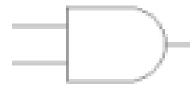
Sistemas Digitais

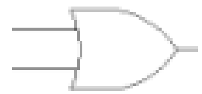
Portas Equivalentes

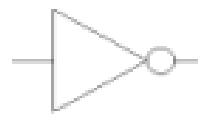
Aula 04

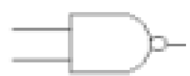
Prof. Leandro Nogueira Couto
UFU – Monte Carmelo
05/2013

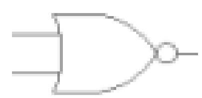
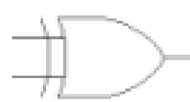
<table>
<tr>
<td>E

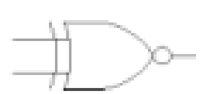
AND</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função E:
Assume 1 quando todas as variáveis forem 1 e 0 nos outros casos.</td>
<td>$S=A.B$</td>
</tr>
<tr>
<td>OU

OR</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função OU:
Assume 0 quando todas as variáveis forem 0 e 1 nos outros casos.</td>
<td>$S=A+B$</td>
</tr>
<tr>
<td>NÃO

NOT</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função NÃO:
Inverte a variável aplicada à sua entrada.</td>
<td>$S=\overline{A}$</td>
</tr>
<tr>
<td>NE

NAND</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função NE:
Inverso da função E.</td>
<td>$S=\overline{(A.B)}$</td>
</tr>
<tr>
<td>NOU

NOR</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função NOU:
Inverso da função OU.</td>
<td>$S=\overline{(A+B)}$</td>
</tr>
<tr>
<td>OU EXCLUSIVO</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função OU Exclusivo:
Assume 1 quando as variáveis assumirem valorem diferentes entre si.</td>
<td>$S=A\oplus B$

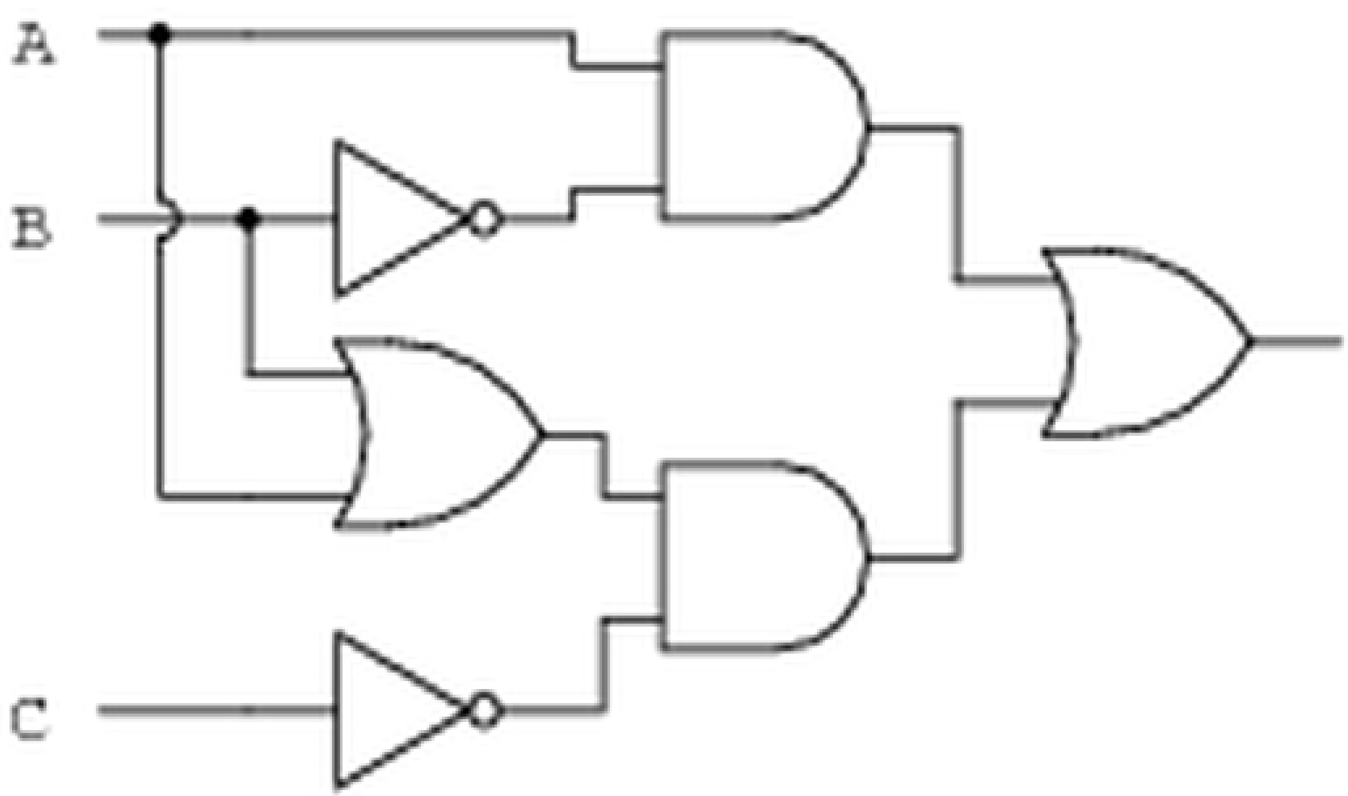
$S=\overline{A}.B + A.\overline{B}$</td>
</tr>
<tr>
<td>COINCIDÊN CIA</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
<td>Função Coincidência:
Assume 1 quando houver coincidência entre os valores das</td>
<td>$S= A\odot B$

$S=\overline{A}.\overline{B} + A.B$</td>
</tr>
</table>

Portas equivalentes

- Exercícios:

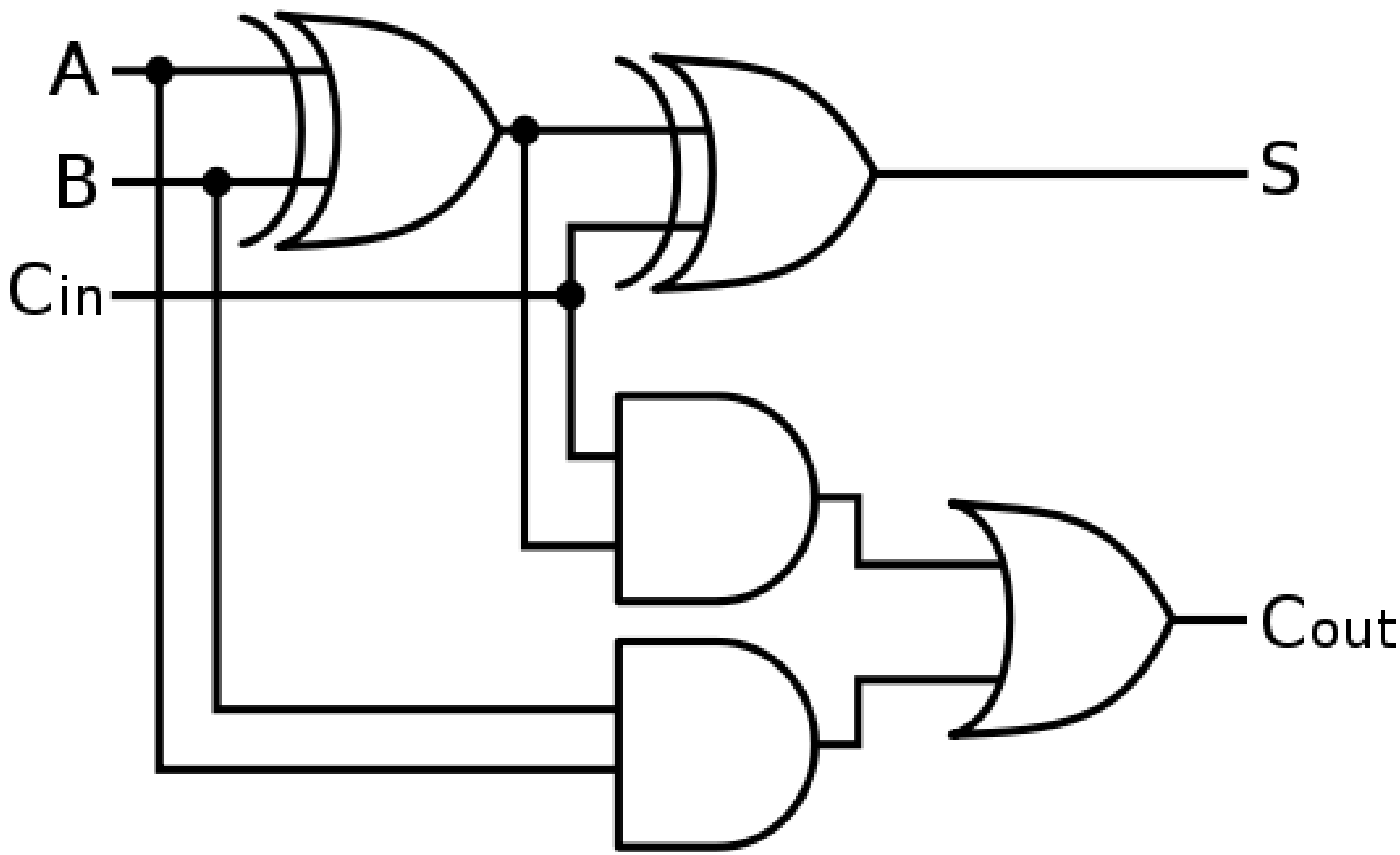
  Determine a expressão a partir do circuito lógico



Portas equivalentes

- Exercícios:

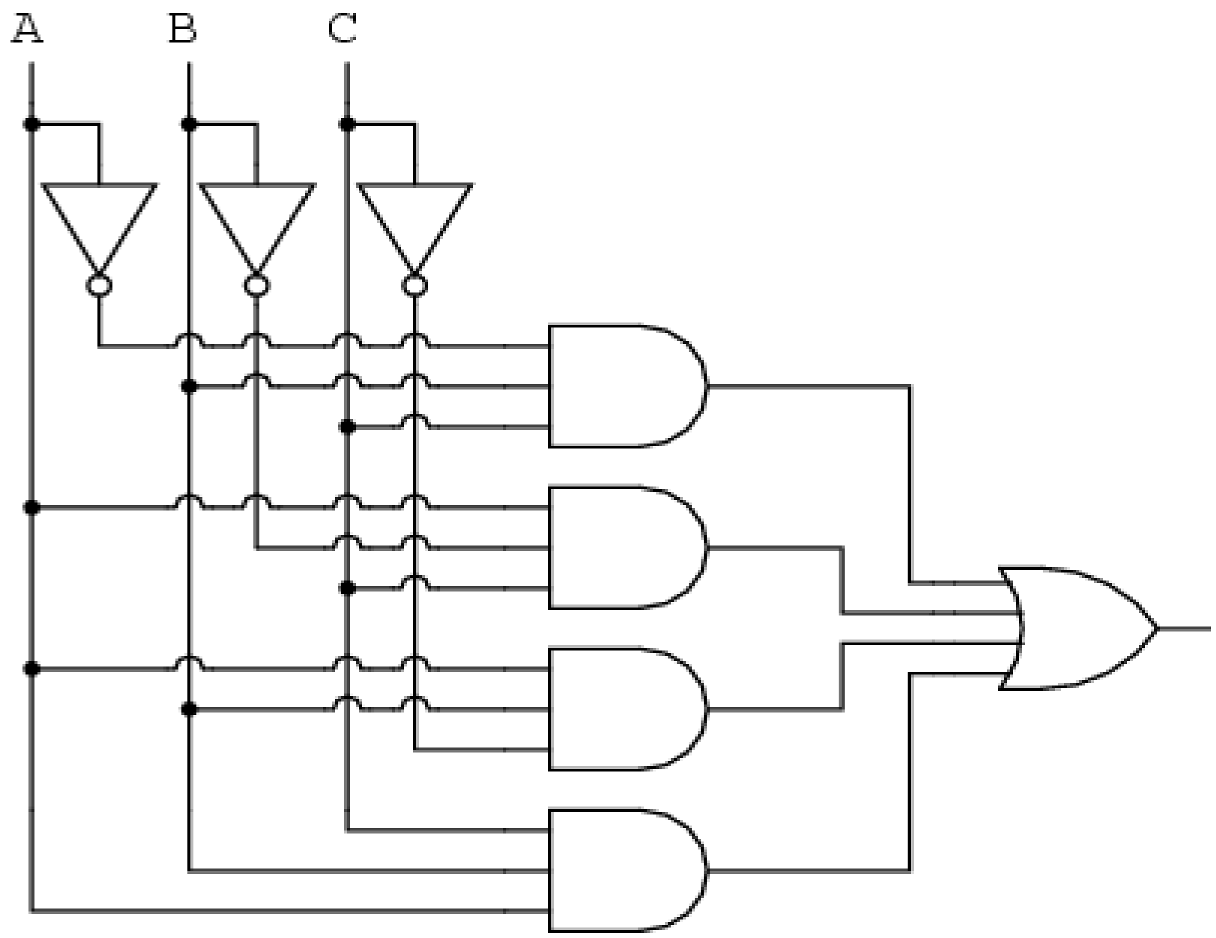
  Determine a expressão a partir do circuito lógico



Portas equivalentes

- Exercícios:

  Determine a expressão a partir do circuito lógico



Portas equivalentes

- Exercícios:

  Determine a o circuito lógico a partir da expressão:

  P = AB + BC(~B+C)

  Q = (A+B)(A+C)

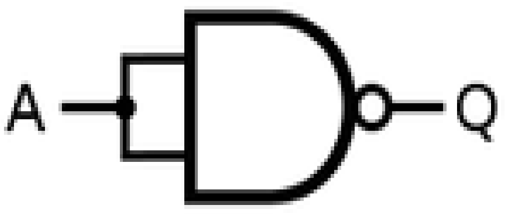
  R = ~(A+B) + (~B + ~(A+B))C

  S = (A.~B) + (~A.B)

  (Curiosidade: faça a tabela verdade da fórmula S)

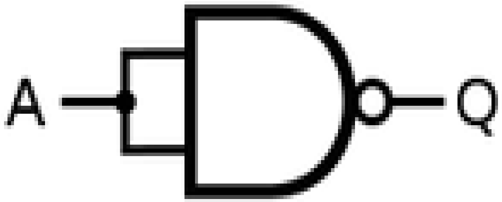
Portas equivalentes

- O que acontece se curto-curcuitarmos a entrada de uma porta **NAND**?
- E de uma porta **NOR**?



