

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

На правах рукописи  
УДК \_\_\_\_\_

МЕДВЕДЕВ ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ  
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Выпускная квалификационная работа магистра

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Выпускная квалификаци-  
онная  
работа защищена  
«\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.  
Оценка\_\_\_\_\_

Секретарь  
ГЭК\_\_\_\_\_

г.Москва 2024

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к выпускной квалификационной работе на тему:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ  
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

---

Студент-дипломник: \_\_\_\_\_ /Медведев В.А./  
(подпись)

Руководитель проекта: \_\_\_\_\_ /д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./  
(подпись)

Рецензент: \_\_\_\_\_ /ассистент Кутуков А.А./  
(подпись)

Зав. кафедрой №31: \_\_\_\_\_ /д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./  
(подпись)

# Реферат

Отчет n страниц, 1 часть., m рисунков, 1 таблица, k источника, p приложений.

Ключевые слова: обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера, псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных  
Объектом исследования является уравнение в частных производных, описывающее распространение импульсов в оптоволокне.

Цель работы - построить оптические солитоны исследуемого уравнения, смоделировать процессы их распространения, взаимодействия с возмущениями и друг с другом, установить факт устойчивости найденных решений в численном смысле, исследовать влияние старших степеней нелинейности на решения классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Метод проведения работы: последовательное применение приёмов поиска частных решений уравнений в частных производных, численное исследование аналитических решений при помощи псевдоспектрального метода Фурье, математическое моделирование.

Результаты работы: найдены оптические солитоны исследуемого уравнения, определена область допустимых параметров математической модели для их существования. Представлена модификация псевдоспектрального метода Фурье для численного исследования найденных решений. Проанализировано влияние возмущений в начальных условиях на процесс распространения оптического импульса. Смоделирован процесс передачи импульса в условиях случайного шума. Установлен факт численной устойчивости найденных аналитически решений. Исследовано влияние старших степеней нелинейности на оптические солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера: при определённых параметрах математической модели начальный импульс распадается в устойчивый, совпадающий с аналитическим решением обобщённой модели. Проанализированы процессы столкновения солитонов в присутствии высших нелинейных членов в математической модели.

Область применения: проектирование оптоволоконных линий.

Экономическая эффективность или значимость работы: позволяет при

определённой выбранной математической модели, описывающей физический процесс распространения импульсов в оптоволокне, подобрать параметры для построения устойчивых импульсов, пригодных для передачи сигналов.

# Оглавление

1	Введение . . . . .	6
1.1	Роль солитонов в передаче сигналов . . . . .	6
1.2	Текущая работа, её цели и задачи . . . . .	8
2	Аналитический анализ . . . . .	11
2.1	Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями . . . . .	11
2.2	Модификация метода Фурье для моделирования про- цессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями . . . . .	16
3	Численный анализ . . . . .	18
3.1	Применение метода Фурье для моделирования процес- са распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями . .	18
3.2	Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях . . . . .	20
3.3	Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны . . . . .	21
3.4	Столкновения солитонов в присутствии высших сте- пеней нелинейности . . . . .	25
4	Заключение . . . . .	28

# 1 Введение

## 1.1 Роль солитонов в передаче сигналов

За последние пару десятилетий область телекоммуникаций претерпела существенную эволюцию благодаря впечатляющему прогрессу в разработке оптических волокон, оптических усилителей, передатчиков и приемников. В современной оптической системе связи линия передачи состоит из оптических волокон и усилителей, составляющих волновод [1]. Основная идея волновода состоит в том, чтобы направлять луч света, используя изменение показателя преломления в поперечном направлении, чтобы заставить свет проходить по четко определенному каналу. Зависимость показателя преломления от поперечного направления, направления, перпендикулярного тому, в котором распространяется волна, может быть непрерывной или дискретной. Но в любом из случаев показатель преломления максимален в канале, по которому требуется направлять свет.

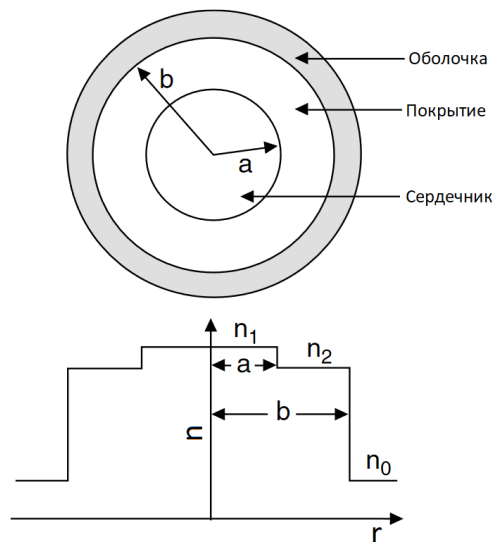


Рис. 1: Зависимость показателя преломления от радиуса поперёк оптического кабеля[2]

В 1973 году, Акира Хасегава и Фредерик Тапперт сформулировали условия существования световых оптических солитонов в одномодовых оптических волокнах и предположили возможность их использования при передаче сигналов.[3, 4]. В 1980 году возможность использования свето-

вых солитонов в одномодовых оптических волокнах была экспериментально подтверждена Молленауэром, Столеном и Гордоном [5, 6], что дало мощный толчок развитию нелинейной оптики [7, 8, 9, 10].

Хорошо известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое включает дисперсию групповой скорости и самомодуляцию фазы, является основным нелинейным уравнением, используемым для описания динамики импульсов. Классическое НУШ имеет следующий вид:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  - комплексная функция,  $i^2 = -1$  и  $a$  - параметры модели. Это уравнение является параболическим, что обуславливает особенности применения численных и аналитических методов для его исследования. Соли-тоны НУШ имеют форму огибающей группы волн, что позволяет использовать их для описания групповых свойств волнового пакета.

В целях увеличения пропускной способности оптических волокон желательно использовать более короткие импульсы. Но при использовании коротковолновых импульсов возрастает влияние на процесс некоторых физических эффектов, таких как дисперсия высокого порядка [11, 12, 13, 14, 15], самофокусировка [16], и вынужденное комбинационное рассеяние [17, 18]. Для корректного описания поведения оптических импульсов в рамках данных эффектов следует использовать обобщённые нелинейные уравнения Шрёдингера высших порядков. Более того, для описания коротковолновых импульсов необходимо учитывать высшие некерровские нелинейности в математической модели [19, 20, 21, 22, 23]. Как следствие, различные обобщения НУШ обширно исследуются математиками по всему миру. В качестве примера стоит упомянуть работы [24, 25, 26, 27].

Учет всех перечисленных физических факторов существенно усложняет аналитическое исследование процессов, описываемых предлагаемыми математическими моделями. Поэтому с развитием вычислительных возможностей для исследований все чаще используются численные методы.

К примеру, НУШ, как классическое уравнение нелинейной оптики, было исследовано в работах [28, 29]. Эти работы подтвердили неустой-

чивость постоянных решений и показали, что неустойчивость не растёт неограниченно, как ожидалось в линейной теории. Также в этих работах выявлен тот факт, что решение периодически возвращается к исходным условиям. Это явление, известное как повторяемость, наблюдалось также в работах Ферми, Пасты и Улама. [30]. В дополнение к нелинейной оптике, НУШ находит применение в физике плазмы и теории невязкой жидкости.

Среди первых схем, использованных для численного анализа НУШ, упомянем конечно-разностный и псевдоспектральные методы [28, 31]. Среди более продвинутых работ, стоит упомянуть работы [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], где дискретизация пространства осуществляется в основном с помощью методов конечных разностей или конечных элементов, а дискретизация времени осуществляется с использованием явных методов с переменным шагом [32, 33], метода расщепления [34], модифицированной схемы Кранка-Николсона [35] и прочих способов. Из-за хорошо изученных свойств, НУШ подходит для валидации новых разрабатываемых численных методов.

