

Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

На правах рукописи
УДК _____

МЕДВЕДЕВ ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Выпускная квалификационная работа магистра

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Выпускная квалификаци-
онная
работа защищена
«__»_____20__ г.
Оценка_____

Секретарь
ГЭК_____

г.Москва 2023

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к выпускной квалификационной работе на тему:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Студент-дипломник:

(подпись)

/Медведев В.А./

Руководитель проекта:

(подпись)

/д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./

Рецензент:

(подпись)

/ассистент Кутуков А.А./

Зав. кафедрой №31:

(подпись)

/д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А./

Реферат

Отчет n страниц, 1 часть., m рисунков, 1 таблица, k источника, p приложений.

Ключевые слова: обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера, псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных
Объектом исследования является уравнение в частных производных, описывающее распространение импульсов в оптоволокне.

Цель работы - построить оптические солитоны исследуемого уравнения, смоделировать процессы их распространения, взаимодействия с возмущениями и друг с другом, установить факт устойчивости найденных решений в численном смысле, исследовать влияние старших степеней нелинейности на решения классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Метод проведения работы: последовательное применение приёмов поиска частных решений уравнений в частных производных, численное исследование аналитических решений при помощи псевдоспектрального метода Фурье, математическое моделирование.

Результаты работы: найдены оптические солитоны исследуемого уравнения, определена область допустимых параметров математической модели для их существования. Представлена модификация псевдоспектрального метода Фурье для численного исследования найденных решений. Проанализировано влияние возмущений в начальных условиях на процесс распространения оптического импульса. Смоделирован процесс передачи импульса в условиях случайного шума. Установлен факт численной устойчивости найденных аналитически решений. Исследовано влияние старших степеней нелинейности на оптические солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера: при определённых параметрах математической модели начальный импульс распадается в устойчивый, совпадающий с аналитическим решением обобщённой модели. Проанализированы процессы столкновения солитонов в присутствии высших нелинейных членов в математической модели.

Область применения: проектирование оптоволоконных линий.

Экономическая эффективность или значимость работы: позволяет при

определённой выбранной математической модели, описывающей физический процесс распространения импульсов в оптоволокне, подобрать параметры для построения устойчивых импульсов, пригодных для передачи сигналов.

Оглавление

1	Введение	6
1.1	Роль солитонов в передаче сигналов	6
1.2	Текущая работа, её цели и задачи	8
2	Основная часть	11
2.1	Возмущённое уравнение Бисваса-Аршеда	11
2.2	Приведение уравнения к виду динамической системы	11
2.3	Гомоклиническая структура динамических систем . .	13
2.4	Подкова Смейла и гомоклиническая точка	14
2.5	Критерий Мельникова	14
2.6	Анализ стационарных точек системы	17
2.7	Гомоклинические и гетероклинические орбиты	21
2.8	Применение метода Мельникова к динамической си- стеме (11)	22
3	Реализация программ для численного анализа	24
4	Численный анализ	27
5	Заключение	28

1 Введение

1.1 Роль солитонов в передаче сигналов

За последние пару десятилетий область телекоммуникаций претерпела существенную эволюцию благодаря впечатляющему прогрессу в разработке оптических волокон, оптических усилителей, передатчиков и приемников. В современной оптической системе связи линия передачи состоит из оптических волокон и усилителей, составляющих волновод [1]. Основная идея волновода состоит в том, чтобы направлять луч света, используя изменение показателя преломления в поперечном направлении, чтобы заставить свет проходить по четко определенному каналу. Зависимость показателя преломления от поперечного направления, направления, перпендикулярного тому, в котором распространяется волна, может быть непрерывной или дискретной. Но в любом из случаев показатель преломления максимален в канале, по которому требуется направлять свет.

В 1973 году, Акира Хасегава и Фредерик Тапперт сформулировали условия

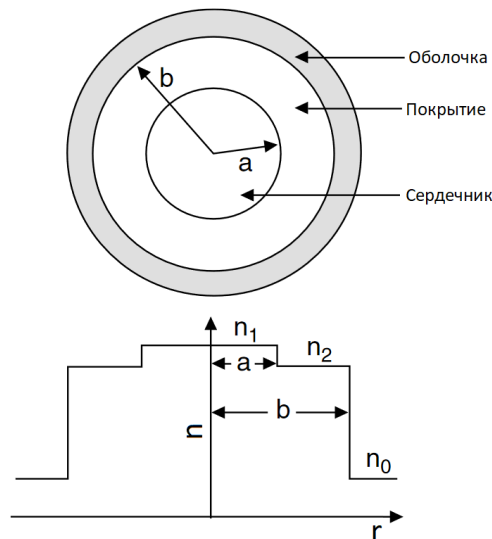


Рис. 1: Зависимость показателя преломления от радиуса поперёк оптического кабеля[2]

существования световых оптических солитонов в одномодовых оптических волокнах и предположили возможность их использования при передаче сигналов.[?, ?]. В 1980 году возможность использования световых солитонов в одномодовых оптических волокнах была экспериментально под-

тверждена Молленауэром, Столеном и Гордоном [?, ?], что дало мощный толчок развитию нелинейной оптики [?, ?, ?, ?].

Хорошо известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое включает дисперсию групповой скорости и самомодуляцию фазы, является основным нелинейным уравнением, используемым для описания динамики импульсов. Классическое НУШ имеет следующий вид:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ - комплексная функция, $i^2 = -1$ и a - параметры модели. Это уравнение является параболическим, что обуславливает особенности применения численных и аналитических методов для его исследования. Солитоны НУШ имеют форму огибающей группы волн, что позволяет использовать их для описания групповых свойств волнового пакета.

