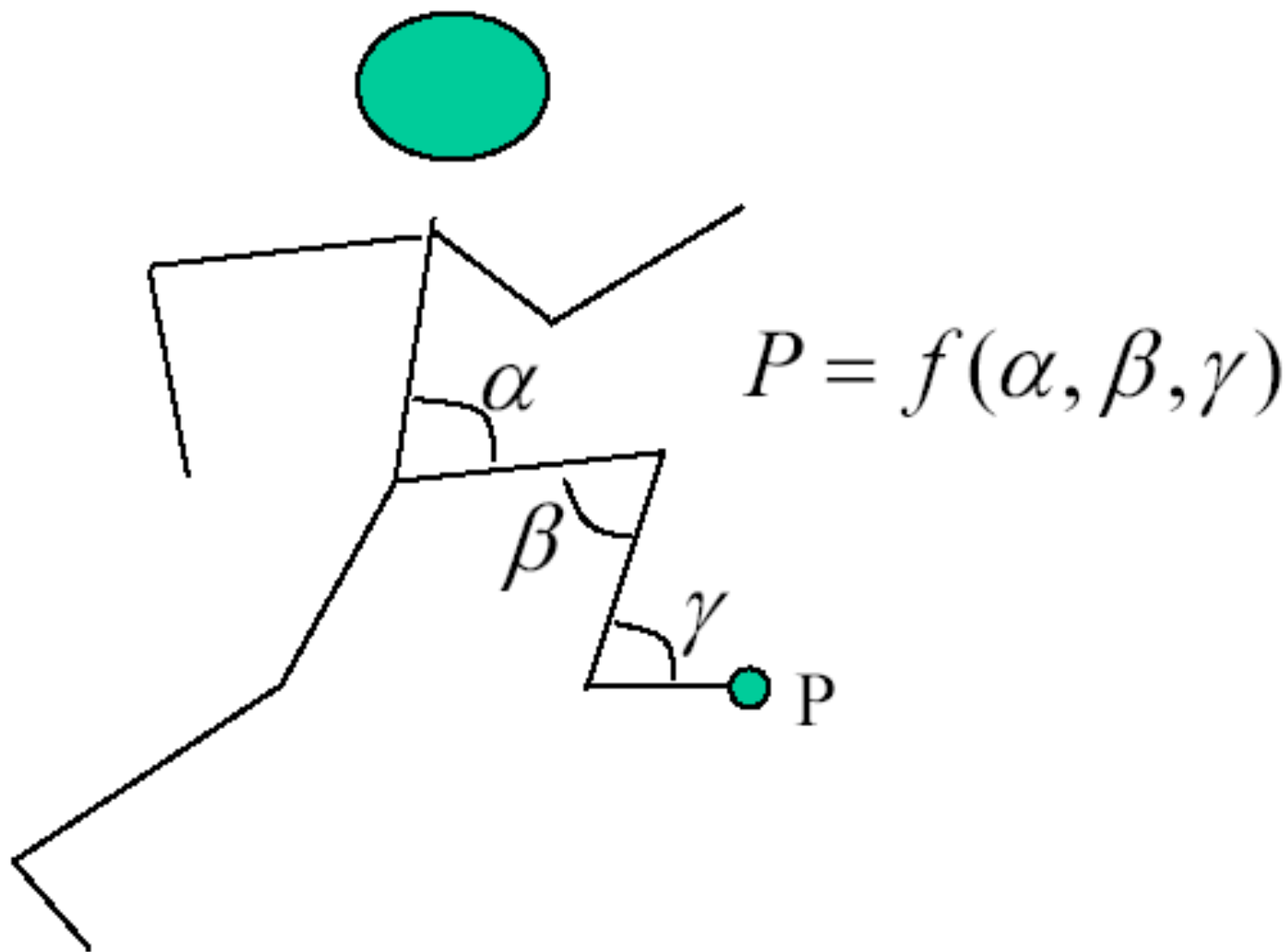
$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rot } \theta_1 \\ \text{trans } L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rot } \theta_2 \\ \text{trans } L_2 \end{bmatrix}$$



# 正向运动学



# 正向运动学

✚ 优点: 求解过程直观、简单

✚ 缺点: 需要用户交互输入状态向量的各个参数;  
需要制作者清晰地定义关节结构中的每个部件的所有运动;  
过程比较繁琐, 太多的自由度使用户无所适从;



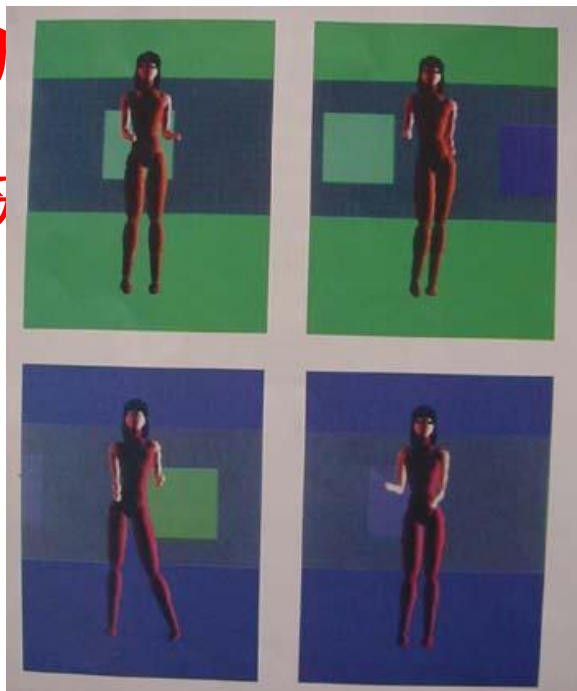
# 正向运动学



伊



每



所遵从;

见、简单

输入状

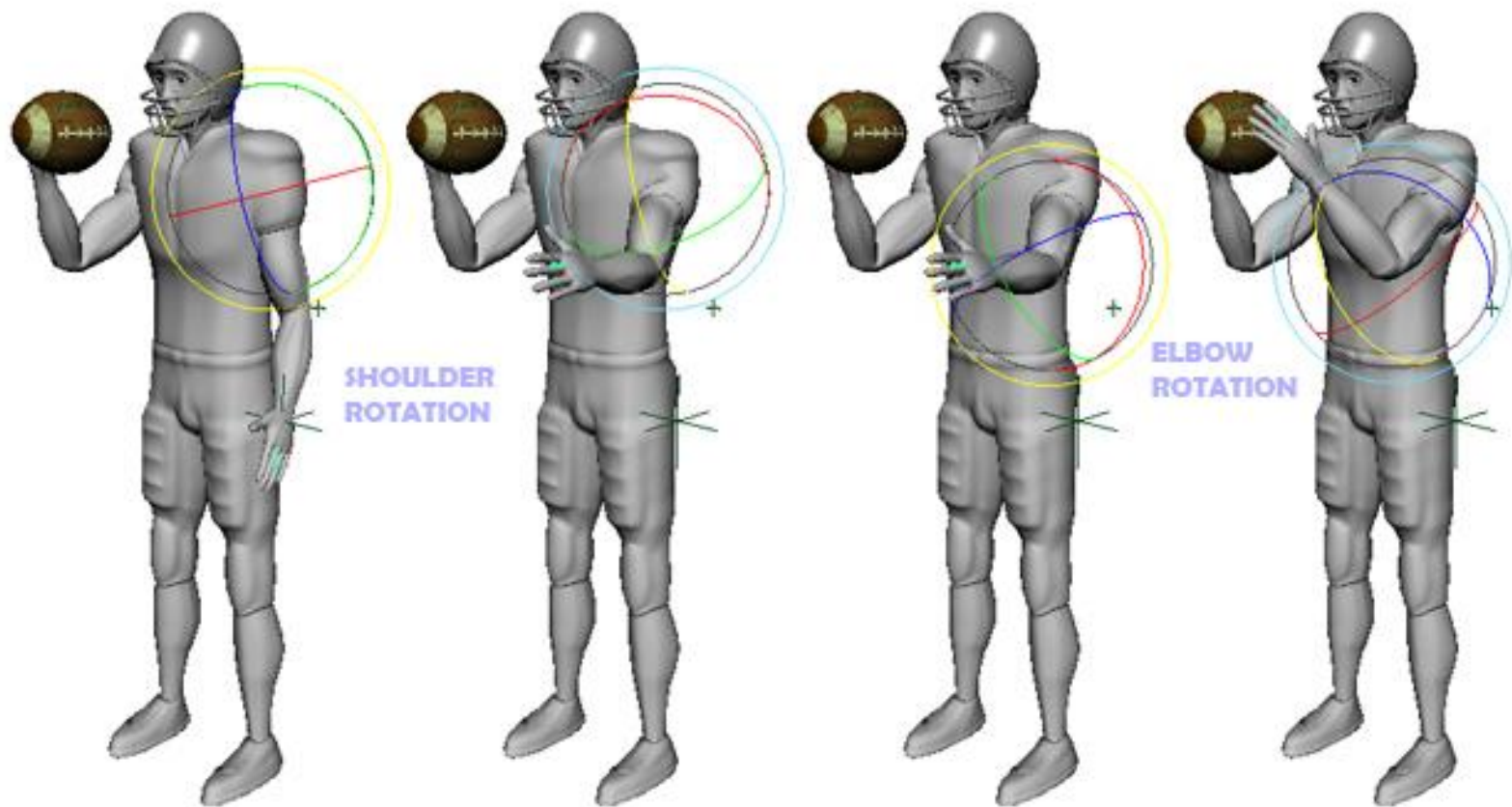
晰地定

运动;

