

Métodos computacionais em física

Projeto1-Relatório

Pedro Mariano Marques Mendes, 9865398

Abril 2020

1 Introdução

O objetivo deste projeto é simular numericamente a interação gravitacional de três corpos em duas dimensões, em especial as interações entre o Sol, a Terra e Júpiter. o cálculo dessa interação é feito pelo método numérico de Runge-Kutta. A interação gravitacional é dada pela equação:

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}_{1,2}\|^2}\hat{r}_{1,2} \quad (1)$$

Onde $F_{1,2}$ é a força que 2 faz em 1. G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas do corpo 1 e 2 respectivamente e por fim:

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2)$$

O método de Runge-Kutta é um método numérico iterativo para se aproximar a solução de equações diferenciais. É um melhoramento do método de Euler. Enquanto o método de Euler utiliza de um passo para calcular o valor seguinte na iteração, o método *RK2* faz o mesmo cálculo em duas etapas, calculando valores intermediários entre o valor n e o valor $n + 1$.

Dada uma variável $x(t)$ o método de *RK2* é feito da seguinte forma:

$$k_1^x = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \Delta t \quad (3)$$

$$x(t + \Delta t/2) = x_{int} = x(t) + k_1^x/2 \quad (4)$$

$$k_2^x = \frac{\partial x(t + \Delta t/2)}{\partial t} \Delta t \quad (5)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + k_2^x \quad (6)$$

Isso pode ser feito para quantas variáveis existirem no problema. Para abordar o problema da interação gravitacional dos corpos utilizando o método de Runge-Kutta foi usado o programa Octave [1].

2 Manual do usuário

Em função das grandes escalas presentes no problema foram adotadas unidades de medida astronômicas, sendo elas:

- $1 \text{ ua} = 149597871 \text{ km}$
- $1 \text{ ano} = 8760 \text{ s}$
- $1 \text{ ua/ano} = 17077.3825342 \text{ km/h}$

Isto é necessário até mesmo do ponto de vista computacional, onde números muito grandes podem causar problemas.

O programa simula a interação gravitacional entre os astros e suas órbitas de acordo com as condições iniciais desejadas. Como condições iniciais temos: A constante gravitacional G , as massas, posições iniciais e velocidades iniciais dos astros, o tempo entre cada iteração e o tempo total da simulação. As condições iniciais estão nas linhas 13 a 57 e podem ser alteradas, com exceção das linhas 22 a 28, conforme queira. Após escolhidas as condições iniciais é só rodar o programa.

Após realizar todos os cálculos o programa faz um gráfico do desenho das órbitas. Além disso ele plota 6 gráficos indicando a oscilação dos astros nos eixos x e y , e a animação dos astros em função do tempo. A movimentação do Sol também é calculada, porém é irrisória na escala usada.

O plot com seis gráficos é interessante para se analisar a influência gravitacional dos corpos nas órbitas.

Na linha 232 é possível alterar os limites da simulação caso queira assistir uma parte específica da órbita, como por exemplo o sobrevoo de Juno na Terra. Pode-se alterar o começo, passo e/ou final da animação:

232 - for i=tempo inicial:passo temporal da animação:tempo final

3 Descrição da simulação numérica e resultados obtidos.

Como dito o programa foi desenvolvido utilizando-se como método de iteração o método de Runge-Kutta de segunda ordem. No nosso caso temos como funções a posição e a velocidade, de acordo com a equação 1 temos, para a partícula 1:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = a(t) = -\frac{Gm_2}{\|\vec{r}_{1,2}\|^2} \hat{r}_{1,2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = v(t) \quad (8)$$

Tendo calculado a velocidade podemos usá-la para atualizar a posição.

As figuras 1 e 2 são um exemplo de uma simulação de 25 anos com Terra e Júpiter começando no eixo x e com suas velocidades reais no sentido $+y$. O passo temporal é de $12h$.

