

Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

На правах рукописи
УДК _____

МЕДВЕДЕВ ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Выпускная квалификационная работа магистра

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Выпускная квалификаци-
онная
работа защищена
«__»_____20__ г.
Оценка _____
Секретарь
ГЭК _____

г.Москва 2024

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к выпускной квалификационной работе на тему:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Студент-дипломник: _____ /Медведев В.А./
(подпись)

Руководитель проекта: _____ /д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./
(подпись)

Рецензент: _____ /ассистент Кутуков А.А./
(подпись)

Зав. кафедрой №31: _____ /д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./
(подпись)

Реферат

Отчет n страниц, 1 часть., m рисунков, 1 таблица, k источника, p приложений.

Ключевые слова: обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера, псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных
Объектом исследования является уравнение в частных производных, описывающее распространение импульсов в оптоволокне.

Цель работы - построить оптические солитоны исследуемого уравнения, смоделировать процессы их распространения, взаимодействия с возмущениями и друг с другом, установить факт устойчивости найденных решений в численном смысле, исследовать влияние старших степеней нелинейности на решения классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Метод проведения работы: последовательное применение приёмов поиска частных решений уравнений в частных производных, численное исследование аналитических решений при помощи псевдоспектрального метода Фурье, математическое моделирование.

Результаты работы: найдены оптические солитоны исследуемого уравнения, определена область допустимых параметров математической модели для их существования. Представлена модификация псевдоспектрального метода Фурье для численного исследования найденных решений. Проанализировано влияние возмущений в начальных условиях на процесс распространения оптического импульса. Смоделирован процесс передачи импульса в условиях случайного шума. Установлен факт численной устойчивости найденных аналитически решений. Исследовано влияние старших степеней нелинейности на оптические солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера: при определённых параметрах математической модели начальный импульс распадается в устойчивый, совпадающий с аналитическим решением обобщённой модели. Проанализированы процессы столкновения солитонов в присутствии высших нелинейных членов в математической модели.

Область применения: проектирование оптоволоконных линий.

Экономическая эффективность или значимость работы: позволяет при

определённой выбранной математической модели, описывающей физический процесс распространения импульсов в оптоволокне, подобрать параметры для построения устойчивых импульсов, пригодных для передачи сигналов.

Оглавление

1	Введение	6
1.1	Роль солитонов в передаче сигналов	6
1.2	Текущая работа, её цели и задачи	8
2	Аналитический анализ	11
2.1	Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями	11
2.2	Модификация метода Фурье для моделирования про- цессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями	16
3	Численный анализ	18
3.1	Применение метода Фурье для моделирования процес- са распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями . .	18
3.2	Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях	20
3.3	Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны	21
3.4	Столкновения солитонов в присутствии высших сте- пеней нелинейности	25
4	Заключение	28

1 Введение

1.1 Роль солитонов в передаче сигналов

За последние пару десятилетий область телекоммуникаций претерпела существенную эволюцию благодаря впечатляющему прогрессу в разработке оптических волокон, оптических усилителей, передатчиков и приемников. В современной оптической системе связи линия передачи состоит из оптических волокон и усилителей, составляющих волновод [1]. Основная идея волновода состоит в том, чтобы направлять луч света, используя изменение показателя преломления в поперечном направлении, чтобы заставить свет проходить по четко определенному каналу. Зависимость показателя преломления от поперечного направления, направления, перпендикулярного тому, в котором распространяется волна, может быть непрерывной или дискретной. Но в любом из случаев показатель преломления максимален в канале, по которому требуется направлять свет.

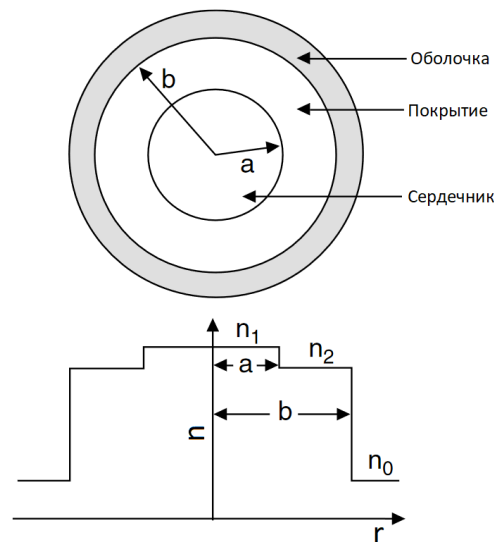


Рис. 1: Зависимость показателя преломления от радиуса поперёк оптического кабеля[2]

В 1973 году, Акира Хасегава и Фредерик Тапперт сформулировали условия существования световых оптических солитонов в одномодовых оптических волокнах и предположили возможность их использования при передаче сигналов.[3, 4]. В 1980 году возможность использования свето-

вых солитонов в одномодовых оптических волокнах была экспериментально подтверждена Молленауэром, Столеном и Гордоном [5, 6], что дало мощный толчок развитию нелинейной оптики [7, 8, 9, 10].

Хорошо известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое включает дисперсию групповой скорости и самомодуляцию фазы, является основным нелинейным уравнением, используемым для описания динамики импульсов. Классическое НУШ имеет следующий вид:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ - комплексная функция, $i^2 = -1$ и a - параметры модели. Это уравнение является параболическим, что обуславливает особенности применения численных и аналитических методов для его исследования. Соли-тоны НУШ имеют форму огибающей группы волн, что позволяет использовать их для описания групповых свойств волнового пакета.

В целях увеличения пропускной способности оптических волокон желательно использовать более короткие импульсы. Но при использовании коротковолновых импульсов возрастает влияние на процесс некоторых физических эффектов, таких как дисперсия высокого порядка [11, 12, 13, 14, 15], самофокусировка [16], и вынужденное комбинационное рассеяние [17, 18]. Для корректного описания поведения оптических импульсов в рамках данных эффектов следует использовать обобщённые нелинейные уравнения Шрёдингера высших порядков. Более того, для описания коротковолновых импульсов необходимо учитывать высшие некерровские нелинейности в математической модели [19, 20, 21, 22, 23]. Как следствие, различные обобщения НУШ обширно исследуются математиками по всему миру. В качестве примера стоит упомянуть работы [24, 25, 26, 27].

Учет всех перечисленных физических факторов существенно усложняет аналитическое исследование процессов, описываемых предлагаемыми математическими моделями. Поэтому с развитием вычислительных возможностей для исследований все чаще используются численные методы.

К примеру, НУШ, как классическое уравнение нелинейной оптики, было исследовано в работах [28, 29]. Эти работы подтвердили неустой-

чивость постоянных решений и показали, что неустойчивость не растёт неограниченно, как ожидалось в линейной теории. Также в этих работах выявлен тот факт, что решение периодически возвращается к исходным условиям. Это явление, известное как повторяемость, наблюдалось также в работах Ферми, Пасты и Улама. [30]. В дополнение к нелинейной оптике, НУШ находит применение в физике плазмы и теории невязкой жидкости.

Среди первых схем, использованных для численного анализа НУШ, упомянем конечно-разностный и псевдоспектральные методы [28, 31]. Среди более продвинутых работ, стоит упомянуть работы [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], где дискретизация пространства осуществляется в основном с помощью методов конечных разностей или конечных элементов, а дискретизация времени осуществляется с использованием явных методов с переменным шагом [32, 33], метода расщепления [34], модифицированной схемы Кранка-Николсона [35] и прочих способов. Из-за хорошо изученных свойств, НУШ подходит для валидации новых разрабатываемых численных методов.