Portas equivalentes

- O que acontece se curto-curcuitarmos a entrada de uma porta **NAND**?
- E de uma porta **NOR**?



Pela tabela verdade, vemos que:

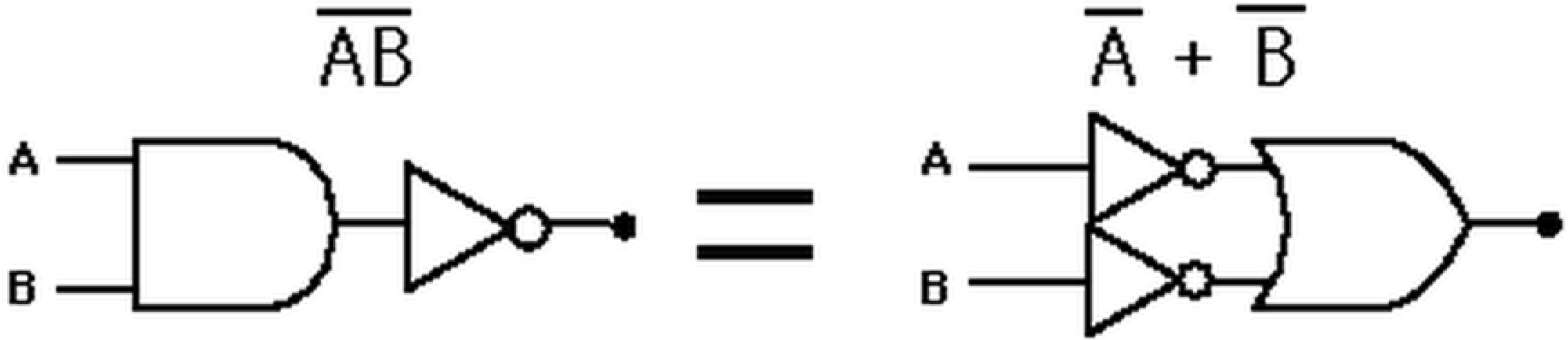
Q = NOT(A) ou ~A ou Ā

Portas equivalentes

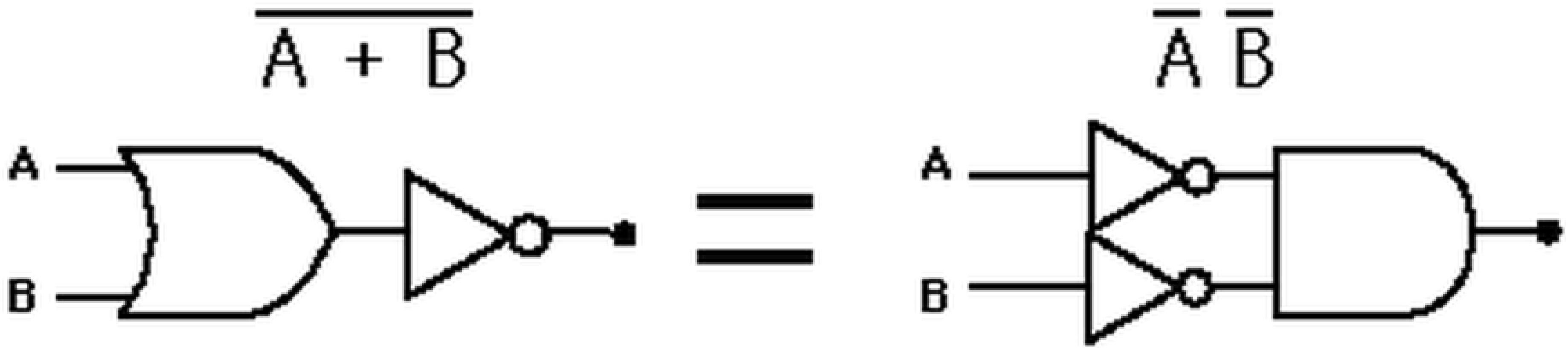
- E construir uma porta AND a partir de portas NOT e OR, é possível?
- E o inverso, uma OR a partir de NOT e AND?
- Fazemos isso usando as **Leis de De Morgan**. São análogas às da lógica proposicional

Portas equivalentes

- Leis de De Morgan



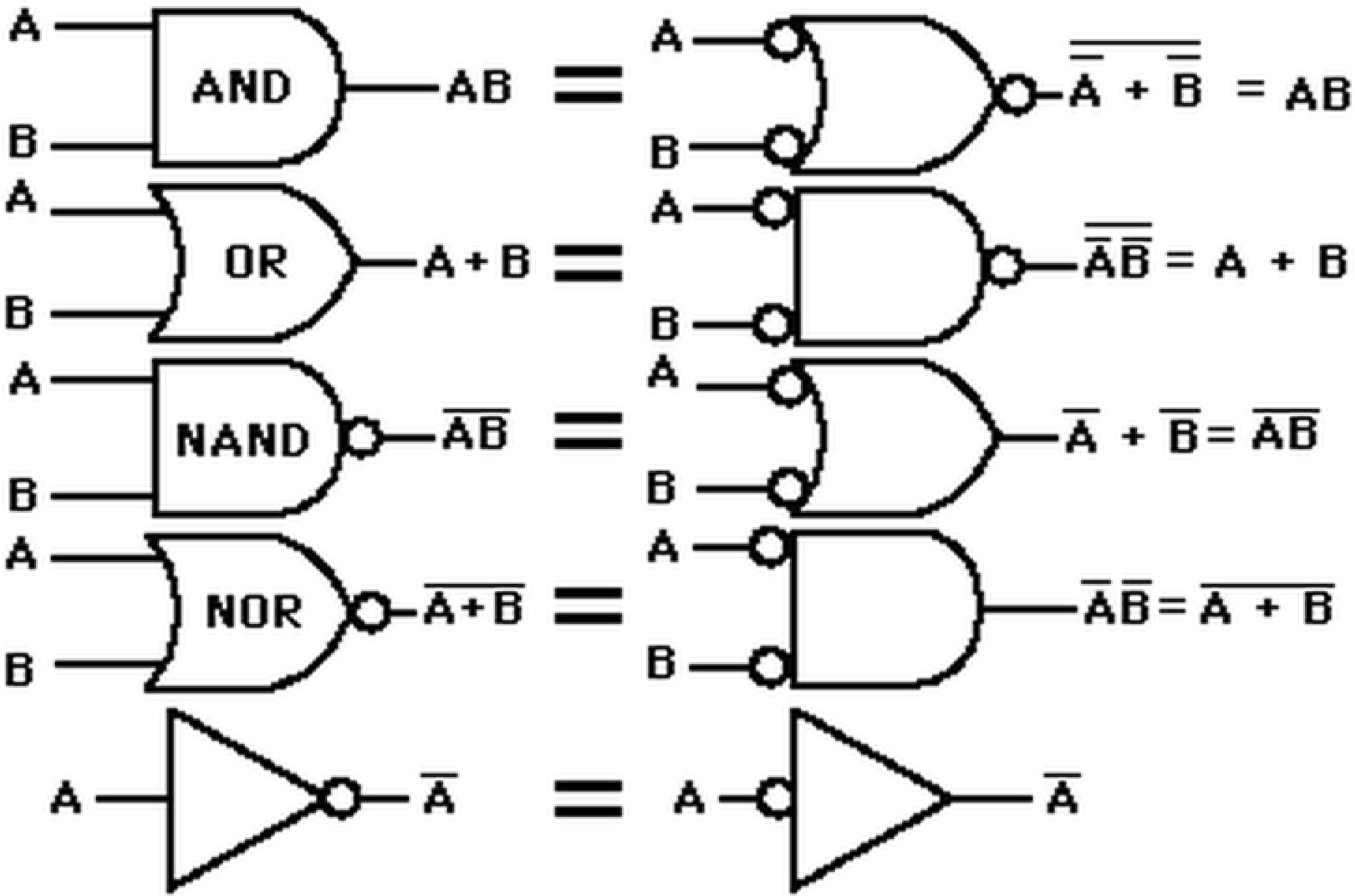
A NAND gate is equivalent to an inversion followed by an OR



A NOR gate is equivalent to an inversion followed by an AND

Portas equivalentes

- Que outras equivalências temos? Um pequeno resumo:

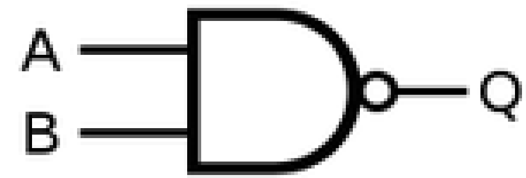


Portas equivalentes

- **Lógica NAND:**

  As equivalências são tão poderosas que podemos escrever qualquer expressão lógica apenas em termos de NANDs

- Por causa disso chamamos a operação NAND de **funcionalmente completa**
- Outro funcionalmente completo: NOR



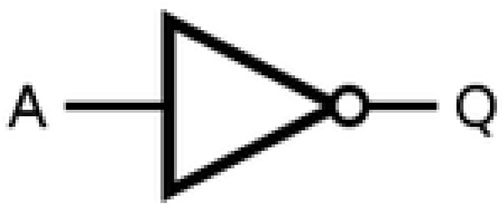
Q = NOT(**A** AND **B**)

Truth Table

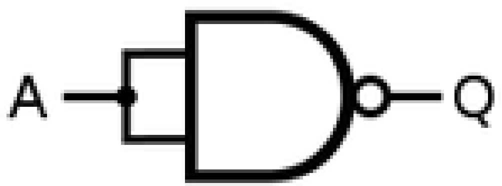
Input A	Input B	Output Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Portas equivalentes

- NOT



Q = NOT(**A**)



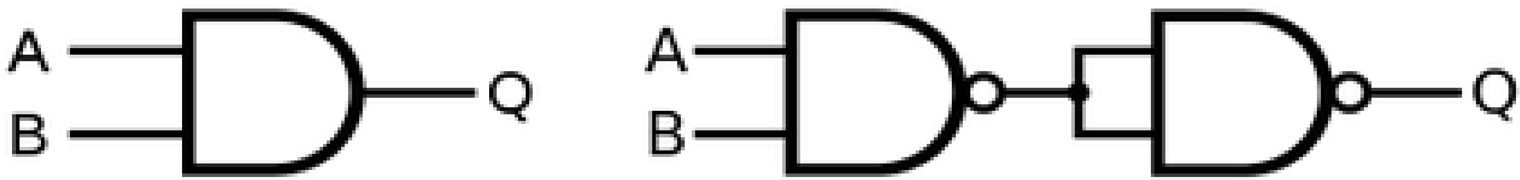
= NOT(**A** AND **A**)

Truth Table

Input A	Output Q
0	1
1	0

Portas equivalentes

- AND



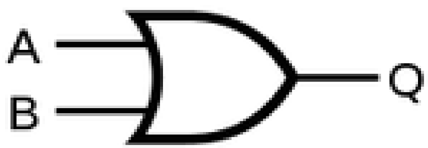
Q = **A** AND **B** = NOT(NOT(**A** AND **B**))