В целях увеличения пропускной способности оптических волокон желательно использовать более короткие импульсы. Но при использовании коротковолновых импульсов возрастает влияние на процесс некоторых физических эффектов, таких как дисперсия высокого порядка [15, ?, ?, ?, ?], самофокусировка [?], и вынужденное комбинационное рассеяние [?, ?]. Для корректного описания поведения оптических импульсов в рамках данных эффектов следует использовать обобщённые нелинейные уравнения Шрёдингера высших порядков. Более того, для описания коротковолновых импульсов необходимо учитывать высшие некерровские нелинейности в математической модели [?, ?, ?, ?, ?]. Как следствие, различные обобщения НУШ обширно исследуются математиками по всему миру. В качестве примера стоит упомянуть работы [?, ?, ?, ?].

Учет всех перечисленных физических факторов существенно усложняет аналитическое исследование процессов, описываемых предлагаемыми математическими моделями. Поэтому с развитием вычислительных возможностей для исследований все чаще используются численные методы.

К примеру, НУШ, как классическое уравнение нелинейной оптики, было исследовано в работах [?, ?]. Эти работы подтвердили неустойчивость постоянных решений и показали, что неустойчивость не растет неограниченно, как ожидалось в линейной теории. Также в этих работах выявлен

тот факт, что решение периодически возвращается к исходным условиям. Это явление, известное как повторяемость, наблюдалось также в работах Ферми, Пасты и Улама. [?]. В дополнение к нелинейной оптике, НУШ находит применение в физике плазмы и теории невязкой жидкости.

Среди первых схем, использованных для численного анализа НУШ, упомянем конечно-разностный и псевдоспектральные методы [?, ?]. Среди более продвинутых работ, стоит упомянуть работы [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?], где дискретизация пространства осуществляется в основном с помощью методов конечных разностей или конечных элементов, а дискретизация времени осуществляется с использованием явных методов с переменным шагом [?, ?], метода расщепления [?], модифицированной схемы Кранка-Николсона [?] и прочих способов. Из-за хорошо изученных свойств, НУШ подходит для валидации новых разрабатываемых численных методов.

1.2 Текущая работа, её цели и задачи

Несмотря на разнообразие предложенных математических моделей, вопрос о том, какая из них наиболее подходит для описания процессов распространения импульсов, остается открытым. В текущей работе исследовано одно из обобщённых уравнений - нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [12]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ - комплекснозначная функция, a , b_1 , b_2 и b_3 - параметры модели. Для случая $b_3 = 0$ исследование уравнения (9) представлено в книге [?].

Результаты работы описаны согласно следующей структуре: В разделе ?? построено аналитическое решение для уравнения (9) в форме уединённой волны с использованием метода неявных функций и метода простейших уравнений [14]. Проиллюстрирована область значений параметров модели, при которых построенное решение существует. В разделе ?? описан ===== we describe a modified split-step Fourier method for modeling the propagation processes described by Eq. (9) and give a simplified flowchart of the program code

for numerical computations. In Section ??, we apply the Fourier method for modeling a solitary wave propagation process described by Eq. (9). In Section ??, we simulate the interaction of a soliton pulse with disturbance in the initial condition. We also simulate the pulse propagation process in the presence of a random noise. We discuss the fact of the soliton stability. In Section ??, we investigate the impact of higher nonlinearity powers on the NLS equation solitary wave propagation. In Section ??, we simulate the NLS equation soliton collisions in the presence of higher nonlinearity terms. Данное уравнение может быть представлено в виде динамической системы, при присутствии возмущения являющейся диссипативной, и требующей анализа с точки зрения режима динамики. Стоит упомянуть работу [22], которая затрагивает анализ аналитически полученных уединённых волн невозмущённого уравнения.

Целями данной работы являются: анализ данного уравнения на предмет возникновения в описываемом физическом процессе хаотического поведения, выявление параметров, при которых данное поведение наблюдается, и подавление потенциально возникающей сложной динамики с помощью добавления корректирующего возмущения.

В работе решаются следующие задачи: выбор определённого возмущения для исходного уравнения, сведение его к виду динамической системы, определение параметров, при которых в данной системе возможен хаос (нахождение гомоклинических фазовых траекторий системы), анализ системы с возмущением на потенциальную возможность возникновения сложной динамики при помощи критерия Мельникова, численный анализ - построение бифуркационных диаграмм в области хаотической динамики в зависимости от параметров системы, численная проверка аналитических результатов, вычисление главного Ляпуновского показателя для системы с возмущением в зависимости от параметра возмущения, подавление обнаруженного сложного поведения при помощи добавления выбранного корректирующего возмущения, анализ скорректированной системы на степень хаотичности, получение достаточных условий на параметры модели для отсутствия хаоса и качественный анализ Ляпуновского показателя для новой системы.

Метод исследования - аналитический анализ, численный анализ.

2 Основная часть

2.1 Возмущённое уравнение Бисваса-Аршеда

Возмущённое уравнение, соответствующее модели, предложенной Бисвасом и Аршедом, имеет вид:

$$\begin{aligned} iq_t + \alpha_1 q_{xx} + \alpha_2 q_{xt} + i(b_1 q_{xxx} + b_2 q_{xxt}) = \\ = i(\lambda(|q|^2 q)_x + \mu(|q|^2)_x q + \nu|q|^2 q_x) - i\varepsilon\omega_0 \sin(\omega_0(x - c_0 t))e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q(x, t)$ - профиль импульса при распространении в оптическом волокне, а $\alpha_1, \alpha_2, b_1, b_2, \lambda, \mu$ и ν - параметры математической модели.

Данный вид возмущения выбран по причине периодичности возмущения, соответствия виду бегущей волны и для упрощения дальнейших выкладок.