1.2 Текущая работа, её цели и задачи

Несмотря на разнообразие предложенных математических моделей, вопрос о том, какая из них наиболее подходит для описания процессов распространения импульсов, остается открытым. В текущей работе исследовано одно из обобщённых уравнений - нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [39]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ - комплекснозначная функция, a , b_1 , b_2 и b_3 - параметры модели. Для случая $b_3 = 0$ исследование уравнения (2) представлено в книге [6].

Целями данной работы являются:

1. аналитическое нахождение точного решения представленного уравнения,

2. численное моделирование процессов распространения построенного импульса с целью установления факта его устойчивости,
3. анализ влияния высших степеней нелинейности в математической модели.

В работе решаются следующие задачи:

1. Построение аналитического решения исходного уравнения в виде уединённой волны с использованием метода прямых вычислений.
2. Определение области параметров модели, при которых построенное решение существует.
3. Модификация метода Фурье для численного решения задачи распространения оптических импульсов, описываемых математической моделью.
4. С целью установления факта устойчивости построенных решений - численное моделирование процессов:
 - (а) распространения построенной уединённой волны,
 - (b) распространения построенных солитонов при наличии возмущений в начальных условиях,
 - (с) распространения построенных солитонов при наличии возмущений в уравнении,
 - (d) взаимодействия построенных солитонов друг с другом в присутствии возмущений в математической модели.

Результаты работы представлены в следующем порядке. В разделе 2.1 построено аналитическое решение для уравнения (2) в форме уединённой волны с использованием метода неявных функций и метода простейших уравнений [40]. Проиллюстрирована область значений параметров модели, при которых построенное решение существует. В разделе 2.2 описан модифицированный метод Фурье для моделирования процессов распространения оптических импульсов, описываемых уравнением (2). Представлена

блок-схема соответствующего программного кода для численного анализа. В разделе 3.1 представлено применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединенной волны, описываемого уравнением (2). В разделе 3.2 смоделировано взаимодействие солитонного импульса с возмущением в начальном условии. В разделе также исследован процесс распространения импульса в условиях случайного шума в начальном условии и обсуждён факт устойчивости построенного оптического солитона. В разделе 3.3 исследовано влияние более высоких степеней нелинейности на процесс распространения уединенной волны описываемой НУШ. В разделе 3.4 смоделированы процессы столкновения солитонов уравнения НУШ при наличии членов с более высокой нелинейностью при различных параметрах модели.

Метод исследования - аналитический анализ, численный анализ.

2 Аналитический анализ

2.1 Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями

С целью упростить уравнение (2), используем переход к безразмерным величинам в следующем виде:

$$\begin{cases} u(x, t) = c_u u'(x, t), \\ t = c_t t', \\ x = c_x x', \end{cases} \quad (3)$$

При этом уравнение (2) запишется следующим образом:

$$i \frac{c_u}{c_t} u'_{t'} + \frac{a c_u}{c_x^2} u'_{x'x'} + b_1 c_u^3 |u'|^2 u' \left(1 + c_u^2 \frac{b_2}{b_1} |u'|^2 + c_u^4 \frac{b_3}{b_1} |u'|^4 \right) = 0. \quad (4)$$

Принимая

$$\begin{cases} c_u = b_1^{-1/3}, \\ c_t = b_1^{-1/3}, \\ c_x = \sqrt{a} b_1^{-1/6}, \end{cases} \quad (5)$$

Для уравнения (4) получим:

$$i u'_{t'} + u'_{x'x'} + |u'|^2 u' (1 + \varepsilon_2 |u'|^2 + \varepsilon_3 |u'|^4) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = b_1^{-4/3} b_2, \\ \varepsilon_3 = b_1^{-7/3} b_3. \end{cases} \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - c_0 t', \quad k, \omega, c_0, \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где $y(z)$ - действительнoзначная функция. Подставляя (8) в уравнение (6), получим переопределённую систему уравнений для $y(z)$ в виде

$$y_{zz} + \varepsilon_3 y^7 + \varepsilon_2 y^5 + y^3 + (\omega - k^2) y = 0, \quad (9)$$

$$(2k - c_0)y_z = 0. \quad (10)$$

уравнение (10) выполняется тождественно при $c_0 = 2k$. Уравнение (9) имеет первый интеграл:

$$y_z^2 + \frac{\varepsilon_3 y^8}{4} + \frac{\varepsilon_2 y^6}{3} + \frac{y^4}{2} + (\omega - k^2) y^2 = c_1. \quad (11)$$

Переходя к новой переменной $y(z) = \sqrt{V(z)}$, перепишем уравнение (11):

$$\frac{1}{4}V_z^2 + \frac{\varepsilon_3}{4}V^5 + \frac{\varepsilon_2}{3}V^4 + \frac{1}{2}V^3 + (\omega - k^2)V^2 - c_1V = 0. \quad (12)$$

Используя метод неявных функций, будем искать решения уравнения (12) в виде $V(z) = F(\xi)$, $\xi = \psi(z)$, полагая $c_1 = 0$ и

$$\xi_z = \pm F(\xi), \quad (13)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$F_\xi^2 + \varepsilon_3 F^3 + \frac{4}{3}\varepsilon_2 F^2 + 2F + 4(\omega - k^2) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) \right]^2 + \varepsilon_3 \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right)^3 + \frac{2(27\varepsilon_3 - 8\varepsilon_2^2)}{27\varepsilon_3} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) + \frac{128\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^2} - \frac{8\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} - 4k^2 + 4\omega = 0. \quad (15)$$

Вводя следующие обозначения для постоянных величин:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{64\varepsilon_2^2}{27\varepsilon_3^2} - \frac{8}{\varepsilon_3}, \\ g_3 &= \frac{512\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^3} - \frac{32\varepsilon_2}{9\varepsilon_3^2} - \frac{16k^2}{\varepsilon_3} + \frac{16\omega}{\varepsilon_3}, \\ \psi &= -F - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}, \end{aligned} \quad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде:

$$\left(\left(2\varepsilon_3^{-1/2} \right) \psi_\xi \right)^2 = 4\psi^3 - g_2\psi - g_3. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (17) может быть выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса, что позволяет записать:

$$F(\xi) = -\wp \left(\left[\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_3} (\xi - \xi_0) \right]; g_2; g_3 \right) - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}. \quad (18)$$

Учитывая условие (13), возможно выразить $\xi(z)$ в квадратурах:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{d\xi}{F(\xi)} = \mp \int \frac{d\xi}{\wp\left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3}(\xi - \xi_0)\right]; g_2; g_3\right) + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}}, \quad (19)$$

однако, в общем случае, такой интеграл не может быть посчитан аналитически.