Truth Table

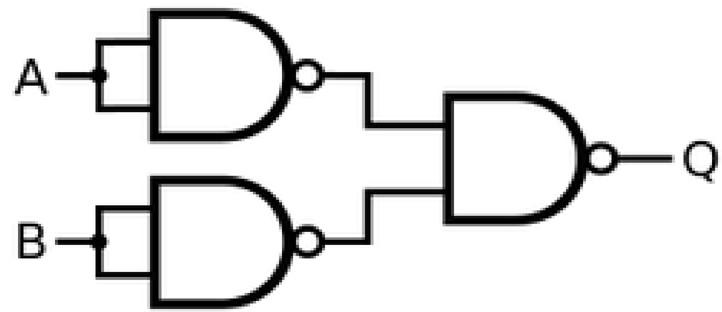
Input A	Input B		Output Q
0	0		0
0	1		0
1	0		0
1	1		1

Portas equivalentes

- OR



Q = **A** OR **B**



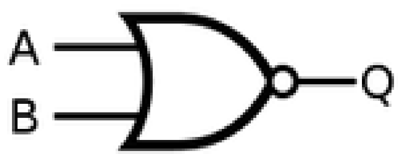
= NOT[NOT(**A** AND **A**) AND NOT(**B** AND **B**)]

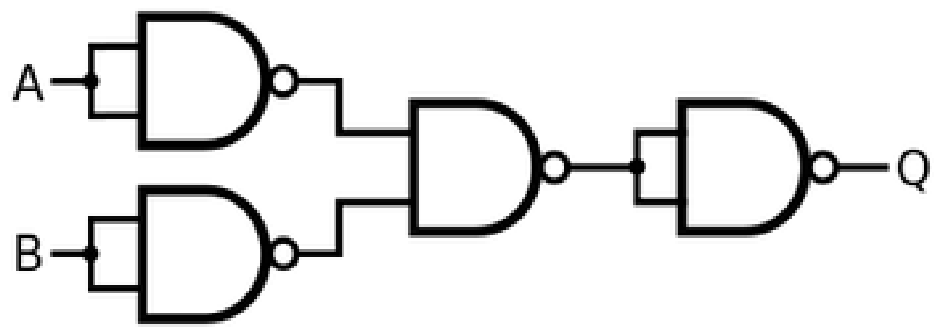
Truth Table

Input A	Input B		Output Q
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		1

Portas equivalentes

- NOR





Q = NOT(**A** OR **B**)

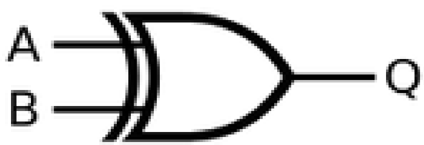
= NOT{ NOT[NOT(**A** AND **A**) AND NOT(**B** AND **B**)]}

Truth Table

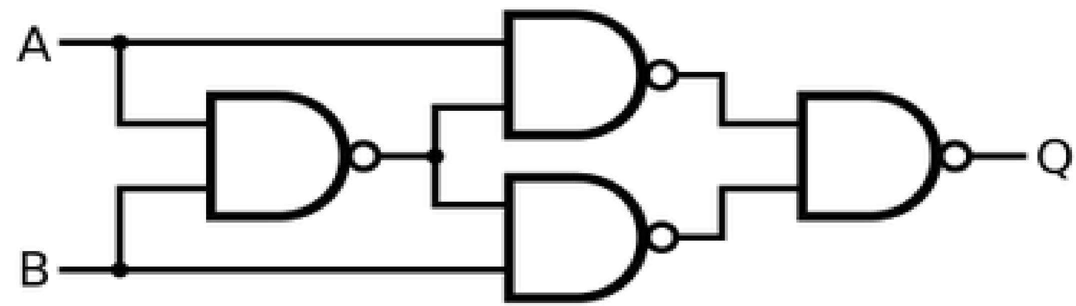
Input A	Input B	Output Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Portas equivalentes

- XOR (raciocínio: ~A.B ou A.~B)



Q = **A** XOR **B**



= NOT[NOT{**A** AND NOT(**A** AND **B**)} AND NOT{**B** AND NOT(**A** AND **B**)}]

Truth Table

Input A	Input B		Output Q
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		0

Álgebra Booleana

- Podemos usar álgebra de Boole para reescrever e simplificar circuitos lógicos

Álgebra Booleana

- Postulado da adição

  $A + 0 = A$

  $A + 1 = 1$

  $A + A = A$

  $A + \sim A = 1$

- Postulado da multiplicação

  $A.0 = 0$

  $A.1 = A$

  $A.A = A$

  $A.\sim A = 0$

Álgebra Booleana

- Propriedade dupla negação

  ~(~A) = A

Álgebra Booleana

- Propriedade comutativa

  $A+B = B+A$

  $AB = BA$

- Propriedade associativa

  $A + (B+C) = (A+B) + C = A+B+C$

  $(AB)C = A(BC) = ABC$

- Propriedade distributiva

  $A(B+C) = AB + AC$

Álgebra Booleana

- Leis de De Morgan

  $\sim(AB) = \sim A + \sim B$

  $\sim(A+B) = \sim A . \sim B$

Álgebra Booleana

- Identidades auxiliares

  A + AB = A

  Demonstre!

- (A+B).(A+C) = A + BC

  Demonstre! (dica, use a distributiva)

- A + ~A.B = A+B

  Demonstre! (dica, use dupla negação e depois De Morgan)

Álgebra Booleana

- Vamos tentar usar essas equivalências para simplificar um circuito lógico

  S = ABC + ~B.A + ~C.A

- Tente agora esse exemplo. Faça os desenhos do circuito sem simplificar e simplificado e compare

  S = ~(~(AC)+B+D) + C(~(ACD))

- Mostre que ~(AʘB) = A⊕B

  Nota: os símbolos ʘ ou ≡ podem ser usados como símbolo para a porta XNOR, ou equivalência

Álgebra Booleana

- Para motivar o próximo tópico, façamos o exemplo a seguir.
- Escreva a fórmula S que gera a Tabela-Verdade:

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Álgebra Booleana

- Para motivar o próximo tópico, façamos o exemplo a seguir.
- Escreva a fórmula S que gera a Tabela-Verdade:

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

- Pelo que vimos anteriormente:

  S = A.(~B) + AB

- Vamos aplicar algumas das equivalências que vimos para simplificar essa fórmula!

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Vimos que podemos escrever fórmulas lógicas através da Tabela Verdade
- Há outro método para reescrever expressões booleanas de forma mais simplificada: o **diagrama** ou **mapa** de **Karnaugh**

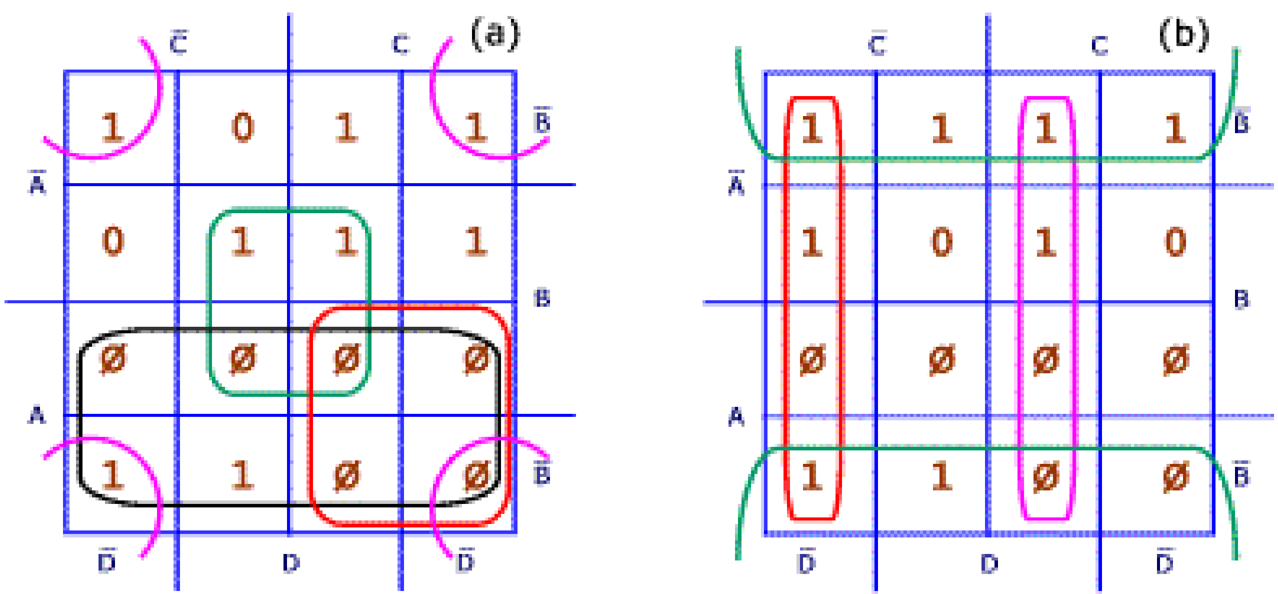


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Passos:
  - **1.** Desenhar o diagrama pra o número de variáveis
  - **2.** Escrever permutações possíveis das variáveis de cada linha
  - **3.** Preencher diagrama com valores da tabela-verdade (cada linha da tabela verdade tem um lugar equivalente) no diagrama
  - **4.** Selecionar o menor número de agrupamentos que cubra todos os valores 1 do diagrama
    - Cuidado para seguir a regra dos agrupamentos, sempre de tamanho 1, 2, 4, 8, 16, etc.
  - **5.** Escrever fórmula (cada agrupamento dá um produto, a soma dos agrupamentos dá a fórmula final)

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- O mapa de Karnaugh basicamente **combina linhas da tabela-verdade** onde as variáveis tem as mesmas propriedades.
- Mapa de Karnaugh para **duas** variáveis (A e B):

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

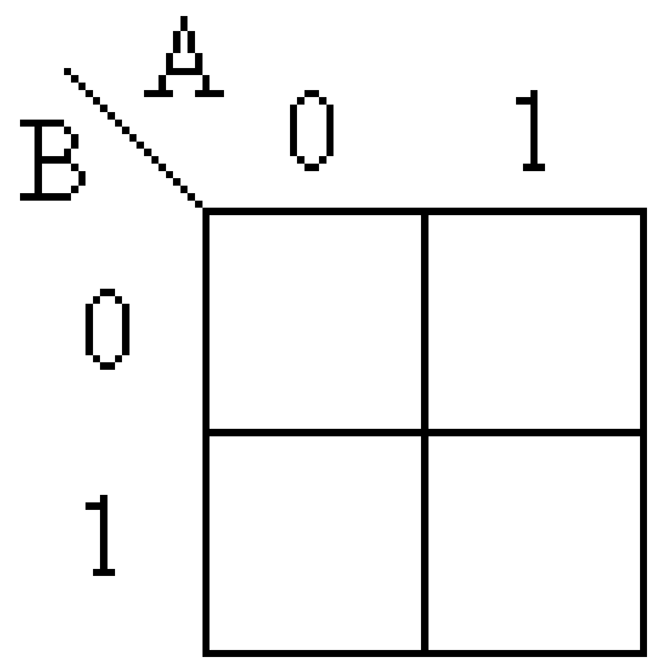


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Preenchemos o mapa de Karnaugh com os valores de A e B, e a saída S, de acordo com a T-V:

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

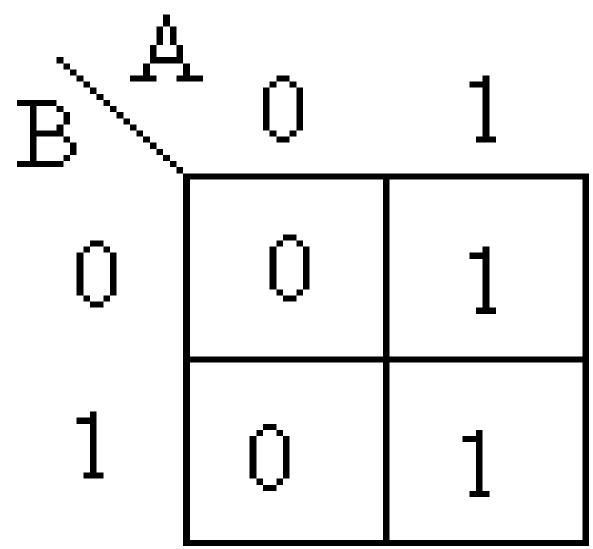


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Como preencher o mapa de Karnaugh corretamente:

A	B	F
0	0	a
0	1	b
1	0	c
1	1	d

Truth Table.

