

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

На правах рукописи
УДК 517.9

МЕДВЕДЕВ ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Выпускная квалификационная работа магистра

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Выпускная квалификационная
работа защищена
«_____» 20__ г.
Оценка _____
Секретарь ГЭК _____ Чмыхов М.А.

г.Москва 2024

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к выпускной квалификационной работе на тему:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Студент–дипломник _____ Медведев В.А.

Руководитель проекта _____ д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А.

Рецензент _____ к.ф.-м.н., доцент Чмыхов М.А.

Зав. кафедрой №31 _____ д.ф.-м.н., профессор Кудряшов Н.А.

Реферат

Отчет 43 страницы, 1 часть., 26 рисунков, 0 таблиц, 41 источник, 0 приложений.

Ключевые слова: обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера, псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных

Объектом исследования является уравнение в частных производных, описывающее распространение импульсов в оптоволокне.

Цель работы - построить оптические солитоны для исследуемого уравнения, численно исследовать процессы их распространения при различных начальных условиях, сравнить численные результаты с аналитическими и исследовать влияние старших степеней нелинейности на решения классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Метод проведения работы: последовательное применение приёмов поиска частных решений уравнений в частных производных, численное исследование аналитических решений при помощи конечно-разностного метода и псевдоспектрального метода Фурье, математическое моделирование.

Результаты работы: для существования полученных аналитически оптических солитонов исследуемого уравнения определена область допустимых параметров математической модели. Представлена модификация конечно-разностного метода и псевдоспектрального метода Фурье для численного исследования процессов распространения импульсов в рамках исследуемой модели. Дано сравнение аналитического решения с результатами численных расчётов. Исследован процесс распространения оптического солитона исследуемого уравнения при возмущении начальных данных и в условиях случайного шума. Обсуждён факт численной устойчивости найденных аналитических решений. Проанализировано влияние нелинейных членов пятой и седьмой степеней на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Изучены процессы столкновения солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера при влиянии нелинейных членов пятой и седьмой степеней. Показано, что столкновения носят неупругий характер.

Область применения: проектирование оптоволоконных линий.

Экономическая эффективность или значимость работы: позволяет при определённой выбранной математической модели, описывающей физический процесс распространения импульсов в оптоволокне, подобрать параметры для построения устойчивых импульсов, пригодных для передачи сигналов.

Оглавление

1	Введение	4
1.1	Роль солитонов в передаче сигналов	4
1.2	Текущая работа, её цели и задачи	6
2	Аналитический анализ	8
2.1	Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями	8
2.2	Модификации численных методов для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями .	12
3	Численный анализ	15
3.1	Сравнение и валидация численных методов решения задачи распространения оптических импульсов	15
3.2	Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями	16
3.3	Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях .	18
3.4	Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны	19
3.5	Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности	33
4	Заключение	36
5	Коды программ, использованных в работе	36
5.1	Функции, определяющие аналитические решения	37

1 Введение

1.1 Роль солитонов в передаче сигналов

За последние пару десятилетий область телекоммуникаций претерпела существенную эволюцию благодаря впечатляющему прогрессу в разработке оптических волокон, оптических усилителей, передатчиков и приемников. В современной оптической системе связи линия передачи состоит из оптических волокон и усилителей, составляющих волновод [1]. Основная идея волновода состоит в том, чтобы направлять луч света, используя изменение показателя преломления в поперечном направлении, чтобы заставить свет проходить по четко определенному каналу. Зависимость показателя преломления от поперечного направления, направления, перпендикулярного тому, в котором распространяется волна, может быть непрерывной или дискретной. Но в любом из случаев показатель преломления максимальен в канале, по которому требуется направлять свет.

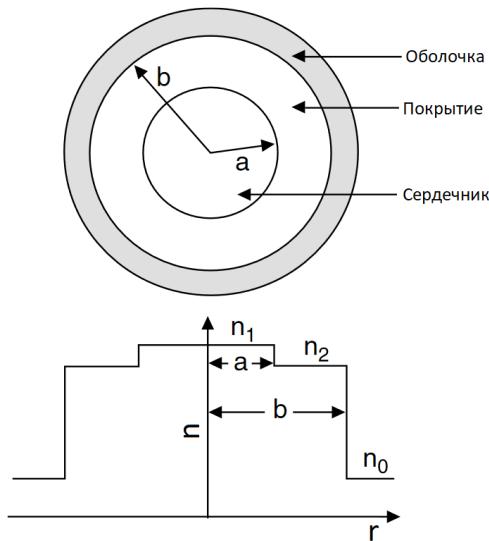


Рис. 1: Зависимость показателя преломления от радиуса поперёк оптического кабеля[2]

В 1973 году, Акира Хасегава и Фредерик Тапперт сформулировали условия существования световых оптических солитонов в одномодовых оптических волокнах и предположили возможность их использования при передаче сигналов.[3, 4]. В 1980 году возможность использования световых солитонов в одномодовых оптических волокнах была экспериментально подтверждена Молленгаузером, Столеном и Гордоном [5, 6], что дало мощный толчок развитию нелинейной оптики [7, 8, 9, 10].

Хорошо известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое включает дисперсию групповой скорости и самомодуляцию фазы, является основным нелинейным уравнением, используемым для описания динамики импульсов. Классическое

НУШ имеет следующий вид:

$$iu_t + au_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ - комплексная функция, $i^2 = -1$ и a - параметры модели. Это уравнение является параболическим, что обуславливает особенности применения численных и аналитических методов для его исследования. Солитоны НУШ имеют форму огибающей группы волн, что позволяет использовать их для описания групповых свойств волнового пакета.

Для увеличения пропускной способности оптических волокон современные системы передачи используют всё более короткие импульсы. Но при использовании коротковолновых импульсов возрастает влияние на процесс некоторых физических эффектов, таких как дисперсия высокого порядка [11, 12, 13, 14, 15], самофокусировка [16], и вынужденное комбинационное рассеяние [17, 18]. Для корректного описания поведения оптических импульсов в присутствии данных эффектов, классическое НУШ обобщается - в уравнение вводятся производные высших порядков, уточняющие процессы дисперсии, и нелинейные члены высших порядков, описывающие процессы дисперсии [19, 20, 21, 22, 23]. Как следствие, различные обобщения НУШ обширно исследуются математиками по всему миру. В качестве примера стоит упомянуть работы [24, 25, 26, 27].

Учет всех перечисленных физических факторов существенно усложняет аналитическое исследование процессов, описываемых предлагаемыми математическими моделями. Поэтому с развитием вычислительных возможностей для исследований все чаще используются численные методы.

К примеру, НУШ, как классическое уравнение нелинейной оптики, было численно исследовано в работах [28, 29]. Эти работы подтвердили неустойчивость постоянных решений и показали, что неустойчивость не растет неограниченно, как ожидалось в линейной теории. Также в этих работах выявлен тот факт, что решение периодически возвращается к исходным условиям. Это явление, известное как повторяемость, наблюдалось также в работах Ферми, Пасты и Улама. [30]. В дополнение к нелинейной оптике, НУШ находит применение в физике плазмы и теории невязкой жидкости.

Среди первых схем, использованных для численного анализа НУШ, упомянем конечно-разностный и псевдоспектральные методы [28, 31]. Среди более продвинутых работ, стоит упомянуть работы [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], где дискретизация пространства осуществляется в основном с помощью методов конечных разностей или конечных элементов, а дискретизация времени осуществляется с использованием явных методов с переменным шагом [32, 33], метода расщепления [34], модифицированной схемы Кранка-Николсона [35] и прочих способов. Из-за хорошо изученных свойств, НУШ подходит для валидации новых разрабатываемых численных методов.

1.2 Текущая работа, её цели и задачи

Несмотря на разнообразие предложенных математических моделей, вопрос о том, какая из них наиболее подходит для описания процессов распространения импульсов, остается открытым. В представленной квалификационной работе исследовано одно из обобщённых уравнений - нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [39]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ - комплекснозначная функция, a, b_1, b_2 и b_3 - параметры модели. Для случая $b_3 = 0$ исследование уравнения (2) представлено в книге [6].

Целями настоящей работы являются:

1. Аналитическое нахождение точного решения представленного уравнения;
2. Исследование факта устойчивости аналитического решения с помощью численного моделирования процессов распространения оптических импульсов;
3. Изучение влияния нелинейных членов высших степеней в исследуемой математической модели.

В работе решаются следующие задачи:

1. Построение аналитического решения исходного уравнения в виде уединённой волны с использованием метода прямых вычислений;
2. Определение области параметров модели, при которых построенное решение существует;
3. Модификация методов расщепления для численного решения задачи распространения оптических импульсов, описываемых математической моделью;
4. С целью установления факта устойчивости построенных решений - численное моделирование процессов:
 - (a) Распространения построенной уединённой волны;
 - (b) Распространения построенных солитонов при наличии возмущений в начальных условиях;
 - (c) Распространения построенных солитонов при наличии возмущений в уравнении;
 - (d) Взаимодействия построенных солитонов друг с другом в присутствии возмущений в математической модели.

Результаты работы представлены в следующем порядке. В разделе 2.1 построено аналитическое решение для уравнения (2) в форме уединённой волны с использованием метода неявных функций и метода простейших уравнений [40]. Проиллюстрирована область значений параметров модели, при которых построенное решение существует. В разделе 2.2 описаны модифицированные конечно-разностный и Фурье методы для моделирования процессов распространения оптических импульсов, описываемых уравнением (2). В разделе 3.1 представлена валидация и сравнение реализованных численных схем решения задачи распространения оптических импульсов. В разделе 3.2 представлено применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединенной волны, описываемого уравнением (2). В разделе 3.3 смоделировано взаимодействие солитонного импульса с возмущением в начальном условии. В разделе также исследован процесс распространения импульса в условиях случайного шума в начальном условии и обсуждён факт устойчивости построенного оптического солитона. В разделе 3.4 исследовано влияние более высоких степеней нелинейности на процесс распространения уединенной волны описываемой НУШ. В разделе 3.5 смоделированы процессы столкновения солитонов уравнения НУШ при наличии членов с более высокой нелинейностью при различных параметрах модели.

Метод исследования - аналитический анализ, численный анализ.

2 Аналитический анализ

2.1 Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями

С целью упростить уравнение (2), используем переход к безразмерным величинам в следующем виде:

$$\begin{cases} u(x, t) = c_u u'(x, t), \\ t = c_t t', \\ x = c_x x', \end{cases} \quad (3)$$

При этом уравнение (2) запишется следующим образом:

$$i \frac{c_u}{c_t} u'_{t'} + \frac{a c_u}{c_x^2} u'_{x'x'} + b_1 c_u^3 |u'|^2 u' \left(1 + c_u^2 \frac{b_2}{b_1} |u'|^2 + c_u^4 \frac{b_3}{b_1} |u'|^4 \right) = 0. \quad (4)$$

Принимая

$$\begin{cases} c_u = b_1^{-1/3}, \\ c_t = b_1^{-1/3}, \\ c_x = \sqrt{a} b_1^{-1/6}, \end{cases} \quad (5)$$

Для уравнения (4) получим:

$$i u'_{t'} + u'_{x'x'} + |u'|^2 u' \left(1 + \varepsilon_2 |u'|^2 + \varepsilon_3 |u'|^4 \right) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = b_1^{-4/3} b_2, \\ \varepsilon_3 = b_1^{-7/3} b_3. \end{cases} \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - c_0 t', \quad k, \omega, c_0, \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где $y(z)$ - действительнозначная функция. Подставляя (8) в уравнение (6), получим переопределённую систему уравнений для $y(z)$ в виде

$$y_{zz} + \varepsilon_3 y^7 + \varepsilon_2 y^5 + y^3 + (\omega - k^2) y = 0, \quad (9)$$

$$(2k - c_0) y_z = 0. \quad (10)$$

уравнение (10) выполняется тождественно при $c_0 = 2k$. Уравнение (9) имеет первый интеграл:

$$y_z^2 + \frac{\varepsilon_3 y^8}{4} + \frac{\varepsilon_2 y^6}{3} + \frac{y^4}{2} + (\omega - k^2) y^2 = c_1. \quad (11)$$

Переходя к новой переменной $y(z) = \sqrt{V(z)}$, перепишем уравнение (11):

$$\frac{1}{4}V_z^2 + \frac{\varepsilon_3}{4}V^5 + \frac{\varepsilon_2}{3}V^4 + \frac{1}{2}V^3 + (\omega - k^2)V^2 - c_1V = 0. \quad (12)$$

Используя метод неявных функций, будем искать решения уравнения (12) в виде $V(z) = F(\xi)$, $\xi = \psi(z)$, полагая $c_1 = 0$ и

$$\xi_z = \pm F(\xi), \quad (13)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$F_\xi^2 + \varepsilon_3 F^3 + \frac{4}{3}\varepsilon_2 F^2 + 2F + 4(\omega - k^2) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) \right]^2 + \varepsilon_3 \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right)^3 + \frac{2(27\varepsilon_3 - 8\varepsilon_2^2)}{27\varepsilon_3} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) + \frac{128\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^2} - \frac{8\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} - 4k^2 + 4\omega = 0. \quad (15)$$

Вводя следующие обозначения для постоянных величин:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{64\varepsilon_2^2}{27\varepsilon_3^2} - \frac{8}{\varepsilon_3}, \\ g_3 &= \frac{512\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^3} - \frac{32\varepsilon_2}{9\varepsilon_3^2} - \frac{16k^2}{\varepsilon_3} + \frac{16\omega}{\varepsilon_3}, \\ \psi &= -F - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}, \end{aligned} \quad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде:

$$\left(\left(2\varepsilon_3^{-1/2} \right) \psi_\xi \right)^2 = 4\psi^3 - g_2\psi - g_3. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (17) может быть выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса, что позволяет записать:

$$F(\xi) = -\wp \left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3}(\xi - \xi_0) \right]; g_2, g_3 \right) - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}. \quad (18)$$

Учитывая условие (13), возможно выразить $\xi(z)$ в квадратурах:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{d\xi}{F(\xi)} = \mp \int \frac{d\xi}{\wp \left(\left[\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_3}(\xi - \xi_0) \right]; g_2, g_3 \right) + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}}, \quad (19)$$

однако, в общем случае, такой интеграл не может быть посчитан аналитически.