Стоит заметить, что для специального вида функции $F(\xi)$ интеграл (19) может быть посчитан. Используя метод простейших уравнений [40], найдём решения (14) в виде:

$$F(\xi) = M_0 + M_1 Q(\xi) + M_2 Q^2(\xi), \quad (20)$$

где $Q(\xi)$ - решение уравнения Риккати:

$$Q_\xi = \mu(Q^2 - Q), \quad (21)$$

имеющее следующий вид:

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))}. \quad (22)$$

Используя (21), и подставляя выражение (20) в уравнение (14), получим полином относительно $Q(\xi)$, равный нулю:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_3 M_2^3 + 4\mu^2 M_2^2) Q(\xi)^6 + (4\mu^2 M_1 M_2 - 8\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1 M_2^2) Q(\xi)^5 + \\ & + \left(\frac{4}{3} \varepsilon_2 M_2^2 - 8\mu^2 M_1 M_2 + \mu^2 M_1^2 + 4\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1^2 M_2 \right) Q(\xi)^4 + \\ & + \left(4\mu^2 M_1 M_2 + \varepsilon_3 M_1^3 - 2\mu^2 M_1^2 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_1 M_2 + 6\varepsilon_3 M_0 M_1 M_2 \right) Q(\xi)^3 + \\ & + \left(2M_2 + \frac{4\varepsilon_2 M_1^2}{3} + \mu^2 M_1^2 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_1^2 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_2 \right) Q(\xi)^2 + \\ & + \left(2M_1 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_1 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_1 \right) Q(\xi) + \\ & + \left(\frac{4}{3} \varepsilon_2 M_0^2 + 2M_0 + \varepsilon_3 M_0^3 - 4k^2 + 4\omega \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $Q(\xi) \neq 0$, коэффициенты полинома должны быть тождественно равны нулю. Это приводит к следующим ограничениям на пара-

метры модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega - k^2 = -\frac{1}{12} \frac{M_0 M_1}{M_1 + 6M_0} - \frac{1}{6} M_0, \\ \mu = \pm \sqrt{\frac{M_1}{M_0(M_1 + 6M_0)}}, \\ M_2 = -M_1, \\ \varepsilon_2 = \frac{3}{4M_0} \left(\frac{M_1}{M_1 + 6M_0} - 2 \right), \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{M_0(M_1 + 6M_0)}, \end{array} \right. \quad (24)$$

где M_0 и M_1 - произвольные константы. Уравнение (20) теперь записывается, как:

$$F(\xi) = M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2}. \quad (25)$$

Для представленного вида $F(\xi)$ следующее выражение может быть проинтегрировано:

$$\frac{d\xi}{F(\xi)} = dz, \quad (26)$$

тогда зависимость ξ и z описывается следующим образом:

$$z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + \frac{2M_1}{\mu M_0 \sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right). \quad (27)$$

Теперь решение уравнения (11) при $c_1 = 0$ запишется в виде:

$$y(\xi) = \left[M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

где $\xi(z)$ определяется неявно из (27), и выполнены ограничения на параметры модели (24).

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - 2kt', \quad (29)$$

где k и θ_0 - произвольные постоянные.

Принимая во внимание, что $z, \xi(z), y(\xi) \in \mathbb{R}$, из выражений (27) и (28) следуют дополнительные ограничения на параметры M_0 и M_1 для существования найденного решения:

$$\left| \frac{2e^{\mu(\xi-\xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right| < 1, \quad (30)$$

$$M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi-\xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi-\xi_0)})^2} \geq 0. \quad (31)$$

Данные ограничения удовлетворяются на ограниченном промежутке по переменной ξ из-за присутствия экспоненты в (30), что накладывает дополнительные ограничения при построении решения.

Условия (30) и (31) с ограничениями (20) удовлетворяются в следующей области параметров M_1 и M_0 (Рис. 2):

$$\begin{cases} M_0 < 0, \\ -4M_0 < M_1 < -6M_0. \end{cases} \quad (32)$$

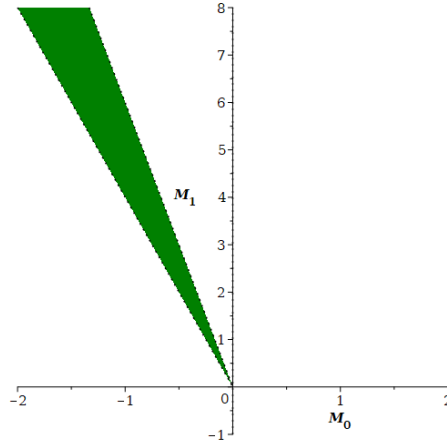


Рис. 2: Допустимые значения M_1 и M_0 .

Волновой профиль (29) при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$. изображён на Рис. 3.

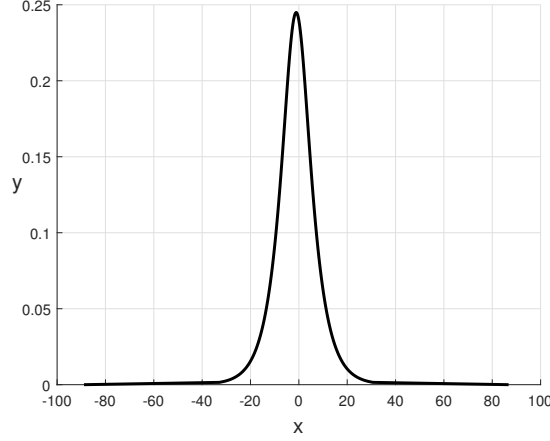


Рис. 3: Профиль уединённой волны при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$.

2.2 Модификация метода Фурье для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Семейство обобщённых уравнений Шрёдингера может быть записано в виде:

$$u_t = i\mathcal{L}[u] + i\mathcal{N}[u]u. \quad (33)$$

К примеру, при $\mathcal{L}[u] \equiv au_{xx}$, $\mathcal{N}[u] \equiv b_1|u|^2$ мы получаем всем известное нелинейное уравнение Шрёдингера (1).

Для применения метода Фурье, объявим периодические граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u(-\frac{L}{2}, t) = u(\frac{L}{2}, t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-\frac{L}{2}, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{L}{2}, t). \end{cases} \quad (34)$$

Предполагая $x \in [-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L]$, $t \in [0, T]$, разделим интервал по переменной x на N одинаковых частей с шагом

$$h = \frac{L}{N}. \quad (35)$$

Узлы координатной сетки определяются, как

$$x_j = jh, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (36)$$

Пусть \mathbf{U}^m - сеточная аппроксимация решения на m -ом временном слое, и \mathbf{V}^m - промежуточное решение. В таком случае, начальные условия задаются в \mathbf{U}^0 . В общем виде, схема расщепления может быть записана следующим образом [1]:

$$\mathbf{U}^{m+1} = e^{i\tau\mathcal{L}}\mathbf{V}^m, \quad (37)$$

где

$$\mathbf{V}^m = e^{i\tau\mathcal{N}[\mathbf{U}^m]}\mathbf{U}^m. \quad (38)$$

Применяя метод Фурье, используем дискретное преобразование Фурье для сеточной функции \mathbf{V}^m для определения решения на следующем временном слое:

$$\hat{\mathbf{V}}^m = \frac{h}{L} \exp(-i\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^T) \cdot \mathbf{V}^m, \quad (39)$$

где $\hat{\mathbf{V}}^m$ - вектор коэффициентов Фурье, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{-N/2}, \dots, \mu_{N/2-1})^T$ - вектор частот преобразования $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$, $\mathbf{x} = (x_{-N/2}, \dots, x_{N/2-1})^T$ - координаты точек сетки.

Далее воспользуемся соотношением между $\hat{\mathbf{U}}^{m+1}$ и $\hat{\mathbf{V}}^m$,

$$\hat{\mathbf{U}}^{m+1} = \exp(-i(\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\mu})\tau) \circ \hat{\mathbf{V}}^m, \quad (40)$$

которое вытекает из уравнения (37) после подстановки вместо \mathbf{U}^{m+1} и \mathbf{V}^m соответствующих рядов Фурье. Под $x \circ y$ понимается произведение по Адамару.