2.2 Приведение уравнения к виду динамической системы

Для перехода от уравнения к виду динамической системы будем искать решения (3) в виде бегущей волны:

$$q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega t)}, \quad \text{где } z = x - c_0 t. \quad (4)$$

Вычисляя соответствующие производные от $q(x, t)$, получим:

$$\begin{aligned} q_t &= (-i\omega y - c_0 y_z)e^{i(kx - t\omega)}, \\ q_x &= (iky + y_z)e^{i(kx - t\omega)}, \\ q_{xx} &= (y_{zz} + 2iky_z - k^2 y)e^{i(kx - t\omega)}, \\ q_{xxx} &= (y_{zzz} + 3iky_{zz} - 3k^2 y_z - ik^3 y)e^{i(kx - t\omega)}, \\ q_{xxt} &= (c_0 k^2 y_z - 2ic_0 ky_{zz} - c_0 y_{zzz})e^{i(kx - \omega t)} - i\omega(2iky_z - k^2 y + y_{zz})e^{i(kx - \omega t)}, \\ q_{xt} &= [-i(kc_0 + \omega)y_z + k\omega y - c_0 y_{zz}]e^{i(kx - \omega t)}, \\ (|q|^2 q)_x &= (ik y^3 + 3 y^2 y_z)e^{i(kx - t\omega)}, \\ (|q|^2)_x &= 2y y_z. \end{aligned}$$

Подставляя производные в уравнение (3), получим уравнение:

$$\begin{aligned}
& i(-b_2c_0 + b_1)y_{zzz} + [(2b_2c_0 - 3b_1)k + \omega b_2 - \alpha_2c_0 + \alpha_1]y_{zz} + \\
& + [i(b_2c_0 - 3b_1)k^2 + i(2\omega b_2 - \alpha_2c_0 + 2\alpha_1)k - i\omega\alpha_2 - ic_0]y_z + \\
& + y[k^3b_1 + (-\omega b_2 - \alpha_1)k^2 + \omega\alpha_2k + \omega] = i(3\lambda + 2\mu + \nu)y^2y_z + ik(\nu + \lambda)y \\
& - i\varepsilon\omega_0 \sin(\omega_0(z)).
\end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую часть, приходим к следующей системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}
(2kb_2c_0 - 3kb_1 + \omega b_2 - \alpha_2c_0 + \alpha_1)y_{zz} + \\
+ (k\lambda + k\nu)y^3 + (k^3b_1 - k^2\omega b_2 - k^2\alpha_1 + \omega\alpha_2k + \omega)y = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\{(b_2c_0 - 3b_1)k^2 + (2\omega b_2 - \alpha_2c_0 + 2\alpha_1)k - \omega\alpha_2 - c_0\}y_z + \\
+ (-b_2c_0 + b_1)y_{zzz} + (-3\lambda - 2\mu - \nu)y^2 = -\varepsilon\omega_0 \sin(\omega_0 z).
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение для действительной части выполнится тождественно при следующих ограничениях на параметры математической модели:

$$\begin{cases} k\lambda + k\nu = 0, \\ k^3b_1 - k^2\omega b_2 - k^2\alpha_1 + k\omega\alpha_2 + \omega = 0, \\ -3k^3b_1 + k^2\omega b_2 + 2k^2b_2c_0 + k^2\alpha_1 - k\alpha_2c_0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из системы уравнений (7) получаем условия:

$$\begin{cases} \lambda = -\nu, \\ \omega = \frac{k^2(kb_1 - \alpha_1)}{k^2b_2 - \alpha_2k - 1}, \\ c_0 = \frac{2k^3b_1b_2 - 3k^2\alpha_2b_1 + k\alpha_1\alpha_2 - 3kb_1 + \alpha_1}{2k^3b_2^2 - 3k^2\alpha_2b_2 + k\alpha_2^2 - 2kb_2 + \alpha_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Стоит заметить, что данные условия часто реализуемы на практике - в качестве параметров, на которые накладываются ограничения, берутся те, на которые действительно возможно влиять [22]. Здесь в качестве таких параметров выступают длина волны λ , её частота ω и скорость распространения c_0 .

Уравнение (6) поддаётся интегрированию по z , и при этом запишется в виде:

$$Ay_{zz} + By + Cy^3 = \varepsilon \cos(\omega_0 z) + c_1, \quad (9)$$

где коэффициенты A , B и C определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-b_2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2b_1 + b_2b_1)k + b_1\alpha_2 - \alpha_1b_2}{(2kb_2 - \alpha_2)(k^2b_2 - k\alpha_2 - 1)}, \\ B &= \frac{(-\alpha_1\alpha_2b_2 + \alpha_2^2b_1 + b_1b_2)k^3 + (-3\alpha_1b_2 + 3b_1\alpha_2)k^2 + 3kb_1 - \alpha_1}{(2kb_2 - \alpha_2)(k^2b_2 - \alpha_2k - 1)}, \\ C &= -\frac{2k(-\nu + \mu)}{3}. \end{aligned}$$

Запишем (9) в виде динамической системы, предварительно обозначив $y_z = y_1$, и полагая для удобства дальнейших рассуждений $c_1 = 0$:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -\frac{By}{A} - \frac{Cy^3}{A} + \varepsilon \cos(\omega_0 z). \end{cases} \quad (10)$$

Отметив, что $A \neq 0$, введём обозначения $\frac{B}{A} = a$, $\frac{C}{A} = b$:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3 + \varepsilon \cos(\omega_0 z). \end{cases} \quad (11)$$

Приступим теперь к анализу нелинейных динамических режимов системы (11)

2.3 Гомоклиническая структура динамических систем

Для дальнейших рассуждений понадобятся знания о гомоклинической структуре динамических систем. Пусть система имеет неподвижную точку гиперболического типа. Множество точек, стартуя из которых система в пределе приближается к неподвижной точке, называется *устойчивым многообразием* неподвижной точки. Множество точек, стартуя из которых система в пределе в обратном времени приближается к точке, называется *неустойчивым многообразием* неподвижной точки.

В двумерном случае гиперболическая точка обязана быть седлом, с наличием у лианеризованной матрицы двух вещественных значений боль-

ше и меньше нуля. Устойчивое и неустойчивое многообразие системы представляют собой некоторые кривые в фазовом пространстве, называемые *сепаратрисами*.