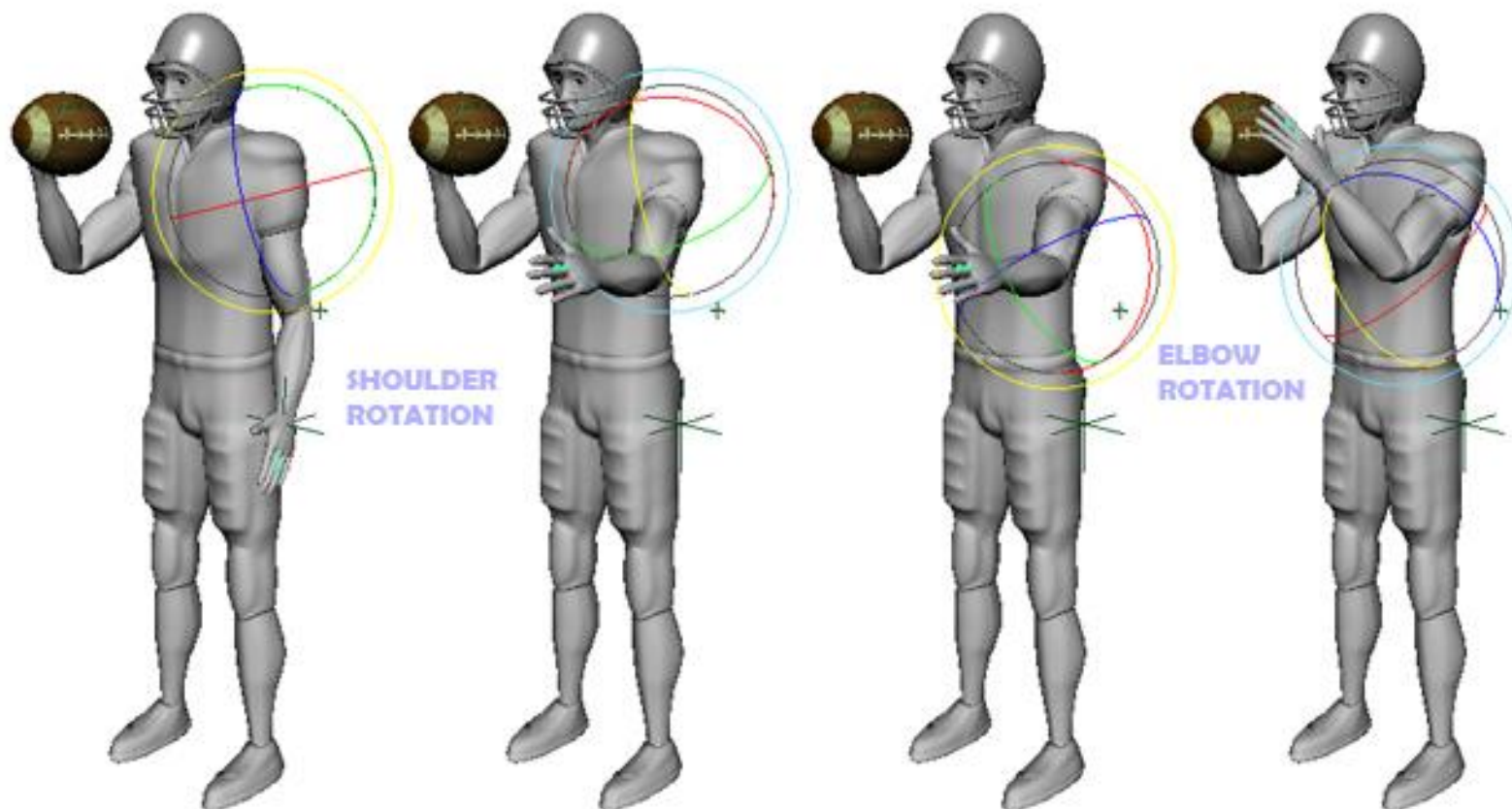
, 太多

```
(5 5 5) {-5 -5 -5} {n1 n2 n3} Nod (节点)
{15 5 0} {-15 -5 -0} {b a } Rchest (右胸部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Rshoulder (右肩部)
{-90 0 0} {-70 0 0} {a a } Relbow (右肘部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Rpelvis (右骨盆)
{-25 5 -15} {0 -10 0} {a a a} Rhip (右臀部)
{50 0 0} {0 0 0} {a a } Rknee (右膝部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Rankle (右踝部)
{0 10 0} {0 -10 0} {a a } Waist (腰部)
{-15 -5 0} {15 5 0} {b a } Lchest (左胸部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Lshoulder (左肩)
{-70 0 0} {-90 0 0} {a a } Lelbow (左肘部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Lpelvis (左骨盆)
{0 -20 0} {-10 20 25} {a a a} Lhip (左臀部)
{0 0 0} {20 0 0} {a a } Lknee (左膝部)
{0 0 0} {0 0 0} {a a } Lankle (左踝部)
rhumbc define--action (伦巴舞姿规定)
```

# 正向运动学



# 正向运动学



## 解决办法

- 可采用**脚本语言**来辅助减轻操作的复杂性；
- 脚本语言中用曲线以一种时间的函数来定义变换值；

# 正向运动学小结

- ✦ 可采用关键**状态向量**来插值生成任意时刻的状态向量；
- ✦ 但需要**大量的用户交互**，而且所生成的末端影响器的运动很难跟踪目标；
- ✦ 一种解决方法是建立一些模型，对于像行走、跑、抓等普通的姿态预先写出正向运动学的**脚本**；
- ✦ 在《侏罗纪公园》中，ILM利用真实的模型在操控下的运动，记录关键节点的运动生成一个**真实的脚本**；

## 第四章 运动链接

4.1 关节动画

4.2 正向运动学

4.3 逆向运动学

4.4 运动学应用

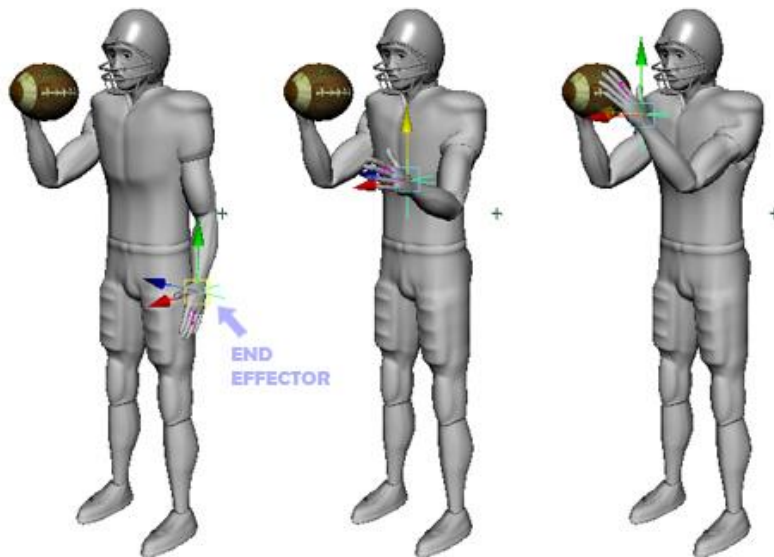
4.5 运动捕捉初步

# 逆向运动学 (IK)

- ✚ 用户给定末端影响器的方位 $e$ , 求解关节链结构的**状态向量**, 进而求得各关节的空间位置

$$\Phi = f^{-1}(e)$$

- ✚ **优点:** 用户交互简单
- ✚ **缺点:** 求解不定系统方程, 求解
  - 多解或者无解
- ✚ **解决办法:**
  - 对关节结构赋以一定权重
  - 减少多解情况



# 逆向运动学求解

## 二链杆关节链结构的运动过程

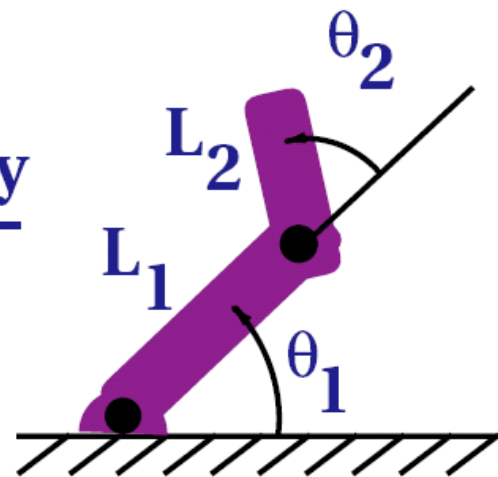
$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\theta_2 = \frac{\cos (x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2)}{2 L_1 L_2}$$

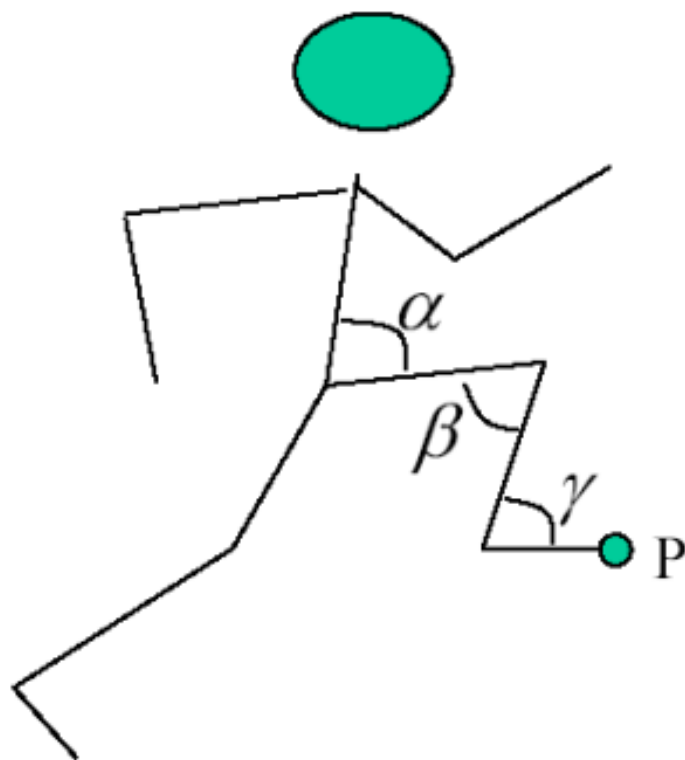
$$\theta_1 = \frac{-(L_2 \sin \theta_2)x + (L_1 + L_2 \cos \theta_2)y}{(L_2 \sin \theta_2)y + (L_1 + L_2 \cos \theta_2)x}$$