Решение на следующем временном слое восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье, используя (40):

$$\mathbf{U}^{m+1} = \exp(i\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^T) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{m+1}. \quad (41)$$

Модифицируя метод применительно к уравнению (6), запишем операторы $\mathcal{L}[u]$ и $\mathcal{N}[u]$ в виде:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] \equiv u_{xx}, \\ \mathcal{N}[u] \equiv |u|^2 + \varepsilon_2|u|^4 + \varepsilon_3|u|^6. \end{cases} \quad (42)$$

Упрощённая блок-схема программного кода для численного решения проблемы распространения оптических импульсов при периодических граничных условиях представлена на Рис. 4.

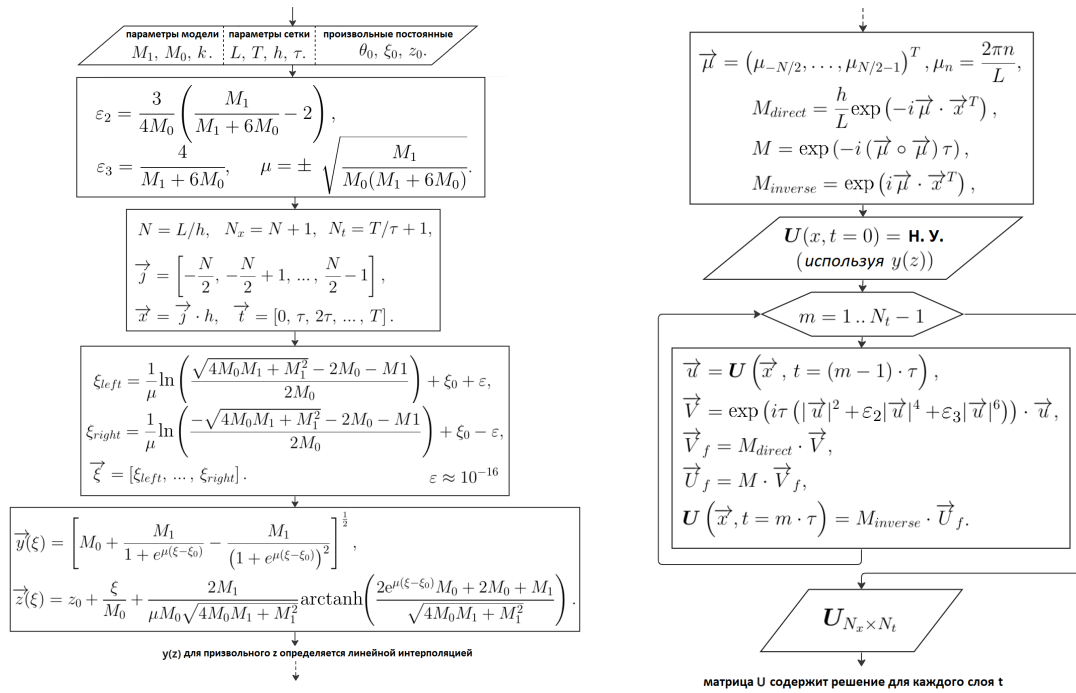
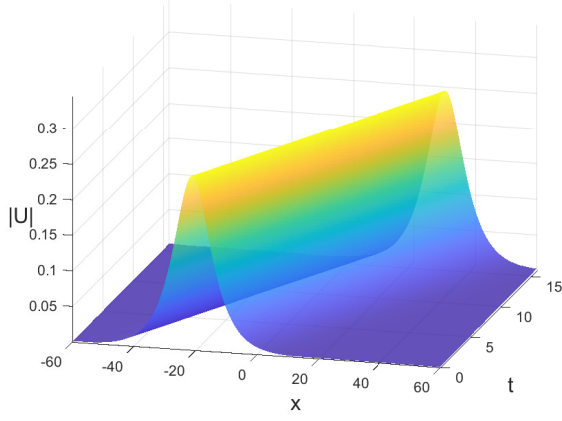


Рис. 4: Блок-схема программы, имоделирующей процессы распространения импульсов с помощью метода Фурье.

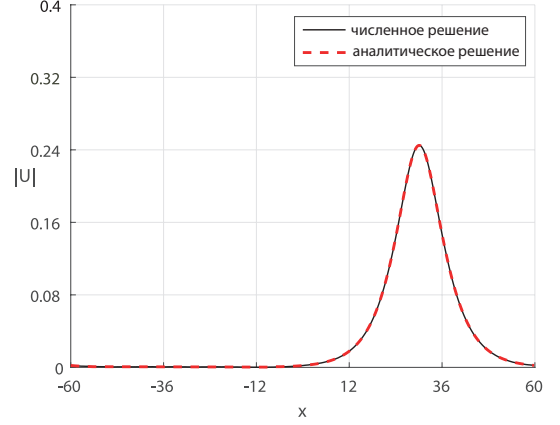
3 Численный анализ

3.1 Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Рассмотрим уравнение (6). Для подтверждения корректности аналитических рассуждений и проверки полученного результата, смоделируем распространение уединённой волны (29) при помощи описанной схемы. Произведём расчёт для определённых параметров M_0 и M_1 , удовлетворяющих условиям (32). Параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ и μ определяются формулами (24). Результат моделирования представлен на Рис.5. Аналитический и численно полученный профили в момент $t = 16$ изображены на Рис. 5а.



(a) Модуль численного решения

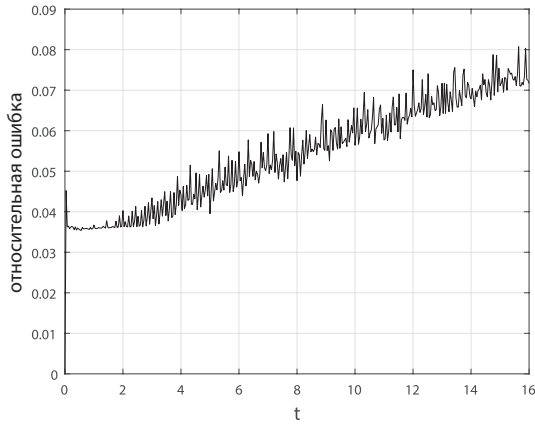


(b) Модули решений при $t=16$

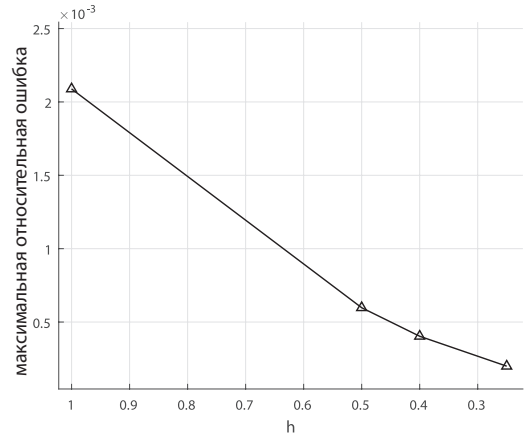
Рис. 5: Распространение уединённой волны (29)

при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$.

Относительная погрешность расчета при заданных параметрах не превышает 0.08.%. Зависимость относительной погрешности от времени проиллюстрирована на Рис. 6а.