Для динамической системы возможно пересечение устойчивой и неустойчивой сепаратрис в некоторой точке Γ_0 , называемой *гомоклинической точкой*. Соответствующая траектория, выходящая из гиперболической точки и входящая в неё же называется *гомоклинической траекторией*. Наличие такой точки, как доказано, ведёт к появлению в системе так называемой гомоклинической структуры и связанной с ней сложной динамики. Фазовые траектории, выходящие из одной седловой точки, и заканчивающиеся в пределе в другой седловой точке, называются *гетероклиническими*.

2.4 Подкова Смейла и гомоклиническая точка

Понятие гомоклинической точки очень тесно связано с другим хорошо изученным объектом теории хаоса в динамических системах - подковой Смейла, также имеющим сложную структуру. Более того, существование в системе структуры типа подковы Смейла влечёт существование гомоклинической точки, и наоборот.

Рассмотрим гомоклиническую точку и квадратную окрестность D вокруг неё, приведённую на

Через k итераций окрестность D вытянется вдоль неустойчивой сепаратрисы, представляя собой область $F^k(D)$. С другой стороны, m итераций назад, область D представляла собой растянутую вдоль устойчивой сепаратрисы область $F^{-m}(D)$. В итоге после большого числа итераций область приобретает всё более сложную структуру, в соответствии с отображением типа подковы Смейла.

2.5 Критерий Мельникова

При отсутствии диссипации в системе устойчивая и неустойчивая сепаратрисы плавно переходят друг в друга, как, например, на

При включении внешнего возмущения система перестаёт быть консервативной, и форма сепаратрис меняется. При определённых условиях сепаратрисы могут претерпеть пересечение с образованием гомоклинической точки. Ответ, при каких именно условиях в системе образуется гомоклиническая структура, и даёт критерий Мельникова, описанный в 1963 году в работе [24].

Рассмотрим динамическую систему с возмущением:

$$\vec{x}_t = \vec{f}(x) + \varepsilon \cdot \vec{g}(x, t), \quad (12)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, $\vec{f} = (f_1, f_2)^T$, $\vec{g} = (g_1, g_2)^T$, $0 < \varepsilon \ll 1$, функции f и g ограничены и принадлежат классу дифференцируемых функций.

Пусть при $\vec{g} \equiv \vec{0}$ система является Гамильтоновой:

$$\begin{cases} x_t = H_p \\ p_t = -H_x, \end{cases} \quad (13)$$

где $x \equiv x_1$, $p \equiv x_2$, $H_p = \frac{\partial H}{\partial p}$, $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$

Пусть в системе имеется точка равновесия типа седла, так что неустойчивая сепаратриса возвращается в неё, пройдя через петлю. Пусть на систему наложено внешнее воздействие так, что

$$\begin{cases} x_t = H_p + \varepsilon \cdot f(x, p, t) \\ p_t = -H_x + \varepsilon \cdot g(x, p, t), \end{cases} \quad (14)$$

где ε - малый параметры, а функции f и g являются периодическими по t .

Обозначим $x = X(t)$, $p = P(t)$ решение невозмущённой системы, задающее гомоклиническую траекторию. Будем искать решение возмущённой задачи в следующем виде:

$$\begin{cases} x(t) = X(t) + \varepsilon \cdot \tilde{x}(t) \\ p(t) = P(t) + \varepsilon \cdot \tilde{p}(t), \end{cases} \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) позволяет найти уравнения для $\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)$

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = f(X(t), P(t), t) \\ \tilde{p}_t = g(X(t), P(t), t), \end{cases} \quad (16)$$

На невозмущённой сепаратрисе вектор скорости движения фазовой точки имеет компоненты (\dot{X}, \dot{P}) . Ему ортогонален вектор с компонентами $(-\dot{P}, \dot{X})$. Скалярное произведение последнего вектора на вектор возмущения (\tilde{x}, \tilde{p}) можно рассматривать как меру смещения фазовой точки от невозбуждённой сепаратрисы. Данное скалярное произведение называется *расстоянием Мельникова*, и обозначая его символом D , получим:

$$D = -\dot{P} \cdot \tilde{x} + \dot{X} \cdot \tilde{p} = H_X(X, P) \cdot \tilde{x} + H_P(X, P) \cdot \tilde{p}. \quad (17)$$

Вычисляя производную по t от D , запишем:

$$\dot{D} = H_{XX}\dot{X}\tilde{x} + H_{XP}\dot{P}\tilde{x} + H_X\dot{\tilde{x}} + H_{PX}\dot{X}\tilde{p} + H_{PP}\dot{P}\tilde{p} + H_P\dot{\tilde{p}}. \quad (18)$$

Учитывая выражения (13) и (16), выражение упрощается:

$$\dot{D} = H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t). \quad (19)$$

Далее, рассмотрим решения уравнений (16) для стартовых точек из устойчивого и неустойчивого многообразий возмущённой системы - $(\tilde{x}_s, \tilde{p}_s)$ и $(\tilde{x}_u, \tilde{p}_u)$. Заметим, что расстояния Мельникова для обоих решений будут удовлетворять одному уравнению (19), но разным условиям на плюс и минус бесконечностях по времени, выражающих факт стремления решений к неподвижной точке: $\tilde{x}_u(-\infty) = \tilde{x}_s(+\infty)$, $\tilde{p}_u(-\infty) = \tilde{p}_s(+\infty)$. Тогда для расстояния Мельникова выполняется $D_u(-\infty) = D_s(+\infty)$.

Интегрируя (19) для произвольного момента времени $t = \tau$, запишем:

$$\begin{aligned} D_u(\tau) &= D_u(-\infty) + \int_{-\infty}^{\tau} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt \\ D_s(\tau) &= D_s(+\infty) - \int_{\tau}^{+\infty} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt \end{aligned}$$

Вычитая последние равенства друг из друга, получаем расстояние по Мельникову между устойчивой и неустойчивой возмущёнными сепаратрисами:

$$\begin{aligned} \Delta &= D_u(\tau) - D_s(\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt \end{aligned} \quad (20)$$

Сдвигая начало отсчёта для решений невозмущённой системы на произвольную константу θ , получается однопараметрическое семейство решений. То есть при подстановке в (20) решений $X(t + \theta), P(t + \theta)$ получается функция $\Delta(\theta)$, называемая *функцией Мельникова*.