$$\theta = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$$



当链杆数增加时，无论正向还是逆向，方程均变得非常复杂！

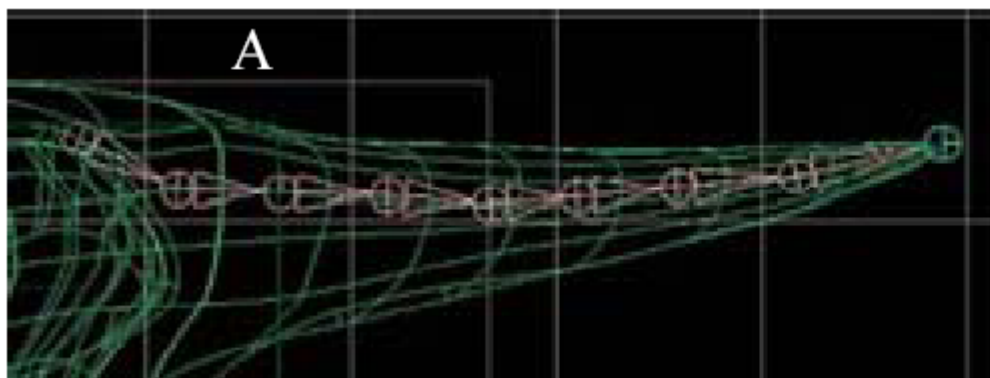
# 逆向运动学



$$\alpha, \beta, \gamma = f^{-1}(P)$$



# 逆向运动学的优点

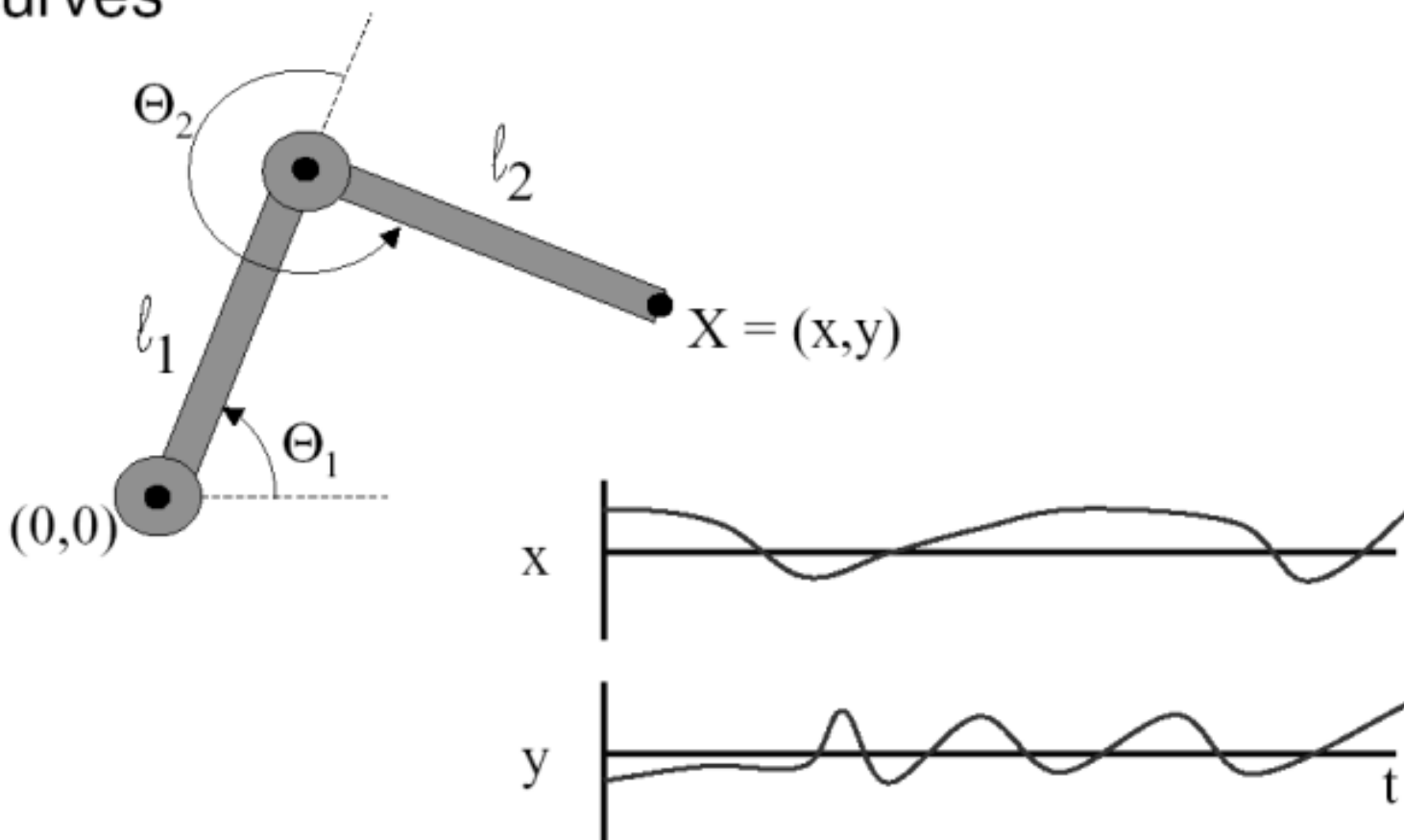


Imagine using forward kinematics to make the tip of the tail touch the “A”



