

Indice

1	Metodi numerici per zeri di funzioni	iii
1.1	Metodo delle successive bisezioni	iii
1.1.1	Costruzione del metodo	iv
1.1.2	Convergenza del metodo	v
1.1.3	Criteri di arresto e stime dell'errore	vi
1.1.4	Ordine di convergenza	viii
1.1.5	Vantaggi e svantaggi del metodo delle bisezioni	ix
1.2	Metodi iterativi	x
1.3	Il Metodo di Newton	xiv
1.4	Caso di zeri multipli	xv
1.5	Criteri di stop	xvi
1.6	Procedimenti iterativi a più punti	xviii

Capitolo 1

Metodi numerici per zeri di funzioni

Molto spesso le leggi della natura sono non lineari. Ne segue la necessità di risolvere equazioni non lineari. Tranne che per polinomi di grado basso, per i quali è possibile ottenere la soluzione in forma esplicita, la stragrande maggioranza di questi problemi si risolve usando procedimenti iterativi di cui si comincia lo studio in questo capitolo.

1.1 Metodo delle successive bisezioni

Se $f(x) \in C([a, b])$ ed $f(a)f(b) < 0$, per il teorema di Bolzano, esiste almeno uno zero reale α contenuto nell'intervallo $[a, b]$. I metodi più immediati per ricercare tale zero α in $[a, b]$ sono i cosiddetti *metodi incrementali di ricerca*. Essi sfruttano il risultato del teorema, concentrando la ricerca in un intervallo dove la funzione cambia segno; la posizione dello zero viene poi identificata più precisamente, dividendo l'intervallo assegnato in sottointervalli in ciascuno dei quali viene verificata la presenza del punto di transizione. Il processo viene dunque ripetuto più volte in modo da confinare lo zero in sottointervalli sempre più ristretti.

Uno dei più noti metodi incrementali di ricerca è sicuramente il metodo delle bisezioni, detto anche suddivisione binaria, o dimezzamento dell'intervallo o metodo di Bolzano, nel quale l'intervallo di osservazione viene sempre diviso a metà. Come tutti i metodi incrementali anch'esso è un metodo *chiuso* (bracketing method) ovvero chiede di specificare due valori iniziali (quelli in cui la funzione cambia segno) per individuare la posizione dello zero.

Si supponga, come ipotesi generale di lavoro, che α sia l'unico zero con-

tenuto nell'intervallo $[a, b]$. Tale ipotesi non è restrittiva ai fini della convergenza del metodo delle bisezioni che, come si vedrà, genera una successione che comunque tende ad uno degli zeri contenuti nell'intervallo di osservazione. Supporre l'unicità dello zero dunque non fa perdere di generalità alla seguente trattazione ma semplifica lo studio del problema di ricerca di una soluzione particolare dell'equazione $f(x) = 0$.

1.1.1 Costruzione del metodo

Si supponga che le ipotesi del teorema di Bolzano siano soddisfatte in $[a, b]$: allora la funzione $f(x)$ cambia segno agli estremi a e b del dato intervallo. Posto

$$a_0 = a,$$

$$b_0 = b,$$

risulta ovviamente $f(a_0)f(b_0) < 0$; si considera come prima stima di α il punto medio dell'intervallo, ovvero

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Si calcola poi il valore che la funzione assume in tale punto: se questo fosse effettivamente lo zero α , la ricerca sarebbe terminata, cosa che normalmente non avviene mai. Se al contrario, ciò non accade, tra i due sottointervalli di uguale ampiezza che si sono determinati, $[a_0, c_0[$ e $]c_0, b_0]$, si concentra l'attenzione sull'unico fra questi che contiene il cambiamento di segno di f . In particolare se accade che

- $f(a_0)f(c_0) < 0 \implies$ l'intervallo in cui cade lo zero si restringe ad $[a_0, c_0[$ ed in tal caso si definisce come nuovo intervallo di osservazione $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$.

Se, invece, risulta

- $f(c_0)f(b_0) < 0 \implies$ lo zero cade in $]c_0, b_0[$ e si considera come nuovo intervallo $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

A questo punto si analizza nuovamente il comportamento della funzione nel punto di mezzo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

assunto come nuova approssimazione del punto di transizione e quindi dello zero, ed il processo si ripete.