## 1.2 Текущая работа, её цели и задачи

Несмотря на разнообразие предложенных математических моделей, вопрос о том, какая из них наиболее подходит для описания процессов распространения импульсов, остается открытым. В текущей работе исследовано одно из обобщённых уравнений - нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [39]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \quad (2)$$

где  $u(x, t)$  - комплекснозначная функция,  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  - параметры модели. Для случая  $b_3 = 0$  исследование уравнения (2) представлено в книге [6].

Целями данной работы являются:

1. аналитическое нахождение точного решения представленного уравнения,



2. численное моделирование процессов распространения построенного импульса с целью установления факта его устойчивости,
3. анализ влияния высших степеней нелинейности в математической модели.

В работе решаются следующие задачи:

1. Построение аналитического решения исходного уравнения в виде уединённой волны с использованием метода прямых вычислений.
2. Определение области параметров модели, при которых построенное решение существует.
3. Модификация метода Фурье для численного решения задачи распространения оптических импульсов, описываемых математической моделью.
4. С целью установления факта устойчивости построенных решений - численное моделирование процессов:
  - (a) распространения построенной уединённой волны,
  - (b) распространения построенных солитонов при наличии возмущений в начальных условиях,
  - (c) распространения построенных солитонов при наличии возмущений в уравнении,
  - (d) взаимодействия построенных солитонов друг с другом в присутствии возмущений в математической модели.

Результаты работы представлены в следующем порядке. В разделе 2.1 построено аналитическое решение для уравнения (2) в форме уединённой волны с использованием метода неявных функций и метода простейших уравнений [40]. Проиллюстрирована область значений параметров модели, при которых построенное решение существует. В разделе 2.2 описан модифицированный метод Фурье для моделирования процессов распространения оптических импульсов, описываемых уравнением (2). Представлена

блок-схема соответствующего программного кода для численного анализа. В разделе 3.1 представлено применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединенной волны, описываемого уравнением (2). В разделе 3.2 смоделировано взаимодействие солитонного импульса с возмущением в начальном условии. В разделе также исследован процесс распространения импульса в условиях случайного шума в начальном условии и обсуждён факт устойчивости построенного оптического солитона. В разделе 3.3 исследовано влияние более высоких степеней нелинейности на процесс распространения уединенной волны описываемой НУШ. В разделе 3.4 смоделированы процессы столкновения солитонов уравнения НУШ при наличии членов с более высокой нелинейностью при различных параметрах модели.

Метод исследования - аналитический анализ, численный анализ.

## 2 Аналитический анализ

### 2.1 Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями

С целью упростить уравнение (2), используем переход к безразмерным величинам в следующем виде:

$$\begin{cases} u(x, t) = c_u u'(x, t), \\ t = c_t t', \\ x = c_x x', \end{cases} \quad (3)$$

При этом уравнение (2) запишется следующим образом:

$$i \frac{c_u}{c_t} u'_{t'} + \frac{a c_u}{c_x^2} u'_{x'x'} + b_1 c_u^3 |u'|^2 u' \left( 1 + c_u^2 \frac{b_2}{b_1} |u'|^2 + c_u^4 \frac{b_3}{b_1} |u'|^4 \right) = 0. \quad (4)$$

Принимая

$$\begin{cases} c_u = b_1^{-1/3}, \\ c_t = b_1^{-1/3}, \\ c_x = \sqrt{a} b_1^{-1/6}, \end{cases} \quad (5)$$

Для уравнения (4) получим:

$$i u'_{t'} + u'_{x'x'} + |u'|^2 u' (1 + \varepsilon_2 |u'|^2 + \varepsilon_3 |u'|^4) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = b_1^{-4/3} b_2, \\ \varepsilon_3 = b_1^{-7/3} b_3. \end{cases} \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - c_0 t', \quad k, \omega, c_0, \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где  $y(z)$  - действительнзначная функция. Подставляя (8) в уравнение (6), получим переопределённую систему уравнений для  $y(z)$  в виде

$$y_{zz} + \varepsilon_3 y^7 + \varepsilon_2 y^5 + y^3 + (\omega - k^2) y = 0, \quad (9)$$

$$(2k - c_0)y_z = 0. \quad (10)$$

уравнение (10) выполняется тождественно при  $c_0 = 2k$ . Уравнение (9) имеет первый интеграл:

$$y_z^2 + \frac{\varepsilon_3 y^8}{4} + \frac{\varepsilon_2 y^6}{3} + \frac{y^4}{2} + (\omega - k^2) y^2 = c_1. \quad (11)$$

Переходя к новой переменной  $y(z) = \sqrt{V(z)}$ , перепишем уравнение (11):

$$\frac{1}{4}V_z^2 + \frac{\varepsilon_3}{4}V^5 + \frac{\varepsilon_2}{3}V^4 + \frac{1}{2}V^3 + (\omega - k^2)V^2 - c_1V = 0. \quad (12)$$

Используя метод неявных функций, будем искать решения уравнения (12) в виде  $V(z) = F(\xi)$ ,  $\xi = \psi(z)$ , полагая  $c_1 = 0$  и

$$\xi_z = \pm F(\xi), \quad (13)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$F_\xi^2 + \varepsilon_3 F^3 + \frac{4}{3}\varepsilon_2 F^2 + 2F + 4(\omega - k^2) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде:

$$\left[ \frac{d}{d\xi} \left( F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) \right]^2 + \varepsilon_3 \left( F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right)^3 + \frac{2(27\varepsilon_3 - 8\varepsilon_2^2)}{27\varepsilon_3} \left( F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) + \frac{128\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^2} - \frac{8\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} - 4k^2 + 4\omega = 0. \quad (15)$$

Вводя следующие обозначения для постоянных величин:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{64\varepsilon_2^2}{27\varepsilon_3^2} - \frac{8}{\varepsilon_3}, \\ g_3 &= \frac{512\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^3} - \frac{32\varepsilon_2}{9\varepsilon_3^2} - \frac{16k^2}{\varepsilon_3} + \frac{16\omega}{\varepsilon_3}, \\ \psi &= -F - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}, \end{aligned} \quad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде:

$$\left( \left( 2\varepsilon_3^{-1/2} \right) \psi_\xi \right)^2 = 4\psi^3 - g_2\psi - g_3. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (17) может быть выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса, что позволяет записать:

$$F(\xi) = -\wp \left( \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_3} (\xi - \xi_0) \right]; g_2; g_3 \right) - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}. \quad (18)$$

Учитывая условие (13), возможно выразить  $\xi(z)$  в квадратурах:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{d\xi}{F(\xi)} = \mp \int \frac{d\xi}{\wp\left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3}(\xi - \xi_0)\right]; g_2; g_3\right) + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}}, \quad (19)$$

однако, в общем случае, такой интеграл не может быть посчитан аналитически.