Стоит заметить, что для специального вида функции $F(\xi)$ интеграл (19) может быть посчитан. Используя метод простейших уравнений [40], найдём решения (14) в виде:

$$F(\xi) = M_0 + M_1 Q(\xi) + M_2 Q^2(\xi), \quad (20)$$

где $Q(\xi)$ - решение уравнения Риккати:

$$Q_\xi = \mu (Q^2 - Q), \quad (21)$$

имеющее следующий вид:

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))}. \quad (22)$$

Используя (21), и подставляя выражение (20) в уравнение (14), получим полином относительно $Q(\xi)$, равный нулю:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_3 M_2^3 + 4\mu^2 M_2^2) Q(\xi)^6 + (4\mu^2 M_1 M_2 - 8\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1 M_2^2) Q(\xi)^5 + \\ & + \left(\frac{4}{3}\varepsilon_2 M_2^2 - 8\mu^2 M_1 M_2 + \mu^2 M_1^2 + 4\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1^2 M_2 \right) Q(\xi)^4 + \\ & + \left(4\mu^2 M_1 M_2 + \varepsilon_3 M_1^3 - 2\mu^2 M_1^2 + \frac{8}{3}\varepsilon_2 M_1 M_2 + 6\varepsilon_3 M_0 M_1 M_2 \right) Q(\xi)^3 + \\ & + \left(2M_2 + \frac{4\varepsilon_2 M_1^2}{3} + \mu^2 M_1^2 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_1^2 + \frac{8}{3}\varepsilon_2 M_0 M_2 \right) Q(\xi)^2 + \\ & + \left(2M_1 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_1 + \frac{8}{3}\varepsilon_2 M_0 M_1 \right) Q(\xi) + \\ & + \left(\frac{4}{3}\varepsilon_2 M_0^2 + 2M_0 + \varepsilon_3 M_0^3 - 4k^2 + 4\omega \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $Q(\xi) \neq 0$, коэффициенты полинома должны быть тождественно равны нулю. Это приводит к следующим ограничениям на параметры модели:

$$\begin{cases} \omega - k^2 = -\frac{1}{12} \frac{M_0 M_1}{M_1 + 6M_0} - \frac{1}{6} M_0, \\ \mu = \pm \sqrt{\frac{M_1}{M_0(M_1 + 6M_0)}}, \\ M_2 = -M_1, \\ \varepsilon_2 = \frac{3}{4M_0} \left(\frac{M_1}{M_1 + 6M_0} - 2 \right), \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{M_0(M_1 + 6M_0)}, \end{cases} \quad (24)$$

где M_0 и M_1 - произвольные константы. Уравнение (20) теперь записывается, как:

$$F(\xi) = M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2}. \quad (25)$$

Для представленного вида $F(\xi)$ следующее выражение может быть проинтегрировано:

$$\frac{d\xi}{F(\xi)} = dz, \quad (26)$$

тогда зависимость ξ и z описывается следующим образом:

$$z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + \frac{2M_1}{\mu M_0 \sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right). \quad (27)$$

Теперь решение уравнения (11) при $c_1 = 0$ запишется в виде:

$$y(\xi) = \left[M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

где $\xi(z)$ определяется неявно из (27), и выполнены ограничения на параметры модели (24).

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид:

$$u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \quad z = x' - 2kt', \quad (29)$$

где k и θ_0 - произвольные постоянные.

Принимая во внимание, что $z, \xi(z), y(\xi) \in \mathbb{R}$, из выражений (27) и (28) следуют дополнительные ограничения на параметры M_0 и M_1 для существования найденного решения:

$$\left| \frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right| < 1, \quad (30)$$

$$M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \geq 0. \quad (31)$$

Данные ограничения удовлетворяются на ограниченном промежутке по переменной ξ из-за присутствия экспоненты в (30), что накладывает дополнительные ограничения при построении решения.

Условия (30) и (31) с учётом соотношений (24) удовлетворяются в следующей области параметров M_1 и M_0 (Рис. 2):

$$\begin{cases} M_0 < 0, \\ -4M_0 < M_1 < -6M_0. \end{cases} \quad (32)$$

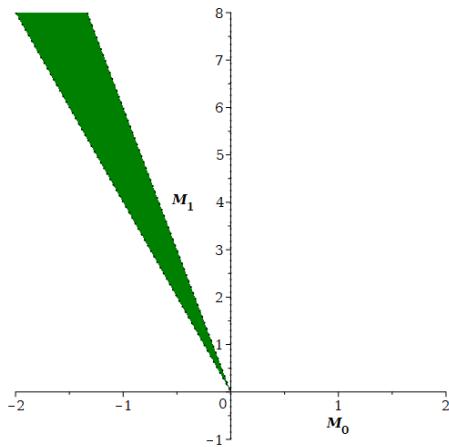


Рис. 2: Допустимые значения M_1 и M_0 .

Волновой профиль (29) при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$, $\varepsilon_2 = 2.16$, $\varepsilon_3 = 0.99$ изображён на Рис. 3.

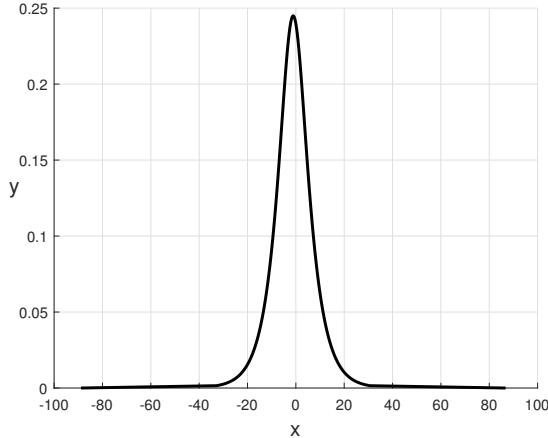


Рис. 3: Профиль уединённой волны при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$.

2.2 Модификации численных методов для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Для численного решения задачи распространения оптических импульсов в рамках изучаемой модели требуется реализовать соответствующую численную схему. Рассмотрим, как это возможно сделать на примере метода расщепления. Семейство обобщённых уравнений Шрёдингера может быть записано в виде:

$$u_t = i\mathcal{L}[u] + i\mathcal{N}[u]u. \quad (33)$$

К примеру, при $\mathcal{L}[u] \equiv au_{xx}$, $\mathcal{N}[u] \equiv b_1|u|^2$ уравнение (33) представляет из себя нелинейное уравнение Шрёдингера (1).

Рассмотрим задачу распространения уединённых импульсов и объявим периодические граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u\left(\frac{L}{2}, t\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, t\right). \end{cases} \quad (34)$$

Предполагая $x \in [-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L]$, $t \in [0, T]$, разделим интервал по переменной x на N одинаковых частей с шагом

$$h = \frac{L}{N}. \quad (35)$$

Узлы координатной сетки определяются, как

$$x_j = jh, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (36)$$

Пусть \mathbf{U}^m - сеточная аппроксимация решения на m -ном временном слое, и \mathbf{V}^m - промежуточное решение. В таком случае, начальные условия задаются в \mathbf{U}^0 . В общем виде, схема расщепления может быть записана следующим образом [1]:

$$\mathbf{U}^{m+1} = e^{i\tau\mathcal{L}}\mathbf{V}^m, \quad (37)$$

где

$$\mathbf{V}^m = e^{i\tau\mathcal{N}[\mathbf{U}^m]}\mathbf{U}^m. \quad (38)$$

В некоторых случаях, явный вид $\mathcal{N}[u]$, позволяет напрямую вычислить \mathbf{V}^m . Например, в случае уравнения (2) выражение (38) запишется следующим образом:

$$\mathbf{V}^m = e^{i\tau|\mathbf{U}^m|^2(1+\varepsilon_2|\mathbf{U}^m|^2+\varepsilon_3|\mathbf{U}^m|^4)}\mathbf{U}^m \quad (39)$$

В зависимости от метода аппроксимации оператора $e^{i\tau\mathcal{L}}[u]$ возможно получить различные численные схемы для решения задачи распространения оптических импульсов, основанные на методе расщепления.

Конечно-разностный метод

Для получения модификации конечно-разностного метода решения задачи распространения оптических импульсов, используем соотношение:

$$e^{i\tau\mathcal{L}} = (\mathcal{I} - \theta i\tau\mathcal{L})^{-1} (\mathcal{I} + (1-\theta)i\tau\mathcal{L}), \quad (40)$$

где \mathcal{I} - тождественный оператор, θ - параметр в пределах $0 \leq \theta \leq 1$. При этом выражение (37) запишется в виде:

$$(\mathcal{I} - \theta i\tau \mathcal{L}) \mathbf{U}^{m+1} = (\mathcal{I} + (1 - \theta)i\tau \mathcal{L}) \mathbf{V}^m. \quad (41)$$

Введём разностный оператор:

$$\mathcal{L}_h [\mathbf{U}_j] = (\mathbf{U}_{j+1} - 2\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j-1}) / h^2, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (42)$$

Тогда соотношение (41) запишется в матричной форме:

$$(I - ir\theta S) \mathbf{U}^{m+1} = (I + ir(1 - \theta S)) \mathbf{V}^m, \quad (43)$$

где I - тождественная матрица, $r = \tau/h^2$,

$$\mathbf{U} = (U_{-N/2}, \dots, U_{N/2-1})^T, \quad (44)$$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & -2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & -2 & 1 & . \\ 1 & . & . & -2 & 1 & . \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Соотношения (39) и (43) полностью определяют конечно-разностный метод решения задачи распространения оптических импульсов в рамках модели (2).

Псевдоспектральный метод Фурье

Альтернативный подход, приводящий к псевдоспектральному методу Фурье - использование дискретного преобразования Фурье для сеточной функции \mathbf{V}^m для определения решения на следующем временном слое:

$$\hat{\mathbf{V}}^m = \frac{h}{L} \exp(-i\boldsymbol{\mu} \mathbf{x}^T) \cdot \mathbf{V}^m, \quad (46)$$

где $\hat{\mathbf{V}}^m$ - вектор коэффициентов Фурье, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{-N/2}, \dots, \mu_{N/2-1})^T$ - вектор частот преобразования $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$, $\mathbf{x} = (x_{-N/2}, \dots, x_{N/2-1})^T$ - координаты точек сетки.

Воспользуемся соотношением между $\hat{\mathbf{U}}^{m+1}$ и $\hat{\mathbf{V}}^m$,

$$\hat{\mathbf{U}}^{m+1} = \exp(-i(\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\mu}) \tau) \circ \hat{\mathbf{V}}^m, \quad (47)$$

которое вытекает из уравнения (37) после подстановки в него вместо \mathbf{U}^{m+1} и \mathbf{V}^m соответствующих рядов Фурье. Под $x \circ y$ понимается произведение по Адамару.

Решение на следующем временном слое восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье, используя (47):

$$U^{m+1} = \exp(i\mu x^T) \cdot \hat{U}^{m+1}. \quad (48)$$

Таким образом, соотношения (39) и (46-48) полностью определяют псевдоспектральный метод Фурье решения задачи распространения оптических импульсов в рамках модели (2).

3 Численный анализ

3.1 Сравнение и валидация численных методов решения задачи распространения оптических импульсов

Для проверки описанных в разделе 2.2 численных схем проведём их валидацию и сравнение на примере моделирования процессов распространения уединённых волн, описываемых классическим НУШ. Рассмотрим (6) при $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (49)$$

Задача Коши для уравнения (49) решается методом обратной задачи рассеяния. Его решение в виде уединенной волны представлено в работе [39] и имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-c_0t-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}} + e^{(x-c_0t-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (50)$$

где $c_0 = 2k$ и k , ω , z_0 , θ_0 - произвольные константы. Начальное условие, относящееся к решению (50) представляется следующим образом:

$$u(x, 0) = \frac{4(k^2 - \omega)}{2(k^2 - \omega)e^{-(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}} + e^{(x-z_0)\sqrt{(k^2-\omega)}}} \cdot e^{i(kx-\theta_0)} \quad (51)$$

В качестве метрики на пространстве численных и соответствующих им аналитических решений на n временном слое будем использовать следующую величину:

$$\Delta_{\%}^n = \frac{\max_{1 \leq m \leq N_x} \left(\left| U_{true}^{m,n} \right| - \left| U^{m,n} \right| \right)}{\max_{1 \leq m \leq N_x} \left| U_{true}^{m,n} \right|} \cdot 100\%, \quad (52)$$

где $N_x = N + 1$ - количество х-узлов сетки на каждом временном слое согласно (36), $U^{m,n}$ - численное решение, $U_{true}^{m,n}$ - сеточная редукция соответствующего аналитического решения. В качестве метрики для всего расчёта будем принимать максимальную из

ошибок на временных слоях:

$$\Delta\% = \max_{1 \leq n \leq N_t} \Delta\%_n. \quad (53)$$

Данные величины представляют из себя относительные ошибки в процентах. Отношение берётся к характерной амплитуде импульса. Результаты моделирования процесса распространения уединённой волны (50) при помощи двух описанных в разделе 2.2 методов представлены на Рис. 4.