La procedura definita dal metodo delle bisezioni determina, come è facile osservare, una sequenza di intervalli ciascuno dei quali è contenuto nel precedente

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq \dots \subseteq [a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0];$$

il generico intervallo ha ampiezza pari alla metà di quella dell'intervallo precedentemente determinato e contiene lo zero α di $f(x)$.

Generalizzando, la procedura costruisce la successione dei punti medi

$$c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad n \geq 1$$

e se $f(c_n) \neq 0$, definisce i nuovi intervalli nel modo seguente

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [c_n, b_{n-1}] & \text{se } f(c_n) f(b_{n-1}) < 0 \\ [a_{n-1}, c_n] & \text{se } f(a_{n-1}) f(c_n) < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1.2 Convergenza del metodo

Il metodo delle bisezioni fornisce sempre uno zero α di f in $[a, b]$, ovvero risulta essere sempre convergente. Per questo viene detto globalmente convergente.

Si osserva, infatti, che le successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite dagli estremi degli intervalli costruiti ad ogni passo, sono entrambe limitate perchè sempre interne all'intervallo $[a, b]$ e sono l'una monotona crescente, l'altra monotona decrescente. Esse risultano pertanto entrambe convergenti, cioè

$$\exists \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

ed

$$\exists \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

In particolare si prova che le due successioni tendono allo stesso limite, cioè

$$\gamma = \beta. \quad (1.2)$$

Essendo infatti

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

allora

$$b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

e, per ricorsione,

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Allora

$$\gamma - \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0,$$

da cui $\gamma = \beta$. In particolare si prova che $\beta = \alpha$, ovvero che $f(\beta) = f(\alpha) = 0$. Per costruzione risulta

$$f(a_n) f(b_n) < 0$$

per cui

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) f(b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \right) = f(\gamma)^2 \geq 0,$$

per la (1.2) e per la continuità di f . Allora

$$f(\beta) = f(\gamma) = 0 = f(\alpha)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha.$$

Ma per ogni n risulta

$$a_n < c_n < b_n$$

per cui, per il teorema dei due carabinieri, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha.$$

Di qui la convergenza del metodo.

1.1.3 Criteri di arresto e stime dell'errore

Pur essendo il metodo comunque convergente, è necessario definire dei criteri di arresto che interrompano il succedersi delle iterazioni nel momento in cui è stata raggiunta una stima buona dello zero. Ad esempio, è possibile arrestare l'implementazione quando l'errore assoluto o l'errore relativo, scendono al di sotto di una certa tolleranza ε , cioè quando

$$E_a = |c_n - \alpha| < \varepsilon,$$

ovvero

$$E_r = \left| \frac{c_n - \alpha}{\alpha} \right| < \varepsilon.$$

In tal caso si ha la certezza che il valore dello zero sia ottenuto esattamente con la precisione richiesta. In realtà questa strategia non è fondata correttamente in quanto non tiene conto che la stima di un simile errore si basa sulla conoscenza del valore esatto dello zero cercato; una tale situazione non è verosimile in un caso reale, dato che non ci sarebbe motivo di utilizzare un metodo numerico se si conoscesse già il risultato esatto. Ciò che è invece necessaria è una stima che non richieda la conoscenza del valore dello zero. Nel caso del metodo in esame, tale stima può essere generata in modo da costituire una maggiorazione di E_a o E_r rispettivamente. Osservando infatti che risulta

$$|c_n - \alpha| < b_n - a_n,$$

si ricava la seguente condizione di arresto

$$b_n - a_n < \varepsilon \quad (1.3)$$

Poichè

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

tale condizione è equivalente alla

$$\frac{b - a}{2^n} < \varepsilon. \quad (1.4)$$

ed è sicuramente verificata se

$$n > \log_2 \left(\frac{b - a}{\varepsilon} \right).$$

Essa garantisce che α sia approssimata da c_n con un errore assoluto minore in modulo di ε . Nell'ipotesi che $c = 0$ non appartenga ad $[a, b]$ un altro criterio di arresto potrebbe essere