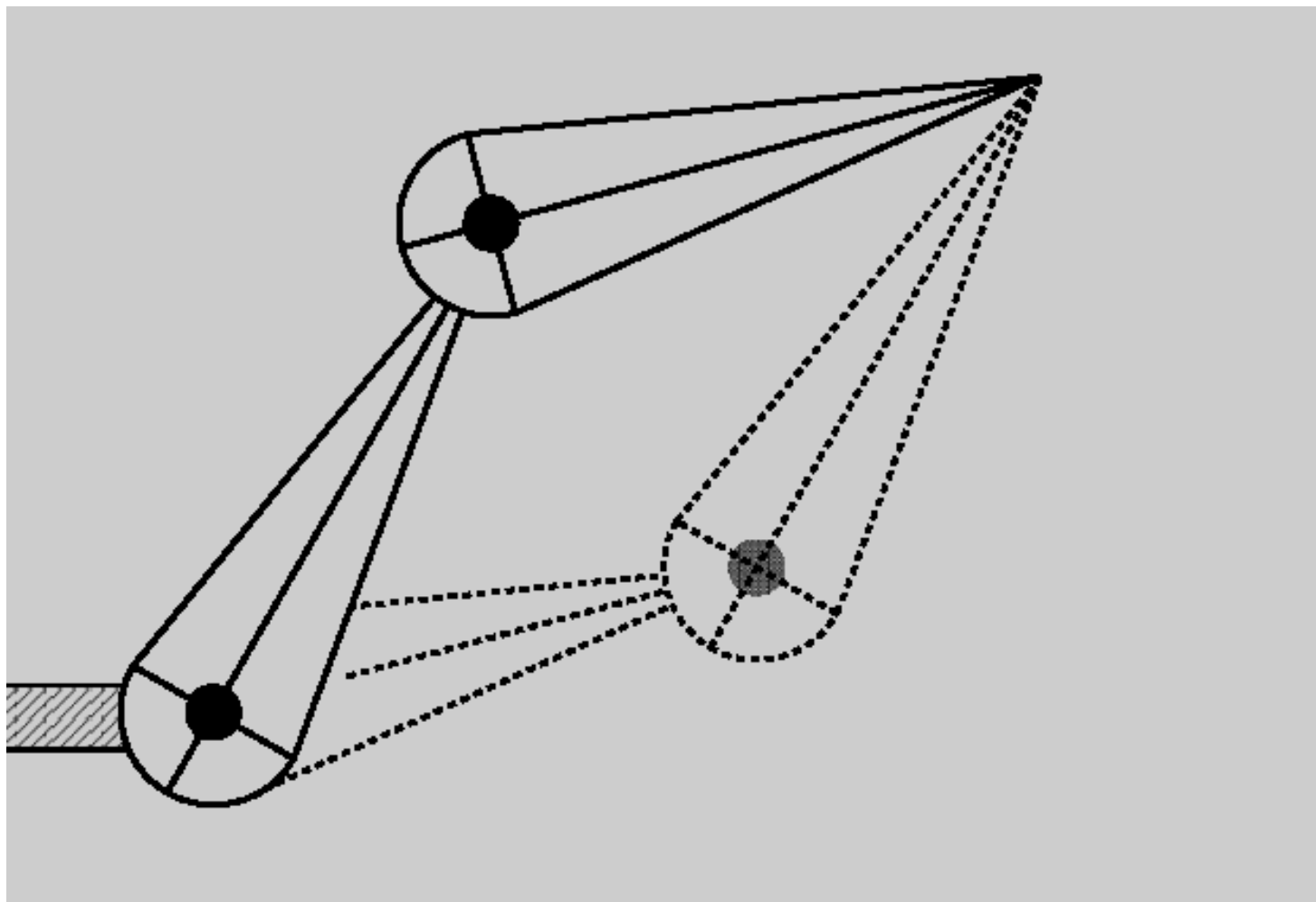
# 逆向运动学的优点

- End-effector positions can be specified by spline curves

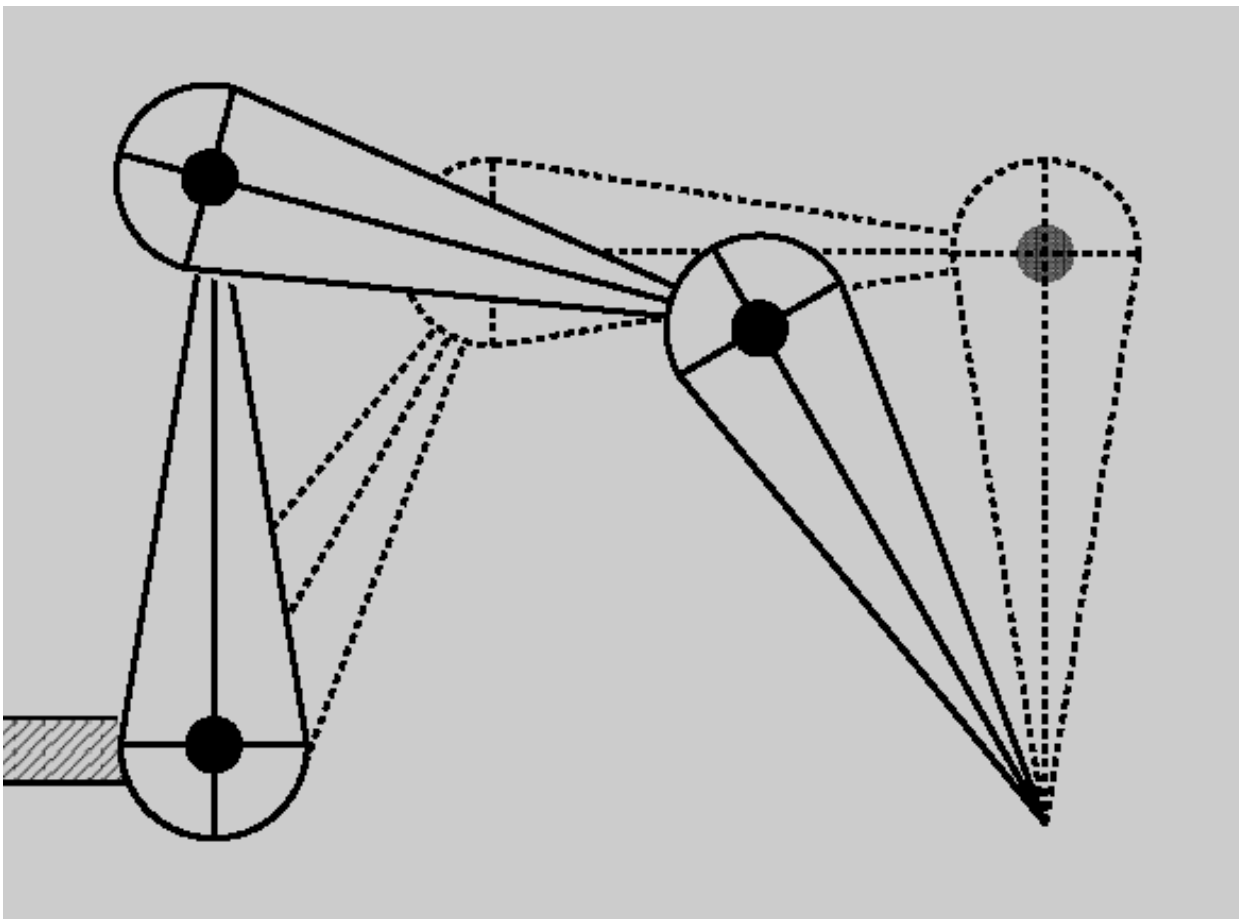


末端影响器运动曲线

# 逆向运动学的缺点—解不唯一

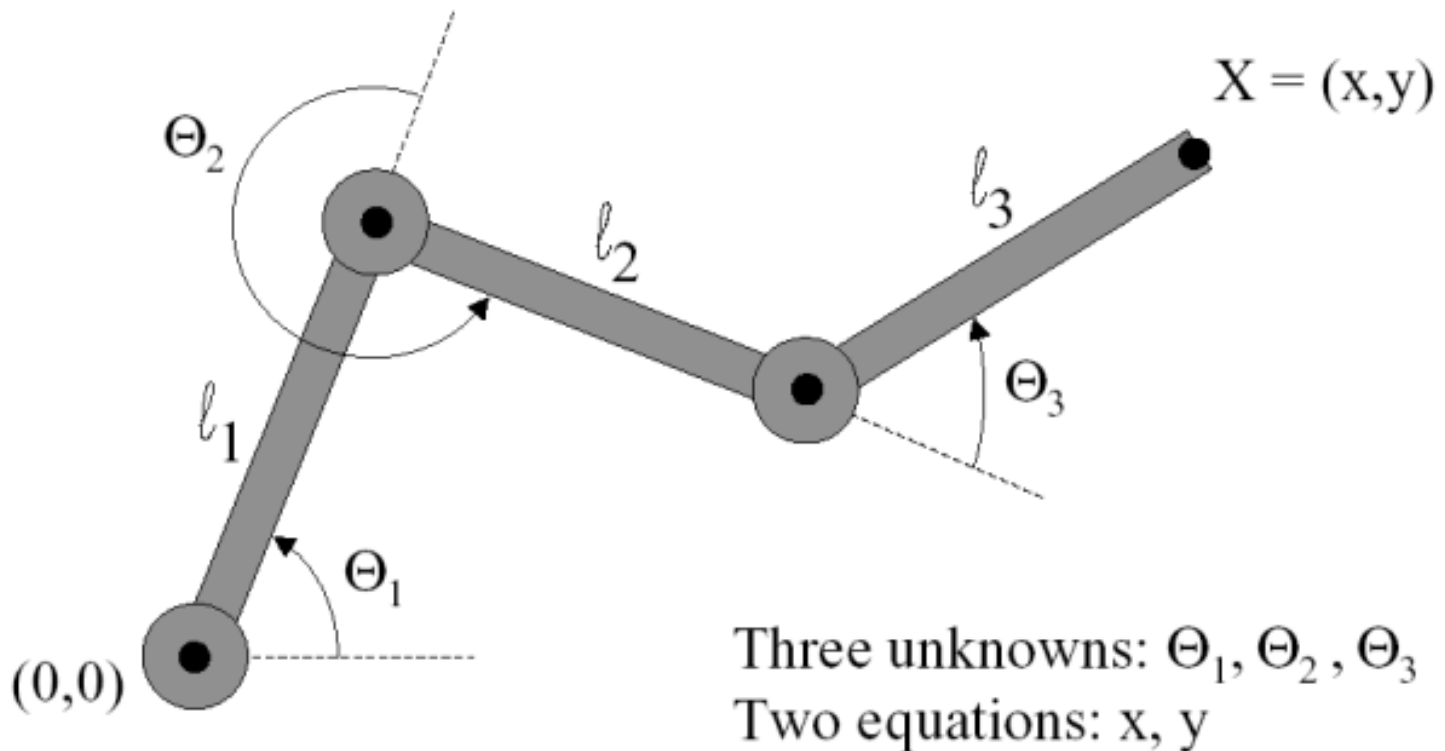


# 逆向运动学的缺点—解不唯一



# 逆向运动学的缺点—解不唯一—

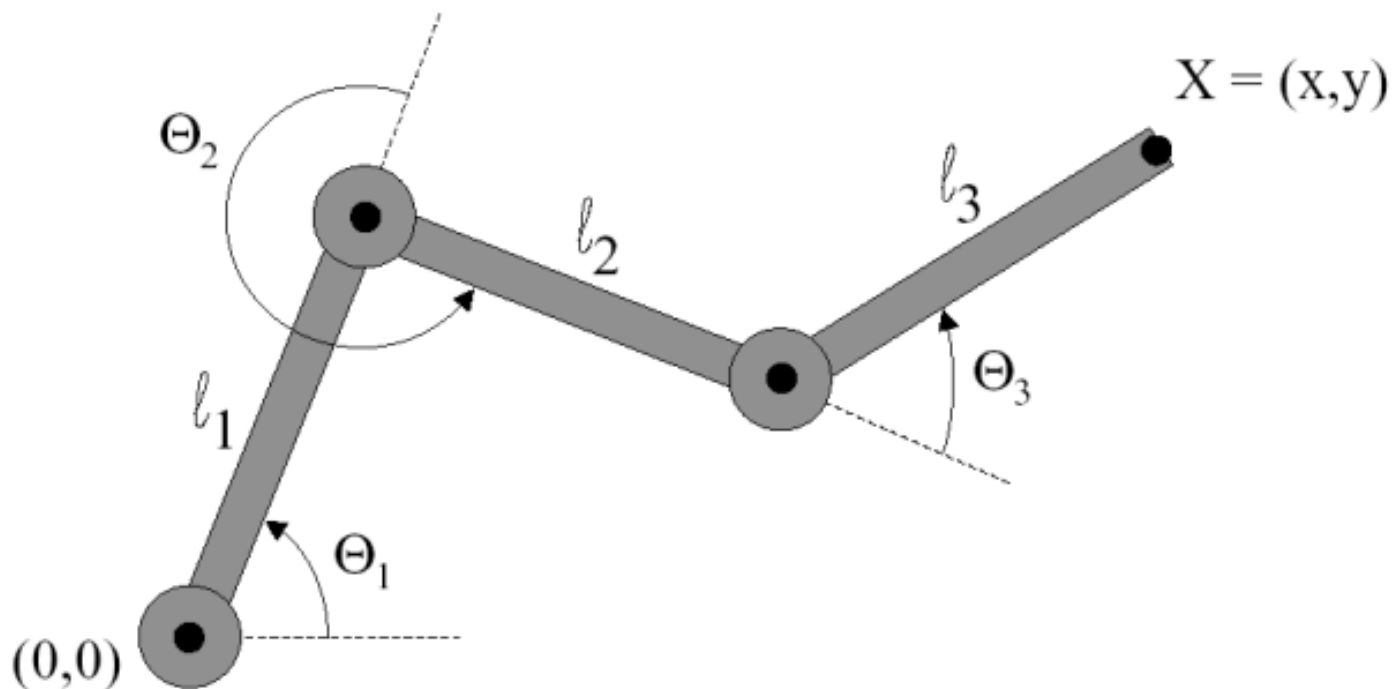
- Problem for more complex structures
  - System of equations is usually under-defined
  - Multiple solutions



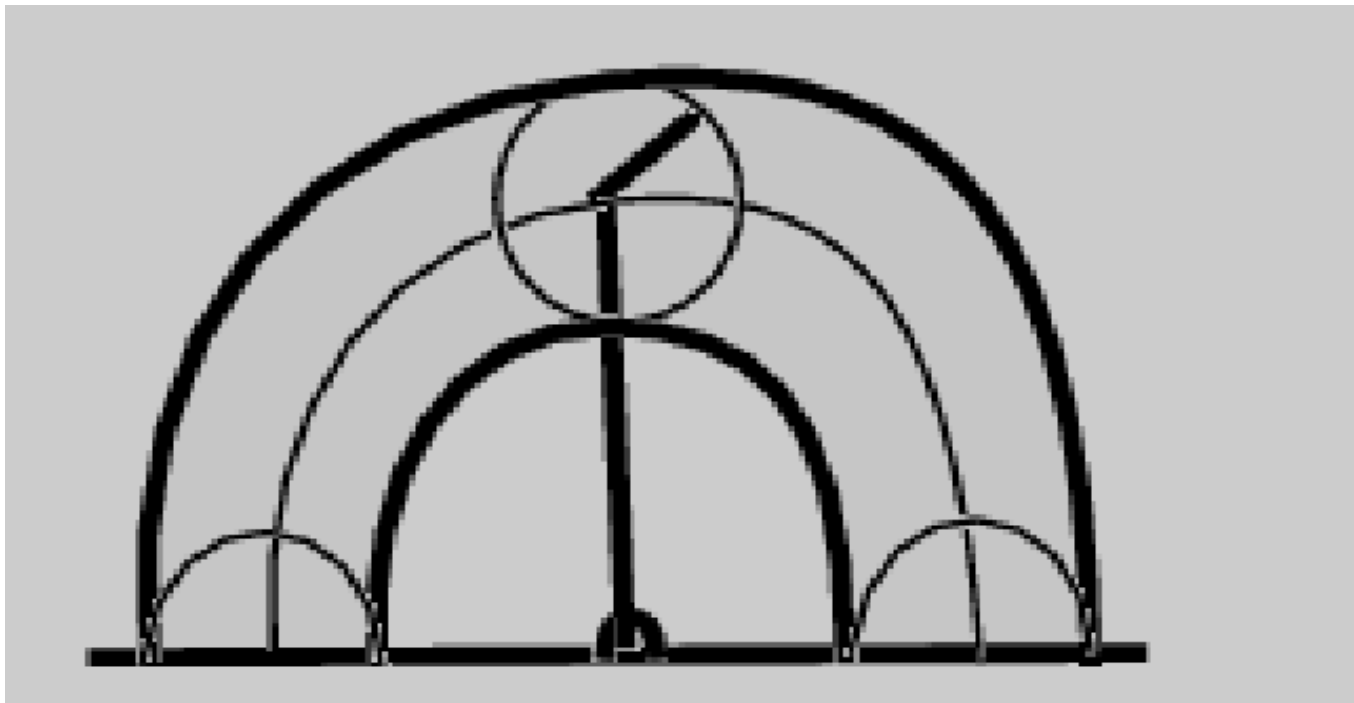
# 逆向运动学的缺点—解不唯一—

最优解：  
能量最小

- Solution for more complex structures:
  - Find best solution (e.g., minimize energy in motion)
  - Non-linear optimization



# 逆向运动学的缺点—解不存在



可达空间

# 一元函数的局部线性化

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{for small } \Delta x$$

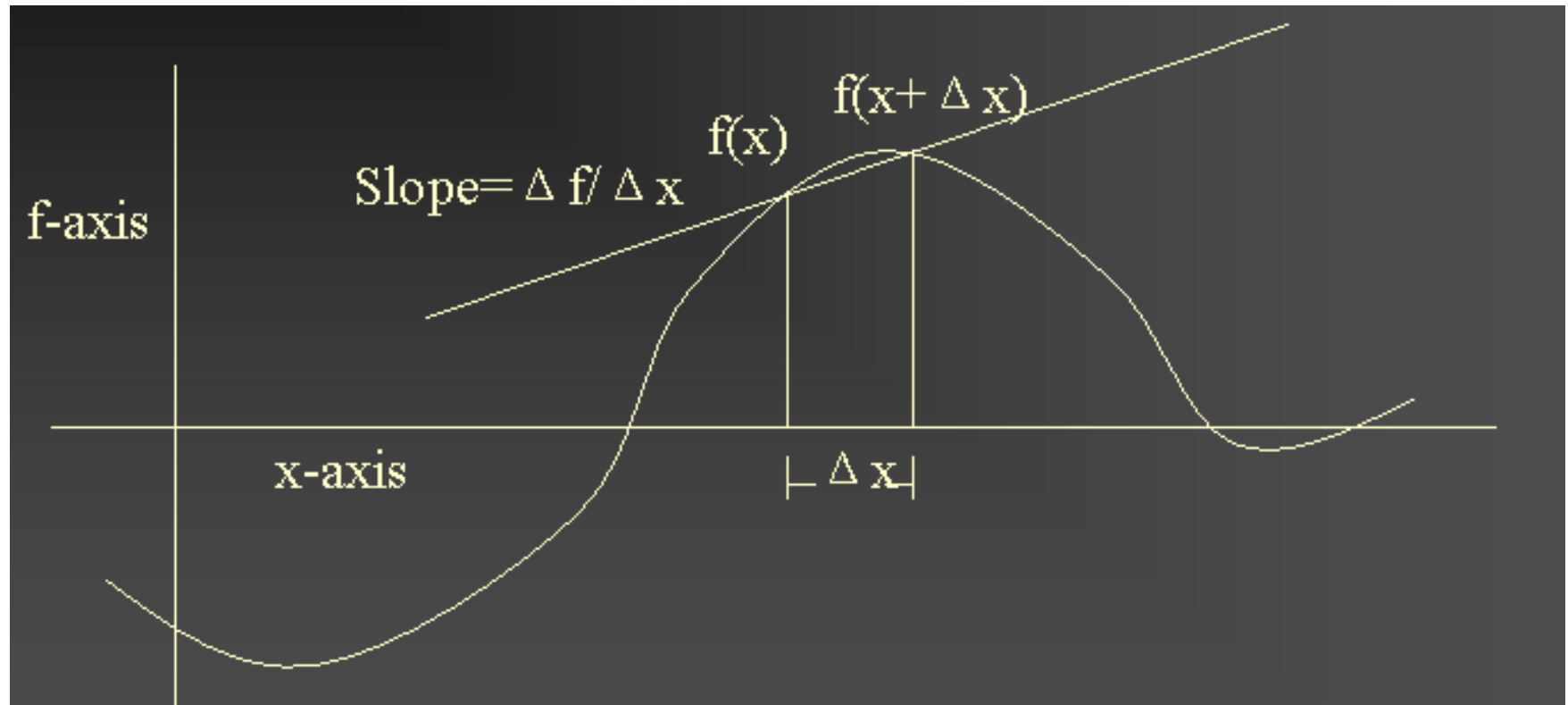
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{df}{dx}$$

$$\Delta f \approx \Delta x \frac{df}{dx}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \frac{df}{dx}$$



# 一元函数的局部线性化



# 关节链运动--多维函数

$$\mathbf{e} = f(\Phi)$$

$$\Phi = f^{-1}(\mathbf{e})$$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_M]$$