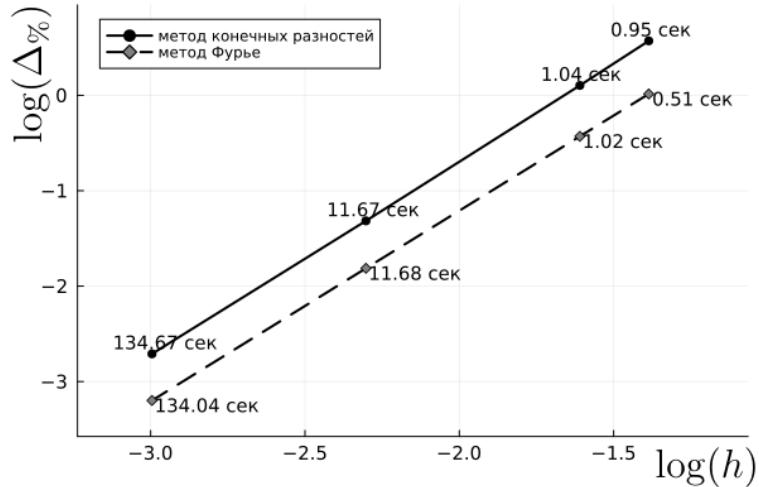
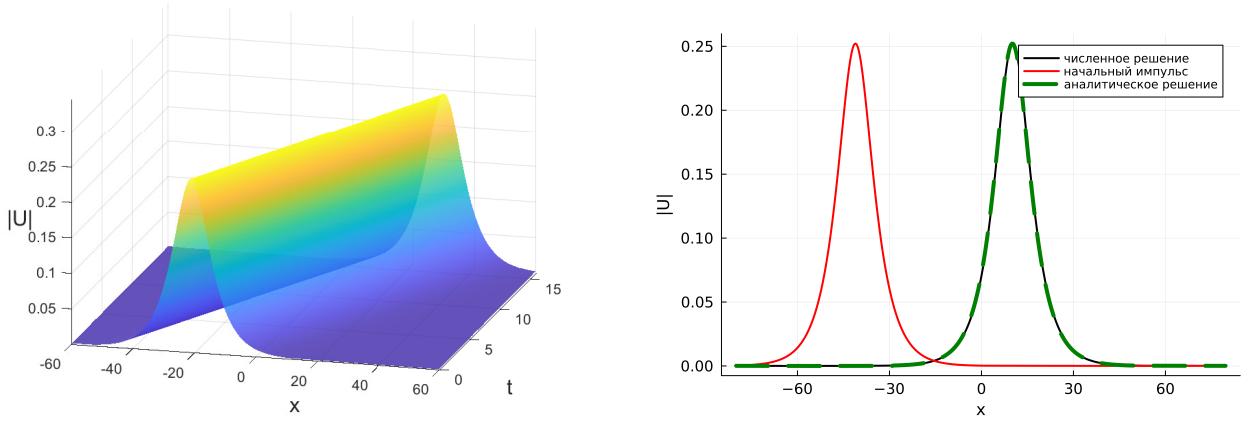


Рис. 4: Зависимости логарифма относительной ошибки от логарифма шага h по координате x при моделировании процесса распространения волны (50) с использованием конечно-разностного и Фурье методов с затраченным на расчёт временем при параметрах $k = 0.15$, $\omega = 0.4$, $\theta_0 = 0$, $z_0 = 0$, $L = 160$, $T = 25$, $h = [0.25, 0.2, 0.1, 0.05]$, $\tau = h^2$.

Решения, полученные двумя схемами согласуются с аналитическим решением (50). Сеточная сходимость достигнута. Обе схемы имеют второй порядок аппроксимации по координате и первый порядок аппроксимации по времени. С точки зрения вычислительной сложности и эффективности обе схемы показали схожие результаты. Однако из-за меньшей относительной ошибки в дальнейшей работе будут приводиться результаты, полученные псевдоспектральной схемой Фурье.

3.2 Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединённой волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Рассмотрим обобщённое уравнение (6). Смоделируем распространение уединённой волны (29), полученной в разделе 2.1. Произведём расчёт для определённых параметров M_0 и M_1 , удовлетворяющих условиям (32). Параметры $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \omega$ и μ определяются формулами (24). Результат моделирования представлен на Рис.5. Аналитический и численно полученный профили в момент $t = 16$ изображены на Рис. 5а.



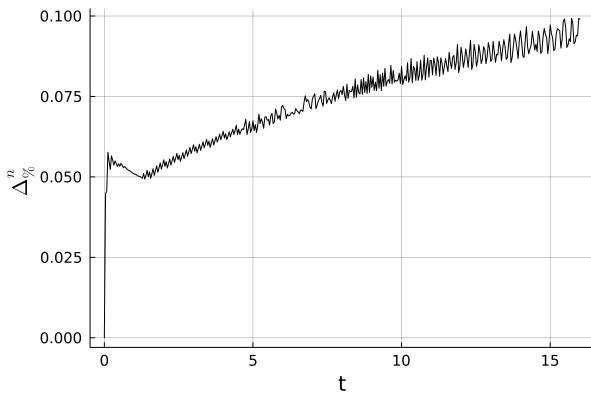
(a) Модуль численного решения

(b) Модули решений при $t=16$

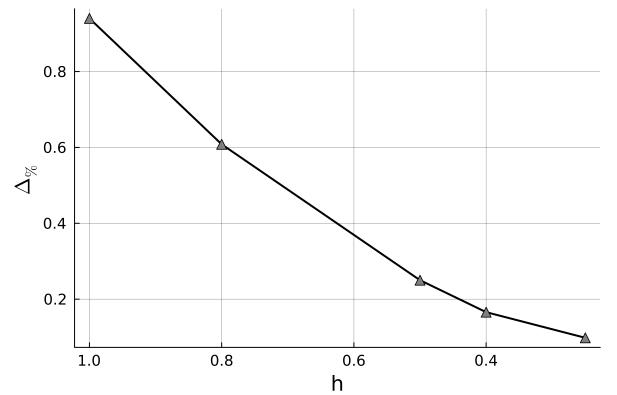
Рис. 5: Распространение уединённой волны (29)

при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$, $\varepsilon_2 = 2.16$, $\varepsilon_3 = 0.99$.

Относительная погрешность расчета $\Delta\%$ при заданных параметрах не превышает 0.1%. Зависимость относительной погрешности $\Delta_{\%}^n$ от времени $t = \tau n$ проиллюстрирована на Рис. 6а.



(a) Относительная ошибка от времени при $h = 0.2$, $\tau = 0.04$



(b) Максимальная относительная ошибка от шага сетки h

Рис. 6: Численные результаты при параметрах $L = 160$, $T = 16$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$, $\varepsilon_2 = 2.16$, $\varepsilon_3 = 0.99$.

Сеточная сходимость достигнута (Рис. 6b), аналитическое решение совпало с численным. Следовательно, численная схема корректно описывает процесс распространения оптического импульса для обобщённого уравнения, и есть основание утверждать, что аналитическое решение, построенное в разделе 2.1, обладает солитонными свойствами.

3.3 Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях

В рамках исследования устойчивости аналитического решения (29) проведём моделирование распространения импульса при возмущении в начальных условиях. Внесём в начальное условие возмущение следующим образом:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A e^{-\nu(x - x_0)^2}, \quad (54)$$

где A - амплитуда возмущения. Проведём моделирование для приведённого начального условия. Соответствующие численные результаты изображены на Рис. 7.

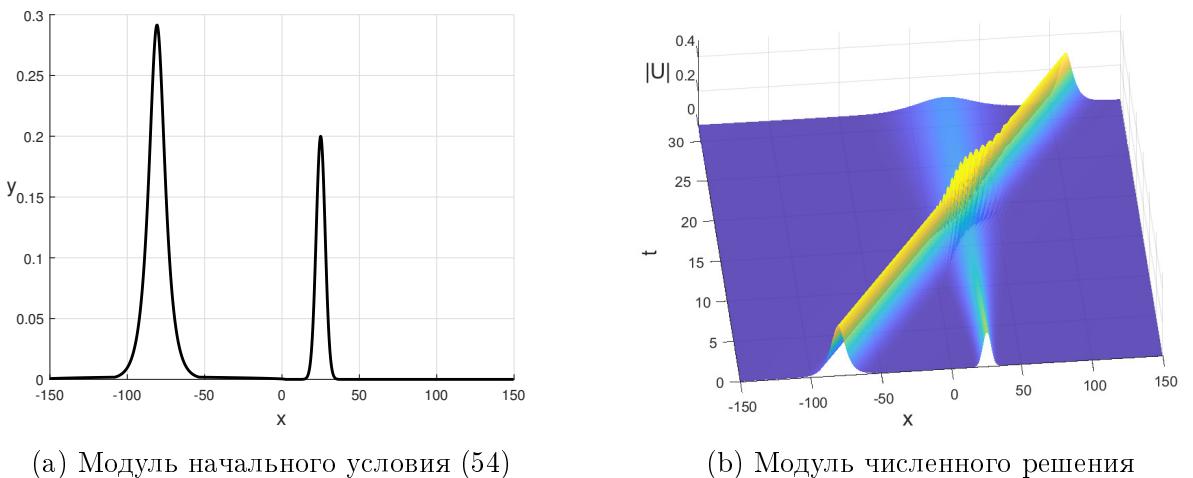


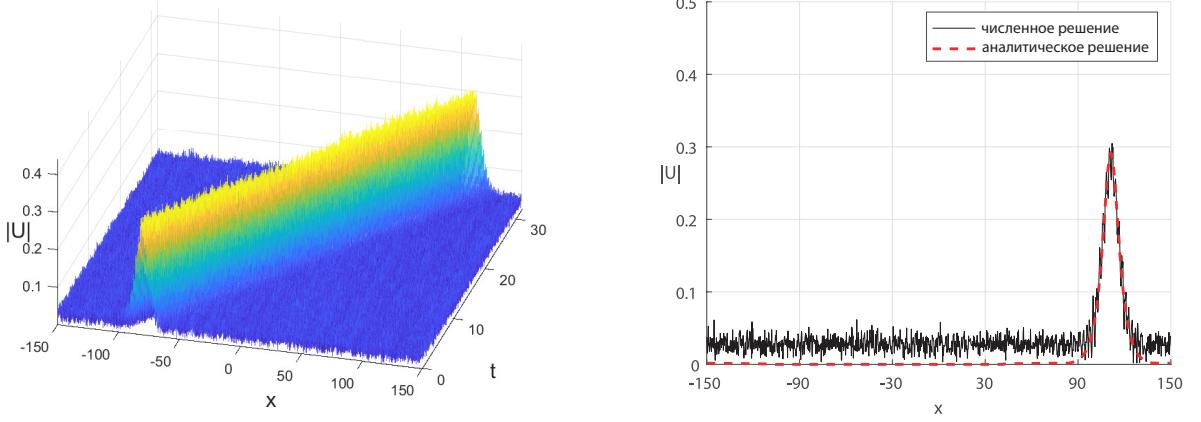
Рис. 7: Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $\varepsilon_2 = 1.04$, $\varepsilon_3 = 0.23$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.625$, $A = 0.2$, $\nu = 0.06$, $x_0 = 25$.

Проведённое моделирование позволяет сделать вывод, что солитон, заданный рассмотренными параметрами, взаимодействует с заданным возмущением, не расходясь и не теряя способности к распространению. Профиль пульса восстанавливается после взаимодействия.

Также установлено, что солитон уравнения (6) устойчив при распространении в среде со случайным шумом следующего вида:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A \cdot \text{rand}(x). \quad (55)$$

Результаты моделирования проиллюстрированы на Рис. 8.



(a) Модуль численного решения

(b) Профили решений при $t=32$

Рис. 8: Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $\varepsilon_2 = 1.04$, $\varepsilon_3 = 0.23$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $A = 0.05$.

Моделирования, представленные в данном разделе, подтверждают стабильность солитонов, полученных в разделе 2.1.

3.4 Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединённой волны

При решении физических задач классическое НУШ обобщается путём добавления в уравнение некоторых выражений, учитывающих определённые физические факторы. Поскольку реальные физические процессы могут протекать по более сложным законам, не всегда возможно заранее предугадать и учесть все необходимые уточняющие члены. В этом разделе мы исследуем влияние дополнительных нелинейных членов на решения НУШ.

Для изучения обсуждаемого влияния приведём несколько полезных уточнений. Решение уравнения (6) при $\varepsilon_3 = 0$ ранее уже было найдено в следующем виде:

$$u(x, t) = \left(\frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}}{1 + 4e^{\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)} + (4 + 4\mu\nu)e^{2\sqrt{\mu}(x-2kt-z_0)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i(kx-\omega t-\theta_0)}, \quad (56)$$

где $\mu = 4(\omega - k^2)$, $\nu = \frac{4\varepsilon_2}{3}$ и k , ω , z_0 , θ_0 - произвольные константы. Заметим, что при $\varepsilon_2 = 0$ решение (56) совпадает с решением (50).