$$\frac{b_n - a_n}{\min(|a_n|, |b_n|)} < \varepsilon \quad (1.5)$$

il quale garantisce che la soluzione α sia approssimata da c_n con un errore relativo minore in modulo di ε . Un altro possibile criterio di terminazione è

$$|f(c_n)| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Si osserva che la costante ε non deve essere scelta troppo piccola perchè a causa degli errori di arrotondamento le condizioni (1.3), (1.5), (1.6) possono

non essere mai soddisfatte così come accade quando ε è inferiore alla precisione di macchina. Ad esempio può accadere che al passo n -esimo a_n e b_n siano così vicini da far risultare lavorando in aritmetica finita:

$$c_{n+1} = a_n = b_n$$

mentre

$$f(c_{n+1}) = \varepsilon_2 > \varepsilon \quad \varepsilon_2 > 0.$$

Ne segue che

$$c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \dots$$

e quindi

$$f(c_{n+2}) = f(c_{n+3}) = \varepsilon_2$$

ed il processo non avrà mai termine. Certamente per prevenire questa possibilità si potrebbe controllare ad ogni passo che

$$c_n \neq a_n \quad \text{e} \quad c_n \neq b_n$$

oppure specificare un numero massimo di iterate raggiungibile ma in realtà basterebbe diminuire la precisione ε ed il problema sarebbe risolto. Se la scelta della precisione non è quella appropriata, il metodo può risultare fallimentare. Infatti, sempre a causa degli errori di arrotondamento che si trasmettono ad ogni passo, se si è nelle vicinanze dell'asse x il valore della funzione data in un punto potrebbe risultare negativo anziché positivo. Di conseguenza al passo successivo la scelta dell'intervallo di osservazione potrebbe essere errata ed il metodo potrebbe non convergere.

1.1.4 Ordine di convergenza

Il metodo delle bisezioni converge linearmente ad α ed ha costante asintotica pari ad $\frac{1}{2}$, risultando con ciò molto lento.

Teorema 1.1 *Se le successioni convergono con la stessa velocità, ovvero*

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n - \alpha}{b_n - \alpha} \right| < \infty, \tag{1.7}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1} - \alpha}{b_n - \alpha} \right| = \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione. si osserva subito che l'ipotesi (1.7) è equivalente a

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - a_n}{b_n - \alpha} < \infty,$$

dal momento che $a_n \leq \alpha$ e $b_n \geq \alpha$. Inoltre poichè

$$b_n - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

segue che

$$\frac{b_{n+1} - \alpha}{b_n - \alpha} = \frac{b_{n+1} - \alpha}{b_{n+1} - a_{n+1}} \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} \frac{b_n - a_n}{b_n - \alpha}$$

dove

$$\frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} = \frac{b - a}{2^{n+1}} \frac{2^n}{b - a} = \frac{1}{2}$$

e per l'ipotesi fatta esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{b_n - \alpha} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - a_n}{b_n - \alpha} \neq 0$$

e quindi anche del suo reciproco. Risulta allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1} - \alpha}{b_n - \alpha} \right| = \frac{1}{2}.$$

Analogo risultato vale per la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. \square

In particolare applicando il metodo al calcolo degli zeri di una data funzione, si può osservare che ad ogni iterata si guadagna una cifra binaria e quindi dopo 3.3 iterate circa si guadagnerà una cifra decimale esatta, essendo

$$3.3 \simeq \log_2 10.$$

1.1.5 Vantaggi e svantaggi del metodo delle bisezioni

Il metodo delle bisezioni ha bisogno per poter essere implementato di due punti in cui la funzione assume segno opposto, che definiscano l'intervallo iniziale. Una volta localizzato tale intervallo di osservazione, non importa quanto sia ampio, le iterazioni procedono fino a convergere allo zero α della funzione. La globale convergenza è sicuramente uno dei vantaggi forniti dal metodo. Tuttavia esso non può essere sempre applicato come accade ad esempio per il calcolo di zeri di funzioni positive come $f(x) = x^2$ che non verificano le ipotesi su cui si fonda. A volte invece, pur verificandole, la

funzione studiata presenta più zeri all'interno dell'intervallo iniziale. In tale situazione per ciascuno zero è necessario individuare un intervallo diverso, talvolta di non facile localizzazione perchè di ampiezza piuttosto piccola. Per risolvere questo problema intervengono i metodi cosiddetti "*localmente convergenti*" che per poter essere implementati hanno però bisogno di una stima iniziale prossima allo zero. Il metodo delle bisezioni è inoltre molto lento; per questo se è necessario avere una certa velocità di convergenza, si preferiscono i metodi localmente convergenti, che però non sempre convergono. Tuttavia l'affidabilità dell'analisi dell'errore che esso consente lo rende talvolta migliore rispetto ad altri in certe applicazioni.