(a) Относительная ошибка от времени при $h = 0.2$, $\tau = 0.04$



(b) Максимальная относительная ошибка от шага сетки h

Рис. 6: Численные результаты при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$.

Поскольку сходимость сетки достигнута (Рис. 6b), мы утверждаем, что аналитические расчеты верны. Следовательно, аналитическое реше-

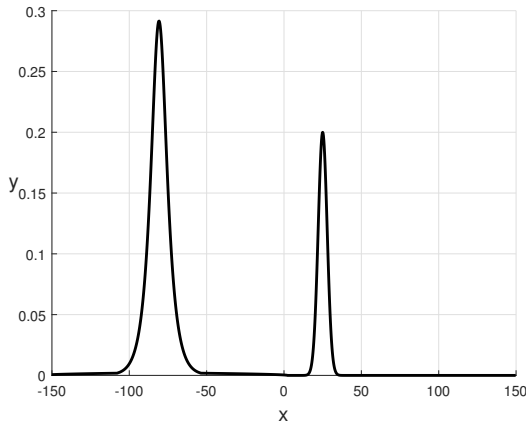
ние, построенное в разделе 2.1, описывает устойчивый солитон, который потенциально может быть использован для передачи сигналов.

3.2 Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях

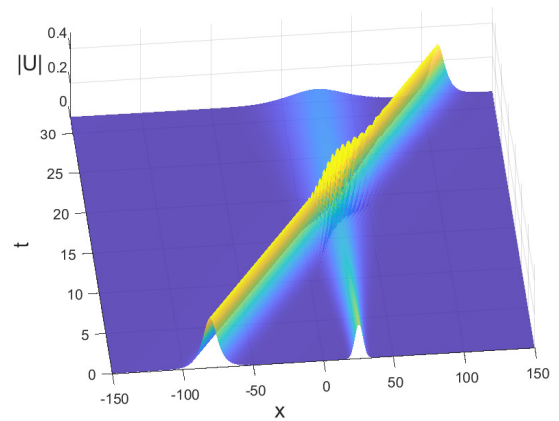
Проведём моделирование распространения импульса при возмущении в начальных условиях. Внесём в начальное условие, соответствующее решению (29) уравнения (6) возмущение следующим образом:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + Ae^{-\nu(x-x_0)^2}. \quad (43)$$

Соответствующие численные результаты изображены на Рис. 7.



(a) Модуль начального условия (43)



(b) Модуль численного решения

Рис. 7: Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.625$, $A = 0.2$, $\nu = 0.06$, $x_0 = 25$.

Проведённое моделирование позволяет сделать вывод, что солитон, заданный рассмотренными параметрами $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, взаимодействует с заданным возмущением, не распадаясь и не теряя способности к распространению. Профиль пульса восстанавливается после взаимодействия.

Также установлено, что солитон (6) устойчив при распространении в

среде со случайным шумом следующего вида:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A \cdot rand(x). \quad (44)$$

Результаты моделирования проиллюстрированы на Рис. 8.

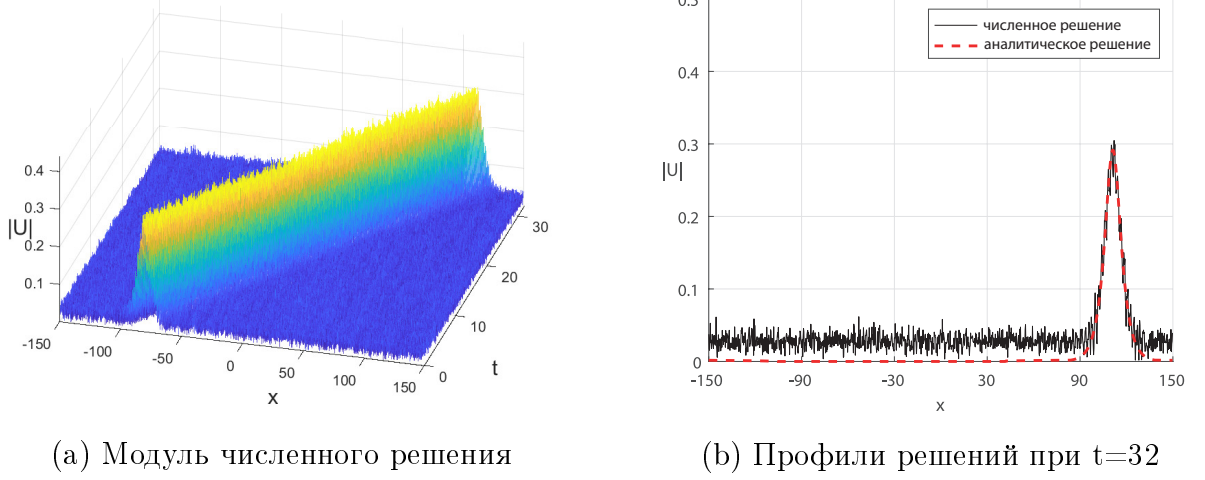


Рис. 8: Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $A = 0.05$.

Моделирования, представленные в данном разделе, подтверждают стабильность солитонов, полученных в разделе 2.1.

3.3 Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны

Во многих физических приложениях НУШ обобщается путём введения некоторых возмущающих членов. Однако, поскольку реальные физические процессы могут протекать по более сложным законам, не всегда возможно заранее предугадать и учесть все необходимые уточняющие члены. В этом разделе мы исследуем влияние дополнительных нелинейных членов на решения НУШ. При $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, уравнение (6) записывается следующим образом:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (45)$$

Это хорошо известное уравнение НУШ интегрируемо. Его решение вида уединенной волны найдено в работе [39] и имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-c_0t-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}} + e^{(x-c_0t-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (46)$$

где $c_0 = 2k$ и k, ω, z_0, θ_0 - произвольные константы. Начальное условие, относящееся к решению (46) представляется следующим образом:

$$u(x, 0) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}} + e^{(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}}} \cdot e^{i(kx-\theta_0)} \quad (47)$$

При $\varepsilon_3 = 0$, решение уравнения (6) было также найдено в следующем виде:

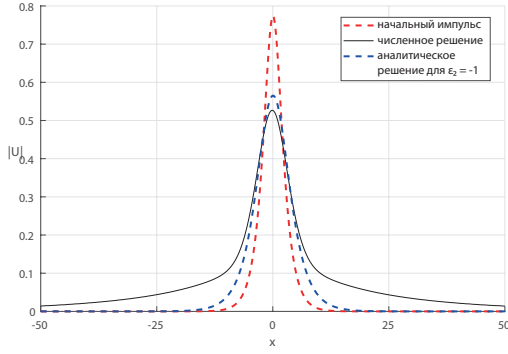
$$u(x, t) = \left(\frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}}{1 + 4e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)} + (4 + 4\mu\nu)e^{2\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (48)$$

где $\mu = 4(\omega - k^2)$, $\nu = \frac{4\varepsilon_2}{3}$ и k, ω, z_0, θ_0 - произвольные константы. Заметим, что при $\varepsilon_2 = 0$ решение (48) совпадает с решением (46).