Для полноты численного анализа процессов распространения будем проверять выполнение законов сохранения для уравнения (6) в процессе моделирования. Повторяя алгоритм поиска из работы [41], первые два закона сохранения для мощности и

переносимого импульса можно записать в следующем виде:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad (57)$$

$$I_2 = -i \int_{-\infty}^{\infty} (u^* u_x - uu_x^*) dx. \quad (58)$$

Для сеточной функции численного решения на временном слое n воспользуемся следующими выражениями для аппроксимации значений интегралов (57) и (58):

$$I_{1,n}^{(h)} = \sum_{1 \leq m \leq N_x} |U^{m,n}|^2 dx, \quad (59)$$

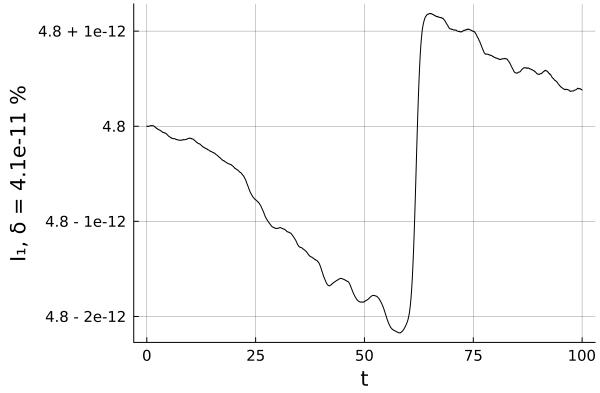
$$I_{2,n}^{(h)} = -i \sum_{1 \leq m \leq N_x} \left((U^{m,n})^* \dot{U}^{m,n} - U^{m,n} (\dot{U}^{m,n})^* \right) dx, \quad (60)$$

где \dot{U} - узловая аппроксимация производной. Для этого будем использовать трехузловые формулы численного дифференцирования со вторым порядком аппроксимации:

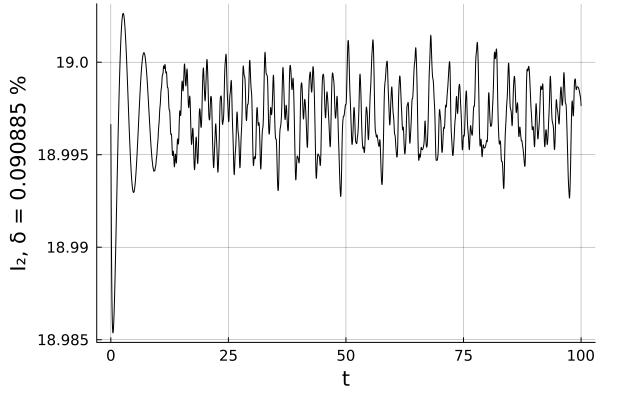
$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{-3U_0 + 4U_1 - U_2}{2h}, \\ \dot{U}_m &= \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h}, \\ \dot{U}_{N_x} &= \frac{U_{N_x-2} - 4U_{N_x-1} + 3U_{N_x}}{2h}. \end{aligned} \quad (61)$$

Исследуем влияние нелинейных выражений на распространение уединённой волны нелинейного уравнения Шрёдингера (50) в рамках обобщённой нелинейной модели, описываемой уравнением (6).

При $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$ уединенная волна (50) является точным решением уравнения (6). Численное решение для начального условия (51) совпадает с аналитическим. Поведение законов сохранения (57) и (58) проиллюстрировано на рисунке 9, где δ - относительная точность сохранения величины соответствующего интеграла.



(a) Зависимость I_1 от времени.

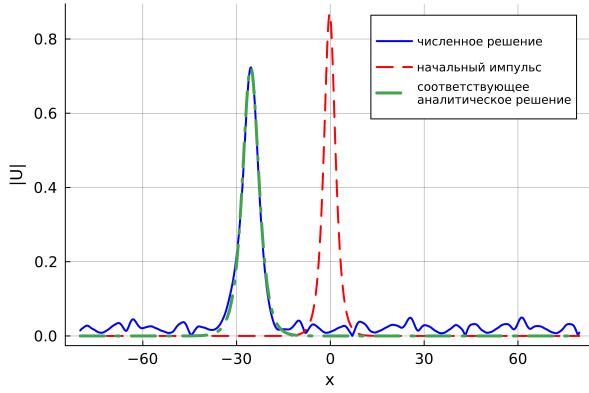


(b) Зависимость I_2 от времени.

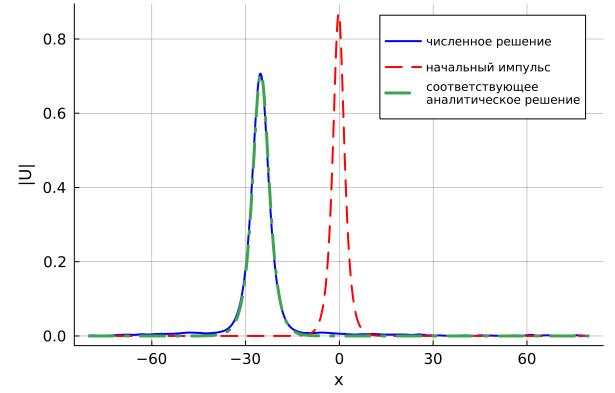
Рис. 9: Поведение законов сохранения при $L = 100$, $T = 100$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 1.6$, $k = 0.4$.

В случае введения нелинейного члена при $\varepsilon_2 \neq 0$, импульс (51) претерпевает изменения в процессе распространения. Поскольку начальное условие не удовлетворяет уравнению модели (6), солитонные свойства импульса перестают выполняться, и его форма постепенно изменяется.

Излучение энергии при граничных периодических условиях нарушает изначальное предположение об уединённости импульса, создавая фон из-за периодических граничных условий. Для восстановления справедливости данного предположения, в процесс расчёта введена процедура фильтрации излучения в численном решении. За пределами характерной протяжённости импульса l_f каждые t_f единиц времени расчёта происходит уменьшение численного решения в k_f раз. При $k_f = 1$ численное решение не изменяется. Подробный алгоритм фильтрации описан в приложении (ссылка). Результат фильтрации проиллюстрирован на Рис.10. Алгоритм поддерживает задание динамического коэффициента $k_f(t)$, что позволяет отключить диссиацию излучения на произвольных временах моделирования.



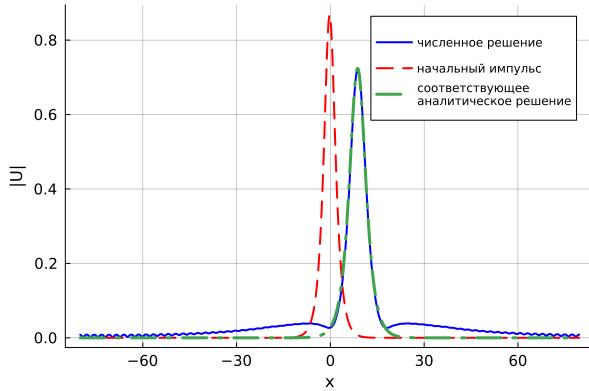
(a) Профиль решения при $t=450$ без применения фильтрации



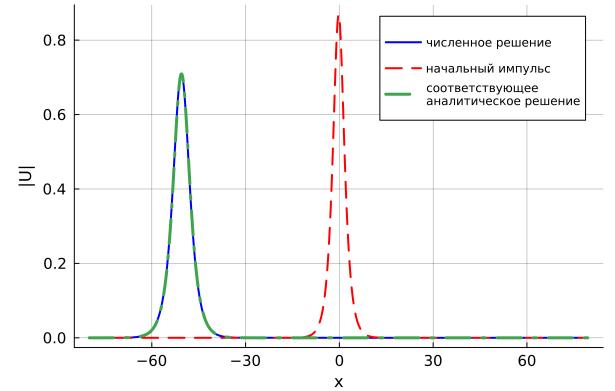
(b) Профиль решения при $t=450$ с применением фильтрации

Рис. 10: Численные результаты распространения импульса (51) при $L = 160$, $T = 450$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $l_f = 60$, $t_f = 2$, $k_f = 1.02$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Обнаружено, что форма импульса (51) в процессе расчёта становится устойчивой. По мере моделирования амплитуда солитона стремится к равновесному значению, а его форма - к соответствующему для данной амплитуды решению вида (56), являющимся аналитическим для обобщённой модели при $\varepsilon_2 \neq 0$. Для расчёта, проиллюстрированного на Рис. 11 и Рис. 12 максимальная относительная ошибка между численным и аналитическим решением в конечный момент времени моделирования при $T = 3500$ не превышает 0.05%.



(a) Профиль решения при $t=30$



(b) Профиль решения при $t=3500$

Рис. 11: Численные результаты распространения импульса (51) при $L = 160$, $T = 3500$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Зависимость относительной ошибки между аналитическим (56) и численным решением от времени представлена на Рис. 12. Зависимость коэффициента фильтрации от времени также проиллюстрирована на графике. Коэффициент $k_f(t)$ линейно убывает в процессе моделирования, и равен $k_f = 1$ при $t = 2500$. Подбор аналитического решения происходит по максимуму модуля численного решения и параметру ε_2 . Для

снижения сеточной ошибки при построении аналитического решения по численному, максимум модуля импульса определяется в результате решения задачи поиска глобального максимума В-сплайновой функции интерполяции, построенной для сеточного решения. Подробное описание алгоритма построения аналитического решения по сеточному представлено в разделе (ссылка).

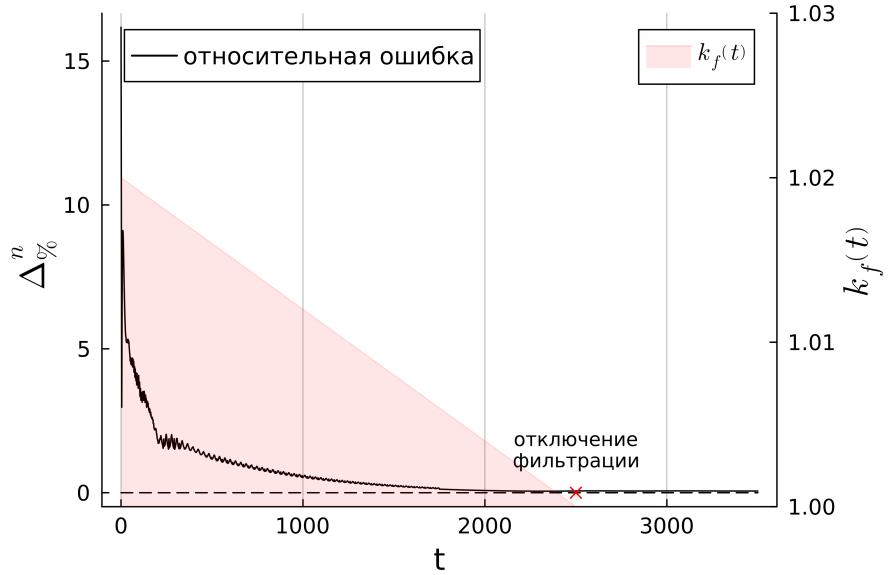
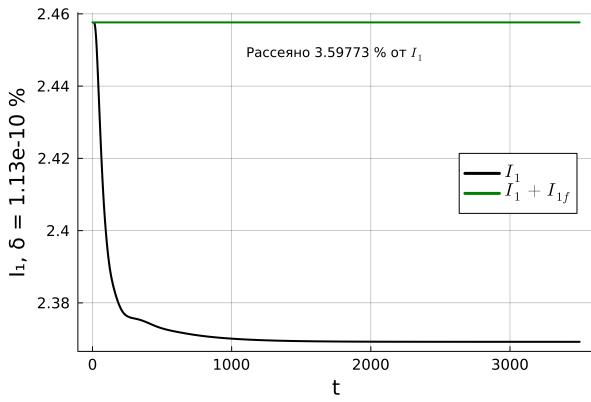
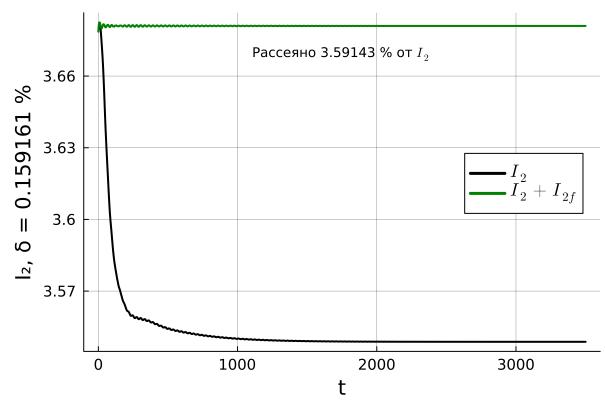


Рис. 12: Зависимости относительной ошибки и коэффициента фильтрации от времени при $L = 160$, $T = 3500$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Поведение законов сохранения для представленного моделирования проиллюстрировано на Рис. 13. Солитоном потеряно 3.6% мощности и импульса, однако с учётом рассеянных составляющих оба интеграла сохраняются, что говорит о корректном применении процедуры фильтрации и выполнении законов сохранения. Величина δ на Рис. 13 равна относительной точности, с которой в процессе всего моделирования сохраняются величины $I_1 + I_{1f}$ и $I_2 + I_{2f}$, где I_{1f} и I_{2f} - рассеянные компоненты мощности и импульса.



(a) Зависимость I_1 от времени.

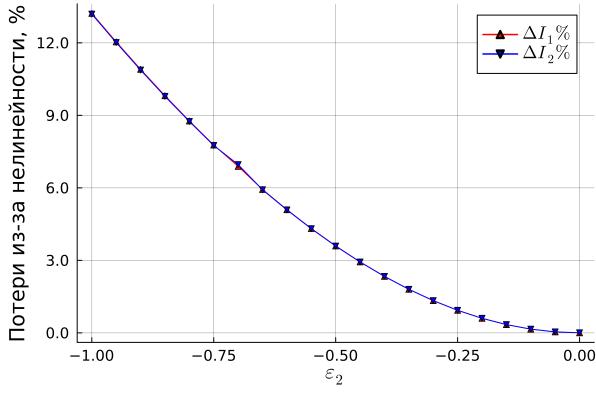


(b) Зависимость I_2 от времени.