1.2 Metodi iterativi

Di seguito è riportata la teoria di base dei metodi iterativi per la ricerca di zeri di funzioni. Un metodo iterativo genera, a partire da un punto iniziale x_0 , una successione di punti x_n definita da

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad (1.8)$$

ove la funzione ϕ , detta funzione iteratrice, è continua. È nostro interesse studiare le condizioni che garantiscono la convergenza della successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ad uno zero di una assegnata funzione $f(x)$.

Cominciamo con l'osservare che se la successione generata dalla (1.8) converge verso un punto α allora deve essere $\alpha = \phi(\alpha)$. Infatti:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n)$$

e per la continuità della funzione ϕ :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \phi(\alpha).$$

Se siamo interessati a cercare uno zero α della equazione $f(x) = 0$, nella costruzione della funzione iteratrice $\phi(x)$ dobbiamo fare in modo che $\alpha = \phi(\alpha)$, cioè che α sia una soluzione costante della (1.8); α è detto punto fisso di ϕ .

I procedimenti iterativi hanno una interessante interpretazione grafica. Si disegna in un piano cartesiano la bisettrice del primo e terzo quadrante e la curva $y = \phi(x)$. Partendo dal punto iniziale x_0 sull'asse orizzontale, si traccia la verticale fino ad incontrare la curva. Da questo punto si traccia la parallela all'asse x fino ad incontrare la bisettrice. L'ascissa del punto di

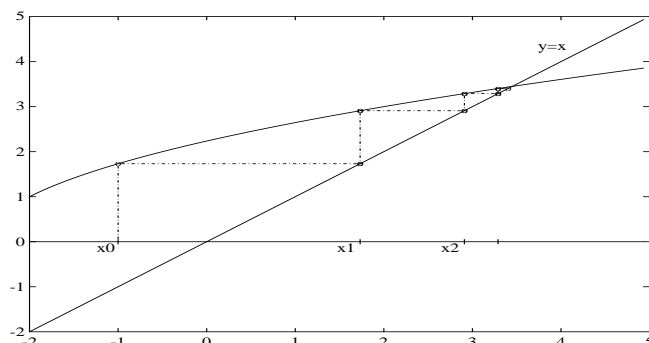


Figura 1.1: Procedimento iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n) \equiv (2x_n + 5)^{1/3}$

intersezione è il nuovo punto x_1 . Ripetendo la costruzione si ottengono gli altri punti (Fig. 1.1).

Se l'equazione da risolvere è non lineare, allora i procedimenti iterativi possono diventare indispensabili, sia perché i metodi diretti, quando esistono, diventano costosi, sia perché, molto spesso, i metodi diretti non esistono.

Definizione 1.1 *Il metodo iterativo (1.8) si dice convergente se esiste un intorno I del punto fisso α tale che*

$$(a) \quad \forall x_0 \in I : x_n \in I;$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Ovviamente per ogni equazione, vi possono essere infiniti procedimenti iterativi appropriati; è necessario, quindi, avere una guida nella scelta del più opportuno procedimento iterativo. Il seguente teorema (detto teorema di contrazione o del punto fisso) può servire allo scopo. Esso descrive una condizione sulla funzione iteratrice ϕ che garantisce la convergenza locale della successione.