M个关节自由度

$$\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_N]$$

N个自由度描述末端影响器在世界坐标系中的位置和方向

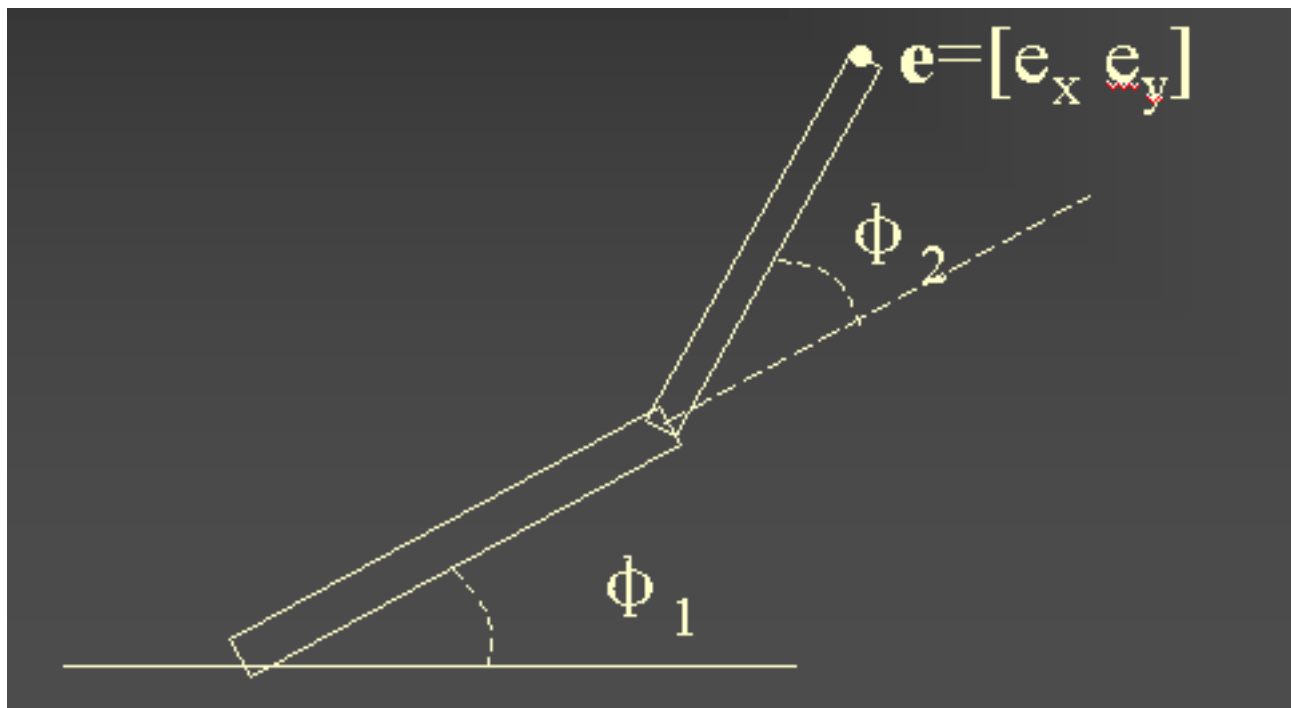
# Jacobian矩阵

- **Jacobian**矩阵用于表示一个矢量对另一个矢量的导数
- 假设 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是一个矢量函数，其**Jacobian**矩阵的每一个分量都是一个偏导数
- **Jacobian**矩阵包含了每个自变量 $(\mathbf{x})$ 分量的变化与每个因变量 $(\mathbf{f})$ 分量变化之间的关系
- **Jacobian**矩阵通常写为 $\mathbf{J}(\mathbf{f}, \mathbf{x})$ ，也可写为 $d\mathbf{f}/d\mathbf{x}$

# Jacobian矩阵

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

# Jacobian矩阵



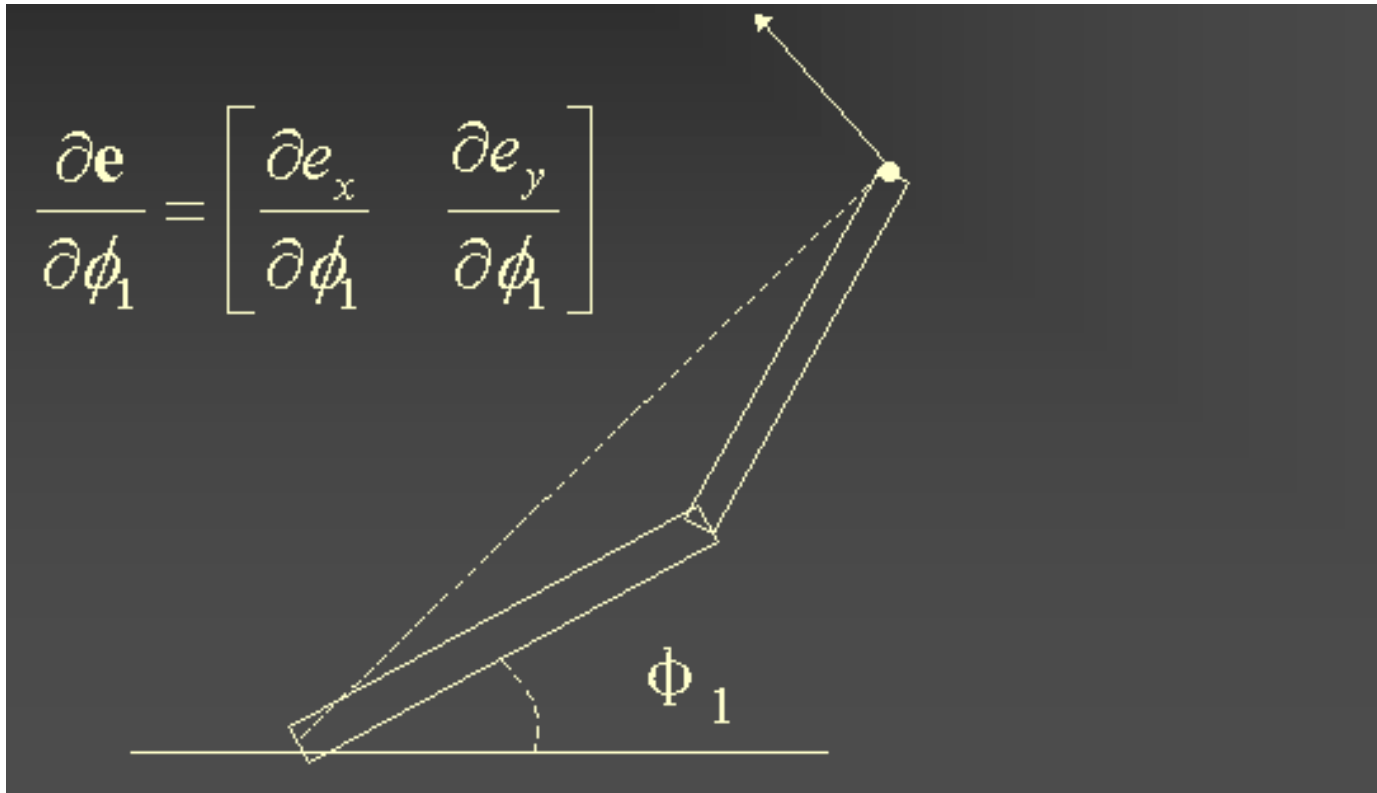
每个关节都只有一个旋转自由度

# Jacobian矩阵

- ✚  $J(\mathbf{e}, \Phi)$  矩阵表明  $\mathbf{e}$  的每个分量相对于每个关节角的变化情况

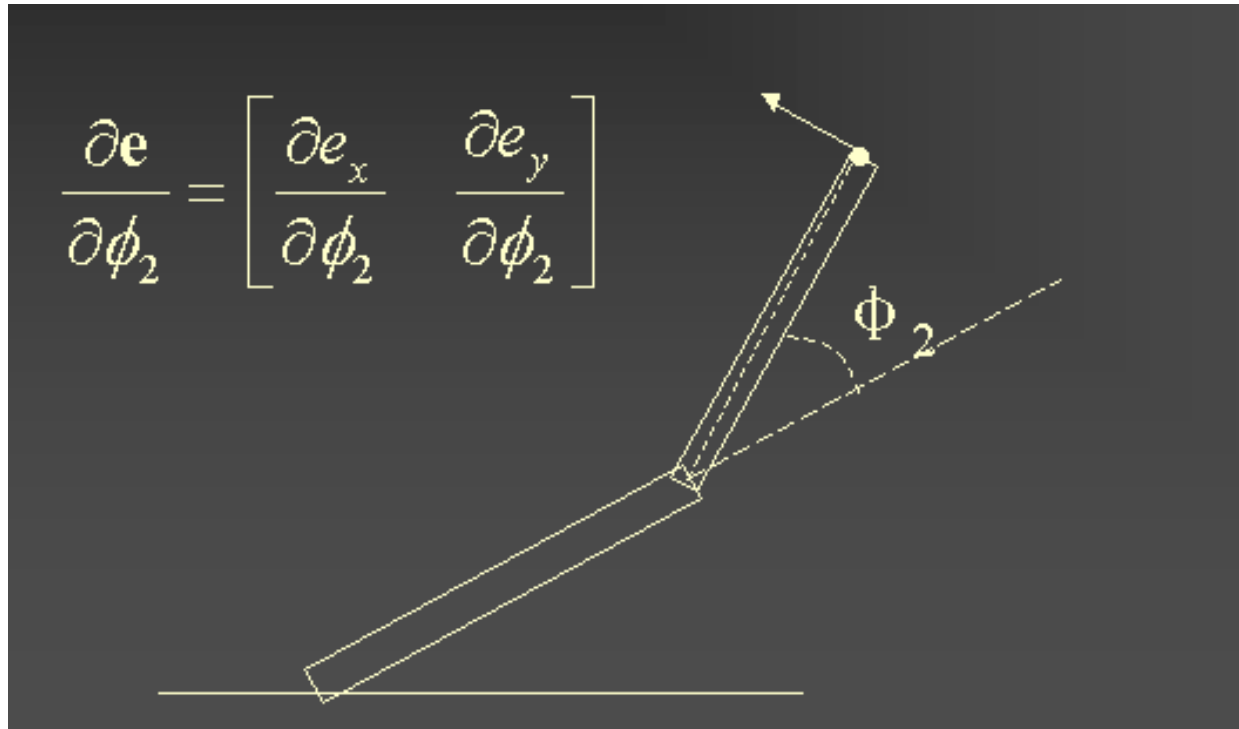
$$J(\mathbf{e}, \Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \phi_2} \end{bmatrix}$$

