Hechos interesantes de los números complejos.

Los números complejos provienen de tratar de obtener la solución de la ecuación $x^2 = -1$.

Ningún número real es solución de esta ecuación. Sin embargo, si consideramos que tenemos un "número" (que no es un real) que sea la solución de tal ecuación, estaremos extendiendo el concepto de "número". De hecho esto se hace y tenemos los números "imaginarios", los cuales son los que conforman las soluciones de las ecuaciones $x^2 = \alpha$, con α < 0. Además, nos preguntamos por problemas como las raíces cúbicas o de polinomios de grado impar. ¿Qué ocurre con las dos raíces restantes en polinomio de grado 3 que solamente "cruza" una sola vez el "eje x"? O también con las raíces de las parábolas (polinomios de grado 2) que no "cruzan el eje x"?

Pues bien, es muy probable que las dos raíces restantes tengan que ver con los números imaginarios. Esto se resolvió hace un tiempo, con los trabajos de Moivré. Se dio cuenta de que si representaba "números" formados de dos coordenadas, (a,b) como puntos en el plano, con la coordenada horizontal como la "parte real" del número y la coordenada vertical como la "parte imaginaria", poniendo (a,b) como a + ib y (esta es una parte muy interesante) aplicaba las reglas habituales del álgebra, considerando $i^2 = -1$, todas las operaciones y los resultados habituales se conservaban y además estaba abarcando la solución completa de polinomios de grado 2,3,4,y 5. Esto es, se había extendido el ámbito del concepto número. Estos números recibieron el nombre de números complejos. La solución de polinomios se extendió a polinomios de cualquier grado (entero positivo). Desde el punto de vista de la Ingeniería esto es muy importante tratándose de filtros digitales y en general en soluciones de problemas que tienen que ver con "armónicos", tales como las vibraciones o fenómenos oscilantes.

Veamos algunas "curiosidades" (propiedades) sobre el comportamiento de los números complejos.

Pongamos $z = a + ib$, (en electricidad y electrónica no utilizamos i pues se confunde con la corriente eléctrica (a veces tampoco se utiliza Z pues se confunde con la impedancia).

Dado que z lo podemos representar como un punto en el plano, siendo a la coordenada o componente *"real"* y b la coordenada o componente *"imaginaria"*, es posible asimismo representar z en representación polar. Esta representación es de las más útiles en ingeniería, ya que simplifica una gran cantidad de relaciones entre magnitudes correspondientes a los principio de la naturaleza (les llamamos "leyes").

Si a todo número $z = a + ib$ le asociamos el número $z' = a - ib$ (mismo valor en la parte real, componente imaginaria en el otro sentido, a z' le llamamos el "***conjugado***" de z), si los sumamos obtenemos

$$z + z' = a + ib + a - ib = 2a = 2\,Real(z) = 2\,Real(z')$$

Y si los restamos:

$$z - z' = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\,Imag(z) = 2i\,Imag(z')$$

Multiplicándolos:

$$zz' = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Además, esta operación es conmutativa ($zz' = z'z$).

Y al dividir z entre z' ($z \neq 0 + i0$):

$$\frac{z}{z'} = \frac{zz}{z'z} = \frac{zz}{|z|^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2iab}{a^2 + b^2}$$

Además:

$$\frac{1}{z} = \frac{z'}{zz'} = \frac{z'}{|z|^2}$$

Dividir entre z se lleva a cabo dividiendo entre su norma al cuadrado y multiplicando por su conjugado.

Considerando el número en su representación polar tenemos:

$$r^2 = a^2 + b^2 = zz';$$

$$\text{O bien } r = \sqrt{a^2 + b^2} = = \sqrt{zz'}$$

$$\Theta = arcTan(\frac{y}{x});$$

considerando $arcTan\left(\frac{y}{x}\right)$ como símbolo, para comprender el caso cuando x = 0.