Teorema 1.2 *Sia $x_{n+1} = \phi(x_n)$ un procedimento iterativo tale che $\alpha = \phi(\alpha)$ e con $\phi(x)$ derivabile e con derivata prima continua in un intorno I_0 di α . Se $|\phi'(\alpha)| < \lambda < 1$, partendo da un opportuno intorno dello zero, il procedimento converge ad α .*

Dimostrazione. Per la continuità di $\phi'(x)$ in I_0 , esiste un intorno sferico del punto fisso α , $I =]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, contenuto in I_0 , in cui si ha $|\phi'(x)| < \lambda < 1$. Supponendo che $x_0 \in I$, si ha

$$|x_1 - \alpha| = |\phi(x_0) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi)||x_0 - \alpha|$$

con $\xi \in I$. Essendo $|\phi'(x)| < \lambda < 1$, si ha che $x_1 \in I$ (si osservi infatti che $x \in I \Leftrightarrow |x - \alpha| < \delta$).

Allo stesso modo si dimostra che tutti i successivi punti sono in I . Inoltre si ha

$$|x_n - \alpha| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\alpha)| < \lambda|x_{n-1} - \alpha| < \dots < \lambda^n|x_0 - \alpha|$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \alpha| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |x_0 - \alpha| = 0$$

e il metodo converge. \square

Per poter usare questo teorema è necessaria una conoscenza approssimata sulla localizzazione dello zero. Ciò nonostante esso è spesso molto utile.

Esempio 1.1 Sia da calcolare la radice positiva di $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5$. Poiché $f(1.5) < 0$, ed $f(2.5) > 0$, la radice deve trovarsi nell'intervallo (1.5, 2.5). La funzione iteratrice più immediata $\phi(x) = 0.5*(x^3 - 5)$, che definisce il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = 0.5 * (x_n^3 - 5),$$

non è appropriata perché nell'intervallo (1.5, 2.5) è sempre $|\phi'(x)| > 1$ e quindi non è soddisfatta l'ipotesi del precedente teorema. La funzione iteratrice $\phi(x) = (2x_n + 5)^{1/3}$, che definisce il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = (2x_n + 5)^{1/3}, \tag{1.9}$$

invece soddisfa l'ipotesi del teorema essendo, nell'intervallo considerato, $1/6 < \phi'(x) < 0.15$. Il procedimento è quindi convergente.

Dopo aver trovato, con l'aiuto del teorema precedente uno o più procedimenti iterativi convergenti, è necessario ancora distinguere tra questi in base ad altri criteri. Il principale di tali criteri è la rapidità con cui la

successione delle iterate converge. Infatti non tutti i procedimenti iterativi convergenti raggiungono lo zero con la stessa rapidità. È possibile definire un opportuno parametro che effettua questa distinzione. Questo parametro è l'*ordine di convergenza*. Di seguito denotiamo con $e_n = x_n - \alpha$ l'errore al passo n -esimo.

Sia x_0, x_1, \dots , la successione ottenuta mediante il metodo iterativo (1.8). Essa converge con ordine $p \geq 1$ se esiste $c > 0$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c. \quad (1.10)$$

La (1.10) esprime il fatto che per un metodo di ordine p , definitivamente (cioè per n grande) si ha

$$|e_{n+1}| \simeq c|e_n|^p,$$

cioè definitivamente l'errore ad un generico passo si riduce secondo la potenza p -esima dell'errore al passo precedente. Per cui (definitivamente) metodi di ordine più elevato generano successioni che convergono più rapidamente di quelle generate da metodi di ordine più basso.

Nel caso $p = 1$ la convergenza si dice lineare; in tal caso c deve essere strettamente minore di 1. Se $p = 2$ la convergenza si dice quadratica.

Se la funzione ϕ è sufficientemente regolare in un intorno del punto fisso α , l'ordine di convergenza p è legato al valore delle derivate successive della ϕ , come il seguente teorema mostra.

Teorema 1.3 *Sia $\phi(x)$ derivabile p volte in un intorno di α con derivata p -esima continua. Allora la successione generata dalla (1.8) ha ordine di convergenza p se e solo se risulta*

$$\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad e \quad \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Dimostrazione. È sufficiente considerare lo sviluppo in serie di Taylor di ϕ in un intorno del punto fisso α , arrestato all'ordine p :

$$\phi(x) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x - \alpha) + \dots + \frac{\phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x - \alpha)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \alpha)^p$$

dove ξ è un opportuno punto tra x ed α . Si ha che

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n - \alpha)^p$$

da cui la tesi. \square

Come conseguenza osserviamo che se $\phi'(\alpha) \neq 0$, la convergenza del metodo è lineare, mentre se $\phi'(\alpha) = 0$, la convergenza è almeno quadratica o superlineare. Un esempio classico di un metodo di ordine $p = 2$ è il metodo di Newton (o Newton-Rhapson) descritto di seguito.