Стоит заметить, что для специального вида функции  $F(\xi)$  интеграл (19) может быть посчитан. Используя метод простейших уравнений [40], найдём решения (14) в виде:

$$F(\xi) = M_0 + M_1 Q(\xi) + M_2 Q^2(\xi), \quad (20)$$

где  $Q(\xi)$  - решение уравнения Риккати:

$$Q_\xi = \mu(Q^2 - Q), \quad (21)$$

имеющее следующий вид:

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))}. \quad (22)$$

Используя (21), и подставляя выражение (20) в уравнение (14), получим полином относительно  $Q(\xi)$ , равный нулю:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_3 M_2^3 + 4\mu^2 M_2^2) Q(\xi)^6 + (4\mu^2 M_1 M_2 - 8\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1 M_2^2) Q(\xi)^5 + \\ & + \left( \frac{4}{3} \varepsilon_2 M_2^2 - 8\mu^2 M_1 M_2 + \mu^2 M_1^2 + 4\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1^2 M_2 \right) Q(\xi)^4 + \\ & + \left( 4\mu^2 M_1 M_2 + \varepsilon_3 M_1^3 - 2\mu^2 M_1^2 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_1 M_2 + 6\varepsilon_3 M_0 M_1 M_2 \right) Q(\xi)^3 + \\ & + \left( 2M_2 + \frac{4\varepsilon_2 M_1^2}{3} + \mu^2 M_1^2 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_1^2 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_2 \right) Q(\xi)^2 + \\ & + \left( 2M_1 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_1 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_1 \right) Q(\xi) + \\ & + \left( \frac{4}{3} \varepsilon_2 M_0^2 + 2M_0 + \varepsilon_3 M_0^3 - 4k^2 + 4\omega \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как  $Q(\xi) \neq 0$ , коэффициенты полинома должны быть тождественно равны нулю. Это приводит к следующим ограничениям на пара-

метры модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega - k^2 = -\frac{1}{12} \frac{M_0 M_1}{M_1 + 6M_0} - \frac{1}{6} M_0, \\ \mu = \pm \sqrt{\frac{M_1}{M_0(M_1 + 6M_0)}}, \\ M_2 = -M_1, \\ \varepsilon_2 = \frac{3}{4M_0} \left( \frac{M_1}{M_1 + 6M_0} - 2 \right), \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{M_0(M_1 + 6M_0)}, \end{array} \right. \quad (24)$$

где  $M_0$  и  $M_1$  - произвольные константы. Уравнение (20) теперь записывается, как:

$$F(\xi) = M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2}. \quad (25)$$

Для представленного вида  $F(\xi)$  следующее выражение может быть проинтегрировано:

$$\frac{d\xi}{F(\xi)} = dz, \quad (26)$$

тогда зависимость  $\xi$  и  $z$  описывается следующим образом:

$$z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + \frac{2M_1}{\mu M_0 \sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right). \quad (27)$$

Теперь решение уравнения (11) при  $c_1 = 0$  запишется в виде:

$$y(\xi) = \left[ M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

где  $\xi(z)$  определяется неявно из (27), и выполнены ограничения на параметры модели (24).

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - 2kt', \quad (29)$$

где  $k$  and  $\theta_0$  - произвольные постоянные.

Принимая во внимание, что  $z$ ,  $\xi(z)$ ,  $y(\xi) \in \mathbb{R}$ , из выражений (27) и (28) следуют дополнительные ограничения на параметры  $M_0$  и  $M_1$  для существования найденного решения:

$$\left| \frac{2e^{\mu(\xi-\xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right| < 1, \quad (30)$$

$$M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi-\xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi-\xi_0)})^2} \geq 0. \quad (31)$$

Данные ограничения удовлетворяются на ограниченном промежутке по переменной  $\xi$  из-за присутствия экспоненты в (30), что накладывает дополнительные ограничения при построении решения.

Условия (30) и (31) с ограничениями (20) удовлетворяются в следующей области параметров  $M_1$  и  $M_0$  (Рис. 2):

$$\begin{cases} M_0 < 0, \\ -4M_0 < M_1 < -6M_0. \end{cases} \quad (32)$$

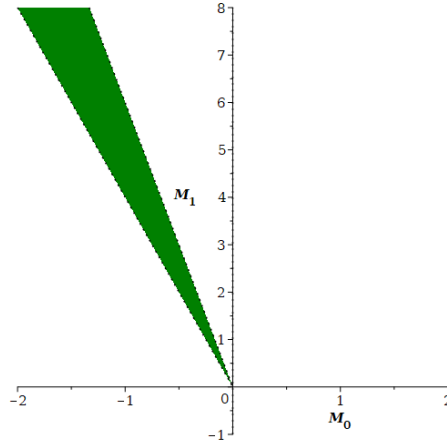


Рис. 2: Допустимые значения  $M_1$  и  $M_0$ .

Волновой профиль (29) при  $k = 1.6$ ,  $M_0 = -1.48$ ,  $M_1 = 6.16$ . изображён на Рис. 3.

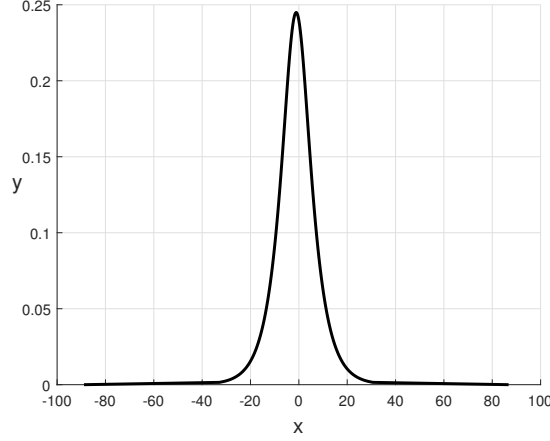


Рис. 3: Профиль уединённой волны при  $k = 1.6$ ,  $M_0 = -1.48$ ,  $M_1 = 6.16$ .

## 2.2 Модификация метода Фурье для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Семейство обобщённых уравнений Шрёдингера может быть записано в виде:

$$u_t = i\mathcal{L}[u] + i\mathcal{N}[u]u. \quad (33)$$

К примеру, при  $\mathcal{L}[u] \equiv au_{xx}$ ,  $\mathcal{N}[u] \equiv b_1|u|^2$  мы получаем всем известное нелинейное уравнение Шрёдингера (1).

Для применения метода Фурье, объявим периодические граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u(-\frac{L}{2}, t) = u(\frac{L}{2}, t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-\frac{L}{2}, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{L}{2}, t). \end{cases} \quad (34)$$

Предполагая  $x \in [-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L]$ ,  $t \in [0, T]$ , разделим интервал по переменной  $x$  на  $N$  одинаковых частей с шагом

$$h = \frac{L}{N}. \quad (35)$$

Узлы координатной сетки определяются, как

$$x_j = jh, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (36)$$



Пусть  $\mathbf{U}^m$  - сеточная аппроксимация решения на  $m$ -ном временном слое, и  $\mathbf{V}^m$  - промежуточное решение. В таком случае, начальные условия задаются в  $\mathbf{U}^0$ . В общем виде, схема расщепления может быть записана следующим образом [1]:

$$\mathbf{U}^{m+1} = e^{i\tau\mathcal{L}}\mathbf{V}^m, \quad (37)$$

где

$$\mathbf{V}^m = e^{i\tau\mathcal{N}[\mathbf{U}^m]}\mathbf{U}^m. \quad (38)$$

Applying the split-step Fourier method, it is proposed to use the discrete Fourier transform for the grid function  $\mathbf{V}^m$  to construct a solution on a next time layer:

$$\hat{\mathbf{V}}^m = \frac{h}{L} \exp(-i\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^T) \cdot \mathbf{V}^m, \quad (39)$$

where  $\hat{\mathbf{V}}^m$  is the vector of Fourier coefficients,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{-N/2}, \dots, \mu_{N/2-1})^T$  is the transform frequency vector  $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$ ,  $\mathbf{x} = (x_{-N/2}, \dots, x_{N/2-1})^T$  are the grid point coordinates.