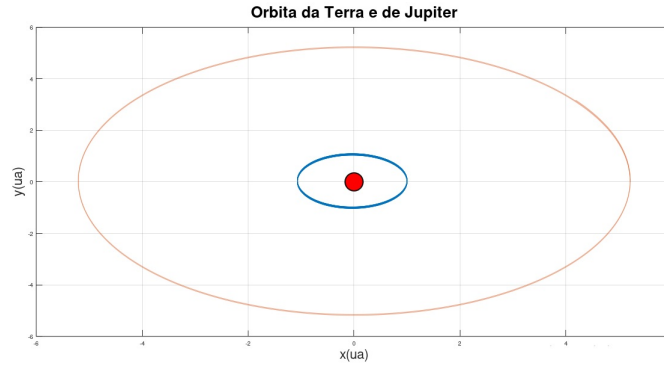


Figure 1: Sol, órbitas de Júpiter e Terra. Não está em escala.

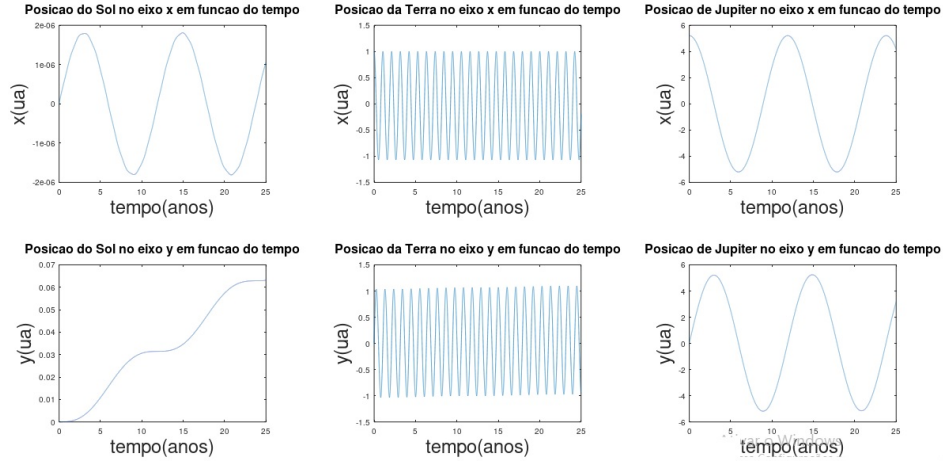


Figure 2: Variação nas órbitas em x e y .

Existe uma tendência para a direção $+y$ do Sol e da Terra em função de Júpiter. Porém este movimento é pequeno e são obtidas órbitas bem estáveis. Esse fenômeno é minimizado se iniciarmos o programa com Júpiter no eixo $-x$, e portanto começando com a velocidade no sentido $-y$.

4 Projeto Juno

A sonda Juno é uma sonda espacial enviada pela NASA para coletar informações sobre o Planeta Júpiter. Foi lançada no dia 5 de agosto de 2011 e chegou a Júpiter no dia 5 de Julho de 2016. Um dos fatos mais impressionantes, e mais importantes para nós, nessa missão, foi seu plano de voo extremamente complexo. Esse plano de voo consistia em, após ser lançada, realizar uma trajetória de dois anos orbitando o sol e, após essa órbita, passar perto da Terra para

ganhar mais velocidade com sua atração gravitacional e com isso fazer uma segunda órbita bem maior, que se encontra com Júpiter depois de mais três anos de viagem [2].



Figure 3: Representação artística da sonda Juno em Júpiter.

Esse "estilingue" feito com a Terra é extremamente complexo por envolver diversas variáveis além da escolha adequada de parâmetros iniciais de lançamento, que afetam toda a trajetória. "This is the hardest thing NASA has ever done, that's my claim." [Isso é a coisa mais difícil que a NASA já fez, essa é minha afirmação] Scott Bolton, líder do grupo de pesquisa na missão Juno [3].

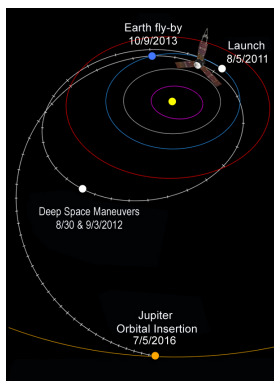


Figure 4: Trajetória prevista da sonda Juno.

A missão oficial conta com as seguintes etapas: [4] [5] [3]:

- 5 de Agosto de 2011 - Lançamento
- Agosto de 2012 - Correções de trajetória
- Setembro de 2012 - Correções de trajetória
- Outubro de 2013 - Sobrevoio da Terra para aumentar a velocidade (de 130000 a 150000 km/h)

- 4 de julho de 2016 - Chegada a Júpiter e inserção da órbita polar (1ª órbita)

Mas por que fazer essa trajetória complicada?