1.3 Il Metodo di Newton

Supponiamo che la funzione $f(x)$ abbia derivata non nulla; la funzione iteratrice $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ definisce il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.11)$$

detto *metodo di Newton*. È facile verificare che negli zeri di $f(x)$ in cui $f'(x)$ sia diversa da zero, la derivata prima di $\phi(x)$ si annulla. Infatti, $\phi'(x) = 1 - (f'(x)^2 - f(x)f''(x))/f'(x)^2$ e nel punto α , in cui $f(\alpha) = 0$, si ha $\phi'(\alpha) = 0$. Ciò significa che in un opportuno intorno dello zero la convergenza del metodo è superlineare. Si verifica anche facilmente che per una f generica risulta $\phi''(\alpha) \neq 0$, il che prova, in base al teorema sull'ordine, che il Metodo di Newton ha ordine 2 nell'ipotesi che la funzione $f(x)$ abbia derivata prima non nulla e derivata seconda continua in un intorno dello zero.

Alternativamente, ricalcando la dimostrazione del teorema, è possibile determinare l'ordine del metodo di Newton come segue. Si ha, essendo ξ_n un opportuno punto tra lo zero ed x_n ,

$$x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \phi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2}\phi''(\xi_n)(x_n - \alpha)^2$$

da cui, essendo $\phi'(\alpha) = 0$, si ha:

$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2}|\phi''(\xi_n)||e_n|^2.$$

Se si pone $c = (1/2)\max_{\xi} |\phi''(\xi)| \equiv (1/2)\max_{\xi} |f''(\xi)/f'(\xi)|$, si ottiene facilmente che $p = 2$.

Esempio 1.2 Consideriamo la funzione dell'esempio (1.1). Nella tabella seguente sono riportati i risultati ottenuti con il procedimento iterativo (1.9) e (1.11).

n	x_n	x_n
0	2.5	2.5
1	2.1544	2.1642
2	2.1036	2.9710
3	2.0959	2.0946
4	2.0948	2.0946
5	2.0946	2.0946

Il metodo di Newton ha una interessante interpretazione geometrica. Sia $y = f(x)$ la curva definita dalla funzione di cui si vuol trovare uno zero. Ovviamente gli zeri sono le intersezioni della curva con l'asse x . Sia x_0 il punto iniziale, a cui corrisponde sulla curva il punto $(x_0, f(x_0))$. La retta tangente alla curva passante per tale punto ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Essa interseca l'asse x nel punto x_1 dato da:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

che è proprio il primo punto ottenuto dal metodo di Newton (Fig. 1.2). Per questo motivo il metodo di Newton è anche chiamato metodo delle tangenti.

1.4 Caso di zeri multipli

Finora abbiamo supposto che $f'(\alpha)$ sia non nulla in α . Se ciò non accade significa che lo zero è almeno doppio. Uno zero è multiplo di molteplicità q per la funzione $f(x)$ se essa può mettersi nella forma $f(x) = (x - \alpha)^q g(x)$, con $g(\alpha) \neq 0$. È facile verificare che in tal caso in α si annullano tutte le derivate di $f(x)$ fino all'ordine $q - 1$, mentre $f^{(q)}(x) \neq 0$. Naturalmente vale anche il viceversa, come ci si può convincere usando lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di α .

Nel caso in cui α abbia molteplicità maggiore di 1, l'ordine del metodo di Newton si abbassa e la convergenza diventa lineare. Si dimostra facilmente infatti che in tal caso si ha:

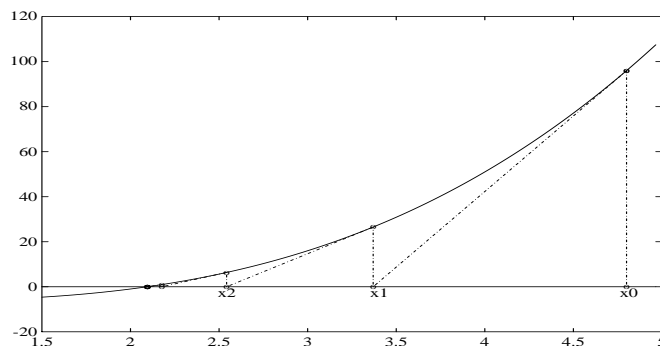


Figura 1.2: Metodo di Newton relativo all'esempio 1.1

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{q}. \quad (1.12)$$

Se si conosce a priori la molteplicità q , allora il procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - q \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.13)$$

ha ordine di convergenza 2.