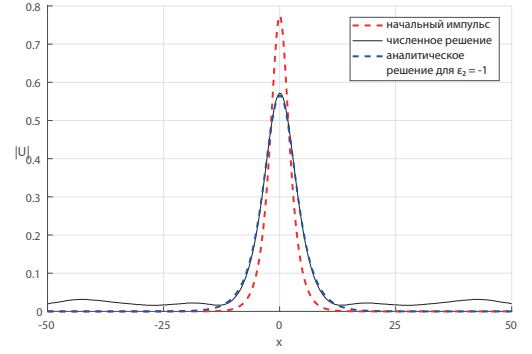
Исследуем, как уединенная волна (47) подвержена влиянию нелинейных членов высших порядков в уравнении модели. Рассмотрим физический процесс, описываемый уравнением (6) и предположим, что параметры ε_2 и ε_3 приняты равными нулю при построении начального условия.

В отсутствие высших нелинейных членов при $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$ уединенная волна (46) является точным решением уравнения (6). Численное решение для начального условия (47) совпадает с аналитическим.

Когда в модель вмешивается нелинейный член при $\varepsilon_2 \neq 0$, начальный импульс начинает затухать и распадаться. Распад сопровождается солитонными колебаниями и излучением энергии. Обнаружено, что начальный импульс (47), колеблясь и излучая энергию, переходит в устойчивый солитон, совпадающий с аналитическим решением (48) для обобщённой модели. Результат моделирования проиллюстрирован на Рис. 9 и 10.



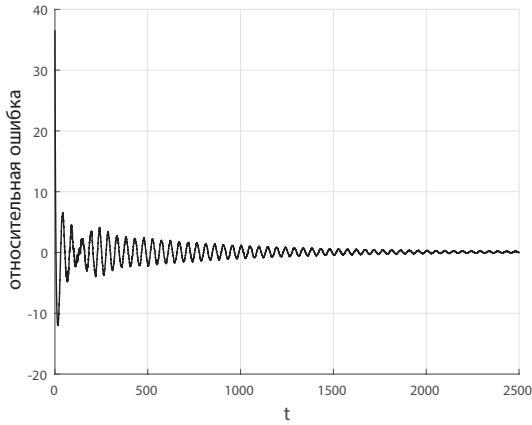
(a) Профиль решения при $t=25$



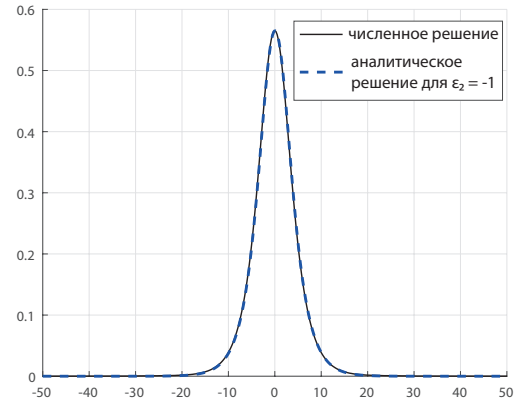
(b) Профиль решения при $t=200$

Рис. 9: Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 200$, $T = 200$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.2$, $k = 0.707$.

Относительная ошибка между аналитическим решением (48) и полученным численным решением от времени представлена на Рис. 10а.



(a) Относительная ошибка от времени

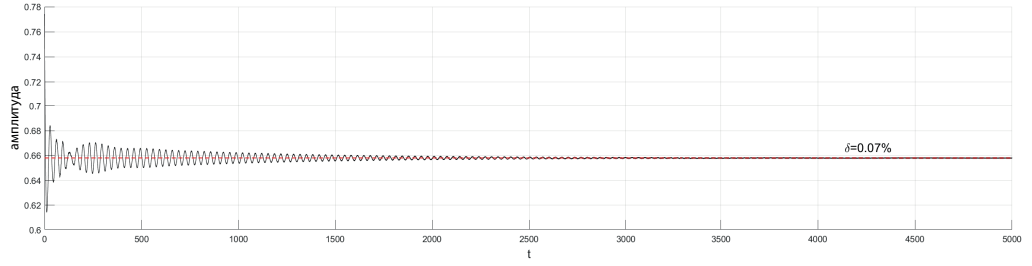


(b) Профиль решения при $t=2500$

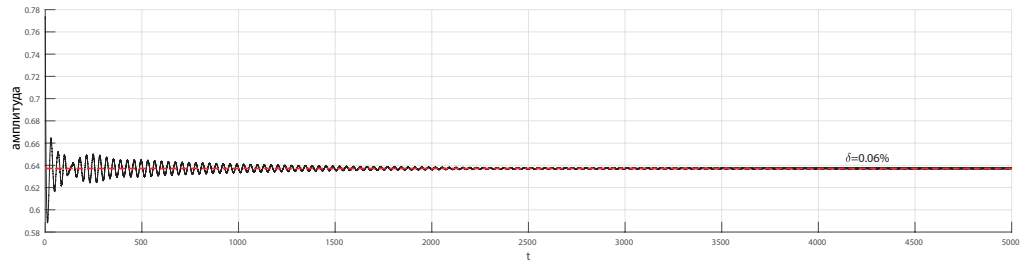
Рис. 10: Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 200$, $T = 200$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.2$, $k = 0.707$.

Рассмотрим добавление в модель нелинейного члена седьмой степени при $\varepsilon_3 \neq 0$. При этом колебательное поведение импульса сохраняется. Установлено, что знак ε_3 влияет на скорость затухания колебаний. При $\varepsilon_3 < 0$ затухание более интенсивное и амплитуда стабильного импульса уменьшается. При $\varepsilon_3 > 0$ колебания затухают более длительное время, а амплитуда полученного устойчивого импульса возрастает относительно исходного. За-

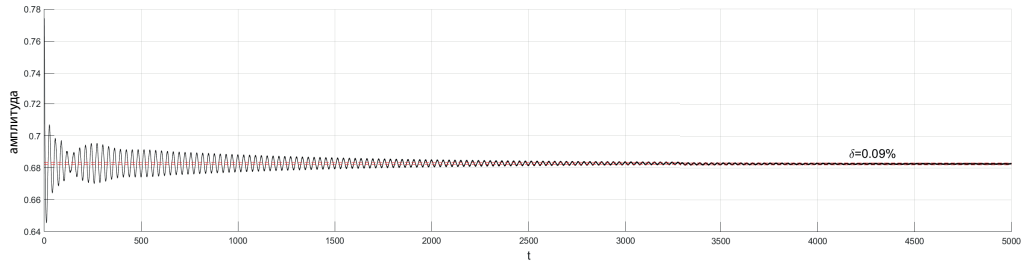
висимости амплитуды импульса от времени в зависимости от параметров возмущений проиллюстрированы на Рис. 11. Параметр δ — относительная амплитуда колебаний в конце временного промежутка моделирования.



(a) $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = 0$



(b) $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = -0.25$



(c) $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = 0.25$

Рис. 11: Зависимость амплитуды импульса (47) в присутствии дополнительных нелинейностей. $L = 200, T = 5000, h = 0.25, \tau = 0.0625, \omega = 0.2, k = 0.707$.

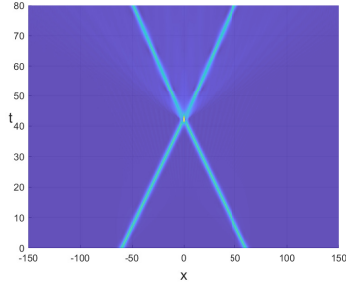
Мы заключаем, что уединенные волны НУШ при распространении в среде с высшими нелинейными членами при определённых параметрах преобразуются в устойчивые солитоны обобщенной неинтегрируемой модели. Этот переход сопровождается излучением энергии и солитонными колебаниями. Обнаружено, что добавление нелинейного члена 7-й степени влияет на скорость превращения в устойчивый солитон. Знак ε_3 влияет на длительность колебаний и амплитуду устойчивого импульса.