Если функция $\Delta(\theta)$ знакопеременная, то это свидетельствует о наличии трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки возмущённой динамической системы, и служит необходимым признаком присутствия гомоклинической структуры, а так же связанной с ней сложной динамики.

Данное утверждение включает в себе суть критерия Мельникова.

Стоит отметить, что и в случае наличия гетероклинических структур в динамической системе, при определённых параметрах также возможно проявление сложной динамики.

2.6 Анализ стационарных точек системы

Далее, для исследуемой системы необходимо определить, при каких параметрах могут наблюдаться неподвижные точки гиперболического типа (седла). Для этого проанализируем все возможные случаи с целью нахождения седловых точек.

Рассмотрим систему (11) без возмущения и найдём её стационарные точки. При $\varepsilon = 0$ система запишется в виде:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3. \end{cases} \quad (21)$$

В качестве стационарных имеем:

$$\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}_{2,3} = \begin{pmatrix} \pm i \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Заметим, что все точки лежат на оси $y_1 = 0$. Устойчивость стационарных точек полученной системы определяется собственными значениями следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ -a - by^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Введём обозначения:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

При действительных значениях $\frac{a}{b}$ точки Y_1 и Y_2 лежат на мнимой оси, стационарной точкой является Y_0 .

В зависимости от значений параметров a и b возможны следующие шесть случаев.

Случай 1: $a = 0, b > 0$.

Тип устойчивости единственной стационарной точки $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует вырожденной матрице с двумя собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Вырожденный случай, нас не интересующий.

Случай 3: $a < 0, b > 0$.

Тип устойчивости стационарных точек Y_1 и Y_2 - центр. λ_1 и λ_2 - мнимые и комплексно-сопряжённые.

В точке Y_0 неустойчивость типа седло: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Случай 4: $a > 0, b < 0$.

Тип устойчивости стационарных точек Y_1 и Y_2 - седло. $\lambda_1 = \sqrt{2}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Тип устойчивости Y_0 соответствует центру: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

Случай 5: $a > 0, b > 0$.

Единственная точка Y_0 устойчивость типа центр: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

Случай 6: $a < 0, b < 0$.

Единственная точка Y_0 соответствует неустойчивости типа седло: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Гомоклинических петель в таком случае возникнуть не может.

Анализ устойчивости стационарных точек в зависимости от параметров невозмущённой системы представлен в таблице 1:

Условия на параметры \ Стационарная точка	Y_0	Y_1	Y_2
$a = 0, \text{ и } b > 0$	вырожден	-	-
$a = 0, \text{ и } b < 0$	вырожден	-	-
$a < 0, \text{ и } b > 0$	седло	центр	центр
$a > 0, \text{ и } b < 0$	центр	седло	седло
$a > 0, \text{ и } b > 0$	центр	-	-
$a < 0, \text{ и } b < 0$	седло	-	-

Таблица 1: Типы устойчивости стационарных точек невозмущённой системы (11): Y_0, Y_1, Y_2 в зависимости от параметров a и b [23].

2.7 Гомоклинические и гетероклинические орбиты

Основываясь на анализе стационарных точек и выражении для гамильтониана невозмущённой системы можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 1 . *Динамическая система (21) обладает гетероклиническими и гомоклиническими траекториями при условиях.*

(i). *При $a > 0, b < 0$ стационарные точки типа седла Y_1 и Y_2 соединяют две гетероклинические орбиты Γ_{1he}^+ и Γ_{1he}^- .*

(ii). *При $a < 0, b > 0$ стационарная точка Y_0 типа седла соединена сама с собой двумя гомоклиническими орбитами Γ_{2ho}^+ и Γ_{2ho}^- .*

Найдём явные выражения для гомо- и гетероклинических орбит невозмущённой системы. Орбиты Γ_{2ho}^- и Γ_{2ho}^+ , проходящие через седловую точку Y_0 , можно найти из выражения для линии уровня гамильтониана $H(y, y_1) = 0$.

Гамильтониан невозмущённой системы (11) имеет вид:

$$H(y, y_1) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{4}by^4. \quad (25)$$

Учитывая что $y_1 = \frac{dy}{dz}$, получим, что зависимость $y(z)$ выражается с помощью интеграла:

$$\pm(z - z_0) = \int_{y(z_0)}^{y(z)} \frac{1}{t\sqrt{-a - \frac{b}{2}t^2}} dt. \quad (26)$$

Для орбит Γ_{2ho}^\pm при $a < 0, b > 0$ имеем:

$$\pm(z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{-a}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2(z_0)}{2a}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2}{2a}} \right) \right).$$

Положим $y(z_0) = \sqrt{-\frac{2a}{b}}$ при $z_0 = 0$. Тогда выражение для орбит Γ_{2ho}^\pm :

$$\pm z = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2}{2a}} \right). \quad (27)$$

Откуда находим выражения для $y(z)$ и $y_1(z)$:

$$\Gamma_{2ho}^+ \begin{cases} y(z) = \sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a} t), \\ y_1(z) = -\sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a} t) \tanh(\sqrt{-a} t). \end{cases} \quad (28)$$

$$\Gamma_{2ho}^- \begin{cases} y(z) = -\sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a} t), \\ y_1(z) = \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a} t) \tanh(\sqrt{-a} t). \end{cases} \quad (29)$$

Вследствие громоздких выражений для гетероклинических орбит ограничимся рассмотрением найденных выражений. Зная явный вид гомоклинических орбит системы (29), можно исследовать гомоклинический хаос в системе путём построения функции Мельникова.

2.8 Применение метода Мельникова к динамической системе (11)

Учитывая в исходном уравнении периодическое возмущение, запишем динамическую систему (11) в виде:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3 + \varepsilon F(z), \end{cases} \quad (30)$$

где $F(z) = \cos(\omega_0 z)$, $\varepsilon \ll 1$.

