Projets

Méthodes numériques pour les EDP en finance - Paris Diderot
Olivier Bokanowski
Février 2016

Les projets doivent être effectués seul ou en binôme. Un rapport succint (une dizaine de pages) devra être rédigé résumant le problème, l'approche étudiée (algorithmes, modèle, etc.) et les résultats numériques obtenus. On précisera toujours avec soin l'E.D.P. considérée, le domaine de résolution, les conditions aux limites, les données du problème. On pourra commenter les temps de calculs, la précision des résultats, faire un comparatif des différentes méthodes testées, essayer d'analyser l'ordre numérique de(s) méthode(s) testée(s). Pour la rédaction du rapport, le langage "Latex" est conseillé. Les programmes doivent être fournis. Le langage peut être `Scilab/Matlab`, `c`, `c++`, `FreeFem++`, ...

Le rapport (en format .pdf) et les programmes devront être envoyés au moins un jour avant la soutenance orale, par email (`boka@math.jussieu.fr`).

Les soutenances orales auront lieu plutot vers Avril 2016 (date à confirmer). Prévoir un exposé de 15 minutes environ (vidéo projecteur ou exposé au tableau noir).

Liste des projets :

1. Option asiatique
2. Schéma BDF pour l'option américaine
3. Méthodes ADI.
4. Schémas semi-Lagrangiens pour des problèmes à plusieurs actifs.

Références :

- consulter le site web du cours, `refs.zip` et `refs_new.zip` (*https ://www.ljll.math.upmc.fr/~boka/enseignement/ens2015.html*)
- ou les demander par email.

Projet 1. Option asiatique

Le prix d'une option asiatique portant sur un actif S_t (de valeur initiale S_0) et sur une valeur moyenne $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$, correspondant à $P = \mathbb{E}(e^{-\int_0^T rds}\,\varphi(S_T, A_T))$, est donné par $P = v(0, S_0, S_0)$ où la fonction V est telle t.q.

$$-\partial_t v - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{S,S} v - rS\partial_S v - \frac{S-A}{t}\partial_A v + rv = 0 \quad (1a)$$

$$v(T, S, A) = \varphi(S, A). \quad (1b)$$

1) En considérant le processus bidimensionnel $X_t := (S_t, A_t)$, retrouver (1).

2) En considérant le processus bidimensionnel $Y_t := (S_t, B_t)$ avec B_t tel que[1] $dB_t = S_t\,dt$ ainsi que $\psi(s, b) := \varphi(s, \frac{1}{T}b)$, et la fonction

$$w(t, x, y) := \mathbb{E}(e^{-\int_t^T rds}\,\psi(S_T^{t,x}, B_T^{t,x,y})), \quad (2)$$

vérifier que $P = w(0, S_0, 0)$ et établir une autre EDP pour la fonction w.

3) On considère que le prix de l'option à la date T d'écheance est $\varphi = (A_T - K)_+$ (cas du call strike fixe, qui correspond à un droit d'achat au prix $K - A_T + S_T$ à l'échéance). On fait le changement de variable [13] $x := \frac{K - tA/T}{S}$ et on cherche une solution particulière sous la forme $v(t, S, A) = Sf(T - t, x)$. On commencera par montrer que f doit vérifier l'edp suivante :

$$\partial_t f - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + (\frac{1}{T} + rx)\partial_x f = 0 \quad (3a)$$

$$f(0, x) = x_- \quad (3b)$$

(avec $x_- := \max(-x, 0)$). La valeur cherchée est alors $P = S_0\, f(T, x = \frac{K}{S_0})$.

Dans le cas où la condition initiale est $f(0, x) := -x$, déterminer une solution analytique de la forme $g(t, x) = xa(t) + b(t)$. Ensuite, pour le cas de $f(0, x) := x_-$, on admettra que $\lim_{x\to+\infty} \bar{f}(t, x) = 0$ et que $f(t, x) \sim g(t, x)$ lorsque $x \to -\infty$. En déduire une E.D.P. approchée sur un domaine spatial de type $[X_{min}, X_{max}]$ (avec $X_{min} \le 0$, $X_{max} > \bar{x} := \frac{K}{S}$), en précisant les conditions aux limites utilisées.

Résoudre l'E.D.P. en utilisant une méthode de différences finies (de type Crank-Nicolson). Vérifier l'ordre numérique de la méthode.