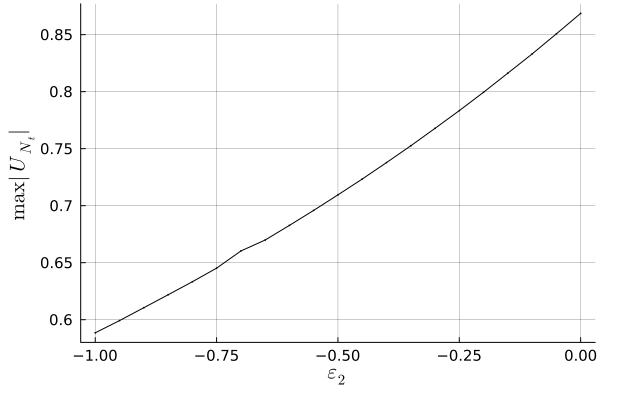
Рис. 13: Поведение законов сохранения при $L = 160$, $T = 1000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = -0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Отметим, что более длительная фильтрация позволяет добиться на порядок меньшей ошибки между численным и аналитическим решением. Так, при времени окончания фильтрации $t_{end,f} = T = 5000$ и линейном убывающем к единице законе изменения $k_f(t)$ в конечный момент времени максимальная относительная разница аналитического и численного решений составляет 0.002%. При увеличении времени моделирования и конца фильтрации в два раза дополнительно рассеялось $4 \times 10^{-4}\%$ от I_1 и $2 \times 10^{-4}\%$ от I_2 , что говорит о том, что импульс во второй половине моделирования потерял в 8700 раз меньше мощности и в 17000 раз меньше импульса, чем в первой. Данное наблюдение позволяет заключить, что исходный импульс под влиянием нелинейных выражений в модели преобразуется в другой импульс меньшей амплитуды, совпадающий с аналитическим решением (56) уравнения (6) при $\varepsilon_3 = 0$. Данный процесс устанавливается со временем.

Выводы, полученные выше, справедливы для $\varepsilon_2 < 0$. Чем меньше при этом абсолютное значение параметра ε_2 , тем меньше потеря импульсом на излучение, и тем меньше изменяется его амплитуда. Зависимости процентной величины потерь и амплитуды установившегося импульса от параметра нелинейности для отдельно взятых параметров модели и сетки проиллюстрирована на Рис. 14



(a) Процент потеря мощности и импульса

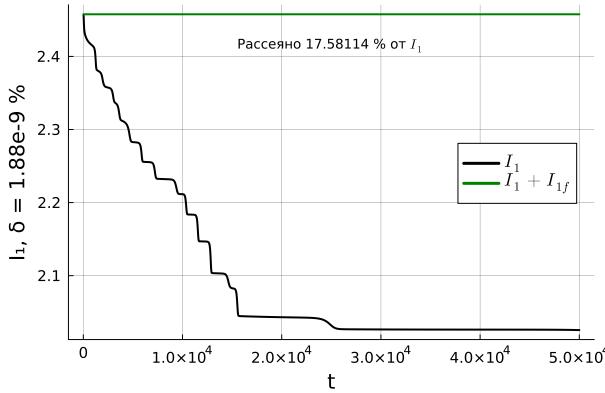


(b) Амплитуда решения в конечный момент

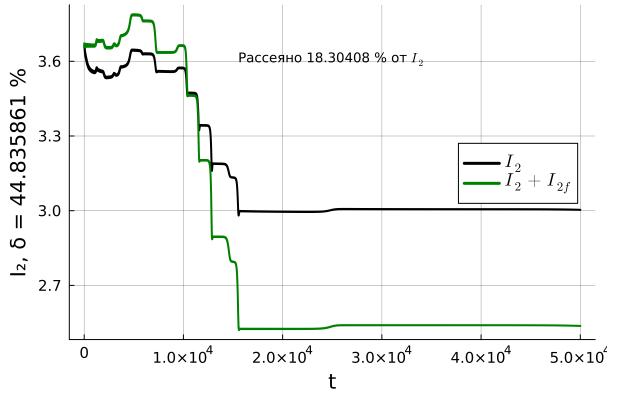
Рис. 14: Зависимости величин относительно ε_2 при $L = 160$, $T = 3000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

В случае $\varepsilon_2 > 0$ обнаружены следующее наблюдения. Амплитуда результирующего импульса в начале моделирования увеличивается. Потеря солитоном импульса и мощности происходит интенсивнее и дольше, чем в случае отрицательного ε_2 , что приводит к необходимости фильтровать решение на больших временах и с большим коэффициентом k_f . В противном случае происходит зашумление численного решения.

Результаты моделирования для $\varepsilon_2 = 0.5$ проиллюстрированы на Рис. 15 и Рис. 16. Мощность I_1 сохраняется с учётом диссирированной в результате фильтрации. Поведение законов сохранения проиллюстрировано на Рис. 15. Суммарная величина $I_2 + I_{2f}$ не сохраняется, изменившись на 44.8%. В конце моделирования при $T = 50000$ солитоном потеряно 17.6% мощности и 18.3% импульса. В конечный момент моделирования ошибка между подобранным аналитическим и численным решением составляет 0.09%. Амплитуда импульса в конце моделирования колеблется, изменяясь в пределах 0.12% в зависимости от времени.

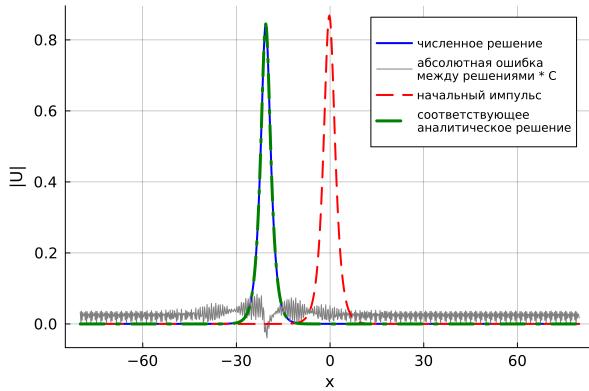


(a) Зависимость I_1 от времени

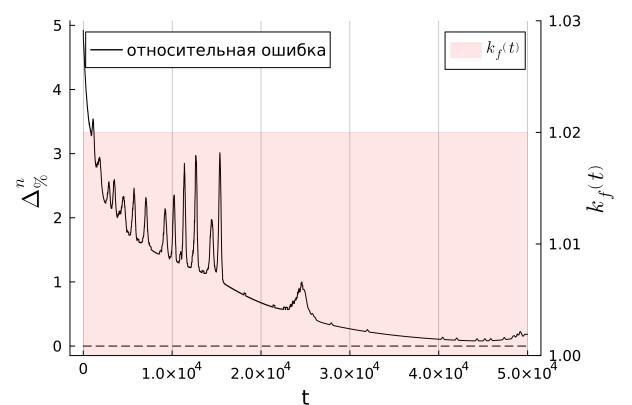


(b) Зависимость I_2 от времени

Рис. 15: Поведение законов сохранения при $L = 160$, $T = 50000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.



(a) Профиль решения при $t=50000$

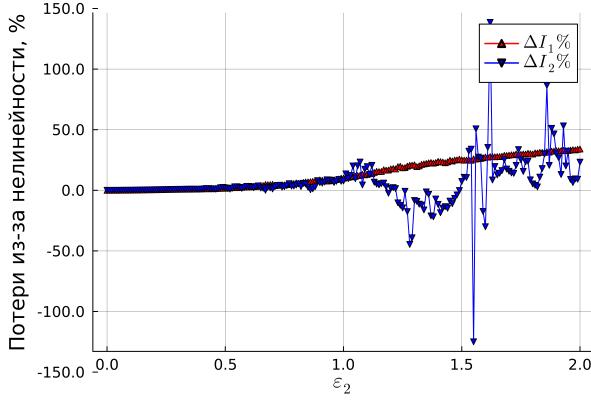


(b) Зависимости относительной ошибки и коэффициента фильтрации от времени

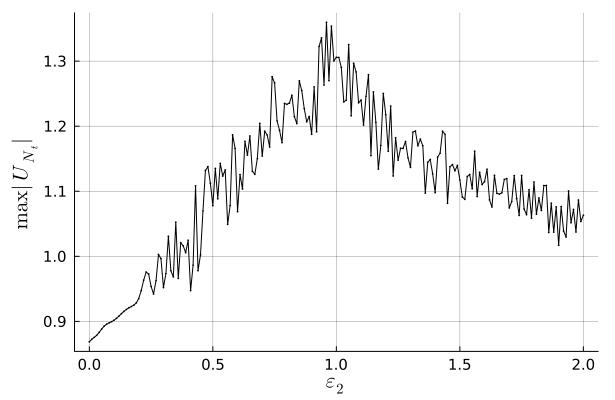
Рис. 16: Численные результаты при $L = 160$, $T = 50000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Исходный солитон под воздействием степенного нелинейного члена с положительным коэффициентом претерпевает переходный процесс, который требует на порядок больше времени на установление, чем в случае $\varepsilon_2 < 0$, и происходит с более интенсивной потерей импульса и мощности. Учитывая, что при этом закон сохранения импульса не выполняется, моделирование процесса распространения уединённой волны в рамках модели с $\varepsilon_2 > 0$ в общем случае не имеет физического смысла, однако полезно для понимания влияния нелинейных членов в уравнении модели.

В качестве дополнительного аргумента в пользу несостоятельности моделирования процессов распространения импульса при $\varepsilon_2 > 0$ приведём зависимости конечной амплитуды импульса и его потерь в зависимости от $\varepsilon_2 > 0$. Результаты проиллюстрированы на Рис. 17. Зависимость перестаёт быть регулярной. При моделированиях нарушаются сеточная сходимость.



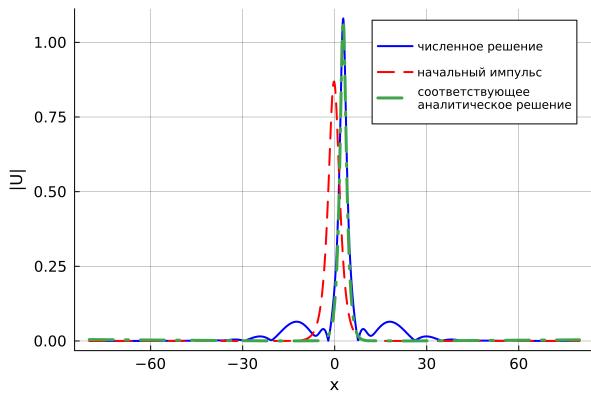
(a) Процент потерь мощности и импульса



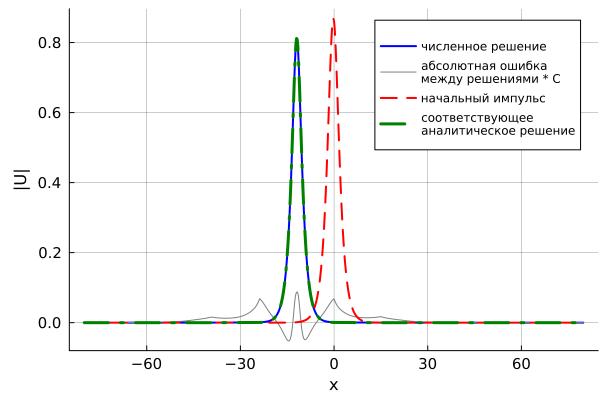
(b) Амплитуда решения в конечный момент

Рис. 17: Зависимости величин относительно ε_2 при $L = 160$, $T = 1000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Рассмотрим более общий характер нелинейностей в модели при $\varepsilon_3 \neq 0$. Отметим, что аналитическое решение (29), построенное в разделе 2.1 существует только для положительных ε_2 и ε_3 в силу ограничений и соотношений, использованных при его выводе. Более того, аналитическое решение существует только для тех ε_2 и ε_3 , по которым возможно найти параметры M_0 и M_1 из соотношений (24). В противном случае построить по данным параметрам нелинейности соответствующее аналитическое решение не получится. Проверим, возможен ли переход исходного импульса (50) под действием положительных параметров ε_2 и ε_3 к построенному решению (29). На Рис. 18 проиллюстрированы профили решения в различные моменты времени.



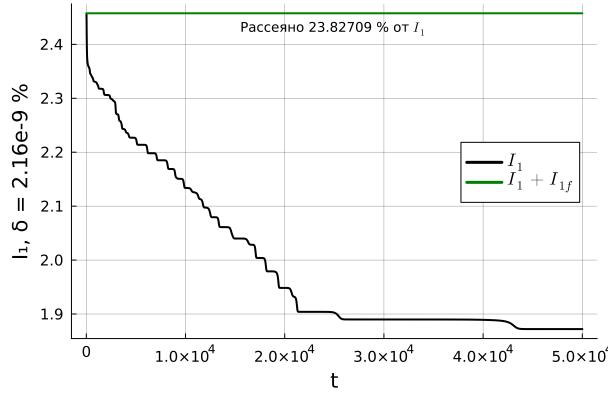
(a) Профиль решения при $t=10$



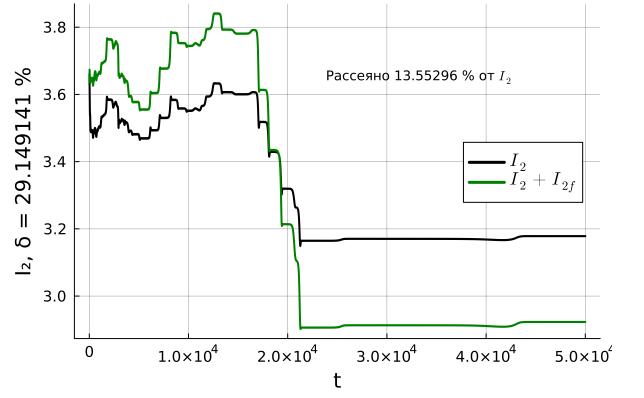
(b) Профиль решения при $t=50000$

Рис. 18: Численные результаты распространения импульса (51) при $L = 160$, $T = 50000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.65$, $\varepsilon_3 = 0.08$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

На Рис. 19 проиллюстрировано поведение законов сохранения для моделирования. Результаты аналогичны моделированию, проведённому для $\varepsilon_2 = 0.5$ при $\varepsilon_3 = 0$. Закон сохранения импульса не выполняется. В конце моделирования по численному решению подобран солитон вида (29) с относительной разницей, равной 0.107%.



