

# TD n°8 Logique du premier ordre

Introduction à l'intelligence artificielle et à la robotique

D. Pellier

**Exercice. 1** L'énoncé  $\exists x, y \ x = y$  est-il valide ? Expliquez pourquoi.

**Exercice. 2** Donnez un énoncé qui ne soit vrai que dans les mondes contenant exactement un seul objet.

**Exercice. 3** Parmi les énoncés suivants, lesquels sont valides ? Expliquez pourquoi.

1.  $(\exists x \ x = x) \Rightarrow (\forall y \ \exists z \ y = z)$
2.  $\forall x \ P(x) \vee \neg P(x)$
3.  $\forall x \ \text{Intelligent}(x) \vee (x =$

**Exercice. 4** Le fait  $\neg \text{Epouse}(\text{George}, \text{Laura})$  découle-t-il des faits *Jim*, *George* et  $\text{Epouse}(\text{Jim}, \text{Laura})$  ? si oui, prouvez-le. Sinon, fournissez les axiomes supplémentaires nécessaires.

**Exercice. 5** Pour chacune des phrases ci-dessous, dites pour chaque expression logique la concernant si 1) elle est syntaxiquement incorrecte, 2) elle est syntaxiquement correcte et exprime correctement le sens de la phrase, 3) elle est syntaxiquement correcte mais n'exprime pas correctement le sens de la phrase.

1. Paris et Marseille sont toutes deux en France.
  - (a)  $\text{En}(\text{Paris} \wedge \text{Marseille}, \text{France})$
  - (b)  $\text{En}(\text{Paris}, \text{France}) \wedge \text{En}(\text{Marseille}, \text{France})$
  - (c)  $\text{En}(\text{Paris}, \text{France}) \vee \text{En}(\text{Marseille}, \text{France})$
2. Il existe un pays qui a des frontières à la fois avec l'Irak et le Pakistan.
  - (a)  $\exists c \ \text{Pays}(c) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Irak}) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Pakistan})$
  - (b)  $\exists c \ \text{Pays}(c) \Rightarrow [\text{Frontiere}(c, \text{Irak}) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Pakistan})]$
  - (c)  $[\exists c \ \text{Pays}(c)] \Rightarrow [\text{Frontiere}(c, \text{Irak}) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Pakistan})]$
  - (d)  $\exists c \ \text{Frontiere}(\text{Pays}(c), \text{Irak} \wedge \text{Pakistan})$
3. Tous les pays qui ont une frontière avec l'Equateur sont en Amérique du sud.
  - (a)  $\forall c \ \text{Pays}(c) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Equateur}) \Rightarrow \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud})$
  - (b)  $\forall c \ \text{Pays}(c) \Rightarrow [\text{Frontiere}(c, \text{Equateur}) \Rightarrow \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud})]$
  - (c)  $\forall c \ [\text{Pays}(c) \Rightarrow \text{Frontiere}(c, \text{Equateur})] \Rightarrow \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud})$
  - (d)  $\forall c \ \text{Pays}(c) \wedge \text{Frontiere}(c, \text{Equateur}) \wedge \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud})$
4. Aucune région d'Amérique du sud n'a de frontière avec une région d'Europe.
  - (a)  $\neg[\exists c, d \ \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud}) \wedge \text{En}(d, \text{Europe}) \wedge \text{Frontieres}(c, d)]$
  - (b)  $\forall c, d \ [\text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud}) \wedge \text{En}(d, \text{Europe})] \Rightarrow \neg \text{Frontieres}(c, d)$
  - (c)  $\neg \forall c \ \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud}) \Rightarrow \exists d \ \text{En}(d, \text{Europe}) \wedge \neg \text{Frontieres}(c, d)$
  - (d)  $\forall c \ \text{En}(c, \text{AmeriqueDuSud}) \Rightarrow \forall d \ \text{En}(d, \text{Europe}) \Rightarrow \neg \text{Frontieres}(c, d).$
5. Il n'existe pas deux pays adjacents ayant la même couleur sur une carte.