Comparer avec les résultats de [13] (voir [9] pour des résultats plus précis). Comparer les résultats obtenus avec $X_{min} = 0$ ou avec $X_{min} < 0$.

4) Dans le cas d'une fonction payoff quelconque $\varphi(S_T, A_T)$, l'approche précédente n'est plus valable. Proposer et programmer une méthode de discretisation pour l'EDP bi-dimensionnelle vérifiée par la fonction (2). On pourra utiliser une approche par différences finies (puis éventuellement par éléments finis avec `FreeFem++`). Vérifier numériquement la cohérence de la méthode dans le cas test de 3).

Références : [13], [9], [15], [1].

1. Plus précisement on pourra définir $B_\theta^{t,x,y}$, pour $\theta \ge t$, t.q. $B_t^{t,x,y} = y$ et $dB_\theta = S_\theta\, d\theta$

Projet 2. Schémas BDF pour les options américaines

On s'intéresse au pricing de l'option americaine, en visant à reproduire certains résultats numérique du travail de Oosterlee [19] avec une analyse proposée récemment dans [18].

1) On commence par considérer le problème du pricing de l'option put américaine pour un problème à un actif (EDP mono-dimensionnelle). Programmer et tester deux méthodes de différences finies. La première méthode sera un schéma de type Crank-Nicolson, la deuxième méthode sera un schéma de type BDF2 : voir [18]. On tachera de reproduire les principaux résultats numériques :

- pour un cas test avec second membre (solution exacte connue)
- pour une option put americaine.

En particulier on tachera d'observer la convergence numérique d'ordre deux en temps et en espace, sans condition de type CFL dans le cas de BDF2. On étudiera aussi la preuve de la stabilité de la méthode [18].

2) Proposer et tester des schémas aux différences finies analogues pour des problèmes bidimensionnels. On pourra principalement étudier deux cas proposés dans [19]. Le premier cas test à considérer (voir Section 5.1 dans [19]) est

$$u_{xx} + u_{yy} \leq 2C \qquad x \in \Omega \tag{4}$$
$$u \leq d(x, \partial\Omega) \qquad x \in \Omega \tag{5}$$
$$(2C - u_{xx} - u_{yy})(u - d(x, \Omega)) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{6}$$
$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \qquad \text{(boundary condition)} \tag{7}$$

Le deuxième test correspond à un modèle à volatilité stochastique de type Heston, et on pourra se comparer à [19] (Section 5.2) pour avoir des valeurs numériques de référence. (Note : on ne demande pas de programmer des schémas multi-grilles comme fait dans [19]).

Références : [18], [5]. [19].

Projet 3. Méthode ADI pour le pricing d'option américaines

On s'intéresse aux méthodes ADI (Alternate Direction Implicit methods) pour la résolution des EDPs modélisant des options europeennes ou américaines à deux actifs.

1) On pourra commencer par lire la référence [20] (ou toute référence similaire) pour comprendre la méthode et les résultats de consistence et de stabilité numérique (voir en particulier Section 1.2 de la référence donnée). On pourra ensuite programmer le cas test bidimensionnel (Voir Section 3.) afin de valider l'approche numérique.

2) On s'intéressera ensuite à des approches similaires pour les options américaines, par exemple en se basant sur le travail de [21]. Par contre, dans un premier temps, on considérera des maillages *uniformes* afin de simplifier la programmation de la méthode. On pourra ensuite, éventuellement, considérer des maillages non-uniforme afin de se rapprocher des résultats de [21].

Références

(Projets 1-3)

[1] Y. Achdou et O. Pironneau, *Computational methods sor option pricing*, 2005, SMAI.

[2] Barles, G. and Daher, Ch. and Romano, M., *Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory,* Math. Models Methods Appl. Sci., Vol 5 (no 1), pp 125–143 (1995).

[3] Bermúdez et Nogueiras (2004), *Numerical Solution of Tow-Factor models for Valuation of Financial Derivatives*, Mathematical Models and methods in Applied Sciences, Vol 14, No 2, 295–327.

[4] A. Bermúdez, M. R. Nogueiras, C. Vázquez, Numerical solution of variational inequalities for pricing Asian options by higher order LagrangeGalerkin methods. *Applied Numerical Mathematics* 56 (2006) 1256–1270.

[5] O. Bokanowski, S. Maroso, H. Zidani "Some convergence results for Howard's algorithm," Preprint Inria, 2007. (`http://hal.inria.fr/inria-00179549/fr/`)

[6] Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, *Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes*, IMA Journal on Numerical Analysis, 25 (2005) 87–112.