(a) Зависимость I_1 от времени.



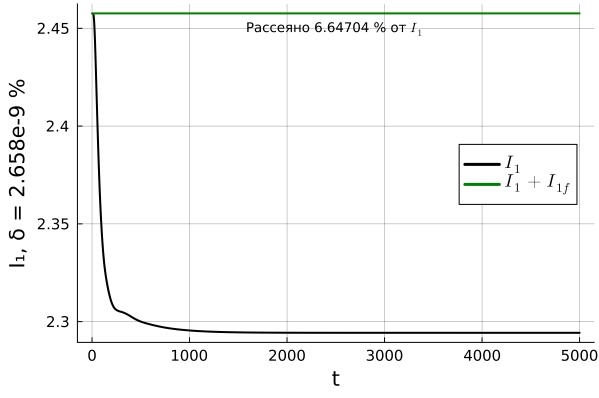
(b) Зависимость I_2 от времени.

Рис. 19: Поведение законов сохранения при $L = 160$, $T = 50000$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.65$, $\varepsilon_3 = 0.08$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

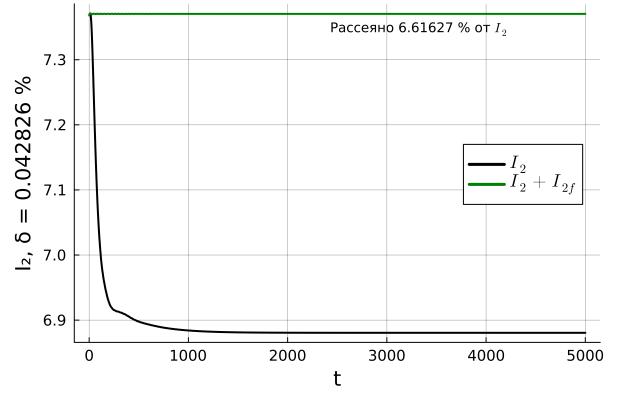
Колебания амплитуды импульса в конце моделирования происходят в переделах 0.5%, что позволяет сделать вывод, что для того же времени моделирования и параметров импульса, но больших положительных параметрах нелинейностей в модели, чем для расчёта, проиллюстрированного на Рис. 16 процесс перехода к концу моделирования установился хуже. Это согласуется с фактом, что для больших положительных коэффициентов ε_2 и ε_3 процесс устанавливается дольше.

Несмотря на то, что построить аналитическое решение с точностью порядка 0.1% по итоговому численному возможно, сделать вывод о сходимости к построенному решению в условиях нарушения законов сохранения не представляется возможным.

В противоположной ситуации, для отрицательных ненулевых ε_2 и ε_3 , в процессе моделирования наблюдается сходимость. Однако решение, построенное в разделе 2.1 не существует для данных параметров. Алгоритм подбора аналитического решения по численному в данном случае не срабатывает, и сравнивать численное решение не с чем. Процесс перехода к моменту $T = 5000$ установился с точностью $3.7 \times 10^{-4}\%$, законы сохранения выполняются, и процесс потери солитоном мощности и импульса прекратился. Зависимости интегралов от времени проиллюстрированы на Рис. 20.



(a) Зависимость I_1 от времени.



(b) Зависимость I_2 от времени.

Рис. 20: Поведение законов сохранения при $L = 160$, $T = 5000$, $h = 0.1$, $\tau = 0.02$, $\varepsilon_2 = -0.65$, $\varepsilon_3 = -0.08$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Несмотря на отсутствие аналитического решения, мы утверждаем, что сходимость численного решения достигнута. Законы сохранения выполняются, потери солитоном интегралов прекращаются - за вторую половину моделирования рассеяно в 23×10^3 раз меньше I_1 , чем в первую, и аналогично, в 27×10^3 раз меньше I_2 . Амплитуда численного решения устанавливается. Её поведение проиллюстрировано на Рис. 21.

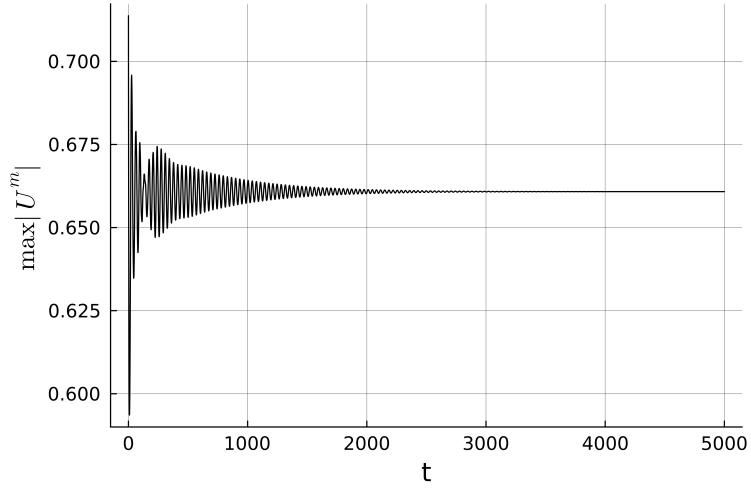


Рис. 21: Зависимость амплитуды численного решения от времени при $L = 160$, $T = 5000$, $h = 0.1$, $\tau = 0.01$, $\varepsilon_2 = -0.65$, $\varepsilon_3 = -0.08$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$.

Определив влияние одновременно отрицательных или одновременно положительных ε_2 и ε_3 , возможно предположить, что комбинации в математической модели параметров разных знаков будет иметь усреднённые свойства, характерные для параметров каждого знака. Положительные значения стремятся нарушить сеточную сходимость и законы сохранения, привести к большим временам установления. Отрицательные значения, вероятно, нивелируют этот эффект.

Проиллюстрируем некоторые варианты поведения амплитуды импульса в зависимости от параметров нелинейностей на Рис. 22 и Рис. 23. Здесь δ — процент, в пределах которого изменяется амплитуда импульса в конце временного промежутка моделирования. Величина δ приведена только для условно устанавливающихся переходных процессов.

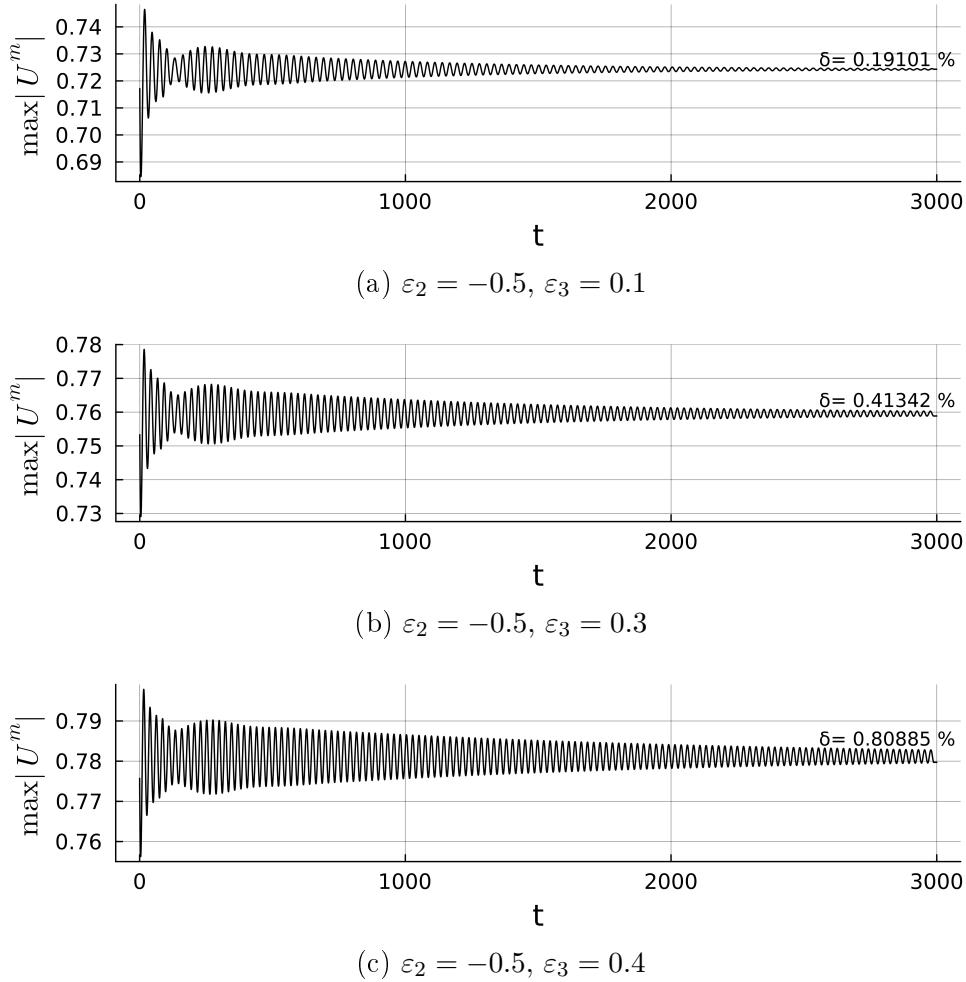
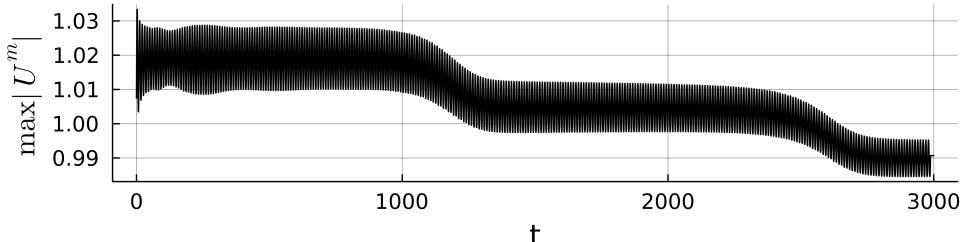
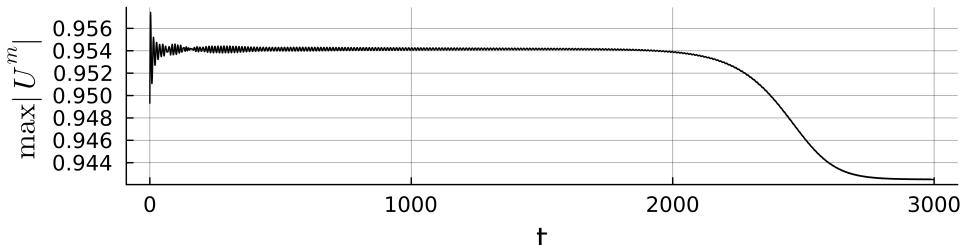


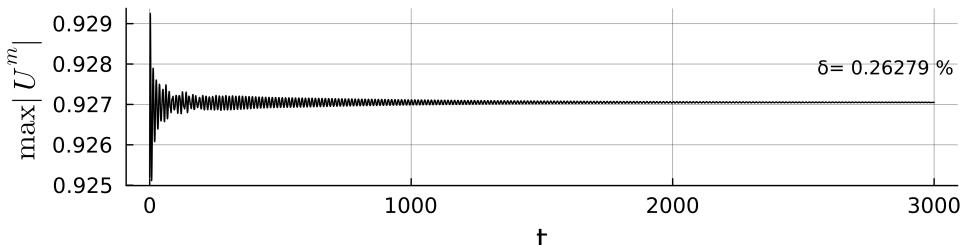
Рис. 22: Зависимость амплитуды импульса (51) при распространении . $L = 160, T = 3000, h = 0.2, \tau = 0.04, \omega = 0.4, k = 0.15$.



(a) $\varepsilon_2 = 0.5, \varepsilon_3 = -0.1$



(b) $\varepsilon_2 = 0.5, \varepsilon_3 = -0.3$



(c) $\varepsilon_2 = 0.5, \varepsilon_3 = -0.4$

Рис. 23: Зависимость амплитуды импульса (51) при распространении . $L = 160, T = 3000, h = 0.2, \tau = 0.04, \omega = 0.4, k = 0.15$.

Для случаев 23а, 23б законы сохранения нарушены. Для случая 23б - выполнены. Из приведённых результатов можно предположить, что установление при моделировании процесса распространения в рамках модели с нелинейными параметрами разных знаков возможно, причём независимо от того, какой из параметров положителен. Однако заметим, что в реальных физических приложениях коэффициенты в уравнении модели при высших нелинейных степенных членах уменьшаются по мере роста степени нелинейности.

С целью определения влияния нелинейных членов построим диаграмму в координатах $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, на которой проиллюстрируем зависимость относительного процентного нарушения законов сохранения. Результаты, изображённые на Рис. 24, получены для различных комбинаций параметров ε_2 и ε_3 . Моделирования проведены на одинаковых сетках для одинаковых начальных условий.