Гомоклинические орбиты Γ_{2ho}^\pm наблюдаются в системе при $\varepsilon = 0$. Учёт возмущения может разрушить гомоклинические траектории и привести к появлению сложной динамики. С учётом вида возмущения и выражений для гомоклинических траекторий (28) и (29), рассчитаем расстояние Мельникова вдоль Γ_{2ho}^+ . Получим однопараметрическое семейство расстояний сдвигом временной переменной решения на z_0 :

$$\begin{aligned} \Delta_2^\pm(z_0) &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} y_1(z - z_0) \varepsilon \cos(\omega_0 z) dz = \\ &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}(z - z_0)) \tanh(\sqrt{-a}(z - z_0)) \varepsilon \cos(\omega_0 z) dz, \\ \Delta_2^\pm(z_0) &= \mp \varepsilon \sqrt{\frac{2}{b}} \omega_0 \pi \sec\left(\frac{\pi i \omega_0}{2\sqrt{-a}}\right) \sin(\omega_0 z_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Функция Мельникова (31) имеет простые нули при любых значениях параметра возмущения, что, согласно критерию Мельникова, говорит о возможности возникновения в системе хаоса типа подковы Смейла и потенциальном наличии сложной динамики.

Для контроля обнаруженного в системе хаоса добавим в (30) дополнительное возмущение величины $-\xi y_1$, с целью организации периодического режима динамики в системе:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3 + \varepsilon F(z) - \xi y_1, \end{cases} \quad (32)$$

и построим функцию Мельникова системы (32) вдоль орбиты Γ_{2ho}^+ с учётом нового возмущения.

$$\begin{aligned} \Delta_{2\xi}^\pm(z_0) &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} y_1(z - z_0) (\varepsilon \cos(\omega_0 z) - \xi y_1(z - z_0)) dz = \\ &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}(z - z_0)) \tanh(\sqrt{-a}(z - z_0)) \varepsilon \cos(\omega_0 z) dz - \\ &\quad - \frac{2a^2\xi}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{-a}(z - z_0)) \tanh^2(\sqrt{-a}(z - z_0)) dz = \\ &= \mp \varepsilon \sqrt{\frac{2}{b}} \omega_0 \pi \sec\left(\frac{\pi i \omega_0}{2\sqrt{-a}}\right) \sin(\omega_0 z_0) - \frac{4a^2\xi}{3b\sqrt{-a}}, \end{aligned} \quad (33)$$

Чтобы функция Мельникова (33) не имела простых нулей нужно, чтобы амплитуда первого слагаемого не превышала амплитуды второго, откуда получаем условие на параметры возмущения и коррекции:

$$\frac{\xi}{\varepsilon} \geq \left| \frac{3i\sqrt{2b}}{4a\sqrt{a}} \omega_0 \pi \sec\left(\frac{\pi i \omega_0}{2\sqrt{-a}}\right) \right| \quad (34)$$

Условие для возникновения гомоклинического хаоса (34) в зависимости от отношения параметров $\frac{\xi}{\varepsilon}$ и частоты возмущающей силы ω_0 представлено на Рис.(??).

3 Реализация программ для численного анализа

Проверим аналитические результаты из предыдущего раздела путём построения бифуркационной диаграммы и фазовых портретов системы (30).

Численную реализацию будем осуществлять с помощью программного пакета MATLAB. Реализуем следующие функции:

1) Построение фазового портрета возмущённой системы (30) в зависимости от всех входящих параметров

```
1 global a b param n_param omega0;
2
3 opts = odeset('RelTol',2.22045e-8,'AbsTol',1e-8); %задаём параметры ode45
4
5 a=-4; b=1; param=1; n_param=0; omega0=1; %начальные параметры системы
6
7 y0=sqrt(abs(-2*a/b)); y10=0; %берём начальную точку на гомоклинической петле
8 yst1=i*sqrt(a/b);
9 yst2=-i*sqrt(a/b);
10
11 [tpre,Ypre] = ode45(@sys1,[0 300],[y0; y10],opts); %установление картины
12
13 sis=max(size(Ypre)); %конечная точка установления - начальная для нового
14 % расчёта
15 Yinit=Ypre(sis,:);
16 Tinit=tpre(sis);
17
18 [t,Y] = ode45(@sys1,[Tinit Tinit+500],Yinit,opts); %вычисление решения
19
20 figure; %отрисовка фазового портрета
21 plot(Y(:,1),Y(:,2),'-','Color',[0.6 0.6 1],'LineWidth',0.1);
22 grid on; axis on equal; hold on; xlabel('y'); ylabel('y1');
23
24 function dydt = sys1(t,Y) %система ДУ
25 global a b param n_param omega0;
26 dydt = [Y(2); -a*Y(1) - b*Y(1)^3 + param*cos(omega0*t) - n_param*Y(2)];
27 end
```

2) Построение сечения Пуанкаре для решения

Построение будем производить по прямой $y_1 = 0$. В этом случае сечение Пуанкаре представляет собой набор точек, расположенных на прямой.

```

1 function [res, n]=Poincare(a,b,RelErr,AbsErr,TEstabl,y0,y10,...
2                               TPoincare,omega,epsilon)
3     opts = odeset('RelTol',RelErr,'AbsTol',AbsErr); %задание настроек
4     %численного решения
5     [tpre,Ypre] = ode45(@(t,Y) sys1(t,Y,a,b,omega,epsilon),[0 TEstabl],...
6                               [y0; y10],opts); %установка режима
7     siz=max(size(Ypre));
8     Yinit=Ypre(siz,:); Tinit=tpre(siz);
9     [t,Y] = ode45(@(t,Y) sys1(t,Y,a,b,omega,epsilon),...
10                               [Tinit Tinit+TPoincare],Yinit,opts); %вычисление решения
11     osx=[-30 30];
12     osy=[0 0];
13     res=polypoly(osx, osy, Y(:,1), Y(:,2)); %координаты точек сечения
14     n=max(size(res)); %количество точек в сечении
15 end
16 function dydt = sys1(t,Y,a,b,omega,epsilon) %возмущённая система
17     dydt = [Y(2); -a*Y(1)-b*Y(1)^3+epsilon*cos(omega*t)];
18 end

