Computergrafik, SS 2010 — 1. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag 20.April 2012, 12 Uhr
Die Aufgaben ohne Bewertung werden in den Tutorien besprochen.

---

1. (0 Punkte)

   (a) Bestimmen Sie eine Rotation

   $$R\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

   die die zwei Punkte (mit kartesischen Koordinaten) $(0,0)$ und $(3,4)$ auf die Punkte $(2,1)$ und $(2,6)$ abbildet.

   (b) Bestimmen Sie den Punkt z der Ebene mit $z = R(z)$ (den Fixpunkt; den Punkt, um den gedreht wird).

   (c) Um welchen Winkel wird die Ebene dabei gedreht? (im Uhrzeigersinn bzw. gegen den Uhrzeigersinn?)

2. Freiheitsgrade (0 Punkte)

   Wieviele Paare von Urbildpunkten und Bildpunkten muss man im Allgemeinen festlegen (beliebig, fast beliebig, mit Einschränkungen), um die folgenden Abbildungsarten im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ eindeutig zu charakterisieren? Geben Sie kurze Begründungen.

   (a) Isometrie (starre Bewegung)

   (b) Affine Abbildung

   Anmerkung: Manche Information kann man auch über ein einzelnes Bit speichern, anstatt ein zusätzliches Punktepaar zu verwenden. Diese Fälle sollen erkannt werden.

3. (0 Punkte) Schreiben Sie die Transformationsmatrix M, die der Nacheinanderausführung der folgenden Transformationen (in dieser Reihenfolge) entspricht:

   (a) Eine Translation um den Vektor $(2,1)$.

   (b) Eine Rotation um den Ursprung um 90° nach links.

   (c) Eine Streckung der x-Achse um den Faktor 2. (Die y-Achse bleibt unverändert.)

   (d) Eine Rotation um den Ursprung um 90° nach links.

   Auf welche Punkte werden die drei Punkte $(4,2)$, $(3,3)$, $(3,7)$ am Ende abgebildet?

4. (0 Punkte)

   (a) Welche geometrischen Transformation wird durch die Abbildung

   $$A : x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

   beschrieben?

(b) Sei R eine Rotation um $90°$ nach links um den Ursprung.
Wenden Sie folgende drei Transformationen in der folgenden Reihenfolge an:

$$R,\ A,\ R^{-1}$$

Bestimmen Sie die Matrix M, welche der Verknüpfung der drei Abbildungen entspricht.

(c) Bestimmen Sie die Fixpunkte von M ($Mx = x$).

(d) Welche geometrische Transformation wird durch M beschrieben?

5. (0 Punkte) Wenden Sie die projektive Transformation $x \mapsto Mx$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf die Quadrate des Schachbrettmusters

$$\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i,j \in \mathbb{Z},\ 0 \le i \le x \le i+1 \le 8,\ 0 \le j \le y \le j+1 \le 8,\ i+j \text{ ist gerade}\,\}$$

an und zeichnen Sie das Ergebnis.

6. (0 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt P der beiden folgenden Geraden

$$3x + 4y = 5$$

$$4x + 5y = -6$$

in *homogenen* Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch P und den Punkt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(c) Schneiden Sie g mit der Ferngeraden.

7. Rotation um eine beliebige Achse (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für eine Rotation um die Gerade durch den Ursprung in Richtung des Vektors

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

um einen Winkel von $30°$ gegen den Uhrzeigersinn, wenn man vom Ursprung aus in Richtung von u schaut. Verwenden Sie dazu eine Methode Ihrer Wahl, z.B. die folgende:

1. Drehe den Vektor u in die yz-Ebene (z. B. um die z-Achse).
2. Drehe den Vektor weiter in die z-Achse (um die x-Achse).
3. Drehe um $30°$ um die z-Achse.
4. Führe die Transformationen aus Schritt 2 und 1 rückwärts aus.

Kontrollieren Sie, dass der Punkt u auf sich selbst abgebildet wird.

8. Arithmetische Komplexität (10 Punkte)

   Betrachten Sie das Verfahren der vorherigen Aufgabe für einen allgemeinen Vektor u und bestimmen Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen (Addition und Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel).

9. Projektives Bild einer Strecke (10 Punkte)

   (a) Zerlegen Sie die Strecke von $(-1, 0)$ zu $(0, 1)$ in 10 gleiche Teile und wenden Sie auf die Zwischenpunkte die projektive Transformation $x \mapsto Mx$ mit

   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   aus Aufgabe 4 an. Zeichnen Sie das Ergebnis. Was ist das Bild der ganzen Strecke unter dieser projektiven Transformation.

   (b) Charakterisieren Sie diejenigen Strecken, deren Bild unter einer gegebenen projektiven Transformation wieder eine Strecke ist. (Also nicht ein unendlicher Strahl oder etwas anderes.)