There is a ratio between  $\hat{\mathbf{U}}^{m+1}$  and  $\hat{\mathbf{V}}^m$ ,

$$\hat{\mathbf{U}}^{m+1} = \exp(-i(\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\mu})\tau) \circ \hat{\mathbf{V}}^m, \quad (40)$$

which is obtained by substituting a corresponding Fourier series for  $\mathbf{U}^{m+1}$  and  $\mathbf{V}^m$  in Eq. (37). Here  $x \circ y$  refers to the Hadamard product.

The solution on the next time layer is found by the inverse Fourier transform using Eq. (40):

$$\mathbf{U}^{m+1} = \exp(i\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^T) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{m+1}. \quad (41)$$

Modifying the method for the Eq. (6), operators  $\mathcal{L}[u]$  and  $\mathcal{N}[u]$  take the form:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] \equiv u_{xx}, \\ \mathcal{N}[u] \equiv |u|^2 + \varepsilon_2|u|^4 + \varepsilon_3|u|^6. \end{cases} \quad (42)$$

A simplified flowchart for the numerical solution of the pulse propagation problem with periodic boundary conditions using the split-step Fourier method depicted on Fig. 4.

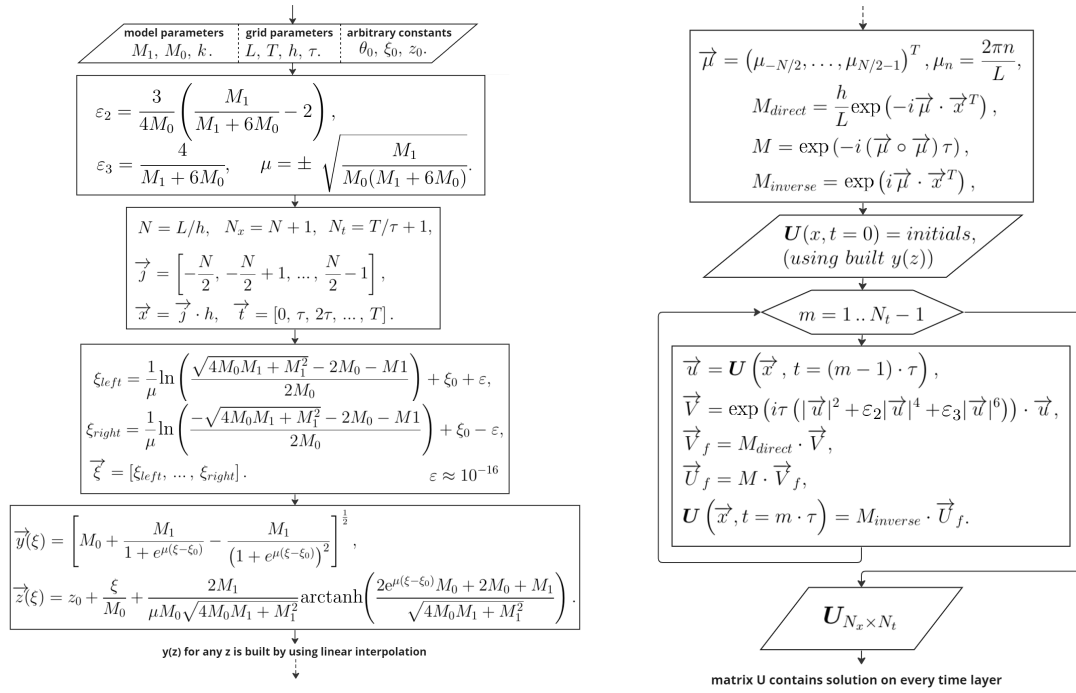
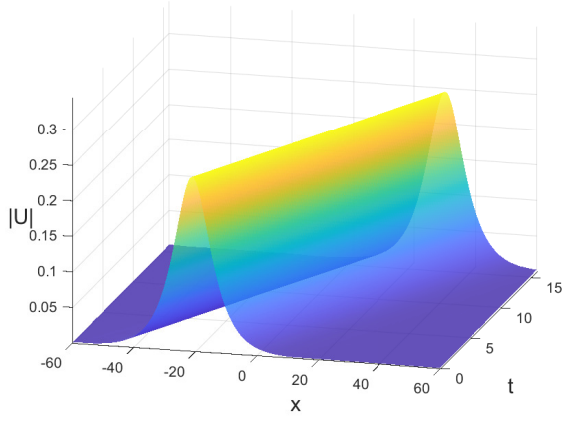


Рис. 4: Flowchart for modeling the pulse propagation process using the Fourier method.

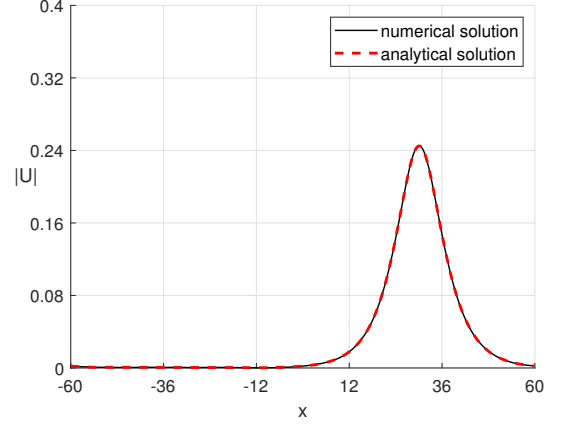
### 3 Численный анализ

#### 3.1 Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Let us consider Eq. (6). To verify the analytical calculations, we numerically simulate the process of propagation of a solitary wave (29). We perform a computation for certain parameters  $M_0$  and  $M_1$ , fulfilling the constraints (32). Parameters  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$  and  $\mu$  are determined by formulas (24). The result of the modeling are depicted on Fig.5. Analytical and numerical profiles at the moment  $t = 16$  are depicted in Fig. 5a.



(a) Numerical solution surface plot

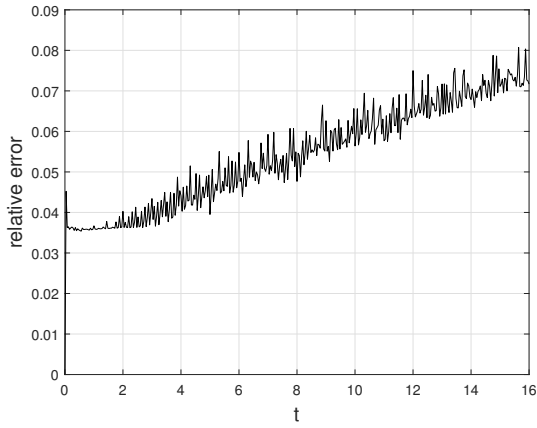


(b) Solution module at  $t=16$

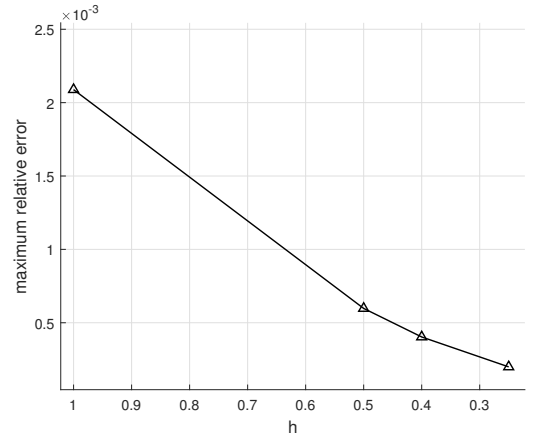
Рис. 5: Propagation of a solitary wave (29)

at the parameters  $L = 120$ ,  $T = 16$ ,  $h = 0.2$ ,  $\tau = 0.04$ ,  $z_0 = -20$ ,  $k = 1.6$ ,  $M_0 = -1.48$ ,  $M_1 = 6.16$ .