3.4 Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности

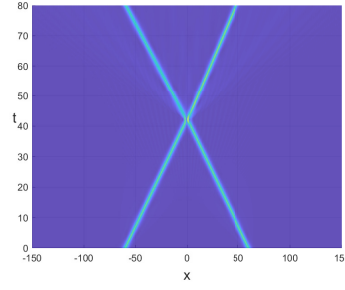
Известно, что решения интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера взаимодействуют упруго, т.е. без обмена импульсом и энергией. При нарушении интегрируемости системы внешними возмущениями солитонные столкновения становятся неупругими. В этом разделе мы исследуем столкновения солитонов НУШ в среде, описываемой возмущённым уравнением (6).

Рассмотрим столкновения двух солитонов вида (47) с заданными параметрами $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, z_{0,1}, z_{0,2}, \theta_{0,1}, \theta_{0,2}$. Значения параметров ε_2 и ε_3 влияют на интенсивность обмена импульсом и энергией. Обнаружено, что итоговый характер взаимодействия солитонов зависит от разности фаз в момент столкновения $\Delta\theta = \theta_{0,1} - \theta_{0,2}$.

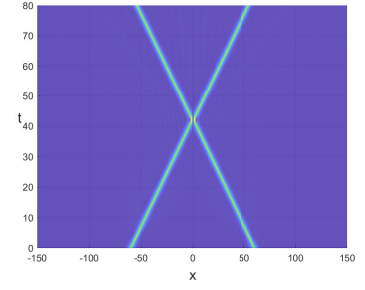
Результаты моделирования для $k_1 = -k_2, \omega_1 = \omega_2, z_{0,1} = -z_{0,2}, \theta_{0,1} = \theta_{0,2} + \Delta\theta$ проиллюстрированы на Рис. 12 и Рис. 13.



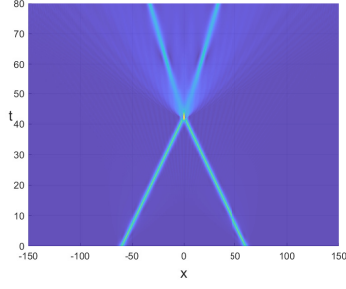
(a) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



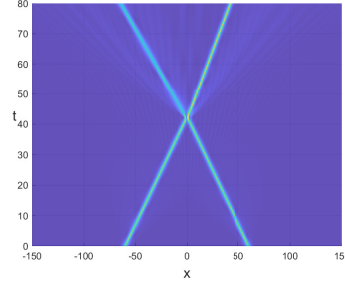
(b) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



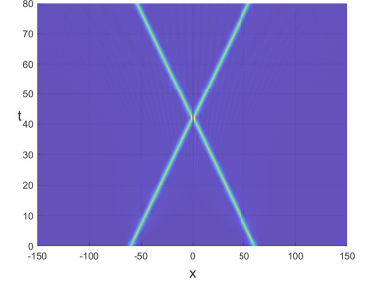
(c) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



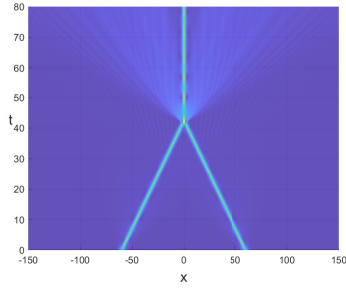
(d) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



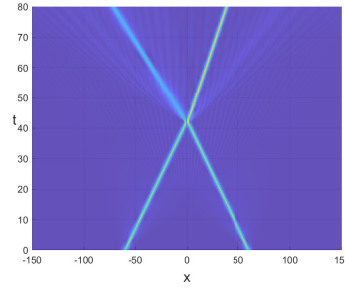
(e) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



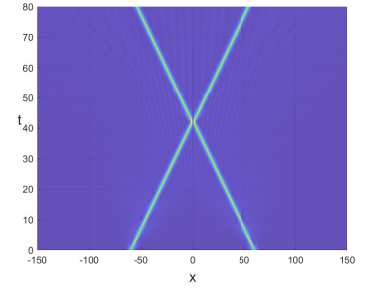
(f) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



(g) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

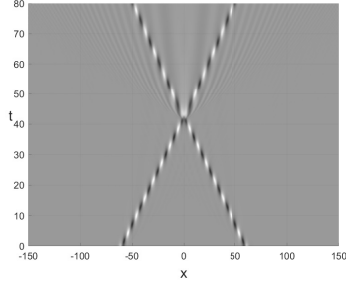


(h) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

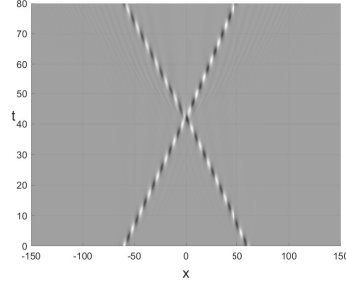


(i) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

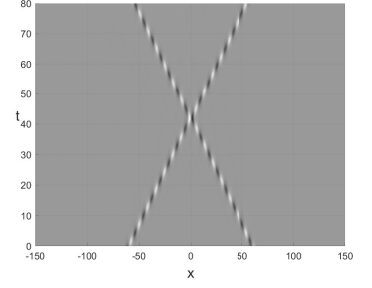
Рис. 12: Модуль численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.



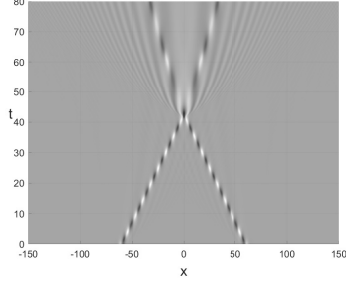
(a) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



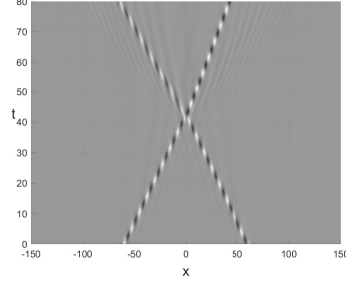
(b) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



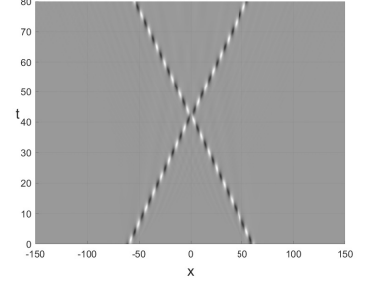
(c) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



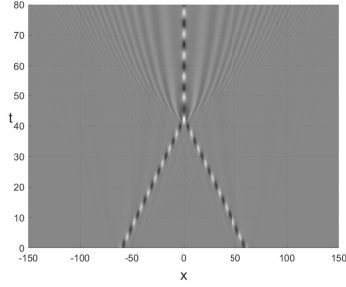
(d) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



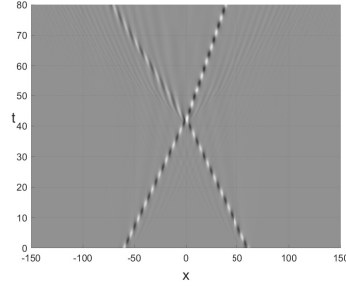
(e) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