# Jacobian矩阵



增加 $\Phi_1$  时, $e$ 的变化

# Jacobian矩阵

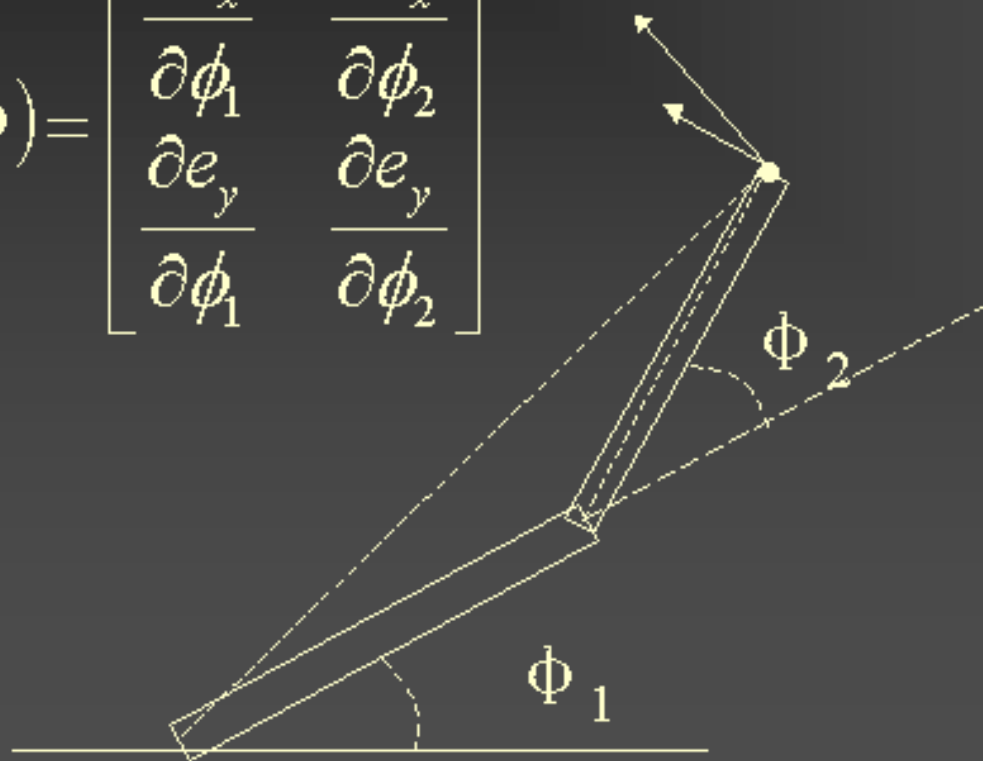


增加 $\Phi_2$  时, $\mathbf{e}$ 的变化



# Jacobian矩阵

$$J(\mathbf{e}, \Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \phi_2} \end{bmatrix}$$



# 姿态( $\Phi$ )的增量式变化

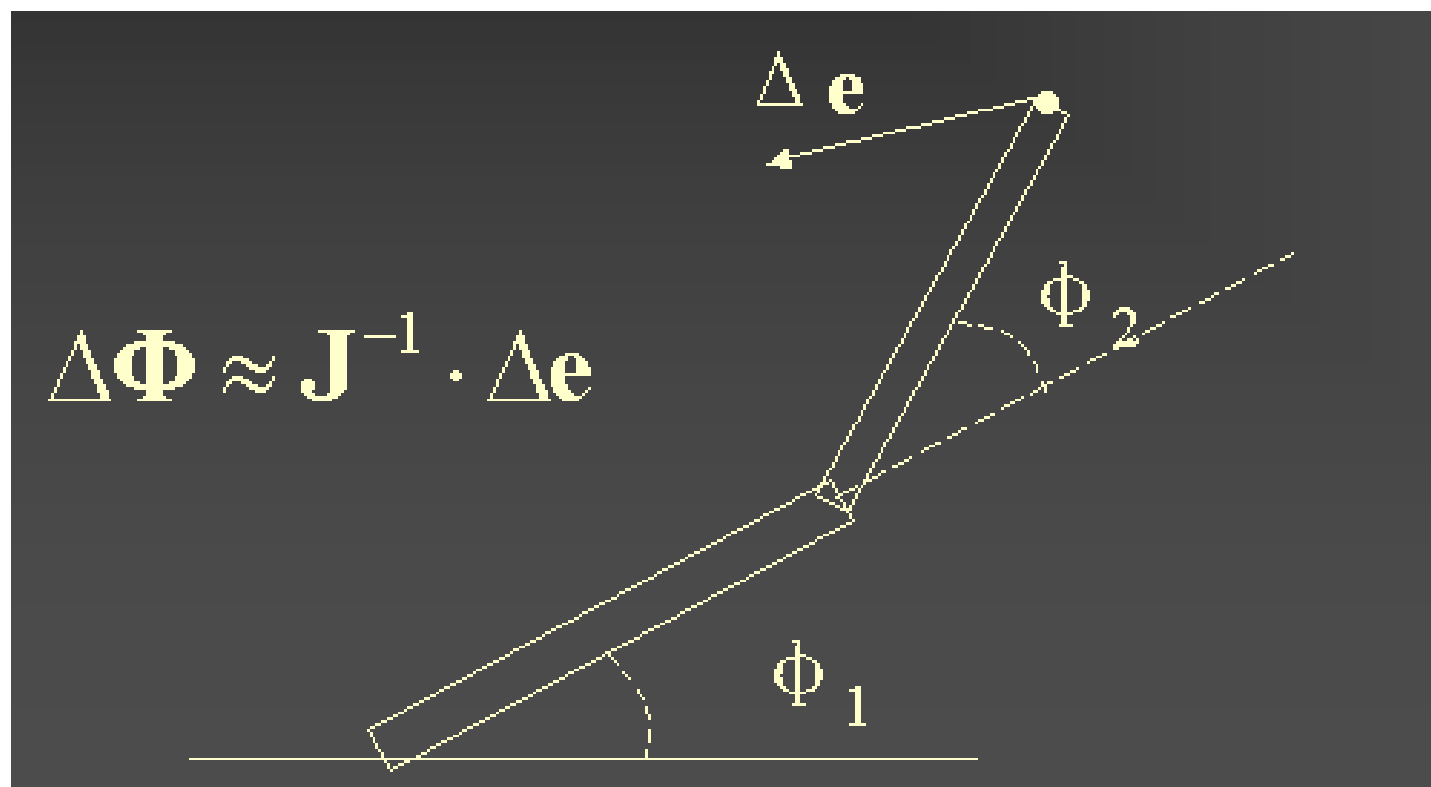
- $\Delta \Phi$  表示关节自由度的一个很小的变化
- $\Delta \mathbf{e}$  表示对应的末端影响器的变化

$$\Delta \mathbf{e} \approx \frac{d\mathbf{e}}{d\Phi} \cdot \Delta \Phi = J(\mathbf{e}, \Phi) \cdot \Delta \Phi = \mathbf{J} \cdot \Delta \Phi$$

# Jacobian矩阵

- 对于给定的姿态矢量  $\Phi$ ，可以显式地计算Jacobian矩阵的每个分量

## 末端影响器 (e) 的增量式变化



# 增量式变化

- 正向运动学是一个非线性函数(包含一些对输入变量的三角函数计算)
- **Jacobian**矩阵对当前姿态及其附近姿态有效
- 给定末端影响器的目标方位后, 利用当前的**Jacobian**矩阵, 使末端影响器前进一个小的步长, 之后计算新的**Jacobian**矩阵. 该过程不断重复, 直至到达目标

## 末端影响器 (e) 的增量式变化

$$\Delta \mathbf{e} \approx \mathbf{J} \cdot \Delta \Phi$$

*so* :

$$\Delta \Phi \approx \mathbf{J}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{e}$$

## 选择 $\Delta e$

- We want to choose a value for  $\Delta e$  that will move  $e$  closer to  $g$ . A reasonable place to start is with

$$\Delta e = g - e$$

- For safety, we will take smaller steps:

$$\Delta e = \beta(g - e) \quad \text{where } 0 \leq \beta \leq 1$$

# Basic Jacobian IK Technique

```
while (e is too far from g) {
```

Compute  $\mathbf{J}(\mathbf{e}, \Phi)$  for the current pose  $\Phi$

Compute  $\mathbf{J}^{-1}$  // invert the Jacobian matrix

$$\Delta \mathbf{e} = (\mathbf{g} - \mathbf{e}) \quad // \text{ pick approximate step to take}$$
$$\Delta \Phi = \mathbf{J}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{e} \quad // \text{ compute change in joint DOFs}$$
$$\Phi = \Phi + \Delta\Phi \quad // \text{ apply change to DOFs}$$

Compute new vector // apply forward  
// kinematics to see  
// where we ended up

}



# Jacobian矩阵的计算

# 计算Jacobian矩阵

- ✚ 只考虑末端影响器的位置, 因此 $e$ 是一个3D矢量, 表示末端影响器在世界空间中的位置. 相应的Jacobian矩阵是一个 $3 \times N$ 矩阵( $N$ 是关节自由度的数目)
- ✚ 分析每个关节自由度的变化对 $e$ 的影响

# 1-DOF Rotational Joints

- 首先考虑具有一个旋转自由度的关节
- 考察当该关节沿旋转轴旋转时 $\mathbf{e}$ 的变化. 需要确定**旋转轴**和**旋转支点**在世界坐标系中的表示
- 令  $\phi_i$  表示关节的旋转自由度, 其相对于父关节的偏移量为  $\mathbf{r}_i$ , 旋转轴在父关节坐标系中为  $\mathbf{a}_i$
- 利用父关节的世界坐标矩阵可以计算支点和旋转轴在世界空间中的表示

# 1-DOF Rotational Joints

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{W}_{i-parent}$$

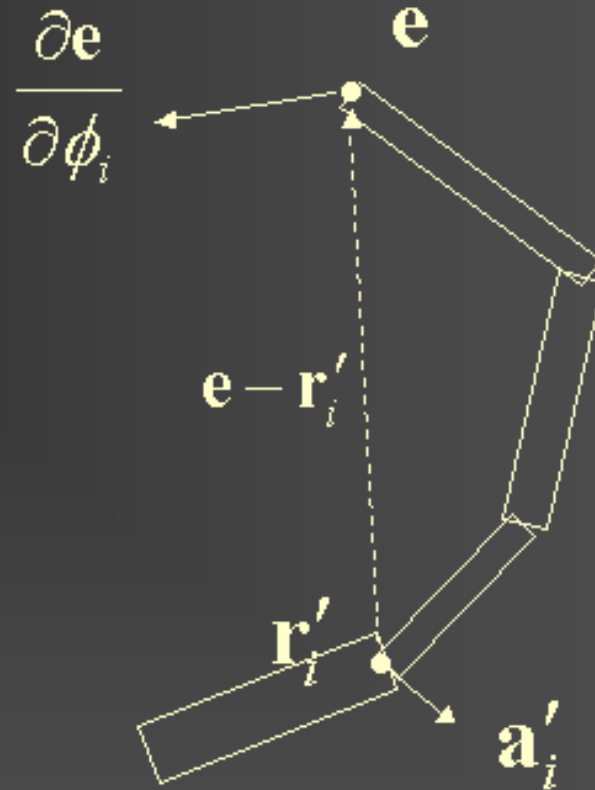
$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{W}_{i-parent}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi_i} = \mathbf{a}'_i \times (\mathbf{e} - \mathbf{r}'_i)$$

Jacobian矩阵的一列

# Rotational DOFs

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi_i} = \mathbf{a}'_i \times (\mathbf{e} - \mathbf{r}'_i)$$



$\mathbf{a}'_i$ : unit length rotation axis in world space

$\mathbf{r}'_i$ : position of joint pivot in world space

$\mathbf{e}$ : end effector position in world space

## 3-DOF Rotational Joints

- 对于**2-DOF** 或者 **3-DOF** 的关节, 确定其旋转轴在世界坐标系中的表示
- 考虑如何确定**3-DOF**球窝关节的**x**轴在世界坐标系中的表示
- 不仅需要考虑父关节的世界坐标变化矩阵, 而且需要考虑另外两个坐标轴(**y**轴和**z**轴)

## 3-DOF Rotational Joints

✚假定一个3-DOF的球形关节,以xyz的顺序旋转

行向量

$$\begin{aligned}x-dof : \quad \mathbf{a}'_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_y(\theta_y) \cdot \mathbf{R}_z(\theta_z) \cdot \mathbf{W}_{parent} \\y-dof : \quad \mathbf{a}'_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_z(\theta_z) \cdot \mathbf{W}_{parent} \\z-dof : \quad \mathbf{a}'_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{W}_{parent}\end{aligned}$$

$\mathbf{R}_y(\theta_y)$  和  $\mathbf{R}_z(\theta_z)$  是y和z的旋转矩阵

# 3-DOF Rotational Joints

## 3-DOF XYZ 球窝关节的变换矩阵

$$\mathbf{L}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \mathbf{R}_x(\theta_x) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_y) \cdot \mathbf{R}_z(\theta_z) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r})$$