The relative error for calculation at the specified parameters does not exceed 0.08%. The dependence of a relative error over time is illustrated in Fig. 6a.



(a) Relative error over time at  $h = 0.2$ ,  $\tau = 0.04$



(b) Maximum relative error over grid space step  $h$

Рис. 6: Numerical results at the parameters  $L = 120$ ,  $T = 16$ ,  $M_0 = -1.48$ ,  $M_1 = 6.16$ .

Since grid convergence is achieved (see Fig. 6b), we claim that all analytical calculations are correct. Hence, we conclude that the analytical

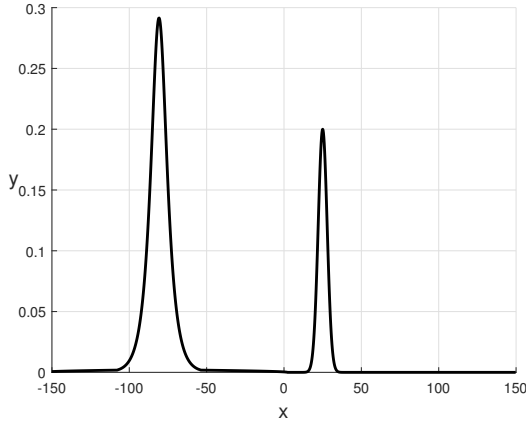
solution built in Section 2.1 describe a stable soliton which can be used for signal transmission.

### 3.2 Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях

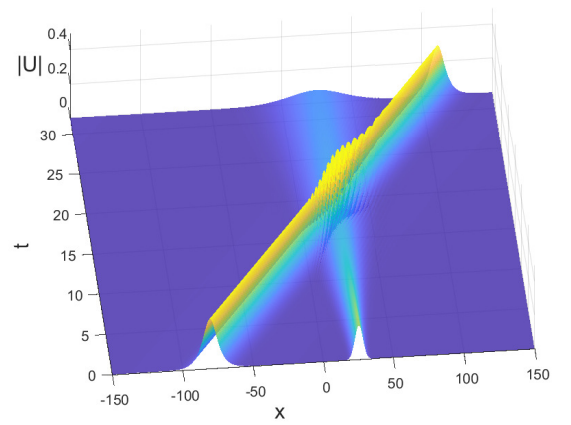
Let us consider a numerical modeling of the pulse propagation at initial perturbation. We disturb the initial condition, corresponding to solution (29) of Eq. (6) in the following way:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + Ae^{-\nu(x-x_0)^2}. \quad (43)$$

The corresponding numerical solutions are depicted in Fig. 7.



(a) Module of initial profile (43)



(b) Module of numerical solution

Рис. 7: Plots of numerical results at the parameters  $M_0 = -3$ ,  $M_1 = 12.34$ ,  $k = 3$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $z_0 = -80$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $L = 300$ ,  $T = 32$ ,  $h = 0.25$ ,  $\tau = 0.625$ ,  $A = 0.2$ ,  $\nu = 0.06$ ,  $x_0 = 25$ .

This simulation allows us to conclude that the soliton specified by the parameters  $M_0 = -3$ ,  $M_1 = 12.34$ , interacts with the given perturbation and does not lose the ability to propagate. The pulse profile is restored after interaction.

It is found that the soliton (6) is stable when propagating in a medium with random noise of the following type:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A \cdot rand(x). \quad (44)$$

The corresponding illustrations are depicted in Fig. 8.

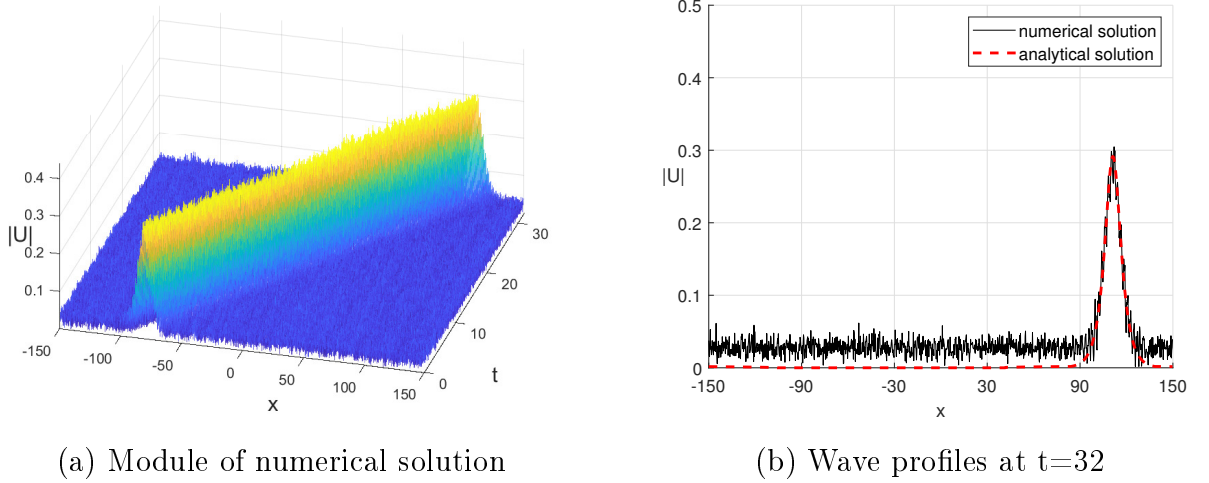


Рис. 8: Plots of numerical results at the parameters  $M_0 = -3$ ,  $M_1 = 12.34$ ,  $k = 3$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $z_0 = -80$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $L = 300$ ,  $T = 32$ ,  $h = 0.25$ ,  $\tau = 0.0625$ ,  $A = 0.05$ .

The simulations carried out in this section confirm the stability of the solitons obtained in Section 2.1.

### 3.3 Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны

In many physical applications, some perturbation terms are introduced into NLS equation. In a mathematical model, it is not always possible to take them into account in advance. In this section we investigate the impact of the additional nonlinear terms on the solutions of the NLS equation.

At  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ , the Eq. (6) takes the form:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (45)$$

This well-known NLS equation is completely integrable. The solution of Eq. (45) in the form of a solitary wave has been found in paper [39] and takes the following form:

$$u(x, t) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-c_0t-z_0)}\sqrt{(k^2-\omega)} + e^{(x-c_0t-z_0)}\sqrt{(k^2-\omega)}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (46)$$

where  $c_0 = 2k$  and  $k, \omega, z_0, \theta_0$  are arbitrary constants. The initial condition corresponding to Eq. (46) takes the form:

$$u(x, 0) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}} + e^{(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}}} \cdot e^{i(kx-\theta_0)} \quad (47)$$

At  $\varepsilon_3 = 0$ , the solution of the Eq. (6) was found and takes following the form:

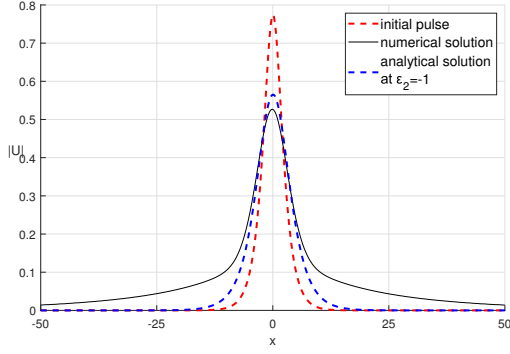
$$u(x, t) = \left( \frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}}{1 + 4e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)} + (4 + 4\mu\nu)e^{2\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (48)$$

where  $\mu = 4(\omega - k^2)$ ,  $\nu = \frac{4\varepsilon_2}{3}$  and  $k, \omega, z_0, \theta_0$  are arbitrary constants. We note that at  $\varepsilon_2 = 0$  Eq. (48) coincides with Eq. (46).