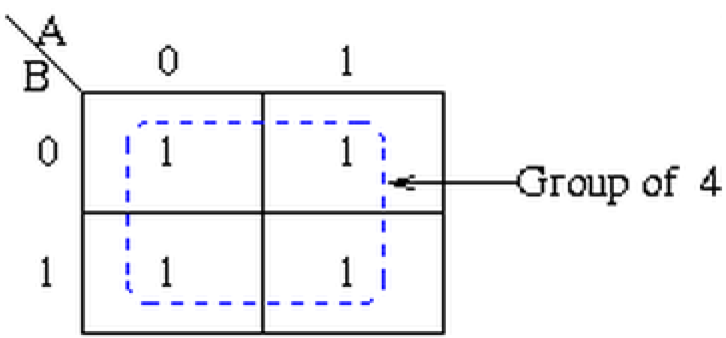
B \ A	0	1
0	a	b
1	c	d

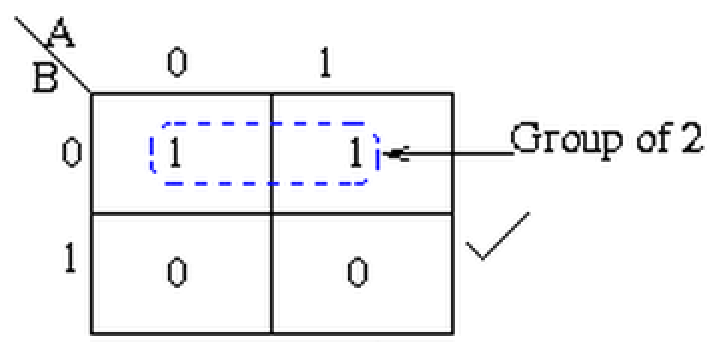
F.

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Para resolver o mapa de Karnaugh, tentamos agrupar os campos do diagrama que tem valor 1 no menor número de grupos possível.
- Os agrupamentos possíveis pra 2 variáveis são:

Quadra, **par** e **termo isolado**





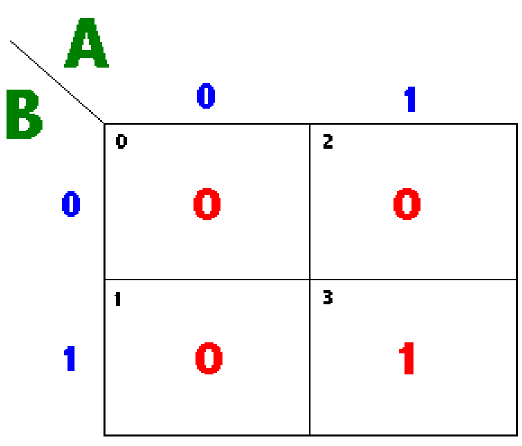


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Por fim, para interpretar os agrupamentos e obte a fórmula, apenas vemos que **valor de variável** o agrupamento tem em comum:

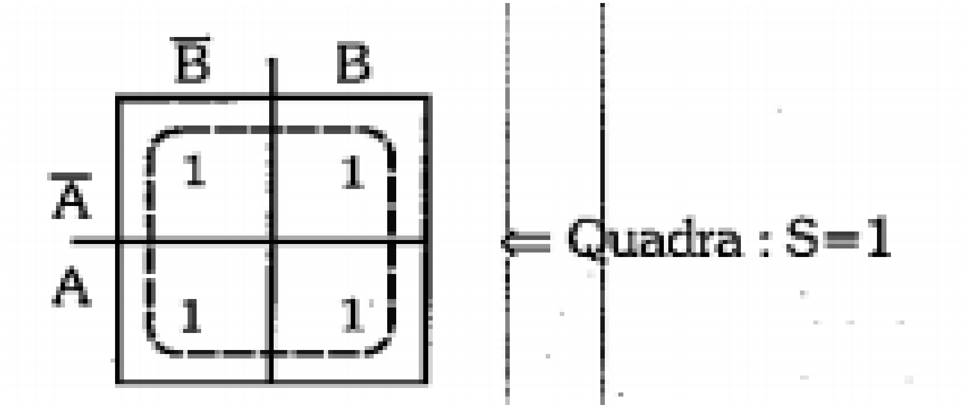
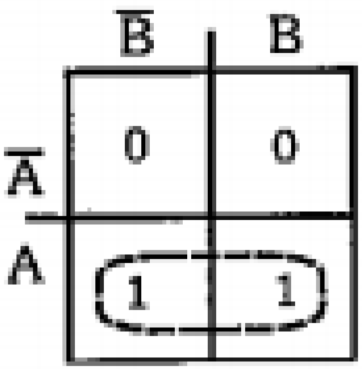


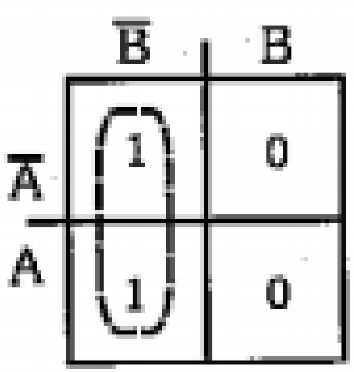
Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Por fim, para interpretar os agrupamentos e obte a fórmula, apenas vemos que **valor de variável** o agrupamento tem em comum:



⇐ Par A (está exclusivamente na região A)

Figura 3.11



⇐ Par $\overline{B}$ (está exclusivamente na região $\overline{B}$)

Figura 3.12

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Por fim, para interpretar os agrupamentos e obte a fórmula, apenas vemos que **valor de variável** o agrupamento tem em comum:

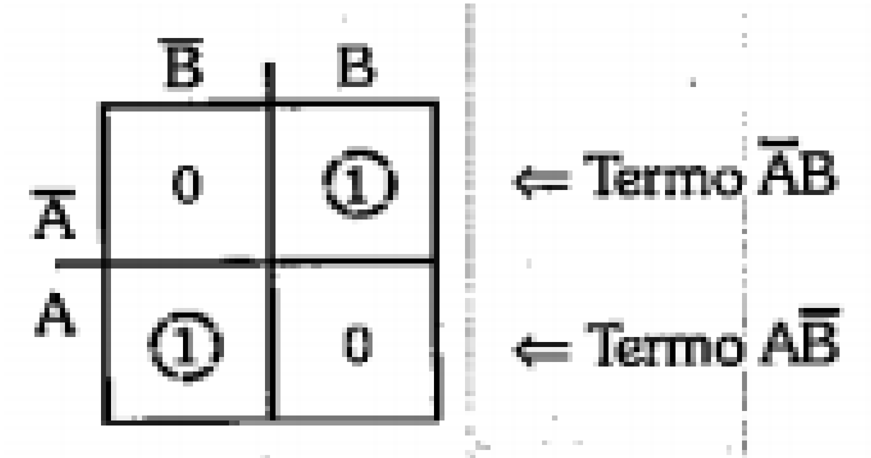


Figura 3.13

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Não é possível ter grupos com 3 valores 1 (os grupos são sempre potências de 2: 1, 2, 4, 8, …)
- Se temos 3 valores 1, usamos 2 pares:

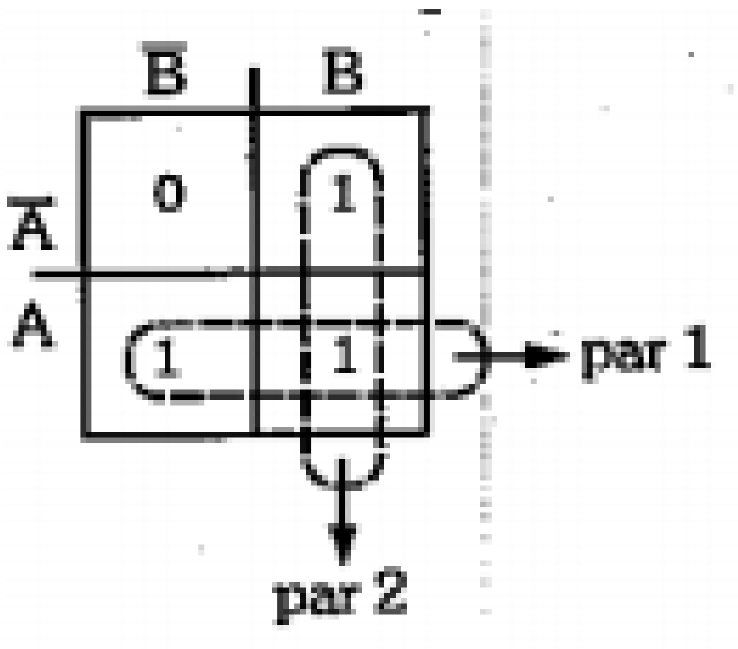


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Exemplo:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Exemplo:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

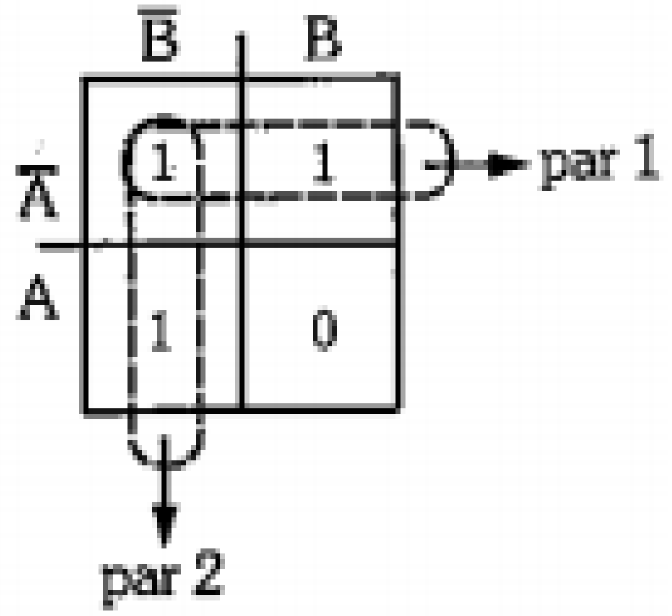
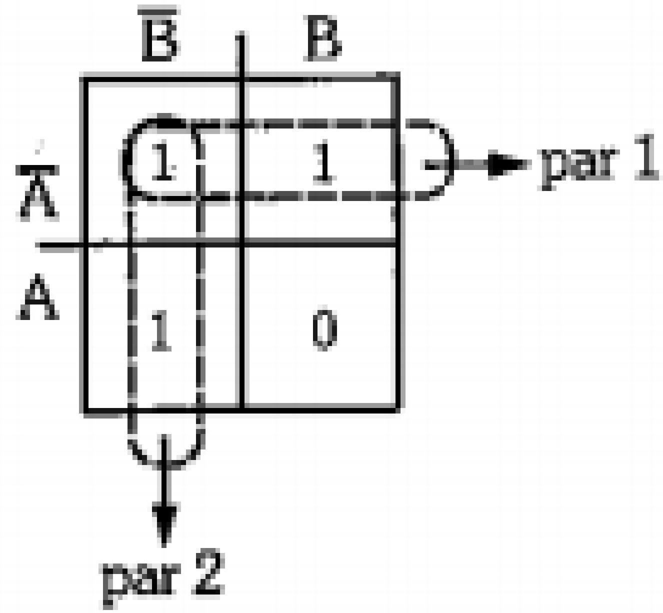


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Exemplo:

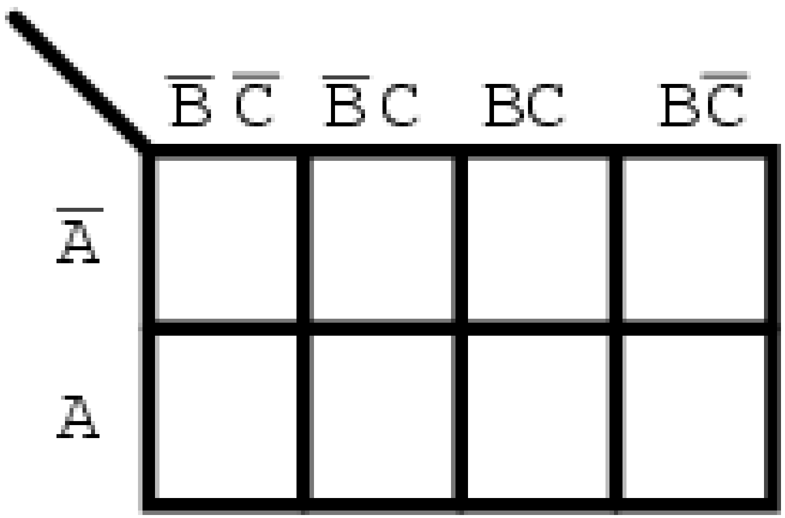
A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$S = \overline{A} + \overline{B}$$

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Mapa de Karnaugh para **três** variáveis muda em poucos aspectos. Agora temos 2 variáveis em um dos eixos:



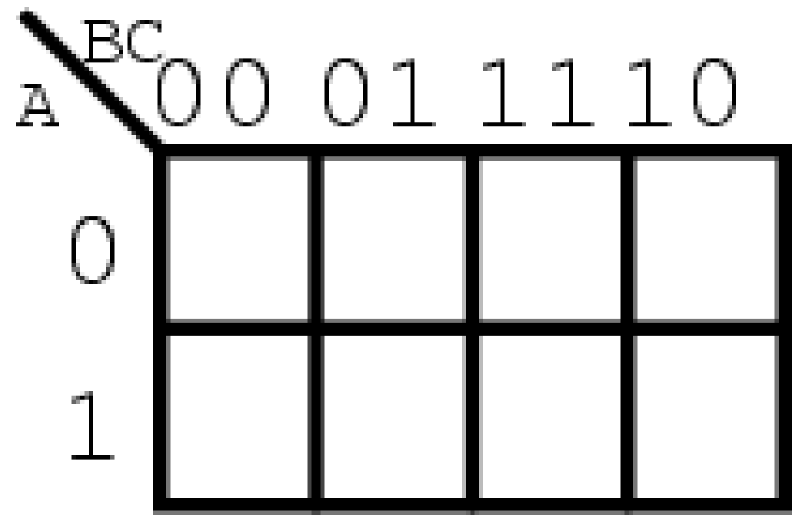


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Como ficam os agrupamentos possíveis? Além de pares e elementos isolados, temos (região hachurada = 1, região branca = 0):

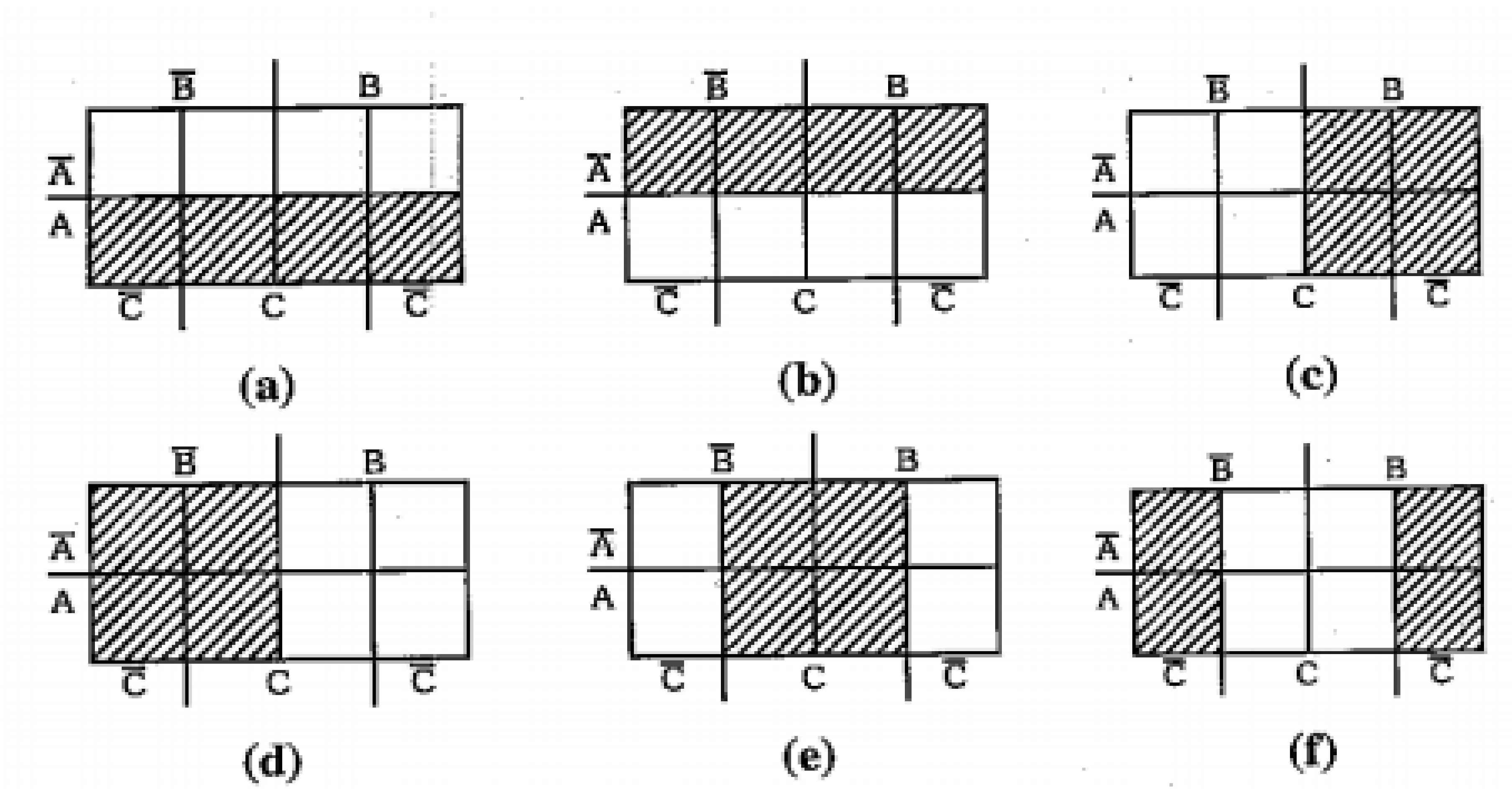


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Note que o exemplo **f** mostra que o diagrama tem os lados esquerdo e direito ligados:

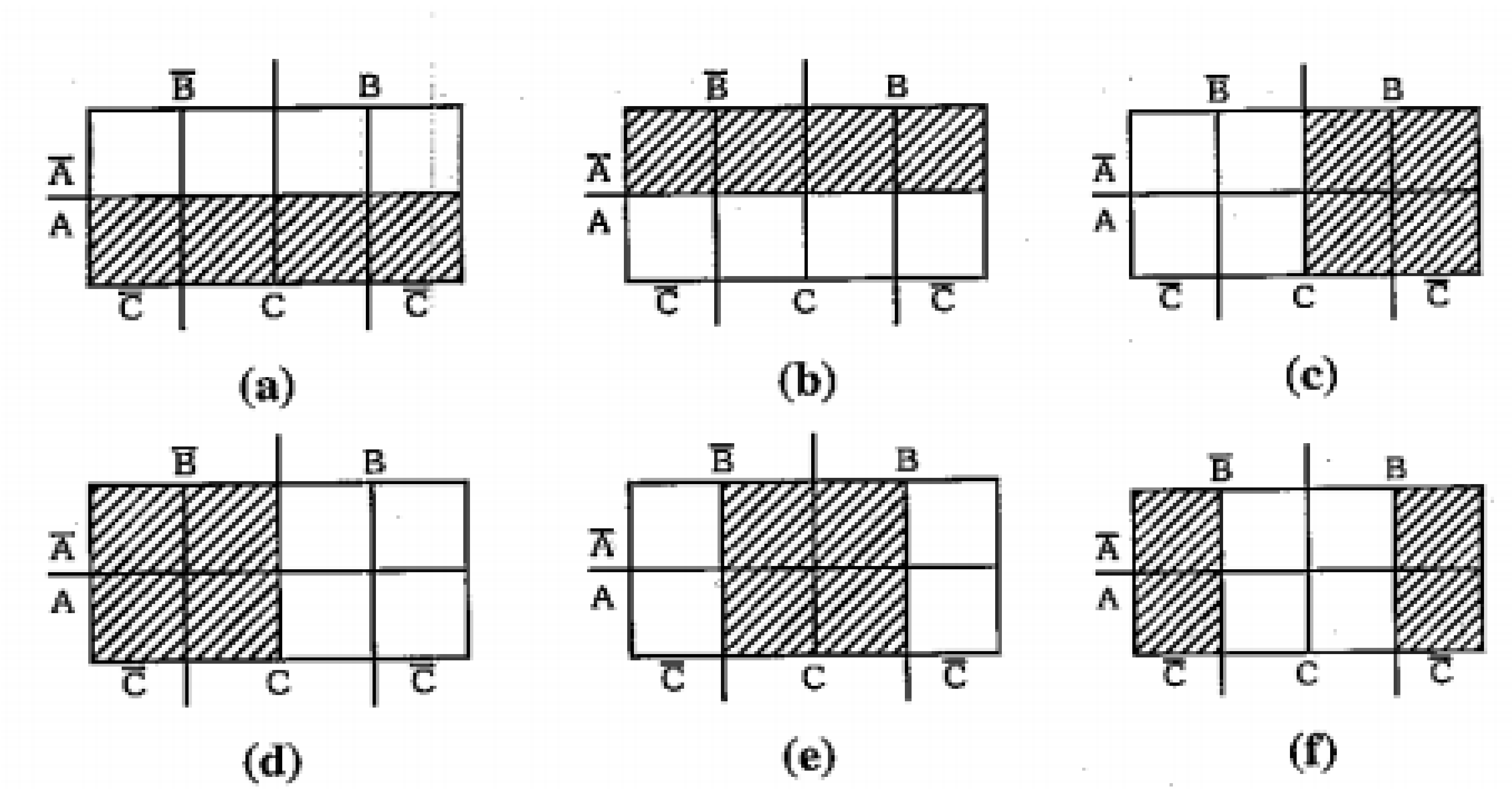


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Agrupamentos
- Oitava

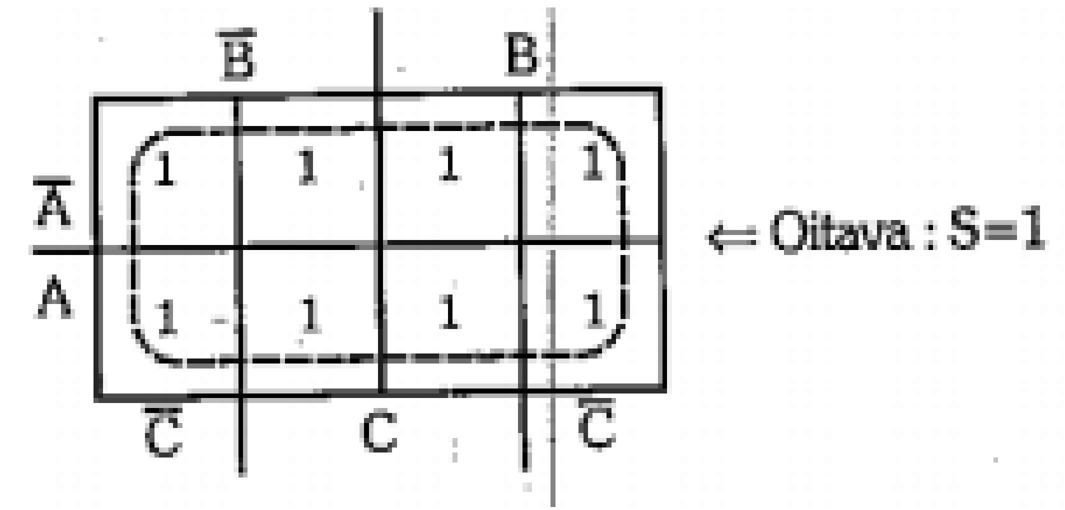


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Agrupamentos
- Quadras

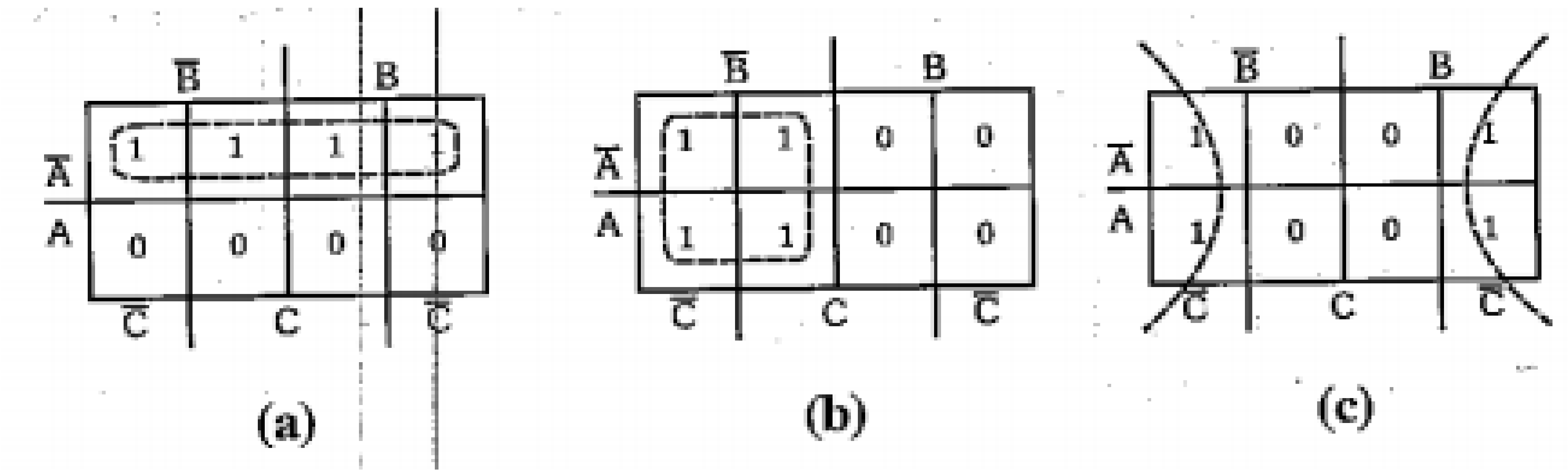


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Agrupamentos
- Pares

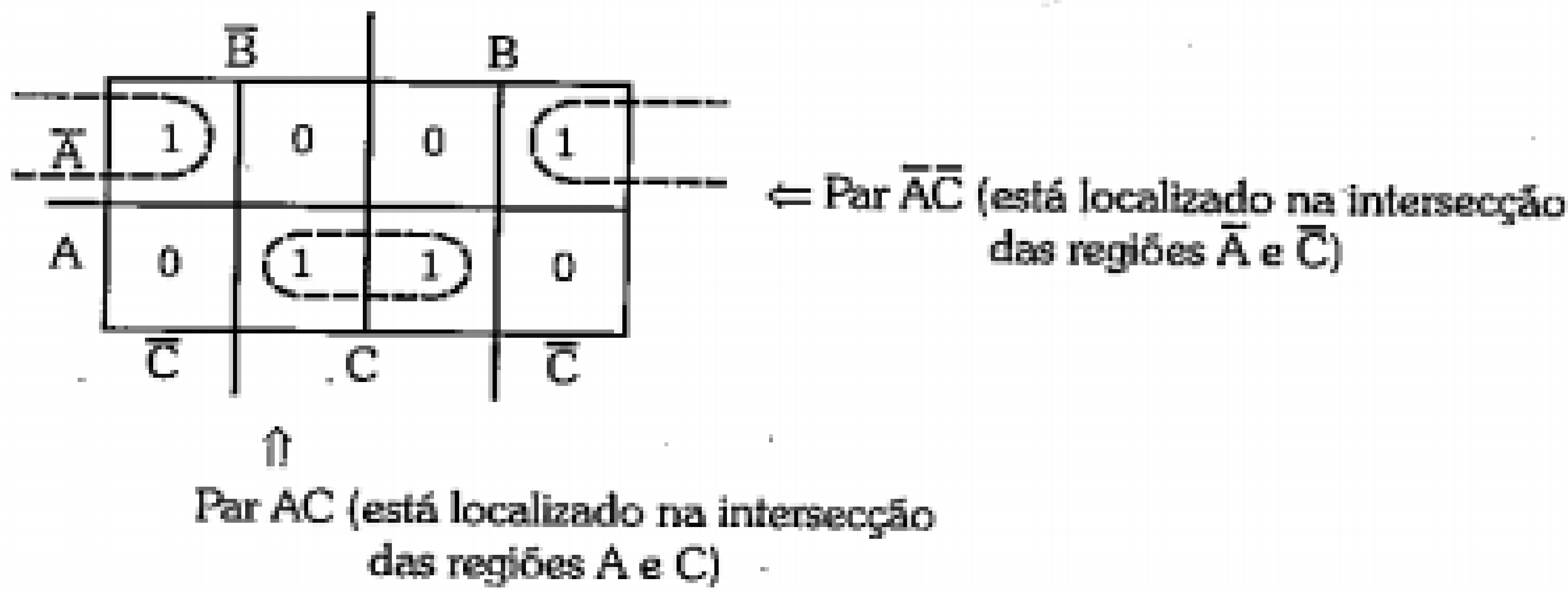


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Agrupamentos
- Termos isolados

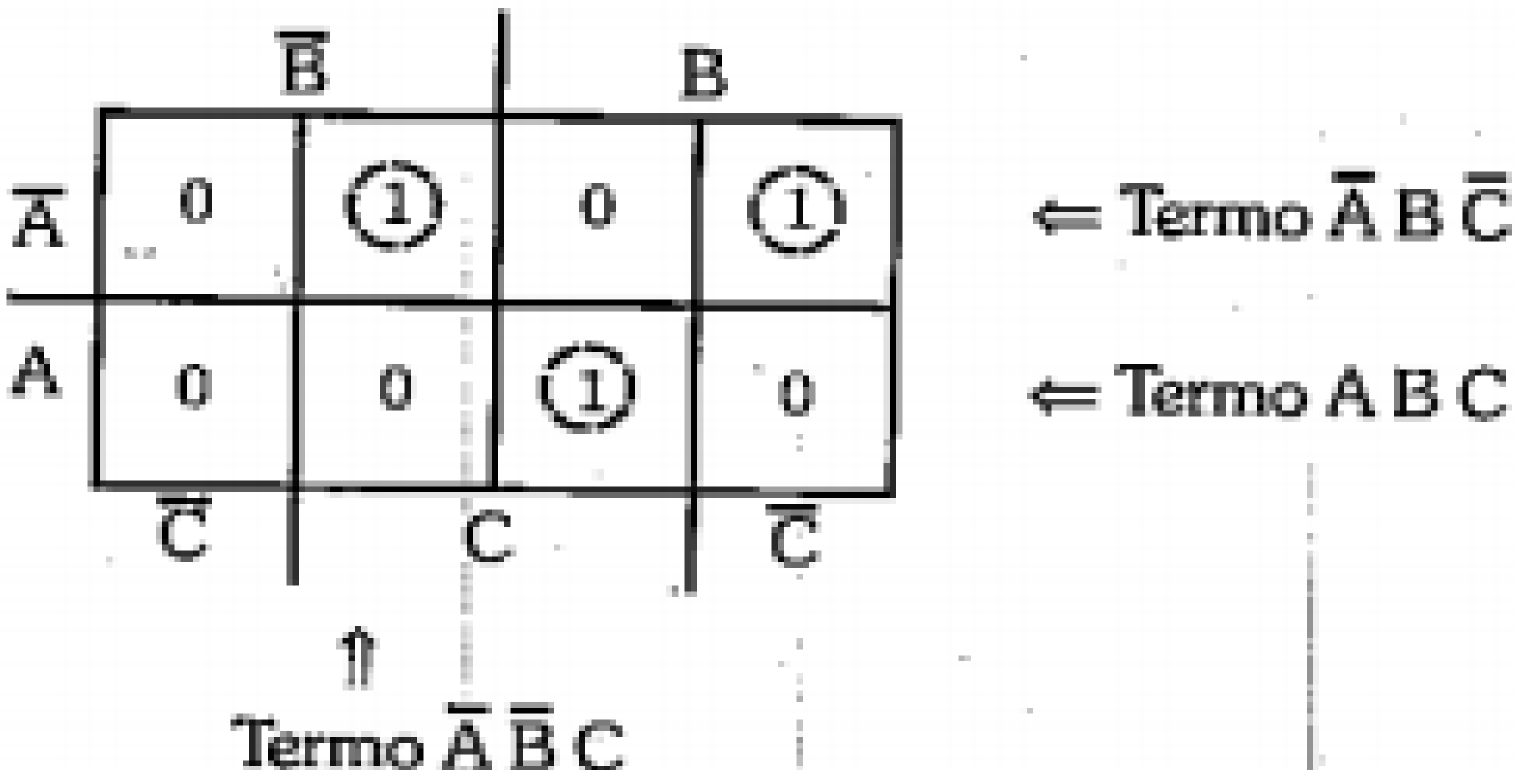


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Note que sempre tentamos agrupar o máximo de valores 1 possível. Se não fizermos isso, o diagrama não simplifica a fórmula mais que uma Tabela-Verdade
- Nesse exemplo não podemos agrupar senão em termos isolados:

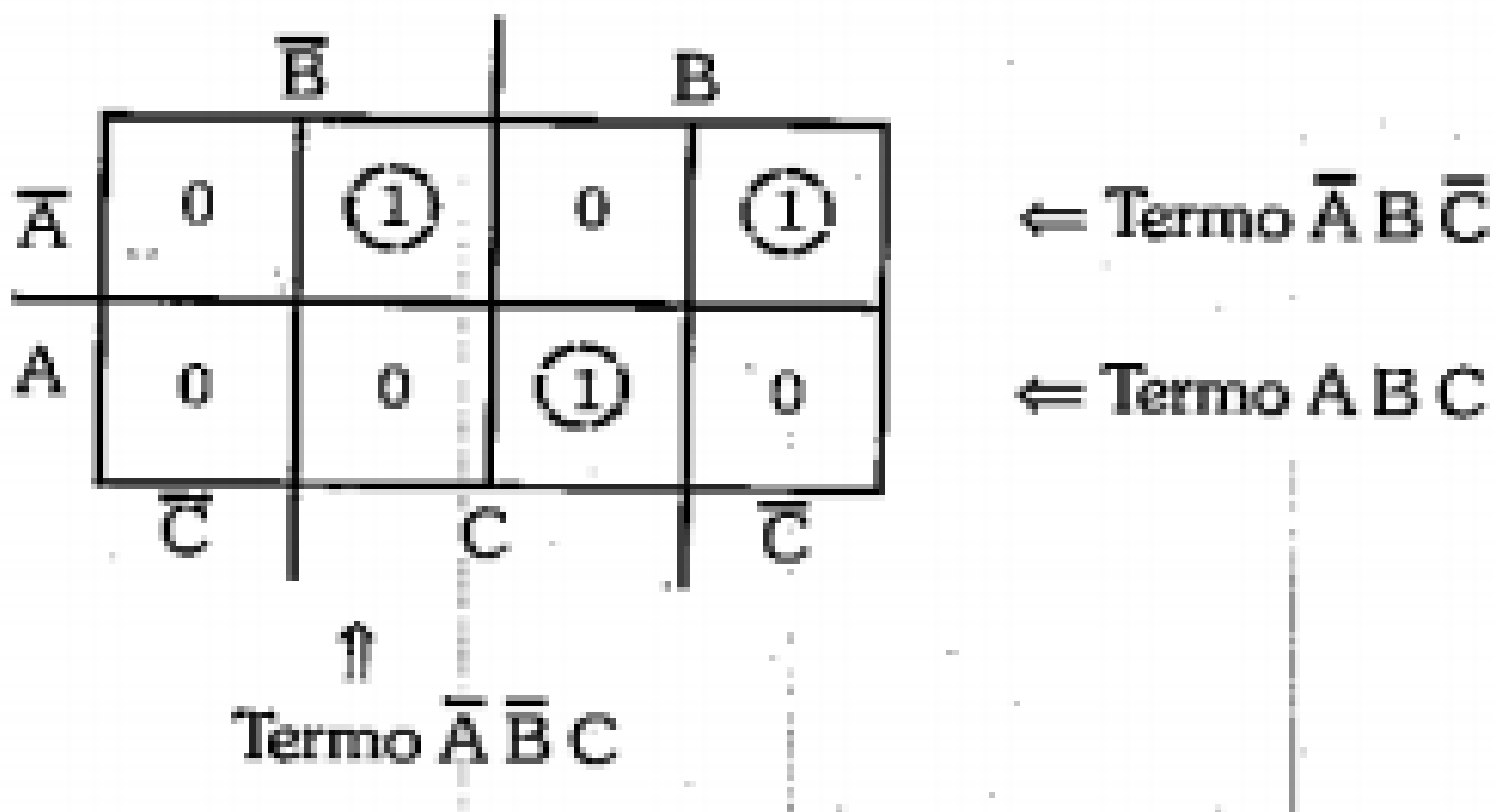


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Exemplos

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Mapa de Karnaugh para **quatro** variáveis, agora temos 2 eixos com 2 variáveis cada:

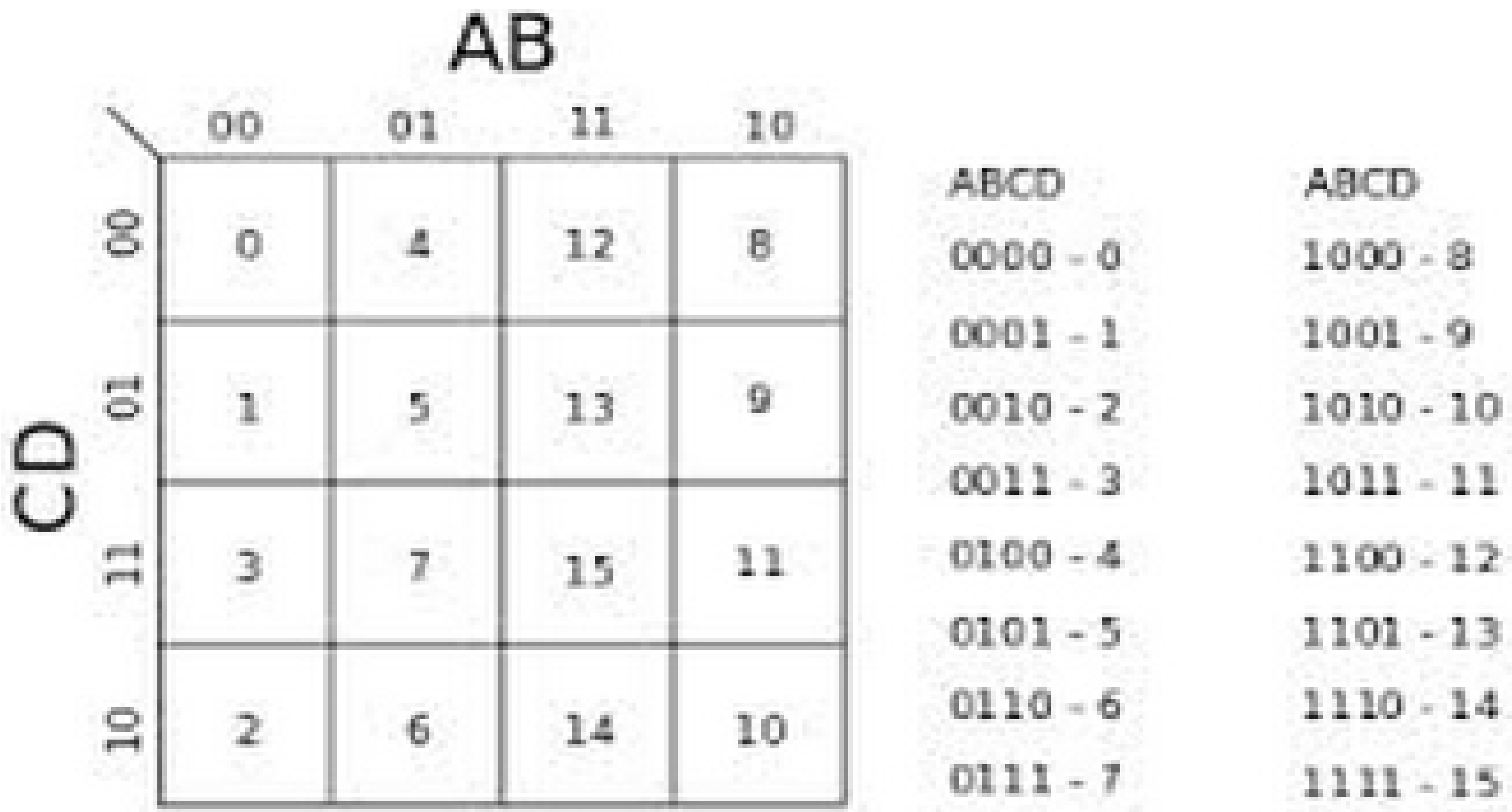


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Algumas seleções possíveis (lembrem-se, sempre potências de 2). Nota: na figura, **&** = produto, **|** = soma.

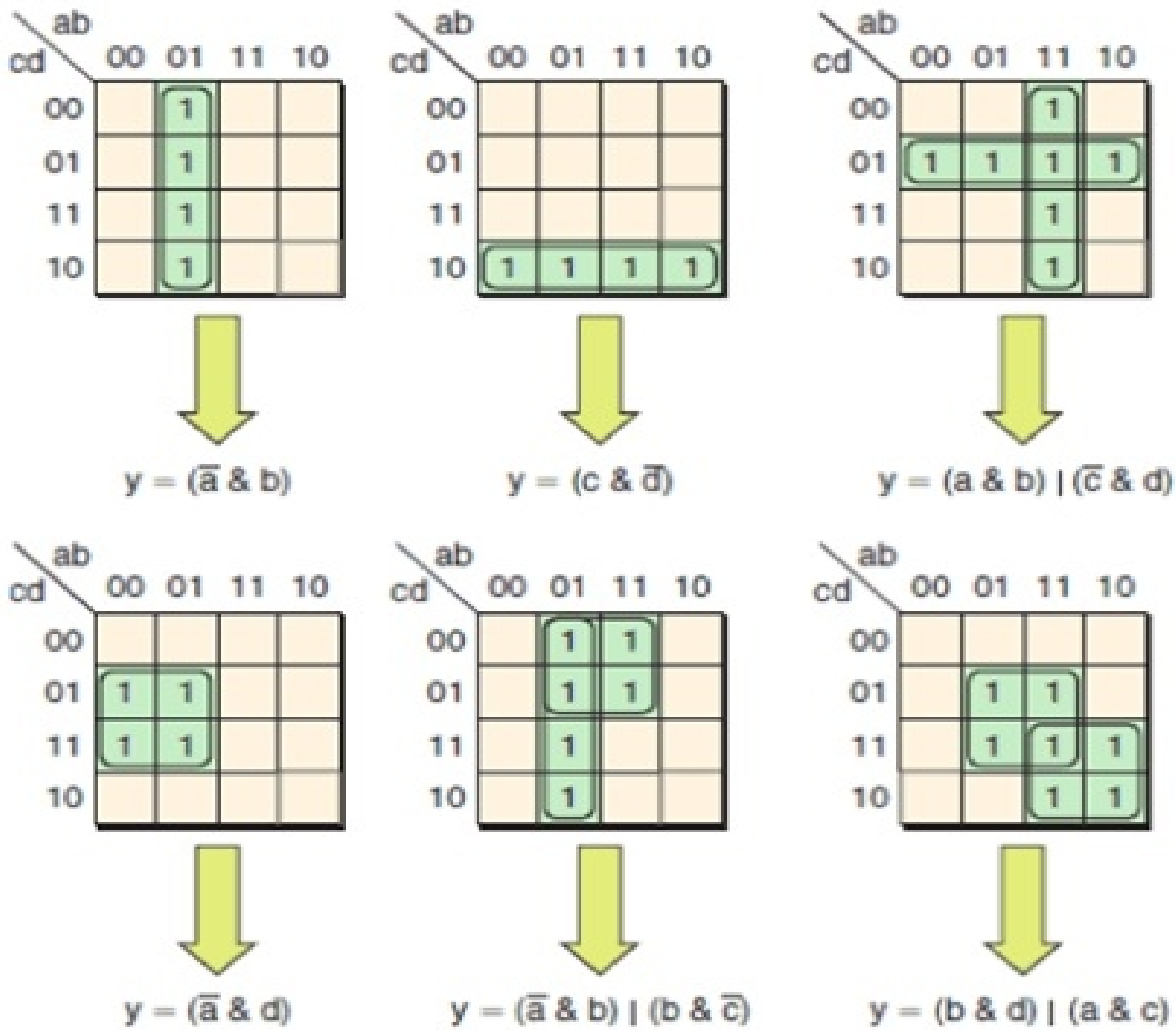
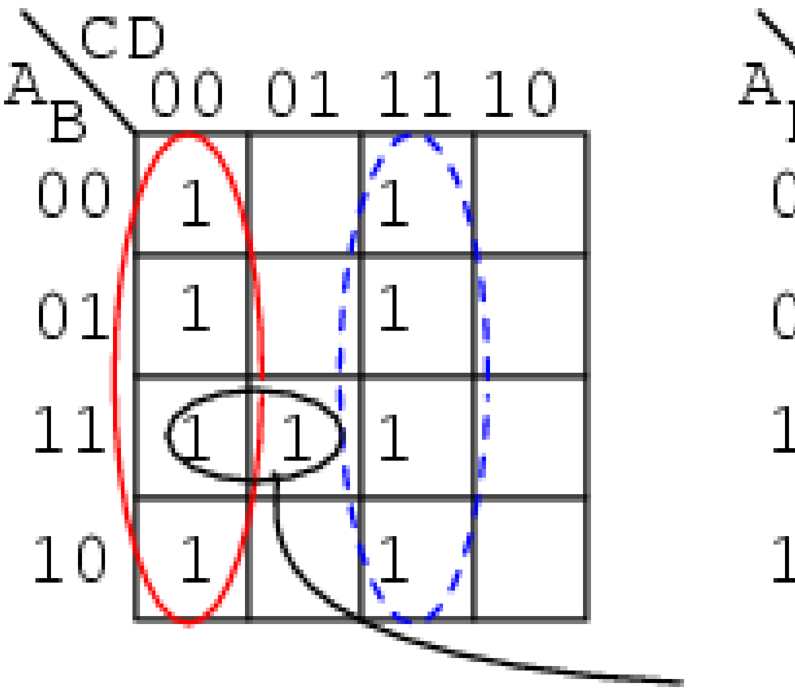


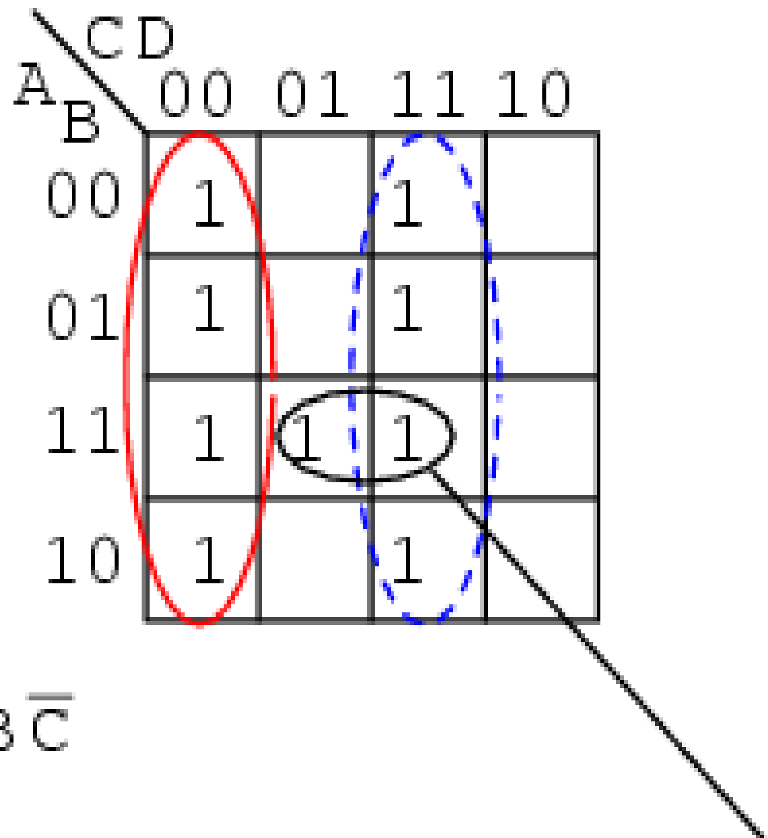
Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Mais exemplos

$$Out= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BCD+AB\overline{C}\,\overline{D}$$
$$+AB\overline{C}D + ABCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}CD$$



$$Out= \overline{C}\,\overline{D} + CD+ AB\overline{C}$$



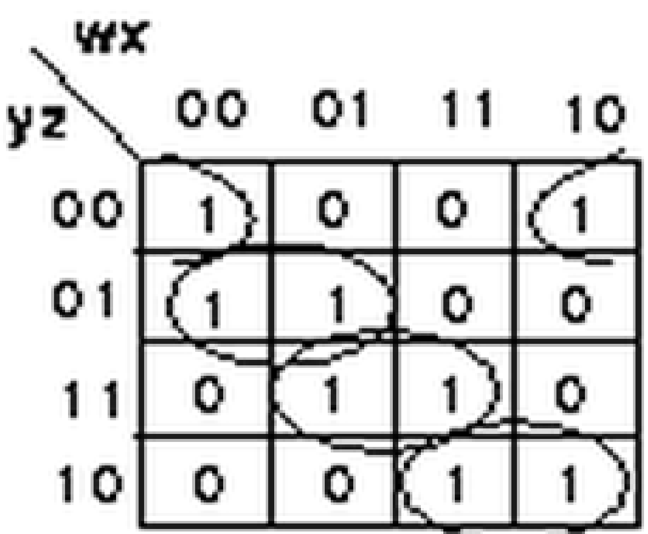
$$Out= \overline{C}\,\overline{D} + CD+ ABD$$