```

3) Построение бифуркационной диаграммы

В зависимости от параметра a будем вычислять сечения Пуанкаре и выстраивать их на одной бифуркационной диаграмме.

```

1 N=600; %количество сечений Пуанкаре
2 a=linspace(-5,3,N); b=1; %диапазоны параметров
3 RelErr=2.22045e-8; AbsErr=1e-8; %настройки, передаваемые в ode45
4 TEstabl=30; %время на установление
5 y10=0;
6 TPoincare=300; %время на расчёт сечения
7 omega=1; epsilon=1; %константы системы
8 figure;
9 hold on; grid on; axis on equal;
10 for k=1:1:N
11     [Y,n]=Poincare(a(k),b,RelErr,AbsErr,TEstabl,sqrt(abs(-2*a(k)/b)),y10,...
12                               TPoincare,omega,epsilon);
13     X=repelem(a(k), n);
14     plot(X,Y,'marker','.', 'color','k','linestyle','none','markersize',0.1);
15 end
16 xlabel('параметр a'); ylabel('сечение');

```

4) Вычисление главного Ляпуновского показателя

```

1 function res=LapParam(param)
2 global a b n_param omega0;
3     opts = odeset('RelTol',2.22045e-8,'AbsTol',1e-8);
4     a=-4; b=1; n_param=1; omega0=1; %задание параметров системы
5     y0=sqrt(abs(-2*a/b)); y10=0; %задание начальной точки
6     [tpre,Ypre] = ode45(@sys1,[0 300],[y0; y10],opts); %установка
7     Y0=Ypre(end,:);
8     Tinit=tpre(end);
9     epsilonV=[0.001; 0.001]; %возмущение для каждого следующего шага
10    Enorm=norm(epsilonV); %его норма
11    N=500; dt=0.1; %количество итераций и промежутков времени на каждую
12    lnP=0; %сумматор
13    for n=0:1:N-1
14        [t1,Y1] = ode45(@sys1,[Tinit+n*dt Tinit+(n+1)*dt],Y0,opts); %решение
15        %для невозмущённых данных (исходная система)
16        [t2,Y2] = ode45(@(t2,Y2) sysLIN(t2,Y2,Y0+epsilonV,Tinit+n*dt),[Tinit+...
17        +n*dt Tinit+(n+1)*dt],Y0+epsilonV,opts); %решения для возмущённых
18        %данных (линеаризованная система)
19        E1=Y1(end,:);
20        E2=Y2(end,:);
21        Y0=E1; %конечная точка решения для невозмущённых данных станет новой
22        %начальной
23        epsilonV=Enorm*E2/norm(E2); %нормирование вектора возмущения
24        lnP=lnP+(log(norm(E2-E1)/Enorm)); %добавление относительной разницы
25        %(приращения) отклонения возмущённой траектории в сумматор
26    end
27    res=lnP/(N*dt);
28 end
29 function dydt = sys1(t,Y)
30 global a b param n_param omega0;
31     dydt = [Y(2); -a*Y(1)-b*Y(1)^3+param*cos(omega0*t)-n_param*Y(2)];
32 end
33 function dydt = sysLIN(t,Y,EV,t0) %линеаризованная система в точке EV
34 global a b param n_param omega0;
35     y0=EV(1); y10=EV(2);
36     dydt = [Y(2); -a*y0-b*y0^3-a*(Y(1)-y0)-3*b*(y0)^2*(Y(1)-y0)+...
37     +param*cos(omega0*t0)-param*sin(omega0*t0)*(t-t0)-n_param*Y(2)];
38 end

```

5) Построение бифуркационной диаграммы для главного показателя

Ляпунова

Будем производить расчёт, варьируя величину возмущения

```

1 N=600; %количество точек для расчёта (значений параметра возмущения)
2 PARAM=linspace(0,2,N); %диапазон значений параметра возмущения
3 figure;
4 hold on; grid on; axis on;
5 LPAR=zeros(1,N);
6 parfor k=1:N %вычисление показателей Ляпунова
7     LPAR(k)=LapParam(PARAM(k));
8 end
9 plot(PARAM,LPAR,'marker','.','color','k','linestyle','-','markersize',0.1);
10 xlabel('параметр возмущения'); ylabel('главный ляпуновский показатель');

```

4 Численный анализ

Зафиксируем параметры возмущения $\varepsilon = 1$, $\omega_0 = 1$ и параметр $b = 1$, и будем варьировать параметр a от области квазипериодического поведения к области хаотической динамики.

Из численного анализа видно, что в области $a < 0$ в системе, описываемой уравнениями (11), действительно проявляется сложная динамика.

Для параметров модели, соответствующих фазовому портрету Рис.??, значение амплитудного параметра контролирующего возмущения, согласно условию (34), лежит в диапазоне от $\xi = 0.315$. Применим найденное условие с соответствующим параметром корректирующего возмущения для решения системы, соответствующего фазовому портрету на Рис.?. В результате организуется периодический режим динамики (Рис.?).

Далее, рассчитаем главный показатель Ляпунова в зависимости от параметра возмущения ε . Получим график Рис.?. При добавлении корректирующего возмущения согласно полученному условию, рассчитаем главный показатель Ляпунова при остальных неизменных параметрах. По качественному изменению величины показателя Ляпунова можно судить о степени подавления хаотической динамики в системе (Рис.?).

Стоит отметить неожиданное упорядочивание фазовой траектории в некоторых окнах на бифуркационной диаграмме. Данное явление есть следствие непредсказуемости поведения системы в состоянии хаотической динамики.