Asimismo los recíprocos son:

$$a = r\cos(\Theta)$$

$$b = r\sin(\Theta)$$

¿Cómo queda el conjugado de un número complejo en notación polar?

$$z' = a - i\,b = r\cos(\Theta) - i\,r\sin(\Theta) = [r, -\Theta]$$

Ya que $\cos(-\Theta) = \cos(\Theta)$, (el coseno es una función par, para todo x real, f(-x) = f(x)).

Veamos en coordenadas polares al complejo 1/z: ($r \neq 0$)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos(\Theta) + i\sin(\Theta))} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos(\Theta) + i\sin(\Theta)} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos(\Theta) + i\sin(\Theta)}\frac{\cos(\Theta) - i\sin(\Theta)}{\cos(\Theta) - i\sin(\Theta)}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\cos(\Theta) - i\sin(\Theta)}{cos^2(\Theta) + sin^2(\Theta)}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos(\Theta) - i\sin(\Theta))$$

Y lo podemos escribir como

$$z^{-1} = [\frac{1}{r}, -\Theta]$$

Veamos qué interpretación le damos a las operaciones de producto y división de complejos en general.

Tendremos ahora dos complejos cualesquiera distintos del (0,0). Además del z tendremos el complejo

$$s = c + id$$

pongamos, para diferenciar

$$z = a + ib = [r_z, \Theta] \text{ (en coordenadas polares)}$$

s $=c+id == [r_s, \emptyset]$ (en coordenadas polares)

El producto de s y z es:

$$sz = (c+id)(a+ib) = ac + i^2bd + i(ad+bc) = ac - bd + i(ad+bc)$$

Nada sensacional, pero, ¿qué ocurre si lo expresamos en términos de la equivalencia en polares?

$$sz = r_z \cos(\Theta)\, r_s \cos(\emptyset) + r_z \sin(\Theta)\, r_s \sin(\emptyset) + i(r_z \cos(\Theta)\, r_s \sin(\emptyset) + r_z \sin(\Theta)\, r_s \cos(\emptyset))$$

$$= r_z r_s\{\cos(\Theta)\cos(\emptyset) + \sin(\Theta)\sin(\emptyset) + i(\cos(\Theta)\sin(\emptyset) + \sin(\Theta)\cos(\emptyset))\}$$

$$= r_z r_s\{\cos(\Theta+\emptyset) + i\, sin(\Theta+\emptyset)\}$$

Queda el producto de las magnitudes o módulos y la suma de los ángulos.

Y la división (utilizando lo ya visto):

$$\frac{s}{z} = s\left(\frac{1}{z}\right) = [\frac{r_s}{r_z}, \emptyset - \Theta]$$

Esto es, cociente de los módulos o magnitudes, resta de los ángulos, quedando interpretaciones muy simples para el producto y el cociente de complejos.

Veamos ahora una expresión que nos ayudará muchísimos en la formulación de algunas representaciones (funciones periódicas en términos de armónicos).

Consideremos una función infinitamente derivable en un intervalo [a,b] (de números reales).

Podemos expresar los valores de la función como una suma infinita (serie) de potencias utilizando un punto para expandir la serie alrededor de él. La serie que escogemos es la que está conformada por las derivadas de la función en un punto y la suma infinita de los productos de las derivadas de la función en cuestión evaluadas en el punto "pivote" y multiplicadas por la potencia correspondiente a la derivada de la diferencia del punto a evaluar al punto pivote (más fácil algebraicamente):

Sean x y x_0 $puntos\ de\ [a,b], si\ f(x)\ es\ continuamente\ diferenciable,$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Utilizando este hecho., expandamos cos(x) alrededor de $x_0 = 0$.