[7] K. Ito, K. Kunisch, Semi-smooth Newton methods for variational inequalities of the first kind. ESAIM : M2AN, Vol. 37, No 1, 2003, pp. 41–62

[8] D. Lamberton et B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1997.

[9] F. Dubois et T. Lelievre, Efficient pricing of Asian options by the PDE approach, Journal of Computational Finance, volume 8(2), pp 55–64, 2005.

[10] R.C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3 :125–144, 1976.

[11] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications* (3rd edition), Springer Verlag, 1992.

[12] H. Pham, Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance. 2007, collection Mathématiques et Applications, Springer Verlag. (Voir éventuellement : Notes de cours, 2003, *Controle Optimal Stochastique et applications en Finance*, `http://felix.proba.jussieu.fr/pageperso/pham/constomars03.pdf`)

[13] Rogers, L. C. G. and Shi, Z., *The value of an Asian option.* J. Appl. Probab. 32 (1995), no. 4, 1077–1088.

[14] H. M. Soner, N. Touzi. *Superreplication under gamma constraints*, SIAM J. Control Optim., Vol. 39 (1) : 73–96, 2000.

[15] P. Wilmott, S. Howisson, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives - A Studen Introduction* (1998).

[16] P. Wilmott, *Derivatives, The theory and practice of Financial Engineering*, 1998, John Wiley & Sons.

[17] O. Bokanowski, A. Picarelli, H. Zidani, "Dynamic programming and error estimates for stochastic control problems with maximum cost", *Applied Math. and Optim*, Vol 71 (1) : pp. 125–163 (2015).

[18] O. Bokanowski, K. Debrabant, "High order finite difference schemes for some diffusion-obstacle problems" (2015).

[19] K. Oosterlee, "On Multigrid for linear complementary problems with application to american-style options."

[20] K. J. in't Hout and B.D. Welfert, *Stability of ADI schemes applied to convection-diffusion equations with mixed derivative terms.* Applied NUm. Math., 57, pages 19-35, 2007.

[21] T. Haentjens and K J. in't Hout, *ADI schemes for princing American options uner the Heston model.* Applied Math. Finance, 2015, vol 22, No 3 , pages 207-237.

[22] Roberto Ferretti, *A Technique for High-Order Treatment of Diffusion Terms in Semi-Lagrangian Schemes*, Commun. Comput. Phys., Vol. 8, No. 2, pp. 445-470, 2010.

Projet 4.

Semi-Lagrangian approach for the pricing of multi-assets options

Advisor: Olivier Bokanowski

In this project a `c++` code will be developped for the approximation of bi-dimensional parabolic PDEs related to two-assets option pricing of European style. Eventually a multidimensional PDE solver will be used (`c++` ROC-HJ solver [2]).

In this project we consider the use of a particular fully explicit semi-Lagrangian method, which is a kind of finite difference method.

The advantage of the method is that it can be generalized in a straightfoward way to higher-dimensional PDEs (yet limited by usual memory and cpu time costs).

1) Construction of a test model. Here we consider a multi-dimensional PDE of the form

$$-v_t - \frac{1}{2} Tr(\sigma\sigma^T D^2 v) - \sum_i r x_i v_{x_i} + rv = 0 \tag{1}$$

and

$$v(T,x) = \varphi(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i).$$

where $\alpha_i > 0$ are given, and $\varphi(y) := \max(K - y, 0)$. First find coefficients (σ_{ij}) such that for u an analytical solution is known, of the form $v(t, x_1, \ldots, x_n) = w(t, y)$ where $y = \sum_i \alpha_i x_i$, and where w is solution of a one-dimensional Black and Scholes equation of the form $-w_t - \frac{1}{2}\lambda^2 y^2 w_{yy} - ryw_y + rw = 0$, $w(T, y) = w_0(y)$ (the coefficients are of the form $\sigma_{ij}(x) = x_i \beta_{ij}$ where β_{ij} are constants to be determined so that the above property is true).

This particular problem is then used as a reference test case for multi-dimensional approximation.

2) Let $u^n(x)$ represents an approximation of the value $v(t_n, x)$, where $t_n = nh$ and $h = T/N$ is a time step.