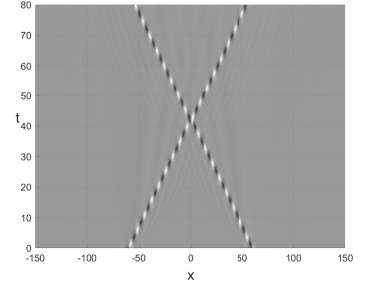
(f) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



(g) $\Delta\theta = 0$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$



(h) $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$



(i) $\Delta\theta = \pi$,
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

Рис. 13: Действительная часть численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Результаты моделирования позволяют заключить, что столкновения солитонов НУШ в рамках математической модели, включающей нелинейные члены высшего порядка в зависимости от разности фаз в момент столкновения быть существенно неупругими. Вблизи $\Delta\theta = \pi$ солитоны взаимодействуют наименее интенсивно. Когда разность фаз находится в окрестности нуля, происходит значительное энерговыделение. В этом случае существуют критические параметры возмущения, при которых два солитона сливаются в один стационарный. При параметре $\Delta\theta \in (0, \pi)$ взаимодействие солитонов происходит с обменом энергией и импульсом. Поми-

мо разности фаз, на определенный тип взаимодействия влияют значения параметров возмущения ε_2 и ε_3 . Чем больше модуль коэффициента при соответствующей степени нелинейности, тем более выражен неупругий характер взаимодействия.

4 Заключение

В настоящей работе рассмотрено численное моделирование процессов распространения импульсов в нелинейной оптической среде с периодическими граничными условиями, описываемой обобщённым уравнением Шрёдингера (2) с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Получено аналитическое решение в виде уединенной волны (29) и условия ее существования. Представлена модификация метода Фурье для численного решения поставленной задачи. С численной точки зрения исследован процесс распространения аналитически полученного солитонного решения обобщённой модели. Доказана справедливость аналитических расчетов. Проведено моделирование взаимодействия оптического солитона уравнения (2) с возмущением в начальных данных. Смоделировано распространение оптического импульса в среде со случайным шумом. Проанализировано влияние высших степеней нелинейности в математической модели на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Смоделированы процессы столкновения солитонов в условиях наличия высших нелинейных членов.

Следующие результаты получены в результате исследования:

1. Уединённые волны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней распространяются устойчиво.
2. Оптические солитоны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней не распадаются после взаимодействия с возмущениями в начальных данных или в условиях случайного шума.
3. При распространении в оптической среде, описываемой математиче-

ской моделью с нелинейными членами более высокого порядка солитоны НУШ преобразуются в солитоны, удовлетворяющие обобщённому уравнению.

4. В условиях наличия нелинейных членов высшего порядка столкновения солитонов НУШ происходят значительно неупруго. При определённых параметрах возможно образование стоячей волны.

Литература

- [1] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23:485–507, 6 1986.
- [2] N.A. Kudryashov. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 371, 4 2020.
- [3] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:142–144, 8 1973.
- [4] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:171–172, 8 1973.
- [5] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [6] Yuri Kivshar and Govind Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, 2 2003.
- [7] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [8] Igor S. Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74:99–143, Feb 2002.

- [9] M Ablowitz and H Sigur. *Solitary Waves and the Inverse Problem Method [Russian translation]*. Mir, Moscow, 1982.
- [10] Yuri Kivshar. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS*, 61:763–915, 2 1989.
- [11] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Ali Saleh Alshomrani. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by F-expansion. *Optik*, 187:258–271, 6 2019.
- [12] Nikolay A. Kudryashov. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik*, 186:339–349, 6 2019.
- [13] Hamood Ur Rehman, Naeem Ullah, and M.A. Imran. Highly dispersive optical solitons using Kudryashov’s method. *Optik*, 199:163349, 12 2019.
- [14] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163226, 12 2019.
- [15] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by Jacobi’s elliptic function expansion. *Optik*, 189:109–120, 7 2019.
- [16] Ivan M. Uzunov, Todor N. Arabadzhiev, and Svetoslav G. Nikolov. Self-steepening and intrapulse Raman scattering in the presence of nonlinear gain and its saturation. *Optik*, 271:170137, 2022.
- [17] Chong Wang, Ying Wang, Shenghan Wang, Chenglin Sun, and Zhiwei Men. Cascaded amplification via three-beam double stimulated Raman scattering in benzene. *Journal of Molecular Liquids*, 368:120667, 2022.
- [18] E.M. Gromov and B.A. Malomed. Damped solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial stimulated Raman scattering and decreasing dispersion. *Optics Communications*, 320:88–93, 2014.

- [19] Nikolay A. Kudryashov. On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation. *Optik*, 224:165500, 12 2020.
- [20] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163322, 12 2019.
- [21] Nikolay A. Kudryashov. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 192:162964, 9 2019.
- [22] Nikolay A. Kudryashov. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 194:163060, 10 2019.
- [23] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function. *Optik*, 186:288–292, 6 2019.
- [24] Nikolay A. Kudryashov and Dariya V. Safonova. Painleve analysis and traveling wave solutions of the sixth order differential equation with non-local nonlinearity. *Optik*, 244:167586, 10 2021.
- [25] Nikolay A. Kudryashov. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model. *Optik*, 186:22–27, 6 2019.
- [26] AI Maimistov, AM Basharov, AI Maimistov, and AM Basharov. Optical solitons in fibers. *Nonlinear Optical Waves*, pages 303–435, 1999.
- [27] A.T. Filippov. *Many-sided Soliton*. Nauka, Moscow, 1990.
- [28] Bruce M Lake, Henry C Yuen, Harald Rungaldier, and Warren E Ferguson. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *Journal of Fluid Mechanics*, 83:49–74, 1977.
- [29] Henry C. Yuen and Warren E. Ferguson. Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. *Physics of Fluids*, 21:1275, 1978.

- [30] E. Fermi, P Pasta, S Ulam, and M Tsingou. Studies of nonlinear problems I. Los Alamos National Laboratory (LANL), 5 1955.
- [31] Ronald H Hardin and F. D. Tappert. Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *Siam Review*, 15:423, 1973.
- [32] J.M Sanz-Serna. An explicit finite-difference scheme with exact conservation properties. *Journal of Computational Physics*, 47:199–210, 8 1982.
- [33] J M Sanz-Serna and V S Manoranjan. A method for the integration in time of certain partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 52:273–289, 1983.
- [34] M Delfour, M Fortin, and G Payr. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, 44:277–288, 12 1981.
- [35] D.F. Griffiths, A.R. Mitchell, and J.Li. Morris. A numerical study of the nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:177–215, 9 1984.
- [36] J. M. Sanz-Serna. Methods for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics of Computation*, 43:21–27, 1984.
- [37] A Mitchell and J Morris. A self adaptive difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *Arab Gulf Journal of Scientific Research*, pages 461–472, 1983.
- [38] Hongyu Qin, Fengyan Wu, and Deng Ding. A linearized compact ADI numerical method for the two-dimensional nonlinear delayed Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 412:126580, 2022.
- [39] Nikolay A. Kudryashov. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. *Optik*, 261:169163, 7 2022.

- [40] Nikolai A. Kudryashov. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24:1217–1231, 6 2005.