Esercizio 1.1 Verificare la (1.12).

Esercizio 1.2 Dimostrare che il procedimento iterativo (1.13) ha ordine di convergenza 2 nel caso di zeri multipli con molteplicità q .

1.5 Criteri di stop

Per decidere quando fermare un procedimento iterativo è necessario ovviamente decidere a priori con quante cifre significative esatte si vuole approssimare lo zero. Sappiamo già che quando lo zero è non nullo, è l'errore relativo che fornisce tale informazione. Ad esempio se lo zero fosse $\alpha = 1234567$, l'approssimazione $x = 1230000$ avrebbe tre cifre esatte, ma l'errore assoluto è $|\alpha - x| = 4567$ che è molto grande, mentre l'errore relativo è:

$$\left| \frac{\alpha - x}{\alpha} \right| = 3.69 \cdot 10^{-3}.$$

Se invece lo zero fosse $\alpha = 0.1234567 \cdot 10^{-2}$ e l'approssimazione $x = 0.1230000 \cdot 10^{-2}$, l'errore assoluto sarebbe $0.4567 \cdot 10^{-5}$, molto piccolo, mentre l'errore relativo sarebbe lo stesso di prima. Quindi l'indicatore più appropriato in entrambi i casi è l'errore relativo. Poichè lo zero α è incognito, non è possibile purtroppo usare questo indicatore. Bisogna scegliere una grandezza calcolabile che si avvicini il più possibile ad esso. Tenendo conto che:

$$x_{n+1} - \alpha = \phi(x_n) - \phi(\alpha) = \phi'(\xi)(x_n - \alpha),$$

con ξ un punto compreso fra x_n e α , si ha:

$$x_{n+1} - x_n = (\phi'(\xi) - 1)(x_n - \alpha),$$

da cui si ha:

$$\left| \frac{\alpha - x_n}{\alpha} \right| = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha(\phi'(\xi) - 1)} \right| = \quad (1.14)$$

$$\left| \frac{1}{\alpha(\phi'(\xi) - 1)} \right| |x_{n+1} - x_n| \simeq \quad (1.15)$$

$$\left| \frac{1}{(\phi'(\xi) - 1)} \right| \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right|. \quad (1.16)$$

Nell'ottenere l'ultima espressione si è tenuto conto che, ovviamente, quando il procedimento converge, i punti x_n sono molto vicini allo zero.

Se si conosce una maggiorazione $K < 1$ del modulo di $\phi'(x)$ in un intorno di α , cioè se esiste $r > 0$ tale che

$$\forall x \in]\alpha - r, \alpha + r[: \quad |\phi'(x)| \leq K < 1$$

allora è possibile arrestare la procedura quando

$$\frac{1}{(1 - K)} \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right| < \epsilon.$$

Uno studio a priori di $\phi'(x)$ in un intorno di α non è sempre possibile, o comunque può risultare complesso. Si può utilizzare in tali casi la condizione più semplice ma meno precisa:

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{\min(|x_n|, |x_{n+1}|)} \right| < \epsilon. \quad (1.17)$$

La (1.17) ha il difetto di non rappresentare bene l'errore relativo quando $\phi'(x)$ è vicino ad uno nell'intorno dello zero. Per i metodi superlineari (come il metodo di Newton) va invece molto bene.

Un altro criterio, anch'esso molto usato, è quello di arrestare il procedimento quando:

$$|f(x_n)| < \epsilon. \quad (1.18)$$

Essendo $f(x_n) = f'(\xi)(x_n - \alpha)$, con $\xi \in (\alpha, x_n)$, si ha:

$$\left| \frac{\alpha - x_n}{\alpha} \right| = \left| \frac{f(x_n)}{\alpha f'(\xi)} \right|$$

da cui si deduce che il test (1.18) è valido se $|\alpha f'(\xi)|$ non è troppo grande o troppo piccolo.