(i) We first look for u^n in the form:

$$u^N(x) = \varphi(x) \tag{2a}$$

and, for $n = N-1, \ldots, 0$:

$$u^n(x) = \frac{e^{-rh}}{2d} \sum_{k=1,\ldots,d} \sum_{\epsilon=\pm 1} u^{n+1}(x + \bar{b}_k(x)h + \epsilon \bar{\sigma}_k(x)\sqrt{h}) \tag{2b}$$

Show that for well chosen vectors $\bar{\sigma}_k(x)$ and vectors $\bar{b}_k(x)$ (give simple equations they have to satisfy, in relationship with $\sigma_k(x)$ and $b_k(x)$) we obtain a first order scheme in the sense that the following consistency error estimate holds, for any $v \in C^4([0,T] \times \mathbb{R}^+)$, with $v^n(x) = v(t_n, x)$, solution of (1),

$$|\frac{v^n(x) - (Sv^{n+1})(x)}{h}| \leq Ch,$$

where the constant C depends of the derivatives of v (to be made precise). Deduce then that the true error is of first order in the sense that (assuming v sufficiently regular):

$$|u^n(x) - v^n(x)| \leq Ch.$$

(ii) The implemented scheme will be of the form (using $\gamma_k \equiv d$, $\vec{b}_k = (\vec{b}, \vec{e}_k)\vec{e}_k$):

$$u^n(x) = \frac{e^{-rh}}{2d} \sum_{k=1,\dots,d} \sum_{\epsilon=\pm 1} [u^{n+1}](x + b_k(x)h + \epsilon\sigma_k(x)\sqrt{\gamma_k h}) \tag{3}$$

where $[\psi]$ denotes a P_1 or Q_1 interpolation on a cartesian mesh (in particular $|[\psi](x) - \psi(x)| \leq C\Delta x^2$ for any C^2 regular function ψ, and $|[\psi](x) - \psi(x)| \leq L\Delta x$ for any Lipschitz-continuous function ψ). Analyse again the consistency error as well a the true error of the scheme in this case, assuming that $\Delta x > 0$ is a uniform mesh step in any direction for the mesh grid.[1]

Boundary conditions are also needed to correctly define the scheme outside the given computational domain Ω. For the considered option we propose to implement a simple (yet unstable) boundary value: if $x \notin \Omega$ then consider that $u_{xx} = 0$ on the boundary and therefore, denoting $p(x)$ the projection of x on Ω and assuming that the symmetric point of x, $s(x) = 2p(x) - x$, is well inside Ω, consider the approximation $u(x) := 2[u](p(x)) - [u](x)$.

3) By direct programming or by using the ROC-HJ library, implement and test this scheme in the two-dimensional case. Check the accuracy order (typically using $\Delta t \equiv \Delta x \to 0$), CPU times.

4) The previous scheme can be improved as follows. For the approximation in space, consider using a cubic interpolation for $[u^n]$ instead of P_1 (in 1d, an approximation $[u](x)$ for $x \in [x_i, x_{i+1}]$ can be obtained by considering the polynomial $p \in \mathbb{R}_3[x]$ such that $p(x_j) = u(x_j)$ for $j \in \{i-1, i, i+1, i_2\}$. This can then be extended in 2d by splitting. For the approximation in time, implement and test a second-order scheme : Platen's scheme (see Weak Taylor schemes in the book of Kloeden and Platen [3], see also Ferretti [4]).

5) Eventually, test the scheme for higher multi-dimensionnal assets problem (consider using [2])

References

[1] K. Debrabant and E. R. Jakobsen. Semi-Lagrangian schemes for linear and fully non-linear diffusion equations. *Math. Comp.*, 82(283):1433–1462, 2013.

[2] The "ROC-HJ" solver: a parallel `c++` library for Reachability and Optimal Control software using the Hamilton-Jacobi approach. `http://itn-sadco.inria.fr/software/ROC-HJ`

[3] Kloeden, Peter E. and Platen, Eckhard, Numerical solution of stochastic differential equations, Applications of Mathematics (New York), Vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] Roberto Ferretti, *A Technique for High-Order Treatment of Diffusion Terms in Semi-Lagrangian Schemes*, Commun. Comput. Phys., Vol. 8, No. 2, pp. 445-470, 2010.

[1] Show a consistency error bound, as well as error bound of order $O(h + \frac{\Delta x^2}{h})$ for regular solutions, or of order $O(h + \frac{\Delta x}{h})$ for only x-Lipschitz continuous - regular in time - solutions.