- $\mathbf{R}_x(\theta_x)$ ,  $\mathbf{R}_y(\theta_y)$ , 和  $\mathbf{R}_z(\theta_z)$  是  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴对应的旋转矩阵,  $\mathbf{T}(\mathbf{r})$  是关节偏移量对应的平移矩阵

## 到世界坐标系的变换矩阵

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_x(\theta_x) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_y) \cdot \mathbf{R}_z(\theta_z) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{W}_{parent}$$



## 3-DOF Rotational Joints

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi_i} = \mathbf{a}'_i \times (\mathbf{e} - \mathbf{r}'_i)$$

利用该公式分别计算三个轴的自由度的偏导数, 这样便可以得到**3-DOF**关节对应的**Jacobian**矩阵中的三列

# 计算Jacobian矩阵

为每个自由度计算Jacobian  
矩阵中的一列

# Units & Scaling

- ✚ 旋转自由度使用弧度作为单位，平移自由度使用米作为单位。如何将这些自由度的偏导数组合到同一个矩阵???
- ✚ 如果需要，可以对Jacobian矩阵中的某些列进行一个比例缩放，以便调整该自由度在IK求解中的比重

**计算Jacobian矩阵的逆矩阵**

# 计算逆矩阵

- 如果 **Jacobian** 矩阵是方形矩阵, 且可逆, 则可以直接计算逆矩阵 (高斯消元...)
- 大多数情况下, **Jacobian** 矩阵并不是方阵
- 即使是方阵, 也不一定可逆
- 即使 **Jacobian** 矩阵是方阵, 且在某个姿态下可逆, 但随着姿态改变时 **Jacobian** 矩阵也可能变为非可逆矩阵

# Underconstrained Systems

- 关节自由度数**大于**末端影响器的参数数目
- 方程组有**无穷多解**
- 需要从无穷多解中找到一个**最佳解**

# Overconstrained Systems

- 关节自由度数**小于**末端影响器的参数数目
- 方程组**没有解**
- 需要找一个**近似解**
- 过约束系统**很少见**

# Pseudo-Inverse

- 对于非方形矩阵, 可以计算其伪逆矩阵

$$\mathbf{J}^* = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T$$



# Jacobian Transpose

- 一种简单的方法是利用Jacobian矩阵的转置近似Jacobian矩阵的逆
- 该方法的效果很好, 令人吃惊!
- 该方法的计算速度比伪逆矩阵方法快很多
- 该方法使计算具有局部化属性. 为了计算关节*i*对应的  $\Delta \phi_i$ , 只需计算Jacobian 矩阵的一列, 之后带入下面公式:

$$\Delta \phi_i = J_i^T \cdot \Delta e$$

# 其他的IK技术

- **Cyclic Coordinate Descent**

- 与Jacobian 矩阵方法相比, 收敛所需要的迭代次数较少; 每次迭代的计算量较大;
- 逆向运动链/kinechain.dsw 逆向运动链.pdf

- **Analytical Methods**

- 对简单关节链结构, 可以用解析方法求解; 该方法计算速度快, 准确; 对于一些复杂结构的关节链, 也可以根据需求设计一些解析解.
- 逆向运动/kine.dsw 逆向运动.pdf

- **Other Numerical Methods**

- 其他的一些数值计算方法, 如svd....

# A Good Website

[www.darwin3d.com/gamedev.htm](http://www.darwin3d.com/gamedev.htm)

# 逆向运动学小结

## 逆向运动学方程的求解

- ✚ 正向运动方程直接求解;
- ✚ 逆向运动方程求解:
  - ✚ 一个高度非线性的函数, 其复杂性随着关节链结构的链杆数目增大而快速增长;
  - ✚ 事实上不能给出其逆函数的解析表达式;
- ✚ 利用Jacobian矩阵增量式求解
  - ✚ 对于复杂的链结构, 很难计算解析解
  - ✚ 对复杂的函数进行线性局部化—分段线性函数

# 逆向运动学小结

## 逆向运动方程的求解（重要）

- 设状态向量维数为 $m$ ，末端方位向量的维数为 $n$ ，有微分局部线性化运动方程：

$$dX = J(\Theta) d\Theta$$

- $J$ 为 $n \times m$ 阶 Jacobian 矩阵，其 $i$ 行 $j$ 列的元素为：

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$$

- 逆函数可通过下述局部线性化来逼近：

$$d\Theta = J^{-1}(dX)$$

- 当末端影响器从 $X$ 运动到 $X_{goal}$ 时，可采用逐步逼近法来求解链结构的目标运动状态；

# 逆向运动学小结

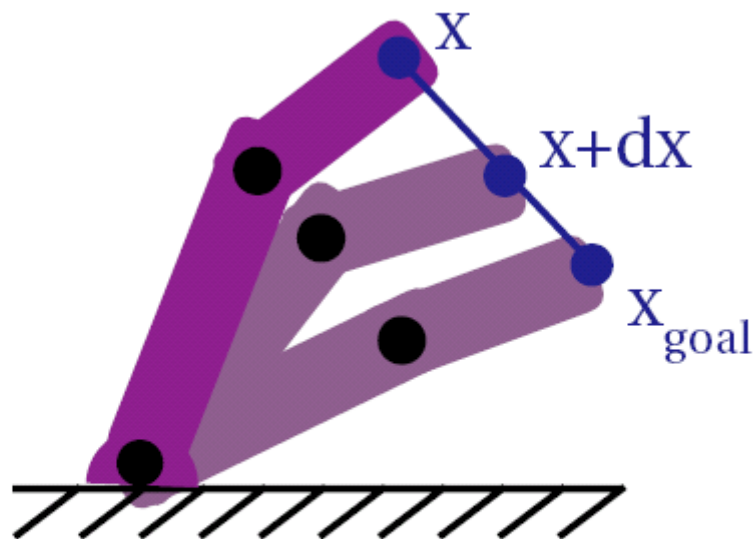
## 逆向运动学求解几何说明 (重要)

### ✚ 逆向求解的逐步逼近法的几何说明

$$\theta = f^{-1}(x)$$

$$dx = J d\theta$$

$$d\theta = J^{-1} dx$$



$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t J^{-1} dx$$

# 逆向运动学小结

- ✦ 根据**逆向**运动学，只需给出单链结构的**末端影响器的方位**就可以求出其状态向量；
- ✦ 在计算机动画系统中，只需采用**关键帧插值**或其他动画技术来**生成末端影响器的方位**动画，就可**生成整个单链结构在每一时刻的状态向量**，从而达到驱动关节链结构的目的；
- ✦ 处理目标跟踪方面更为方便；

# 逆向运动学小结

## 目标驱动技术(逆向运动学)

- 目标跟踪技术可简化为一系列运动的约束；
- 物体的运动完全由目标物体的运动所驱动；
- 主要的运动约束：
  - 位置约束—物体的局部坐标原点与目标物体的局部坐标原点重合，且以同样的平移速度运动；
  - 方向约束—物体的朝向同物体的局部坐标原点和目标物体的局部坐标原点所定义的方向一致；
- 运动约束技术极大地减轻了用户交互的复杂性，提高了生成动画的真实性，对逆向运动学方法求解复杂的骨架运动尤为重要；



## 第四章 运动链接

4.1 关节动画

4.2 正向运动学

4.3 逆向运动学

4.4 运动学应用

4.5 运动捕捉初步

# 运动学的应用

## ✚ 两足行走模型：

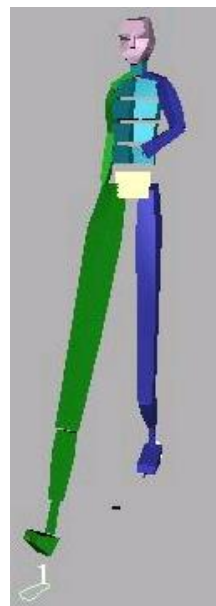
- 动画设计者无需给出各关节的运动细节，只需给出**运动参数**如行走方向、速度等；
- 人体行走是一个**循环往复**的过程，给出其中一个步态的循环，就可生成整个行走动画序列；
- 首先定义一组与**简单机械抽象**地结合在一起的步态决定因子，以解释两足行走的运动学特性；
- 在骨架模型上每次**增加一个步态**决定因子来逐渐建立复杂的步态；
- 某个决定因子依赖于某个关节中的一个**一个**自由度；

# 运动学的应用

## 两足行走模型：

### ■步态决定因子：

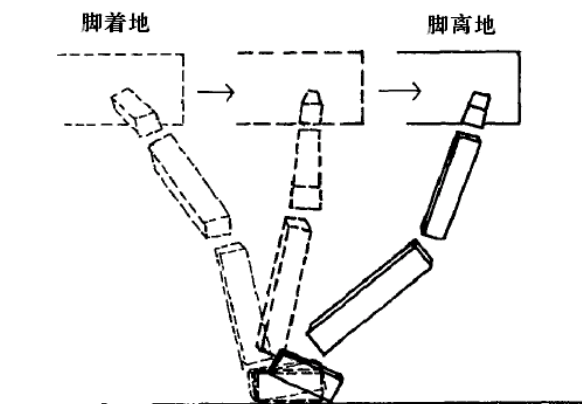
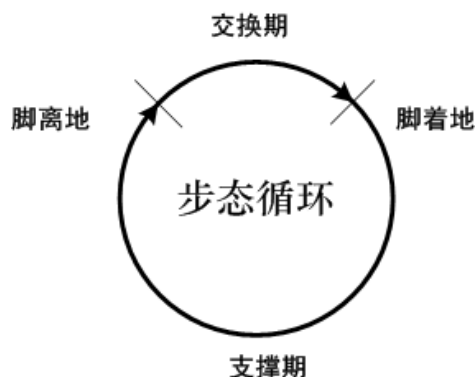
- 圆规步态；
- 骨盆旋转；
- 骨盆倾斜；
- 支撑腿的弯曲；
- 支撑腿的脚底弯曲；
- 骨盆侧面的移位；



# 运动学的应用

## 两足行走模型：

- 利用骨架和步态的定义；
- 在一个步态循环所需的时间周期内，每条腿均经历两个支撑阶段和摆动阶段；
- 每个阶段的起始点是脚跟部着地和脚趾离地，而且两条腿所处的阶段恰好相反；



- 为了区分跑和走，引入负载因子，即支撑在整个周期所占的比例，行走时该因子大于0.5；

# 运动学的应用

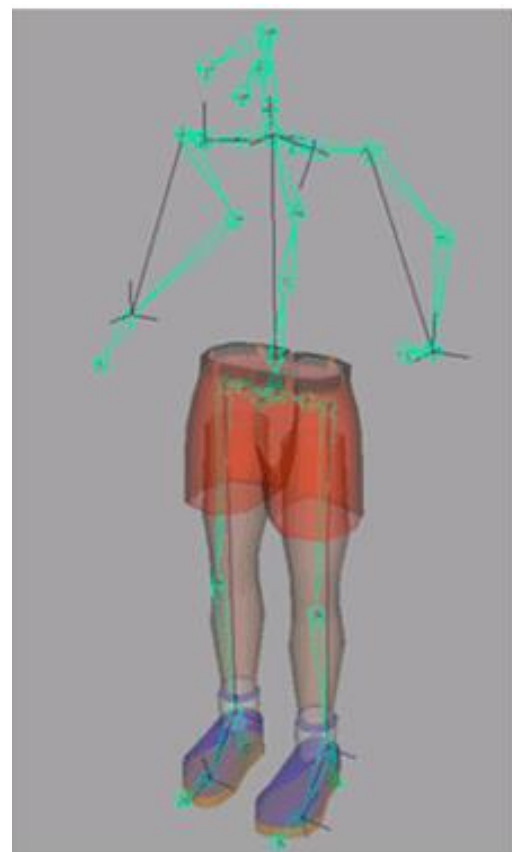
## 骨架驱动的肌肉模型：

- 各链杆为刚体，运动缺乏生命特征；
- 动物骨架的运动是皮下肌肉变形的结果；
- 为获得真实的动画效果，必须考虑肌肉在骨架运动中的变形效果；
- 所模拟的动物组织可分作三层：
  - 骨架层、肌肉层和皮肤层；
- 运动学——驱动骨架—驱动肌肉收缩和扩张—产生皮肤表面的变形—可见的表面几何；