Veamos cómo son las derivadas de cos(x) evaluadas en $x_0 = 0$:

$$cos(0) = 1$$

$$cos'(x) = -\sin(x)\,;\ cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

$$cos''(x) = -\cos(x)\,;\ cos''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$cos'''(x) = \sin(x)\,;\ cos'''(0) = \sin(0) = 0$$

$$cos^{iv}(x) = \cos(x)\,;\ cos^{iv}(0) = \cos(0) = 1$$

Los coeficientes de las potencias son 1,0,-1,0,1,0,-1,0,…

Por lo que

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Veamos ahora la expansión de $\sin(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

$$\sin(0) = 0$$

$$sin'(x) = \cos(x)\,;\ sin'(0) = \cos(0) = 1$$

$$sin''(x) = -\sin(x)\,;\ sin''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$sin'''(x) = -\cos(x)\,;\ sin'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$sin^{iv}(x) = \sin(x)\,;\ sin^{iv}(0) = \sin(0) = 0$$

Ahora, los coeficientes de las potencias son 0,1,0,-1,0,1,0,-1,…

Y

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

Ok, como hecho interesante está muy bien, pero ¿y…?

Expandamos de la misma forma e^x alrededor de $x_0 = 0$.

Las derivadas de $e^x\ son\ e^x$, al evaluarlas en $x_0 = 0$ todas tienen como valor e^{x_0}=1.

Por lo que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} \ldots$$

Y expandiendo e^{ix} alrededor de $x_0 = 0$:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} + \frac{i^9x^9}{9!} + \frac{i^{10}x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{ix^9}{9!} - \frac{x^{10}}{10!} - \frac{ix^{11}}{11!} + \cdots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots\right) +$$

$$i\ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots\right)$$

De donde

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Y de ahí la representación polar tiene un significado geométrico muy operable algebraicamente:

$$z = [r, \Theta] = re^{i\Theta}$$

Y de ahí, lo visto para el producto y cociente de complejos tiene una representación operable e interpretable directamente de acuerdo a las reglas de operación de los exponentes.

Además

$$z' = [r, -\Theta] = re^{-i\Theta}$$

Si t representa al tiempo, una situación muy interesante se obtiene cuando analizamos el comportamiento de

$$z(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

Este es un punto sobre el plano complejo, en el círculo unitario, "girando" alrededor del origen a una velocidad angular ω, la frecuencia que le corresponde es $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $(\omega = 2\pi f)$. Las frecuencias positivas son en el sentido contrario al de las manecillas del reloj CCW y las negativas en el sentido de las manecillas CW.

Su conjugado es

$$z'(t) = e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$$

MatLab trabaja de manera natural con los números complejos (y con vectores y matrices de números complejos) (también R. Maple y Wolfram Alpha (Mathematica) lo hacen, por mencionar los más populares).

Generemos un conjunto de vectores de 256 entradas, valuando los 5 primeros armónicos correspondientes a frecuencias de 0,1,2,3 y 4 ciclos / unidad de tiempo, cada entrada correspondiendo la valores del tiempo de t = 0, 1/256, 2/256, … 255/256.

Tarea:

Teclee en Matlab o en Octave las siguientes instrucciones y reporte lo obtenido.

```
>> z0=ones(1,256);

>> z1 = exp(j*2*pi/256*(0:255));

>> z2 = exp(j*2*2*pi/256*(0:255));

>> z3 = exp(j*3*2*pi/256*(0:255));

>> z4 = exp(j*4*2*pi/256*(0:255));

>> plot(real(z1),imag(z1))

>> plot(real(z1))

>> plot(real(z2))

>> plot(real(z3))

>> plot(real(z4))

>> plot(imag(z0))

>> plot(imag(z1))

>> plot(imag(z2))

>> z0*z1'

>> z0*z2'
```

```
>> z0*z3'
>> z0*z4'
>> z1*z2'
>> z1*z3'
>> z1*z4'
>> z2*z3'
>> z2*z4'
>> z3*z4'
>> z1*z1'
>> z2*z2'
>> z3*z3'
>> z4*z4'
>> z0*z0'
```