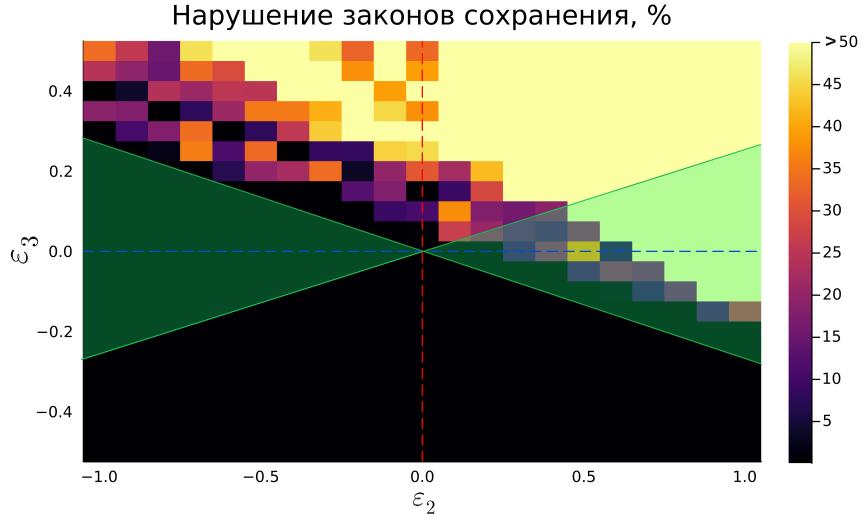


Рис. 24: Диаграмма влияния ε_2 и ε_3 на сохранение интегралов в процессе моделирования $L = 120$, $T = 2000$, $h = 0.1$, $\tau = 0.01$, $\omega = 0.45$, $k = 0.15$.

Тёмные области на диаграмме иллюстрируют моделирования, для которых законы сохранения не нарушились. Светлые области соответствуют значениям параметров ε_2 и ε_3 , для которых законы сохранения нарушились. Цвет на Рис. 24 пропорционален погрешности, в пределах которой за время моделирования сохранялись величины $I_1 + I_{1f}$ и $I_2 + I_{2f}$.

Для всех моделей, проведённых при положительных ε_2 и ε_3 , законы сохранения нарушены. Для всех моделей, проведённых при отрицательных ε_2 и ε_3 , законы сохранения выполняются. Для моделей в рамках математических моделей с разными знаками коэффициентов при нелинейных членах возможны различные варианты, в зависимости от модуля коэффициентов.

В реальных математических моделях коэффициент ε_3 имеет меньший порядок, чем ε_2 . Следовательно, существует связь вида

$$|\varepsilon_3| < C \cdot |\varepsilon_2|, \quad (62)$$

где C - некоторая положительная константа. Область, удовлетворяющая ограничению (62) для $C = 0.28$ выделена на Рис. 24 зелёным. Из проведённого численного анализа эмпирически следует, что моделирование распространения импульса (51) в рамках модели (6) с отрицательным ε_2 происходит с выполнением законов сохранения независимо от знака ε_3 . Процессы распространения для положительного ε_2 сопровождаются нарушением законов сохранения независимо от знака ε_3 . Данный вывод справедлив для импульса (62) с рассмотренными параметрами $\omega = 0.45$, $k = 0.15$ в рамках моделирования на сетке с параметрами $L = 120$, $T = 2000$, $h = 0.1$, $\tau = 0.01$ при условии выполнения соотношения (62) между коэффициентами ε_2 и ε_3 .

Отметим, что исследуемая математическая модель является консервативной.

Следовательно, законы сохранения математически обязаны выполняться. Наблюдаемые нарушения законов и отсутствие сеточной сходимости для светлых областей на Рис. 24 говорит о несоответствии результатов данных моделирований реальной физике процесса. Нарушение законов сохранения происходит из-за численной аппроксимации производной для решения, которая вычисляется с существенными погрешностями для распавшегося и интерферирующего с самим собой импульса в силу существенной негладкости его профиля. Мы предполагаем, что распад импульса происходит по причине резкого накопления численных ошибок при определённых комбинациях параметров ε_2 и ε_3 , проиллюстрированных на диаграмме 24. В качестве подтверждения данного предположения выступает наблюдение: распад импульса происходит тем раньше, чем мельче разностная сетка для численного решения задачи.

Результаты, представленные в данном разделе, позволяют сделать вывод о том, что уединенные волны НУШ при распространении в среде с высшими нелинейными членами при определённых параметрах математической модели преобразуются в устойчивые солитоны обобщенной неинтегрируемой модели. Для рассмотренного импульса определены параметры математической модели, при которых возможен переход к устойчивому решению. Преобразование импульса происходит с выполнением законов сохранения для $\varepsilon_2 < 0$, и с нарушением при $\varepsilon_2 > 0$ независимо от знака ε_3 при соблюдении условия малости: $|\varepsilon_3| < C \cdot |\varepsilon_2|$, где C - некоторая константа. Для наблюдения перехода в процессе расчёта необходимо диссипировать излучение за пределами характерной протяжённости импульса.

Заметим, что математически, при равных абсолютных значениях ε_2 и ε_3 , большее влияние на процесс распространения оказывает коэффициент ε_3 . В результате численного анализа установлено, что для некоторого $C \in (0, 1)$ при $\varepsilon_3 > -C \cdot \varepsilon_2$ численные ошибки резко возрастают по мере моделирования, импульс распадается, и законы сохранения нарушаются. При $\varepsilon_3 < -C \cdot \varepsilon_2$ результаты моделирования согласуются с физическими законами.

3.5 Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности

Известно, что решения интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера взаимодействуют упруго, т.е. без обмена импульсом и энергией. При нарушении интегрируемости системы внешними возмущениями солитонные столкновения становятся неупругими. В этом разделе мы исследуем столкновения солитонов НУШ в среде, описываемой возмущённым уравнением (6).

Рассмотрим столкновения двух солитонов вида (51) с заданными параметрами $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, z_{0,1}, z_{0,2}, \theta_{0,1}, \theta_{0,2}$. Значения параметров ε_2 и ε_3 в данном случае влияют на интенсивность обмена импульсом и энергией. Обнаружено, что итоговый характер

взаимодействия солитонов зависит также от разности фаз в момент столкновения $\Delta\theta = \theta_{0,1} - \theta_{0,2}$.

Результаты моделирования для $k_1 = -k_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $z_{0,1} = -z_{0,2}$, $\theta_{0,1} = \theta_{0,2} + \Delta\theta$ проиллюстрированы на Рис. 25 и Рис. 26.

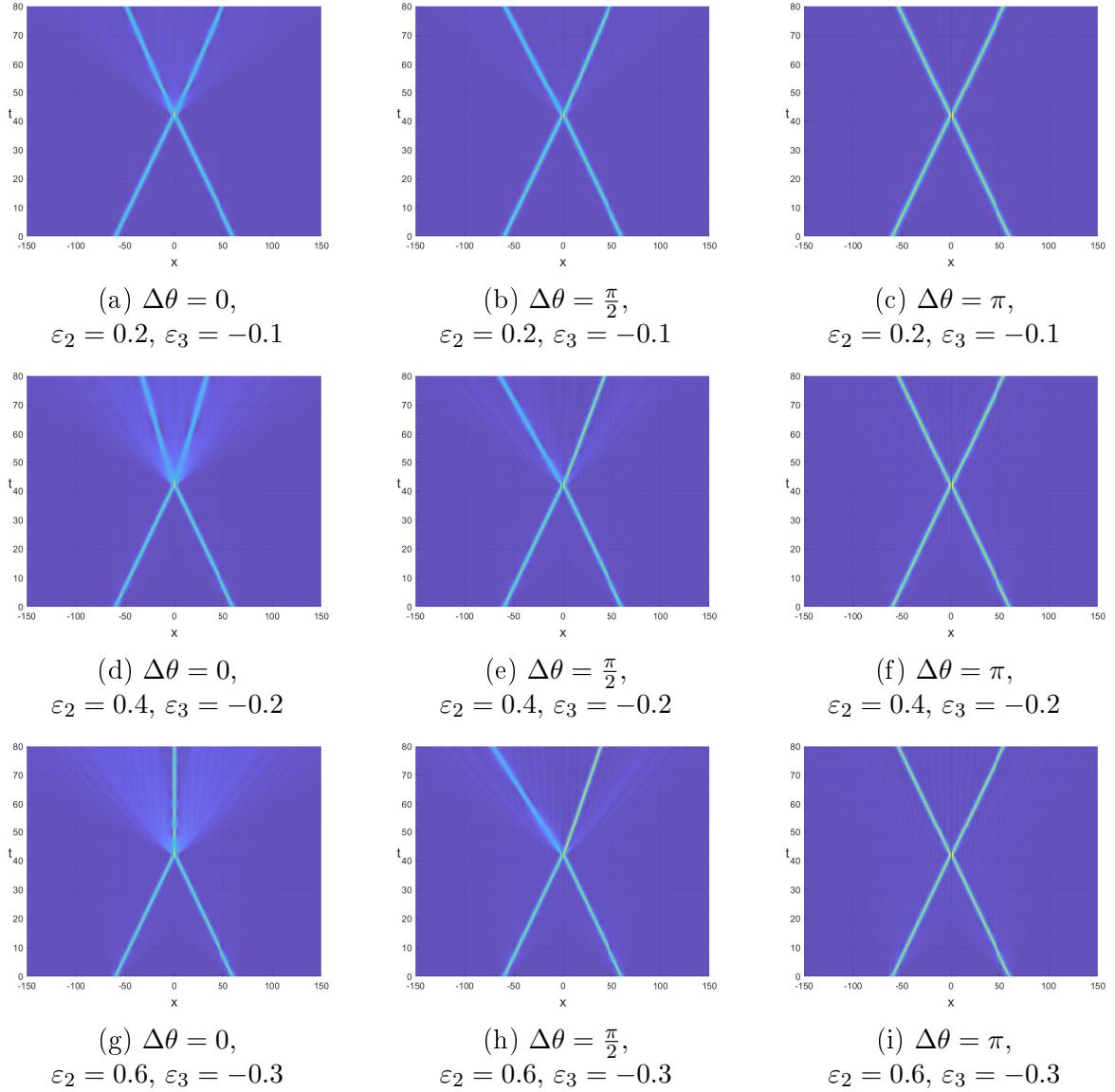


Рис. 25: Модуль численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

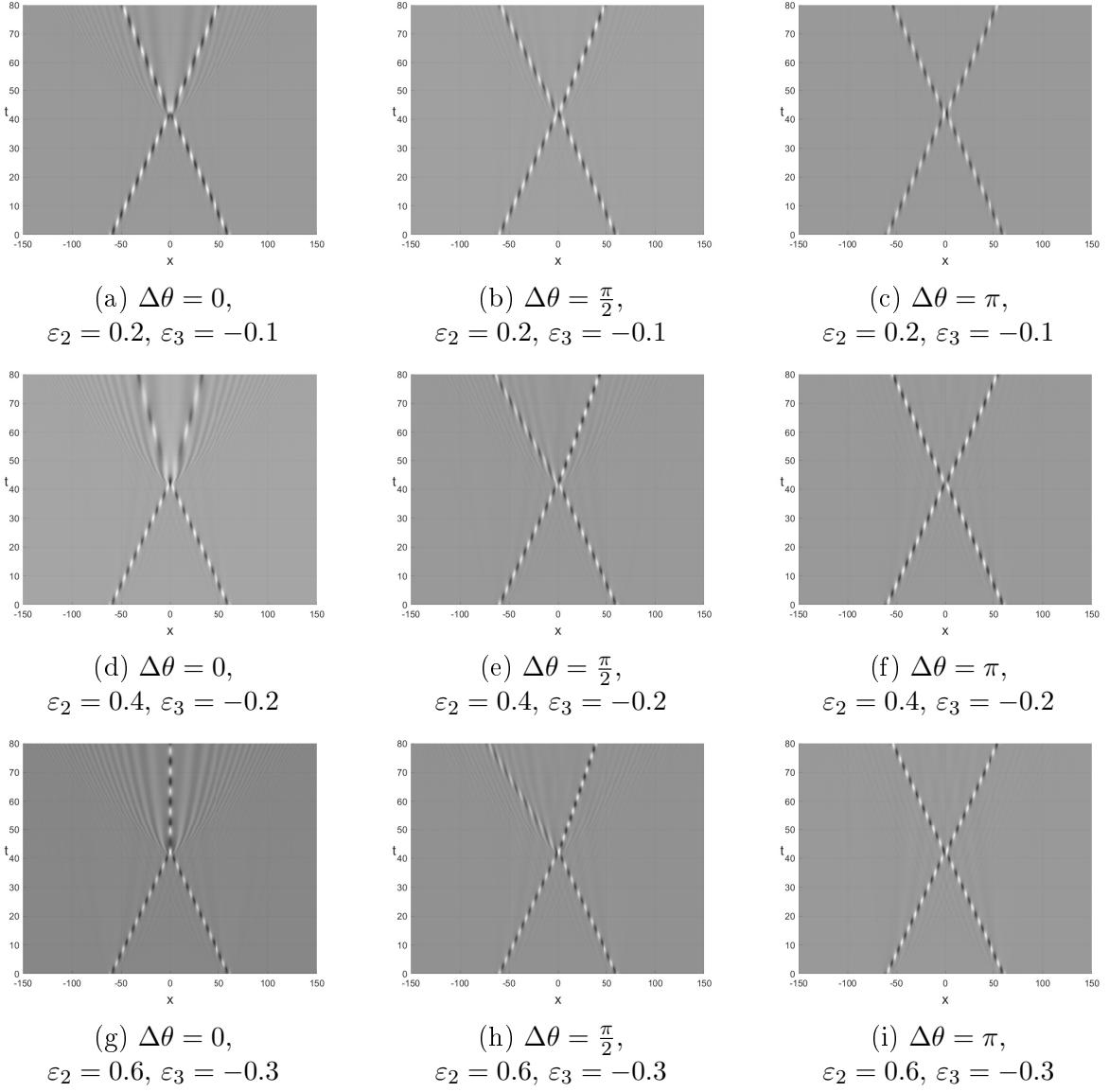


Рис. 26: Действительная часть численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7, \omega_1 = \omega_2 = 0$.