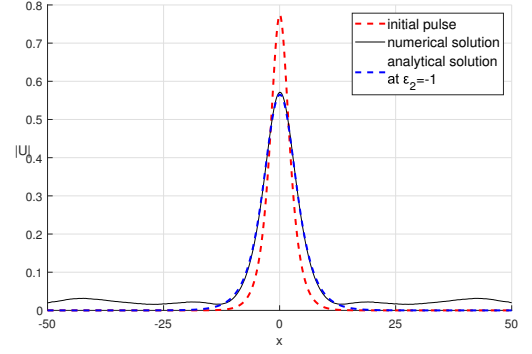
Let us consider how the behavior of a solitary wave Eq. (47) is affected by the presence of higher nonlinearity terms. We consider the physical process described by the Eq. (6) and assume that the parameters  $\varepsilon_2$  and  $\varepsilon_3$  are neglected when setting up the initial pulse.

In the absence of the highest nonlinear powers at  $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$  the solitary wave (46) is the exact solution of the Eq. (6). The numerical solution for the initial pulse (47) coincides with the analytical.

When the nonlinearity parameter  $\varepsilon_2 \neq 0$  is taken into account, the decay of the initial pulse is observed. Decay is accompanied by soliton oscillations and energy emission. It is observed that the soliton (47), when oscillating and emitting energy, transforms into a stable soliton solution coinciding with the Eq. (48). The simulation result is illustrated in Fig. 9 and 10.



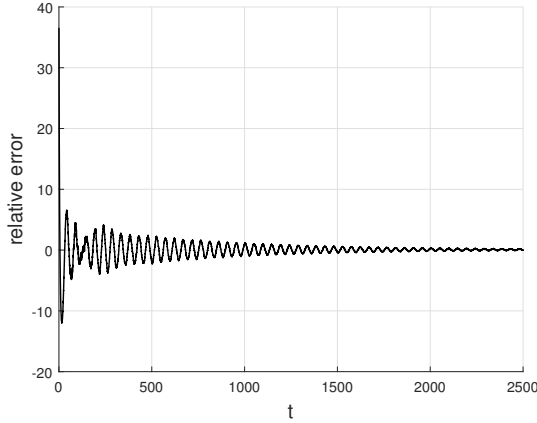
(a) Solution profile at  $t=25$



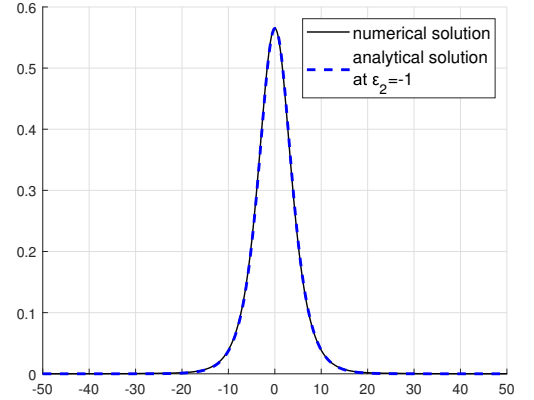
(b) Solution profile at  $t=200$

Рис. 9: Results for the initial pulse (47) at  $L = 200$ ,  $T = 200$ ,  $h = 0.25$ ,  $\tau = 0.0625$ ,  $\varepsilon_2 = -1$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\omega = 0.2$ ,  $k = 0.707$ .

Relative error between analytical solution (48) and numerical solution over time is illustrated in Fig. 10a.



(a) Relative error over time

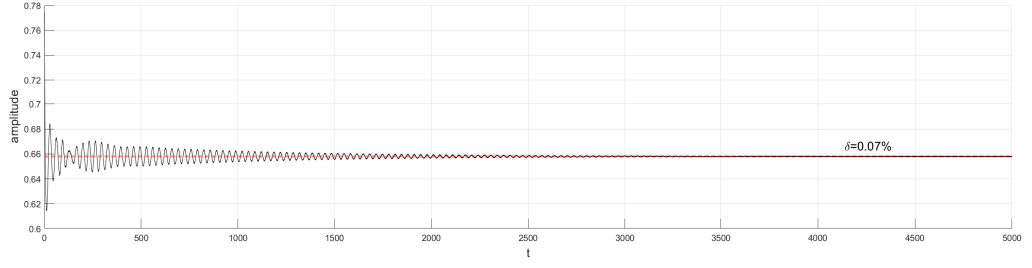


(b) Solution profile at  $t=2500$

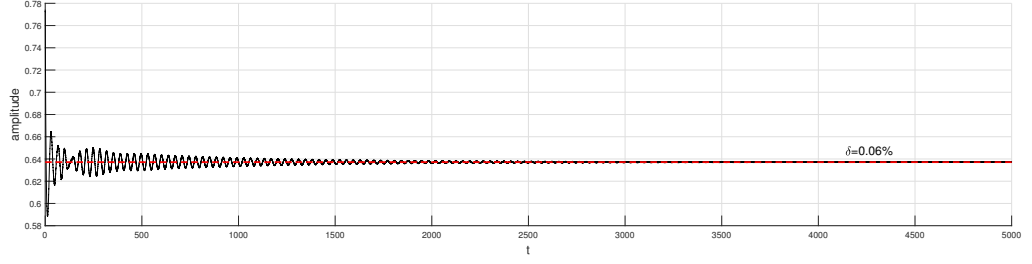
Рис. 10: Results for the initial pulse (47) at  $L = 200$ ,  $T = 200$ ,  $h = 0.25$ ,  $\tau = 0.0625$ ,  $\varepsilon_2 = -1$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\omega = 0.2$ ,  $k = 0.707$ .

When the highest power is taken into account at  $\varepsilon_3 \neq 0$ , oscillatory behavior persists. It is found that the sign of the  $\varepsilon_3$  affects the damping rate of oscillations. At  $\varepsilon_3 < 0$  the damping is more intense and the amplitude of the stable pulse is reduce. At  $\varepsilon_3 > 0$  the oscillations stop at longer times with increased stable pulse amplitude. The illustrations of the pulse amplitude behavior are depicted in Fig. 11. Here the parameter  $\delta$  is the relative size of the

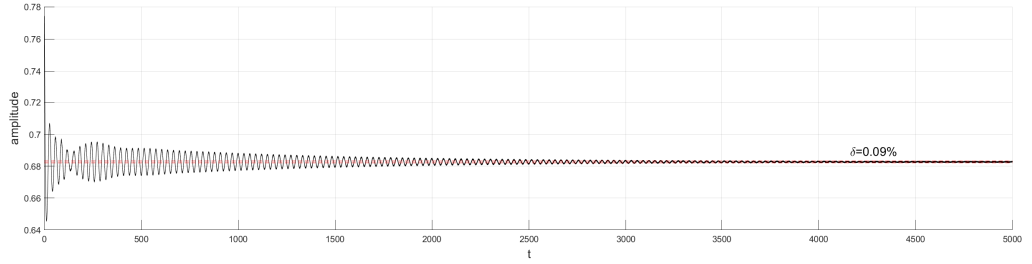
oscillations gap.



(a)  $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = 0$



(b)  $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = -0.25$



(c)  $\varepsilon_2 = -0.5, \varepsilon_3 = 0.25$

Рис. 11: The behavior of the pulse (47) amplitude in the presence of the highest nonlinearities.  $L = 200$ ,  $T = 5000$ ,  $h = 0.25$ ,  $\tau = 0.0625$ ,  $\omega = 0.2$ ,  $k = 0.707$ .