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Mais exemplos

yz \ wx	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	1

Solution 1



Solution 2

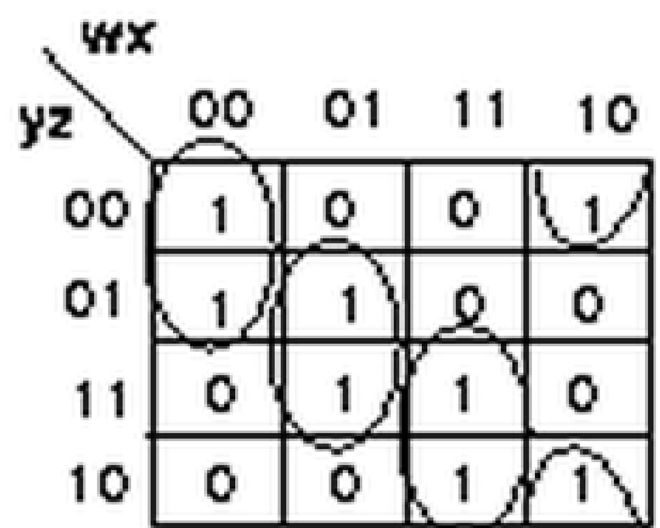


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Mais exemplos

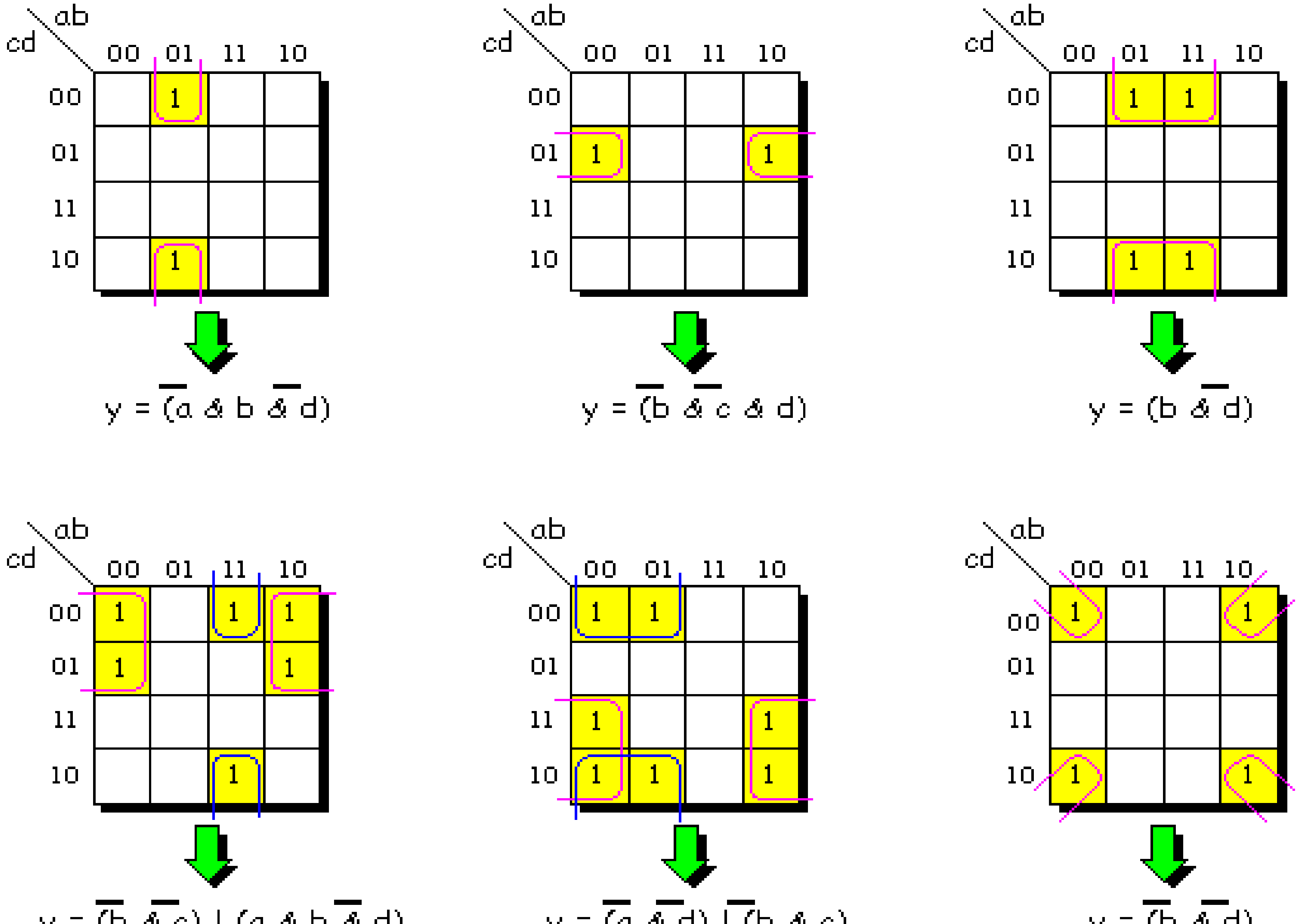


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- E Mapa de Karnaugh para **cinco** variáveis? Ele é *tridimensional*. Temos que pensar nele como 2 diagramas de 4 variáveis sobrepostos (ou lado a lado, como na figura).

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

5- variable Karnaugh map (Gray code)

Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Note que em um lado e outro do mapa, a quinta variável que muda. No caso A = 0, e no outro A = 1:

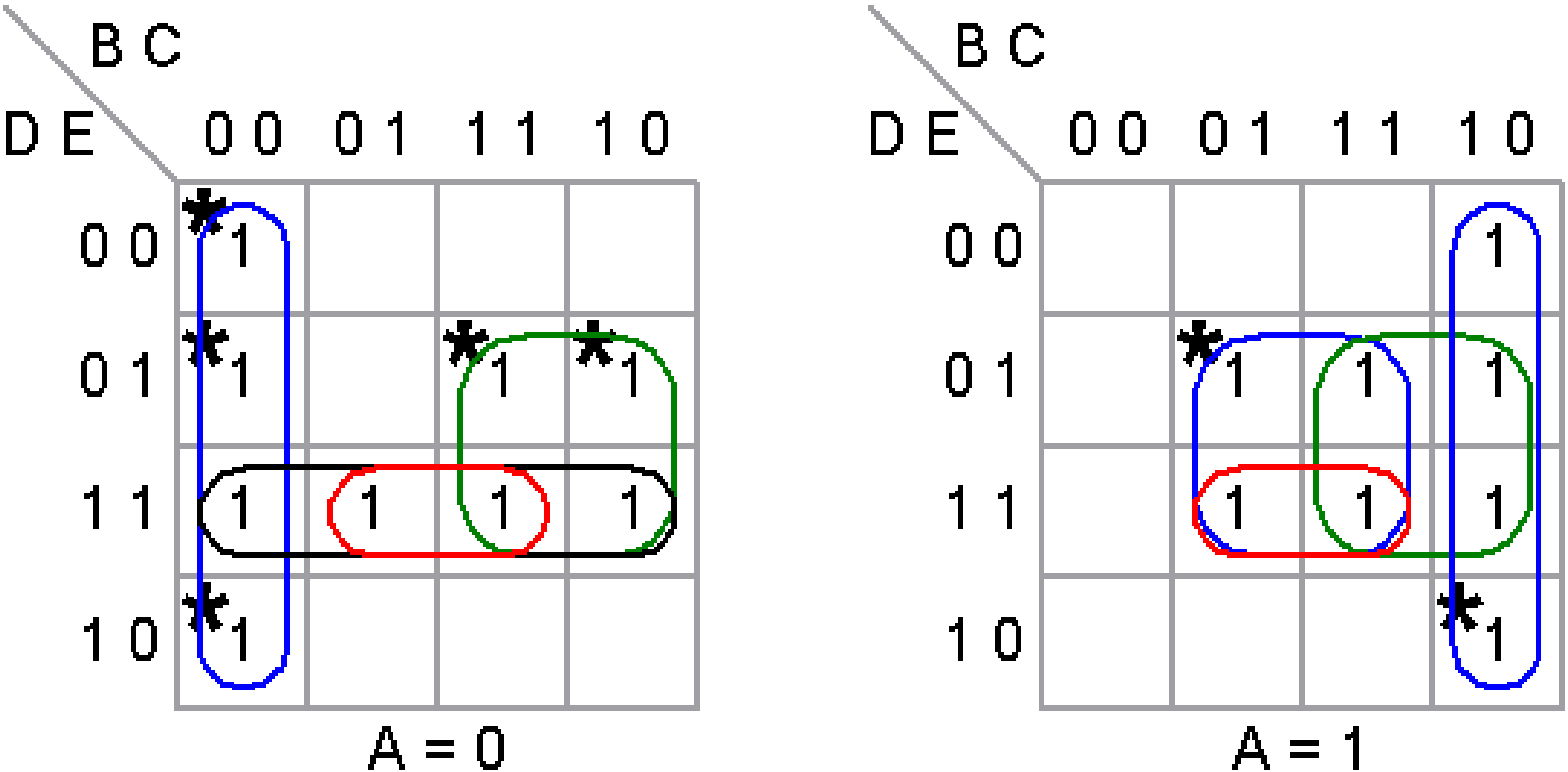


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Nesse caso, selecionamos agrupamentos como se os dois diagramas estivessem sobrepostos, como na figura. Pra isso, é preciso raciocínio 3D:

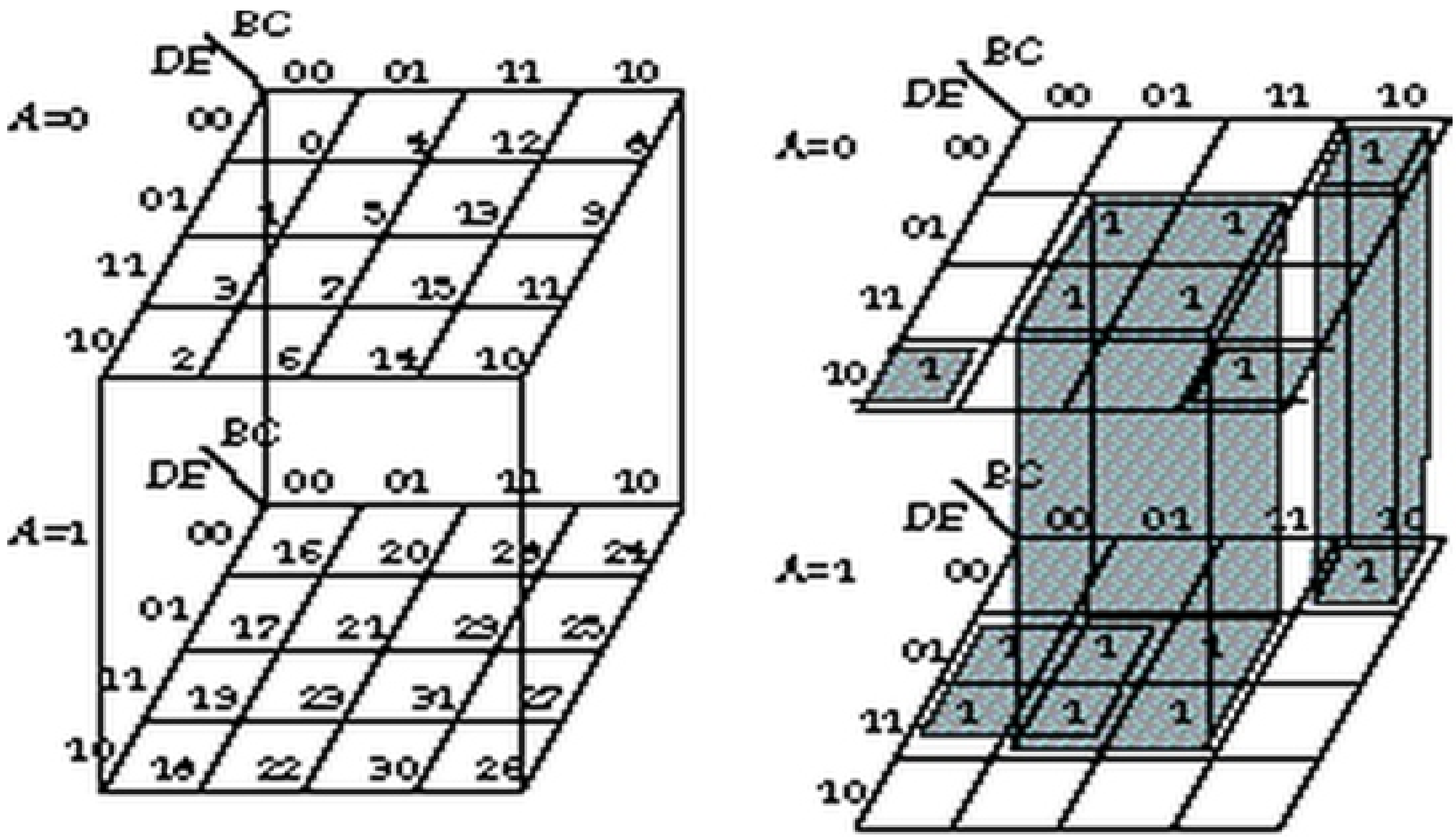


Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Com 6 variáveis temos 4 diagramas sobrepostos. Isso deixa a resolução muito complexa, mas fica o exemplo como curiosidade