1.6 Procedimenti iterativi a più punti

Dal metodo di Newton si può immediatamente ricavare un altro metodo. Basta sostituire alla derivata $f'(x_n)$ una sua approssimazione, cioè il rapporto:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Si ottiene quindi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \equiv \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (1.19)$$

Questo procedimento iterativo non rientra nella classe dei procedimenti iterativi visti finora, cioè del tipo (1.8). In questo caso il nuovo punto dipende da due punti precedenti, cioè il procedimento iterativo è del tipo:

$$x_{n+1} = \phi(x_{n-1}, x_n). \quad (1.20)$$

Tali procedimenti necessitano, per poter partire, di due punti iniziali.

L'interpretazione geometrica del procedimento iterativo (1.19) è semplice. Il nuovo punto è l'ascissa del punto di intersezione con l'asse x della retta secante passante per i punti $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$ e per questo motivo viene detto metodo delle secanti (Fig. 1.3).

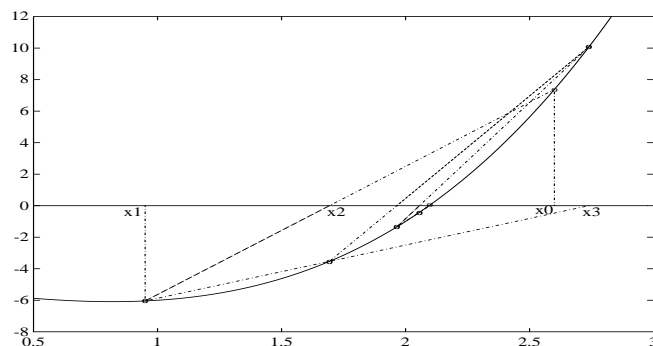


Figura 1.3: Metodo delle secanti relativo all'esempio 1.1

Per quel che riguarda la velocità di convergenza, il metodo delle secanti è superlineare nel caso in cui la funzione f abbia derivata seconda continua nell'intorno dello zero. Infatti, posto come al solito $e_n = x_n - \alpha$, si ha:

$$e_{n+1} = \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\eta)} e_n e_{n-1},$$

essendo ξ ed η opportuni punti nell'intorno dello zero. Se il metodo converge si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0$$

da cui segue la superlinearità. Si può dimostrare che in questo caso l'ordine è $p = 1.618$. È un po' meno veloce del metodo di Newton ma ha il vantaggio che ad ogni passo calcola solo $f(x_n)$.

La stessa idea può essere usata per ottenere un procedimento iterativo ad un punto. Basta tenere fisso uno dei due punti, per esempio x_0 . Si ottiene quindi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n).$$

Questo metodo, detto *regula falsi* è lineare e quindi meno veloce del metodo delle secanti (Fig. 5.4).

Esistono procedimenti iterativi ad uno o più punti con ordine di convergenza più elevato. Quelli che abbiamo riportato sono i più importanti ed i

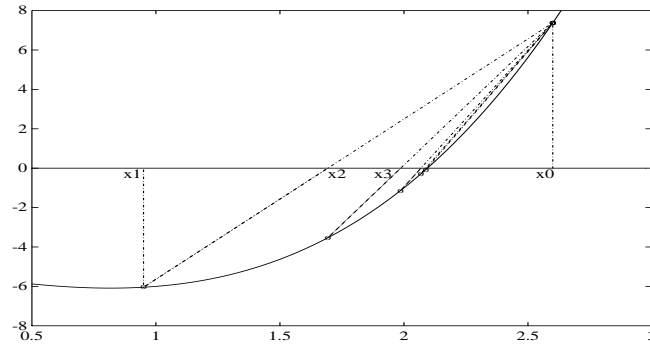


Figura 1.4: Metodo della falsa posizione relativo all'esempio 1.1

più comunemente usati. D'altra parte non esiste, per una generica funzione $f(x)$, il metodo iterativo ideale che sia veloce con convergenza garantita quando si parte da un punto iniziale generico.