Ещё одно явление, наблюдаемое в процессе работы в поведении системы, заключается в разделении фазового пространства на два бассейна притяжения при некотором отрицательном параметре a . При значениях $\varepsilon = 1$, $b = 1$ и $\omega_0 = 1$ точка разделения бассейнов притяжения находится в районе $a = -11.7$. При таком режиме область локализации фазового состояния системы существенно зависит от начальных данных. Система будет находиться на одном из двух аттракторов в зависимости от начального положения.

5 Заключение

В текущей работе рассмотрено уравнение Бисваса-Аршеда с периодическим возмущением вида бегущей волны. Приведённое уравнение используется при описании распространения импульсов в оптическом волокне наравне с рядом других математических моделей, основанных на нелинейном уравнении Шрёдингера.

Исследуемое уравнение в частных производных не относится к типу интегрируемых уравнений, поэтому при построении его решений используются переменные бегущей волны. После ряда преобразований нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение сведено к динамической системе.

Основной вопрос, изученный в работе, состоял в определении возможности возникновения хаоса в системе при действии периодической внешней силы. С этой целью для исследования вопроса использован метод Мельникова. На основании построенной функции Мельникова сделан вывод о том, что необходимое условие возникновения динамического хаоса в динамической системе соответствующей исходному уравнению Бисваса-Аршеда выполняется. В качестве прочих вопросов исследовано, при каких параметрах достигается сложная динамика, и предложен вариант стабилизации системы при помощи перехода к периодическому режиму. Получено условие на параметры возмущений (исходного и корректирующего), при которых возможно подавление хаотической динамики.

Теоретические выполненные оценки подтверждены с помощью чис-

ленных расчетов. Построенная бифуркационная диаграмма подтверждает, что в динамической системе при определённых параметрах возможно образование динамического хаоса типа подковы Смейла. С помощью метода Мельникова найдены ограничения на параметры системы с контроллером, при которых в ней отсутствует хаос. При внесении в систему выбранного контролирующего возмущения организован периодический режим динамики. Рассчитан главный показатель Ляпунова для возмущённой системы. При внесении дополнительного возмущения обнаружено его качественное уменьшение, что свидетельствует, помимо фазовых портретов, о стабилизации динамики.

Данная работа позволяет подобрать параметры физического процесса, при которых последний ведёт себя устойчиво и предсказуемо во времени, а исследуемое уравнение при выбранных параметрах описывает стабильную передачу оптических импульсов.

Литература

- [1] *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. – М.: Физматлит, 2005.
- [2] *Anjan Biswas, Swapan Konar* Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons / Anjan Biswas, Swapan Konar –Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [3] *Biswas A.* Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis // Optik. – 2018. – Vol. 171. – P. 217-220.
- [4] *Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А.* Применение метода Мельникова к уравнению Трики-Бисваса // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ – 2021. – Т. 10, № 4. – С. 308-317.
- [5] *Biswas A. Yildirimd Y. Zhou Q.* Optical soliton solutions to Fokas-lenells equation using some different methods // Optik. – 2018. – Vol. 173. – P. 21-31.
- [6] *Kudryashov N. A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation // Optik. – 2019. – Vol. 186. – P. 339-349.
- [7] *Kadkhoda N., Jafari H.* Analytical solutions of the Gerdjikov–Ivanov equation by using $\exp(-\varphi(\xi))$ - expansion method // Optik. – 2017. – Vol. 139. – P. 72-76.
- [8] *A. Biswas, Y. Yildirimd, E. Yasard, Q. Zhoue* Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified simple equation method // Optik. – 2018. – Vol. 160. – P. 24-32.

- [9] *Ekici M.* Optical solitons in $(2+1)$ -Dimensions with Kundu–Mukherjee–Naskar equation by extended trial function scheme // Chinese journal of physics. – 2019. – Vol. 57. – P. 72-77.
- [10] *Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А.* Метод Мельникова для обобщенного уравнения Дуффинга // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ – 2021. – Т. 10, № 2. – С. 135-142.
- [11] *Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А.* Нелинейные динамические процессы, описываемые обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ – 2021. – Т. 9, № 2. – С. 129-138.
- [12] *Кузнецов С. П.* Динамический хаос / Кузнецов С. П. – М.: Физматлит, 2001.
- [13] *T. Y. Li and J. A. Yorke* Period Three Implies Chaos // The American Mathematical Monthly – 1975. – Vol. 82, No. 10. – P.985-992.
- [14] *Лоскутов А. Ю.* Динамический хаос. Системы классической механики / Лоскутов А. Ю. – Успехи физических наук, 2007. – Т. 177. – №. 9.
- [15] *M. Lakshmanan, S. Rajasekar* Nonlinear Dynamics. Integrability, Chaos, and Patterns / M. Lakshmanan, S. Rajasekar – Springer, 2003.
- [16] *M. Siewe Sieweab C.Tchawouab P.Wofo* Melnikov chaos in a periodically driven Rayleigh–Duffing oscillator //Mechanics Research Communications – 2010. – Vol. 37, Issue 4, P. 363-368.
- [17] *Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс – Институт компьютерных исследований, 2002.
- [18] *Holmes P.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1979. – Vol. 292, No. 1394. – P. 419-448.

- [19] *Erik M. Bollt, James D. Meiss* Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence // Phys. Lett. A. – 1995. – Vol. 204. – P.373-378.
- [20] *Li G. X., Moon F. C.* Criteria for chaos of a three-well potential oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits // Journal of Sound and Vibration. – 1990. – Vol. 136, No. 1. – P. 17-34.
- [21] *A. Biswas, S. Arshed* Optical solitons in presence of higher order dispersion and absence of self-phase modulation // Optik – 2018. – Vol. 184. – P. 452–459.
- [22] *Kudryashov N. A.* Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation // Optik - 2020. Vol. 200.
- [23] *В.А. Медведев, С.Ф. Лаврова, Н.А. Кудряшов* Применение метода Мельникова для анализа уравнения Бисваса-Аршеда // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ – 2022. – Т. 10, № 6. – С. 516-522.
- [24] *Melnikov V. K.* On stability of center periodically perturbed // Trudy Mosc. Mat. Ob. – 1963. – Vol. 12. – P. 3-52.