- (a)  $\forall x, y \neg Pays(x) \vee \neg Pays(y) \vee \neg Frontieres(x, y) \vee \neg (CouleurDeCarte(x) = CouleurDeCarte(y))$
- (b)  $\forall x, y (Pays(x) \wedge Pays(y) \wedge Frontieres(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \neg(CouleurDeCarte(x) = CouleurDeCarte(y))$
- (c)  $\forall x, y Pays(x) \wedge Pays(y) \wedge Frontieres(x, y) \wedge \neg(CouleurDeCarte(x) = CouleurDeCarte(y))$
- (d)  $\forall x, y (Pays(x) \wedge Pays(y) \wedge Frontieres(x, y)) \Rightarrow CouleurDeCarte(x) = CouleurDeCarte(y)$

**Exercice. 6 (Exercice de traduction)**

1. Traduisez en bon français (pas de  $x$ , pas de  $y$ ) la phrase suivante :  
 $\forall x, y, l \text{ ParleLangue}(x, l) \wedge \text{ParleLangue}(y, l) \Rightarrow \text{Comprend}(x, y) \wedge \text{Comprend}(y, x)$
2. Expliquez pourquoi cet énoncé est la conséquence de l'énoncé :  
 $\forall x, y, l \text{ ParleLangue}(x, l) \wedge \text{ParleLangue}(y, l) \Rightarrow \text{Comprend}(x, y)$
3. Traduisez en logique du premier ordre les énoncés ci-dessous. Définissez tous les prédicats, fonctions, constantes que vous utilisez :
  - (a) La compréhension engendre l'amitié
  - (b) L'amitié est transitive

**Exercice. 7** Ecrivez en logique du premier ordre les énoncés suivants :

1.  $x$  est un nombre pair
2.  $x$  est un nombre premier
3. Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers (Conjecture de Goldbach)
4. Il n'existe pas deux personnes qui ont le même numéro de sécurité sociale
5. John et Marie ont le même numéro de sécurité sociale
6. Le numéro de sécurité sociale de tout le monde comprend 13 chiffres
7. Récrivez les énoncés 4), 5) et 6) en utilisant la fonction NuméroSS ( $p$ ) qui désigne le numéro de sécurité sociale de  $p$

**Exercice. 8** Ecrivez les axiomes qui décrivent les prédicats *PetitEnfant*, *ArriereGrandParent*, *Ancetre*, *Frere*, *Soeur*, *Fille*, *Fils*, *CousinGermain*, *BeauFrere*, *BelleSoeur*, *Tante*, *Oncle*.

**Exercice. 9** Représentez les phrases suivantes en logique du premier ordre en utilisant un vocabulaire cohérent que vous définirez.

1. Certains étudiants ont choisi l'anglais au second semestre.
2. Tous les étudiants ont choisi l'anglais réussissent à l'examen.
3. Un seul étudiant a choisi le grec au second semestre.
4. La meilleure note obtenue en grec est toujours plus élevée que la meilleure note en anglais.
5. Toute personne qui souscrit une police d'assurance est intelligente.
6. Personne ne souscrit de police d'assurance coûteuse.
7. Il y a un agent qui vend des polices d'assurance uniquement aux personnes qui ne sont pas assurées.
8. Il y a un barbier qui rase tous les hommes dans la ville qui ne se rasent pas eux-mêmes.
9. Une personne née au Royaume-Uni, dont chacun des parents est un citoyen britannique ou un résident britannique, est citoyen britannique par la naissance

10. Une personne née à l'extérieur du Royaume-Uni, dont l'un des parents est un citoyen britannique de naissance, est citoyen britannique par filiation.
11. Les politiciens peuvent tromper une partie du peuple tout le temps, et ils peuvent tromper tout le peuple une partie du temps, mais ils ne peuvent pas tromper tout le monde tout le temps.
12. Tous les Grecs parlent la même langue