# 运动学的应用

## ✚ 骨架驱动的肌肉模型：

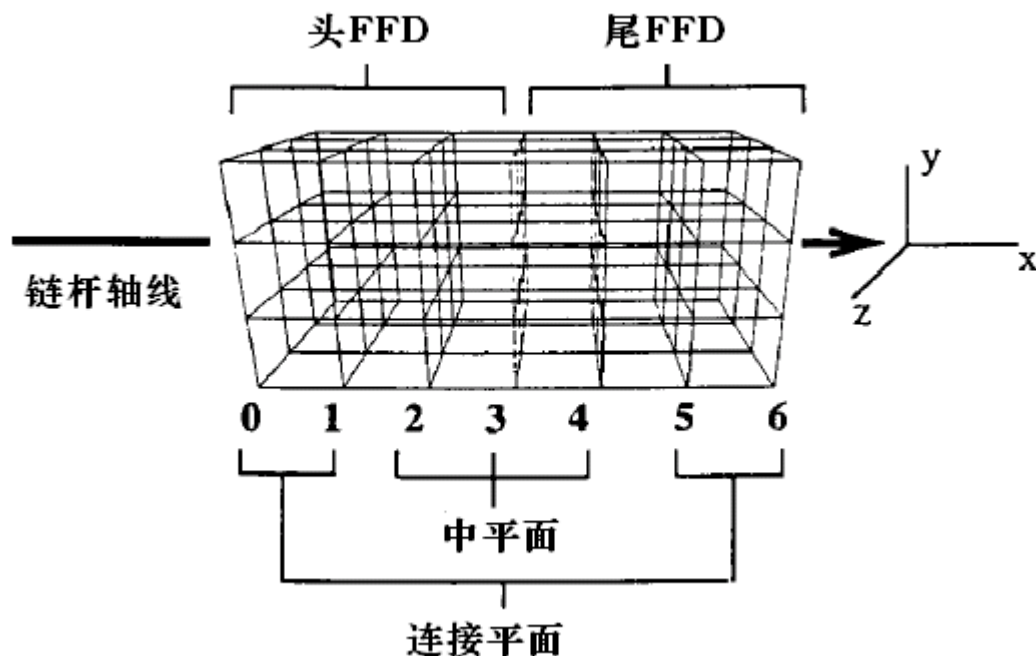
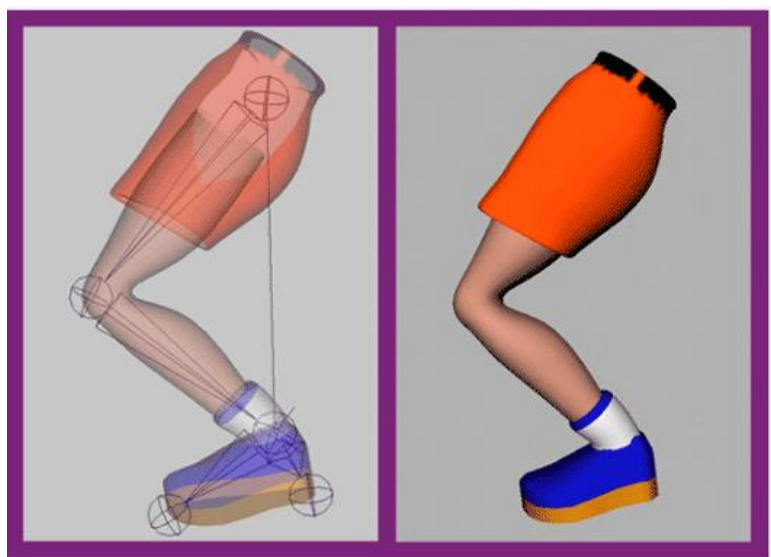
- Chadwich, 1989年；
- 不真正建立皮肤和骨架层之间的肌肉层；
- 采用自由变形技术来驱动皮肤表面几何的变形；
- 利用按一定方式组织好的FFD来抽象表达肌肉层的功能，每块FFD被表示成一个三三次Bezier体；



# 运动学的应用

## ✚ 骨架驱动的肌肉模型：

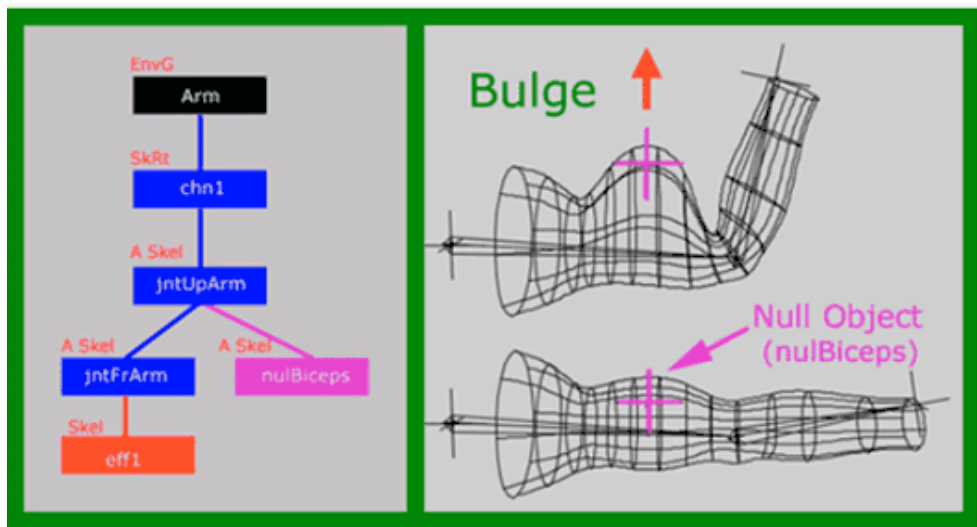
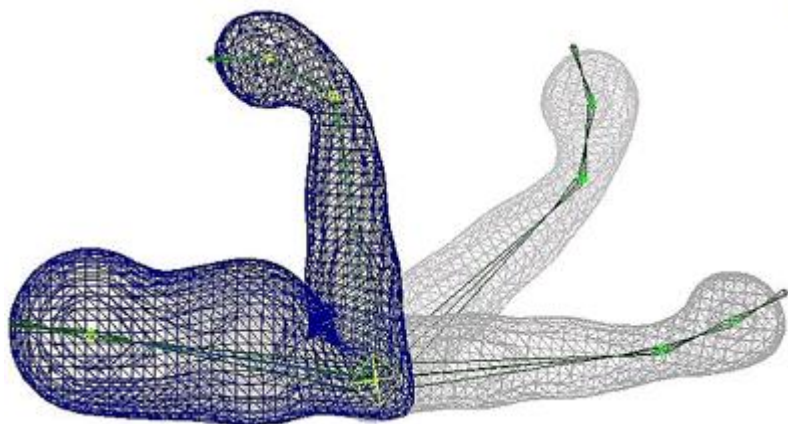
- 初始为长方体网状结构，有七个垂直于轴线的平面；
- 两端四个平面起保持连续性的作用；
- 中间三个平面用来驱动皮肤表面的变形；
- 将皮肤表面几何嵌入到FFD表示的肌肉模型中，建立皮肤表面与肌肉层的连接关系，通过改变FFD的控制顶点，达到变形皮肤表面的目的；



# 运动学的应用

## ✚ 骨架驱动的肌肉模型：

- 用户交互地将皮肤表面包裹在骨架上；
- 需要皮肤变形的区域沿骨架轴向放置一些FFD块；
- 建立运动变形关系；





## 第四章 运动链接

4.1 关节动画

4.2 正向运动学

4.3 逆向运动学

4.4 运动学应用

4.5 运动捕捉初步

# 动作捕获

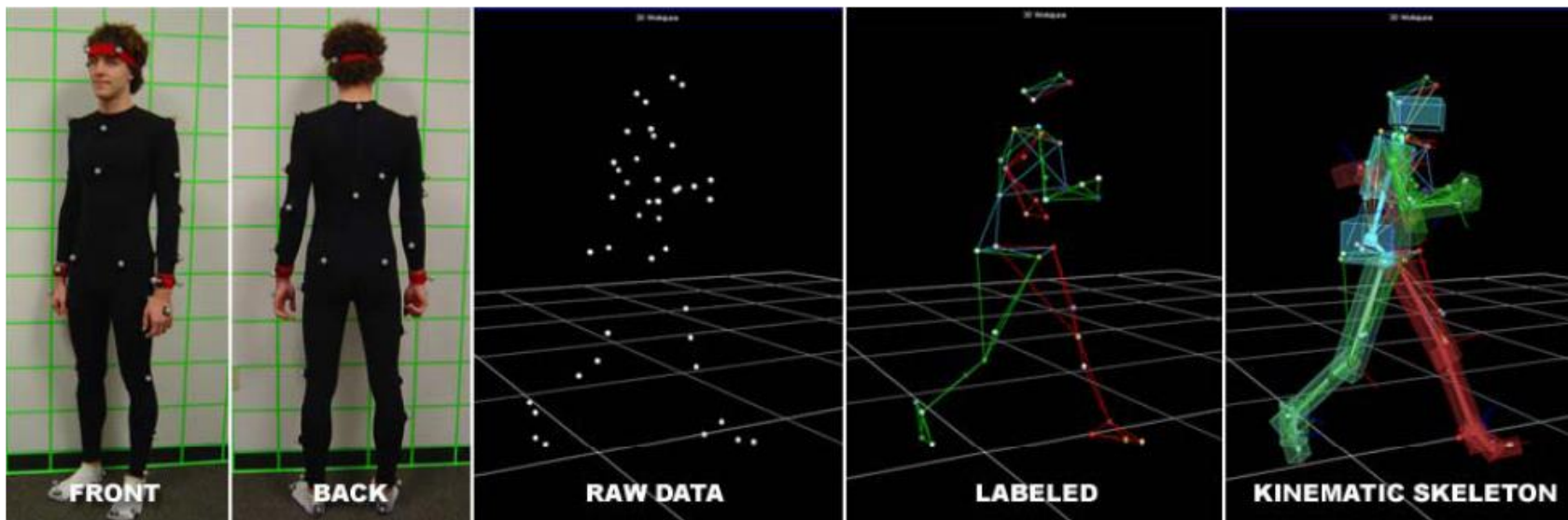
## ✚ 正向运动学的应用：

- 采用人类演员与运动跟踪设备，记录演员的运动数据，生成对计算机模型的一个运动脚本；



# 动作捕获

- 设置关键点；
- 利用光学仪器和高速摄影机；





NEW LINE CINEMA  
An AOL Time Warner Company

# 动作捕获

- 基于捕获的方法得到了**广泛的应用**；
  - 但**设备昂贵**，只能生成预先设计好的动作；
  - 利用**运动学方程**来控制人体骨架仍具有现实意义；
  - 如何利用计算机生成**协调一致**的骨架运动；
- 
- <http://my.tv.sohu.com/pl/8453413/79930871.shtml>

## 思考题：

1. 关节链结构有哪几种表示方法，有何区别？
2. 控制关节链结构运动的方法有哪几种，有何区别？
3. 正向运动学与逆向运动学的求解过程各是什么？二者分别有何优缺点？
4. 雅可比矩阵的定义是什么？关节动画中，雅可比矩阵的求法及其逆矩阵的求法？



結束