Результаты моделирования позволяют заключить, что столкновения солитонов НУШ в рамках математической модели, включающей нелинейные члены высшего порядка в зависимости от разности фаз в момент столкновения могут быть существенно неупругими. Вблизи $\Delta\theta = \pi$ солитоны взаимодействуют наименее интенсивно. При параметре $\Delta\theta \in (0, \pi)$ взаимодействие солитонов сопровождается обменом энергии и импульса. Когда разность фаз находится в некоторой окрестности нуля, при столкновении происходит потеря мощностей и импульсов сталкивающихся солитонов. Существуют пороговые параметры нелинейностей, при которых результирующий солитон после столкновения перестаёт распространяться. Помимо разности фаз, на определенный тип взаимодействия влияют значения параметров возмущения ε_2 и ε_3 . Чем больше модуль коэффициента при соответствующей степени нелинейности, тем более выражен неупругий характер взаимодействия.

4 Заключение

В данной работе проведено численное моделирование процессов распространения импульсов в нелинейной оптической среде с периодическими граничными условиями, описываемой обобщённым уравнением Шрёдингера (2) с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Получено аналитическое решение в виде уединенной волны (29) и условия ее существования. Представлена модификация конечно-разностного и Фурье методов для численного решения поставленной задачи. С численной точки зрения исследован процесс распространения аналитически полученного солитонного решения обобщённой модели. Проведено моделирование взаимодействия оптического солитона уравнения (2) с возмущением в начальных данных. Смоделировано распространение оптического импульса в среде со случайным шумом. Проанализировано влияние высших степеней нелинейности в математической модели на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Проведено моделирование процессов столкновения солитонов в условиях наличия высших нелинейных членов.

Следующие результаты получены в результате исследования:

1. Уединённые волны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней распространяются устойчиво.
2. Оптические солитоны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней не распадаются при возмущениями начальных условий или при распространении в условиях случайного шума.
3. Определены параметры, для которых при распространении в оптической среде, описываемой математической моделью с нелинейными членами более высокого порядка солитоны НУШ преобразуются в солитоны, удовлетворяющие обобщённому уравнению.
4. В условиях наличия нелинейных членов высшего порядка столкновения солитонов НУШ происходят значительно неупруго. При определённых параметрах возможно образование стоячих волн.

5 Коды программ, использованных в работе

Для исследования процессов, обсуждённых в настоящей работе, создан проект на языке julia. Основные коды использованных функций приведены ниже.

5.1 Функции, определяющие аналитические решения

Солитон классического НУШ

```
function NSE_3_soliton(
    x, t,
    k::Real,
    omega::Real,
    theta_0::Real,
    z_0::Real;
    cycle::Bool=false,
    L::Real=0.0,
)
    mu = (omega-k^2)
    mu > 0.0 || throw(ArgumentError("mu <= 0. Некорректные k и omega."))
    c=2*k
    if cycle
        if t>(L/2+x)/c
            t-=L/c*floor(1/2 + (c*t -x)/L)
        end
    end
    Complex(
        4 * (mu) / (
            2 * mu * exp(-(x - z_0 - 2k * t) * sqrt(mu)) +
            exp((x - z_0 - 2k * t) * sqrt(mu))
        )
    ) * exp(1im * (k * x - theta_0 - omega*t))
end
```

Солитон НУШ с нелинейностью 3 и 5 степеней

```
function NSE_3_5_soliton(
    x, t,
    k::Real,
    omega::Real,
    epsilon_2::Real,
    theta_0::Real,
    z_0::Real;
    cycle::Bool=false,
    L::Real=0.0,
)
    mu = 4*(omega-k^2)
    mu > 0.0 || throw(ArgumentError("mu <= 0. Некорректные k и omega."))
    c=2*k
    if cycle
        if t>(L/2+x)/c
            t-=L/c*floor(1/2 + (c*t -x)/L)
        end
    end
    power = sqrt(mu) * (x - 2k * t - z_0)
    v = 4/3 * epsilon_2
    Complex(sqrt(
        (4 * mu * exp(power))
        / (1 + 4 * exp(power) + (4 + 4 * mu * v) * exp(2 * power))
    )) * exp(1im * (k * x - theta_0 - omega*t))
end
```

Солитон НУШ с нелинейностью 3, 5 и 7 степеней

```
function evaluate_mu(M0, M1)
    mu_a = sqrt(M1 / (M0 * (M1 + 6 * M0)))
```

```

    mu_b = -mu_a
    return mu_a
end
function xi_edges(mu, M0, M1, epsilon_left, epsilon_right, xi_0)
    sqrt_expression = sqrt(4 * M0 * M1 + M1^2)
    return (
        log((sqrt_expression - 2 * M0 - M1) / (2 * M0))
        / mu + xi_0 + epsilon_left,
        log((-sqrt_expression - 2 * M0 - M1) / (2 * M0))
        / mu + xi_0 - epsilon_right
    )
end
function hyperbolic_space(a::Real, b::Real, N::Int; density::Real=1.0)
    N >= 2 || error("Количество точек меньше 2")
    density > 0 || error("Параметр density должен быть положительным")
    linear_space = range(-1.0, stop=1.0, length=N)
    hyperbolic_space = tanh.(linear_space * 2 * density) / tanh(2 * density)
    return a .+ (b - a) .* (hyperbolic_space .+ 1) / 2
end
function evaluate_z(xi_vector, mu, M0, M1, z_0, xi_0)
    sqrt_expression = sqrt(4 * M0 * M1 + M1^2)
    _atanh_expression =
        (2 * M0 * exp.(mu * (xi_vector .- xi_0)))
        .+ 2 * M0 .+ M1) / sqrt_expression
    v_clipped = [x > 1 ? 1 : x < -1 ? -1 : x for x in _atanh_expression]
    atanh_expression = unique(v_clipped)
    return z_0 .+ xi_vector / M0 + (2 * M1) / (mu * M0 * sqrt_expression) *
        atanh.(atanh_expression)
end
function evaluate_y(xi_vector, mu, M0, M1, xi_0)
    exp_expression = (1 .+ exp.(mu * (xi_vector .- xi_0)))

    complex_y = sqrt.(Complex.(
        M0 .+ M1 ./ exp_expression - M1 ./ (exp_expression .^ 2)
    ))
    all(imag(complex_y).==0) ||
        @warn "При вычислении y(z) обнаружены и отброшены комплексные числа."
    complex_y[imag(complex_y).!=0.0] .= Complex(0.0)
    return Float64[real(x) for x in complex_y]
end
function precompile_NSE_3_5_7_soliton(
    epsilon_2::Real,
    epsilon_3::Real,
    z_0::Real,
    xi_0::Real,
    L::Real;
    use_M_values=false,
    M0=0.0,
    M1=0.0,
)
    if ~use_M_values
        (M0, M1) = epsilon2_epsilon3_to_M0_M1(epsilon_2, epsilon_3)
    end
    println("M0=", round(M0, digits=4), " M1=", round(M1, digits=4))
    mu = evaluate_mu(M0, M1)

    iters, iters_limit, success, epsilon_left, epsilon_right = 0, 50, false, 0, 0
    while ~success && iters<iters_limit
        iters+=1
        (xi_left, xi_right)
    end
end

```

```

        = xi_edges(mu, M0, M1, epsilon_left, epsilon_right, xi_0)
global xi_vector = hyperbolic_space(xi_left, xi_right, 10^6; density=1)
global z_vector = evaluate_z(xi_vector, mu, M0, M1, z_0, xi_0)
if z_vector[1]==-Inf
    epsilon_left+=eps()
end
if z_vector[end]==Inf
    epsilon_right+=eps()
end
success = ~any(isinf, z_vector)
iters==iters_limit && error("Ошибка предкомпиляции решения: MaxIters")
end
maximum(z_vector) > L/2 ||
@warn "предкомпиляция решения: выход за правую границу. \
Будет использована экстраполяция"
minimum(z_vector) < -L/2 ||
@warn "предкомпиляция решения: выход за левую границу. \
Будет использована экстраполяция"

y_vector = evaluate_y(xi_vector, mu, M0, M1, xi_0)
interpolator = extrapolate(
    interpolate((z_vector,), y_vector, Gridded(Linear())), Line())
)
return interpolator
end
function reduce_negative_values(x::Real)::Real
    return x < 0.0 ? 0.0 : x
end
function reduce_negative_values(xs::AbstractVector{<:Real})::Vector{Real}
    return [reduce_negative_values(x) for x in xs]
end
function NSE_3_5_7_soliton(
    x,
    t,
    k::Real,
    omega::Real,
    theta_0::Real,
    z_0::Real,
    precompiled_data;
    # Cycling parameters
    cycle::Bool=false,
    L::Real=0.0,
)
    y = precompiled_data
    c=2*k
    if cycle
        if t > (L / 2 + x) / c
            t -= L / c * floor(1 / 2 + (c * t - x) / L)
        end
    end
    z = x - 2k * t - z_0

    reduce_negative_values(y.(z)) * exp(
        1im * (k * x - theta_0 - omega * t)
    )
end

```

Литература

- [1] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23:485–507, 6 1986.
- [2] N.A. Kudryashov. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 371, 4 2020.
- [3] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:142–144, 8 1973.
- [4] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. *Applied Physics Letters*, 23:171–172, 8 1973.
- [5] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [6] Yuri Kivshar and Govind Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, 2 2003.
- [7] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [8] Igor S. Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74:99–143, Feb 2002.
- [9] M Ablowitz and H Sigur. *Solitary Waves and the Inverse Problem Method [Russian translation]*. Mir, Moscow, 1982.
- [10] Yuri Kivshar. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS*, 61:763–915, 2 1989.
- [11] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Ali Saleh Alshomrani. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by F-expansion. *Optik*, 187:258–271, 6 2019.
- [12] Nikolay A. Kudryashov. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik*, 186:339–349, 6 2019.

- [13] Hamood Ur Rehman, Naeem Ullah, and M.A. Imran. Highly dispersive optical solitons using Kudryashov's method. *Optik*, 199:163349, 12 2019.
- [14] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163226, 12 2019.
- [15] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by Jacobi's elliptic function expansion. *Optik*, 189:109–120, 7 2019.
- [16] Ivan M. Uzunov, Todor N. Arabadzhiev, and Svetoslav G. Nikolov. Self-steepening and intrapulse Raman scattering in the presence of nonlinear gain and its saturation. *Optik*, 271:170137, 2022.
- [17] Chong Wang, Ying Wang, Shenghan Wang, Chenglin Sun, and Zhiwei Men. Cascaded amplification via three-beam double stimulated Raman scattering in benzene. *Journal of Molecular Liquids*, 368:120667, 2022.
- [18] E.M. Gromov and B.A. Malomed. Damped solitons in an extended nonlinear Schrödinger equation with a spatial stimulated Raman scattering and decreasing dispersion. *Optics Communications*, 320:88–93, 2014.
- [19] Nikolay A. Kudryashov. On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation. *Optik*, 224:165500, 12 2020.
- [20] Russell W. Kohl, Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Qin Zhou, Salam Khan, Ali S. Alshomrani, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle. *Optik*, 199:163322, 12 2019.
- [21] Nikolay A. Kudryashov. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 192:162964, 9 2019.
- [22] Nikolay A. Kudryashov. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 194:163060, 10 2019.
- [23] Anjan Biswas, Mehmet Ekici, Abdullah Sonmezoglu, and Milivoj R. Belic. Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function. *Optik*, 186:288–292, 6 2019.
- [24] Nikolay A. Kudryashov and Dariya V. Safonova. Painleve analysis and traveling wave solutions of the sixth order differential equation with non-local nonlinearity. *Optik*, 244:167586, 10 2021.

- [25] Nikolay A. Kudryashov. General solution of traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model. *Optik*, 186:22–27, 6 2019.
- [26] AI Maimistov, AM Basharov, AI Maimistov, and AM Basharov. Optical solitons in fibers. *Nonlinear Optical Waves*, pages 303–435, 1999.
- [27] A.T. Filippov. *Many-sided Soliton*. Nauka, Moscow, 1990.
- [28] Bruce M Lake, Henry C Yuen, Harald Rungaldier, and Warren E Ferguson. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *Journal of Fluid Mechanics*, 83:49–74, 1977.
- [29] Henry C. Yuen and Warren E. Ferguson. Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. *Physics of Fluids*, 21:1275, 1978.
- [30] E. Fermi, P Pasta, S Ulam, and M Tsingou. Studies of nonlinear problems I. Los Alamos National Laboratory (LANL), 5 1955.
- [31] Ronald H Hardin and F. D. Tappert. Application of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *Siam Review*, 15:423, 1973.
- [32] J.M Sanz-Serna. An explicit finite-difference scheme with exact conservation properties. *Journal of Computational Physics*, 47:199–210, 8 1982.
- [33] J M Sanz-Serna and V S Manoranjan. A method for the integration in time of certain partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 52:273–289, 1983.
- [34] M Delfour, M Fortin, and G Payr. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, 44:277–288, 12 1981.
- [35] D.F. Griffiths, A.R. Mitchell, and J.Li. Morris. A numerical study of the nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:177–215, 9 1984.
- [36] J. M. Sanz-Serna. Methods for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics of Computation*, 43:21–27, 1984.
- [37] A Mitchell and J Morris. A self adaptive difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *Arab Gulf Journal of Scientific Research*, pages 461–472, 1983.
- [38] Hongyu Qin, Fengyan Wu, and Deng Ding. A linearized compact ADI numerical method for the two-dimensional nonlinear delayed Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, 412:126580, 2022.

- [39] Nikolay A. Kudryashov. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. *Optik*, 261:169163, 7 2022.
- [40] Nikolai A. Kudryashov. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24:1217–1231, 6 2005.
- [41] Nikolay A. Kudryashov and Daniil R. Nifontov. Conservation laws and hamiltonians of the mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 175:114076, 10 2023.