We conclude that the solitary waves of the NLS equation when propagating in a medium with higher nonlinear terms, are transformed into stable solitons of a generalized non-integrable model. This transition is accompanied by the energy emission and oscillations of the initial pulse. It is found that the addition of a 7th power nonlinear term affects the rate of transformation into a stable soliton. The sign of  $\varepsilon_3$  affects the duration of the oscillations and the amplitude of the stable impulse.

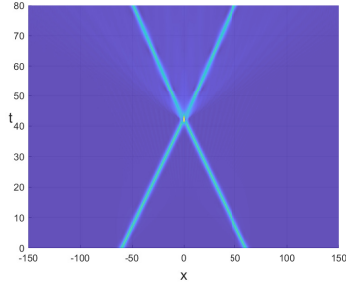


### 3.4 Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности

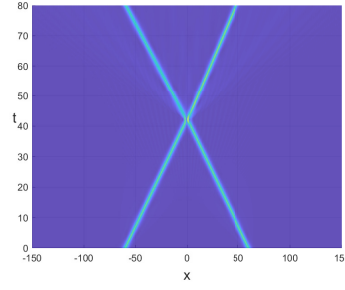
The solutions of a completely integrable nonlinear Schrödinger equation interact elastically, i.e. without momentum and energy exchange. When the integrability of the system is violated by external perturbations, soliton collisions become inelastic. In this section we investigate the NLS equation soliton collisions in a medium, which is perturbed by nonlinear terms according to the Eq. (6).

Let us consider the collision of two solitons of the form (47) with the parameters  $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, z_{0,1}, z_{0,2}, \theta_{0,1}, \theta_{0,2}$ . The value of the parameters  $\varepsilon_2$  and  $\varepsilon_3$  affects the intensity of energy and momentum exchange. It is found that the type of interaction depends on the solitons initial phase detunning  $\Delta\theta = \theta_{0,1} - \theta_{0,2}$ .

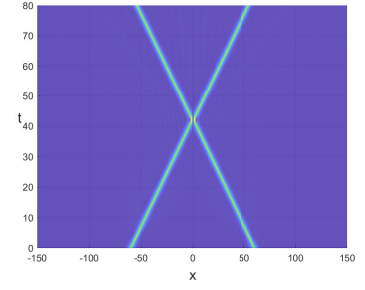
Simulation results at  $k_1 = -k_2, \omega_1 = \omega_2, z_{0,1} = -z_{0,2}, \theta_{0,1} = \theta_{0,2} + \Delta\theta$  are illustrated in Fig. 12 and Fig. 13.



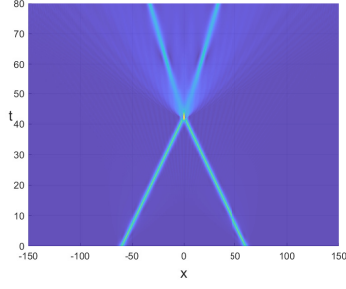
(a)  $\Delta\theta = 0$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



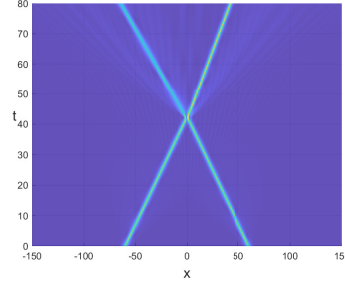
(b)  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



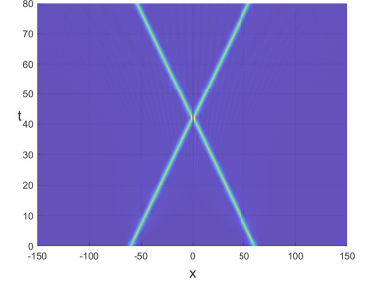
(c)  $\Delta\theta = \pi$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$



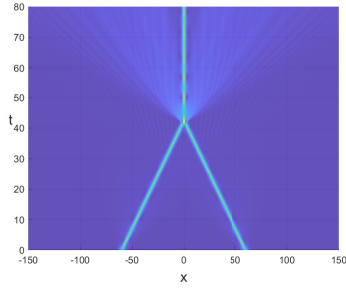
(d)  $\Delta\theta = 0$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



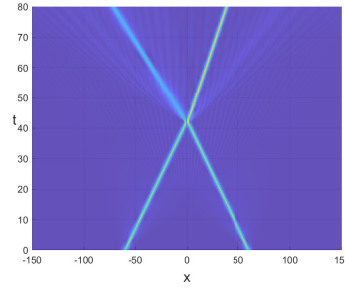
(e)  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



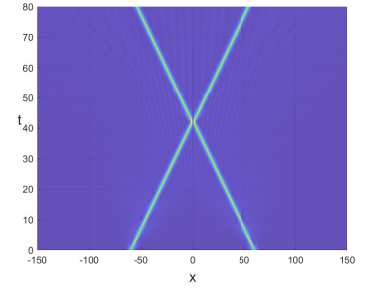
(f)  $\Delta\theta = \pi$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$



(g)  $\Delta\theta = 0$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$



(h)  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$



(i)  $\Delta\theta = \pi$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

Рис. 12: The modulus of numerical solution for soliton collisions at  $k_1 = -k_2 = 0.7$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .

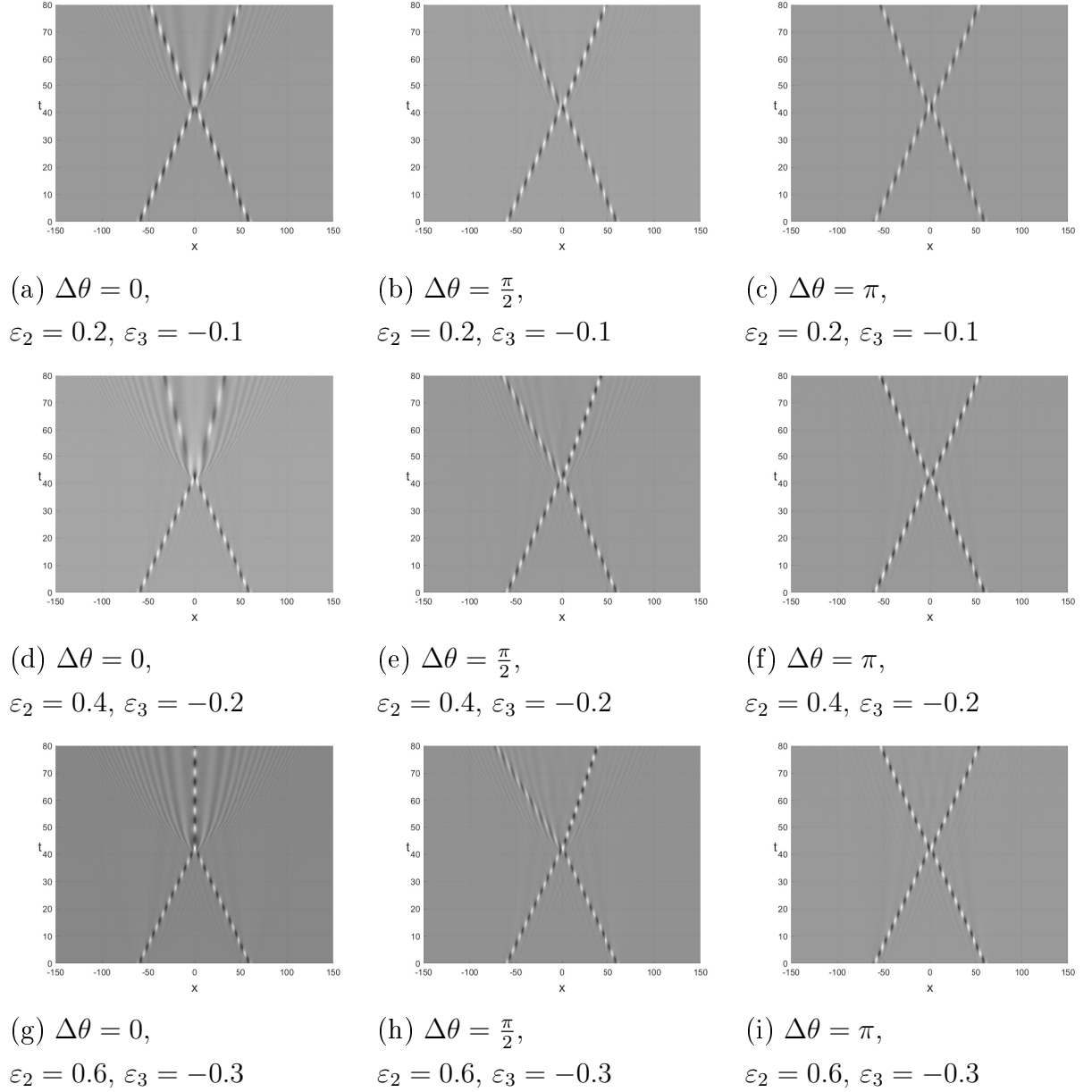


Рис. 13: The real part of numerical solution for soliton collisions at  $k_1 = -k_2 = 0.7$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .

The simulation results allow us to conclude that collisions of solitons in the presence of higher nonlinearity terms can be essentially inelastic. In addition to the perturbation parameters, the certain type of interaction is affected by the difference in the initial phases of the solitons. Near  $\Delta\theta = \pi$ , the solitons interact the least intensively. When the phase detuning is in the vicinity of zero, there is a significant energy emission. In this case, there exist a critical perturbation parameters at which two solitons merge into one stationary one. When the parameter  $\Delta\theta \in (0, \pi)$ , the interaction of solitons occurs with the exchange of energy and momentum.

## 4 Заключение

In this paper, we have considered the numerical modeling of the pulse propagation process in a nonlinear medium with periodic boundary conditions described by the cubic-quintic-septic nonlinear Schrödinger equation (2). We have obtained the analytical solution in the form of a solitary wave (29) and the conditions of its existence. We have modified the split-step Fourier method for modeling pulse propagation processes. We have numerically studied the pulse propagation process and proved the correctness of analytical calculations. We have simulated the interaction of an optical soliton of Eq. (2) with a perturbation in the initial condition. We have simulated the pulse propagation process in a medium with a random noise. We analyzed the influence of the higher nonlinearity powers to the NLS equation solitary waves propagation. We have simulated the soliton collisions with a presence of highest nonlinear terms.

The following findings are observed from the simulation results:

1. The solitary waves of the cubic-quintic-septic nonlinear Schrödinger equation propagate steadily.
2. The optical soliton of the cubic-quintic-septic nonlinear Schrödinger equation is not destroyed after interaction with disturbance. The pulse is stable when propagating in noisy conditions
3. Taking into account the higher degrees of nonlinearity, the solitons of the NLS equation transform into a stable soliton solutions of a generalized non-integrable model.
4. Under conditions of higher nonlinear terms, solitons interact inelastically upon collision. With the addition of the 7th nonlinearity power, the merging of two solitons is possible.

# Литература

- [1] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23:485–507, 6 1986.
- [2] N.A. Kudryashov. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 371, 4 2020.
- [3] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:142–144, 8 1973.
- [4] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:171–172, 8 1973.
- [5] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [6] Yuri Kivshar and Govind Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, 2 2003.
- [7] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [8] Igor S. Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74:99–143, Feb 2002.

- [9] M Ablowitz and H Sigur. *Solitary Waves and the Inverse Problem Method [Russian translation]*. Mir, Moscow, 1982.
- [10] Yuri Kivshar. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS*, 61:763–915, 2 1989.
- [11] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Ali Saleh Alshomrani. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by F-expansion. *Optik*, 187:258–271, 6 2019.
- [12] Nikolay A. Kudryashov. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik*, 186:339–349, 6 2019.
- [13] Hamood Ur Rehman, Naeem Ullah, and M.A. Imran. Highly dispersive optical solitons using Kudryashov’s method. *Optik*, 199:163349, 12 2019.
- [14] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163226, 12 2019.
- [15] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by Jacobi’s elliptic function expansion. *Optik*, 189:109–120, 7 2019.
- [16] Ivan M. Uzunov, Todor N. Arabadzhiev, and Svetoslav G. Nikolov. Self-steepening and intrapulse Raman scattering in the presence of nonlinear gain and its saturation. *Optik*, 271:170137, 2022.
- [17] Chong Wang, Ying Wang, Shenghan Wang, Chenglin Sun, and Zhiwei Men. Cascaded amplification via three-beam double stimulated Raman scattering in benzene. *Journal of Molecular Liquids*, 368:120667, 2022.
- [18] E.M. Gromov and B.A. Malomed. Damped solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial stimulated Raman scattering and decreasing dispersion. *Optics Communications*, 320:88–93, 2014.

- [19] Nikolay A. Kudryashov. On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation. *Optik*, 224:165500, 12 2020.
- [20] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163322, 12 2019.
- [21] Nikolay A. Kudryashov. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 192:162964, 9 2019.
- [22] Nikolay A. Kudryashov. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 194:163060, 10 2019.
- [23] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function. *Optik*, 186:288–292, 6 2019.
- [24] Nikolay A. Kudryashov and Dariya V. Safonova. Painleve analysis and traveling wave solutions of the sixth order differential equation with non-local nonlinearity. *Optik*, 244:167586, 10 2021.
- [25] Nikolay A. Kudryashov. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model. *Optik*, 186:22–27, 6 2019.
- [26] AI Maimistov, AM Basharov, AI Maimistov, and AM Basharov. Optical solitons in fibers. *Nonlinear Optical Waves*, pages 303–435, 1999.
- [27] A.T. Filippov. *Many-sided Soliton*. Nauka, Moscow, 1990.
- [28] Bruce M Lake, Henry C Yuen, Harald Rungaldier, and Warren E Ferguson. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *Journal of Fluid Mechanics*, 83:49–74, 1977.
- [29] Henry C. Yuen and Warren E. Ferguson. Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. *Physics of Fluids*, 21:1275, 1978.

- [30] E. Fermi, P Pasta, S Ulam, and M Tsingou. Studies of nonlinear problems I. Los Alamos National Laboratory (LANL), 5 1955.
- [31] Ronald H Hardin and F. D. Tappert. Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *Siam Review*, 15:423, 1973.
- [32] J.M Sanz-Serna. An explicit finite-difference scheme with exact conservation properties. *Journal of Computational Physics*, 47:199–210, 8 1982.
- [33] J M Sanz-Serna and V S Manoranjan. A method for the integration in time of certain partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 52:273–289, 1983.
- [34] M Delfour, M Fortin, and G Payr. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, 44:277–288, 12 1981.
- [35] D.F. Griffiths, A.R. Mitchell, and J.Li. Morris. A numerical study of the nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:177–215, 9 1984.
- [36] J. M. Sanz-Serna. Methods for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics of Computation*, 43:21–27, 1984.
- [37] A Mitchell and J Morris. A self adaptive difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *Arab Gulf Journal of Scientific Research*, pages 461–472, 1983.
- [38] Hongyu Qin, Fengyan Wu, and Deng Ding. A linearized compact ADI numerical method for the two-dimensional nonlinear delayed Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 412:126580, 2022.
- [39] Nikolay A. Kudryashov. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. *Optik*, 261:169163, 7 2022.



- [40] Nikolai A. Kudryashov. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24:1217–1231, 6 2005.