"When Juno launched, there was not an available rocket powerful enough to send such a heavy spacecraft directly Jupiter, so the flyby maneuver is an essential part of the mission. The Atlas V rocket provided half of the boost Juno needs to reach Jupiter, and the Earth flyby provides the rest. It's the energy of an extra rocket launch, without the extra rocket". [Quando Juno foi lançada não havia combustível suficiente para mandar uma espaçonave tão pesada diretamente para Júpiter, então a manobra de sobrevoo é uma parte essencial da missão. O foguete Atlas V providenciou metade do impulso que Juno precisava para chegar a Júpiter, o sobrevoo providenciou o resto. É a energia de um foguete extra, sem um foguete extra.]. [6]

Se quiser saber mais: [7] [8]

O projeto Juno se trata exatamente de tentar replicar essa missão espacial ou, pelo menos, encontrar outras configurações na qual ela seria possível. Para isso foram desenvolvido dois scripts em Octave [1].

4.1 Manual do usuário

Primeiro se deve usar o script `ProjetoJunoCalculo` para achar condições iniciais adequadas, e depois o script `ProjetoJuno.m` para ver o resultado de tais condições iniciais.

O script `ProjetoJunoCalculo` tem como função otimizar a órbita em função de duas condições iniciais, o módulo da velocidade de lançamento e o ângulo de lançamento da sonda em relação ao eixo x . Podemos variar ambas as condições simultaneamente ou apenas uma. A otimização da órbita é feita tentando otimizar dois parâmetros, a distância mínima de Juno com a Terra no sobrevoo, que queremos minimizar, e a distância máxima entre Juno e o Sol após o sobrevoo, que queremos maximizar.

Da linha 47 a 97 do programa temos as condições iniciais como posição dos planetas, do Sol e suas velocidades, que podem ser alteradas conforme queira, exceto as linhas 56 a 64. Além dessas condições iniciais temos também o passo temporal da simulação (tempo entre cálculo da iteração), a constante gravitacional G , a massa dos planetas e o limite de tempo da simulação (não colocar tempo final menor do três anos).

Por último temos, nas linhas 100 a 105, o ângulo e velocidade de lançamento da sonda, o número de passos do ângulo e da velocidade, e o incremento de cada passo.

Sugestão: Escolha um valor inicial e um valor final para cada condição, em seguida um número de passos e depois faça valor final menos inicial dividido pelo número de passos, o resultado é seu incremento.

Caso o número de passos seja muito grande o programa pode demorar muito tempo para fazer todos os cálculos, em decorrência disso ele avisará na janela de comando, logo após começar, o tempo esperado para executar. Caso seja muito

grande é somente apertar *ctrl + c* para parar o programa e então pode escolher valores menores para o número de passos (o tempo é proporcional a numero de passos do ângulo vezes o número de passos da velocidade).

Caso o número de passos de ambas as variáveis seja maior do que um serão plotados gráficos *3D* e de curvas de nível da distância. Caso se varie apenas uma das condições serão plotados gráficos *2D* das distâncias em função da variável escolhida. Em ambos os casos esses gráficos nos permitem uma análise de como as distâncias que queremos otimizar se comportam. Com eles podemos achar regiões de mínimos ou de máximos. Achadas essas regiões é recomendável rodar novamente o programa para essa região com um passo menor para melhorar a definição. Quanto mais vezes esse processo for feito, melhor o resultado. vale notar que pequenas alterações nas condições iniciais podem gerar resultados bem diferentes.

Já nas linhas 349 e 350, que estão na parte de análise, podemos escolher qual a distância mínima que queremos entre Juno e a Terra no sobrevoo e a distância máxima entre Juno e o Sol após o sobrevoo. Isso serve para, por exemplo, descartar uma trajetória direta até Júpiter e também órbitas que não chegaram muito longe do Sol. Mas, principalmente, para otimizar o sobrevoo com a Terra excluindo os casos que não conseguiram sair de uma órbita próxima a da Terra. Caso sejam variadas as duas condições o programa então mostrará se existem - e quantas - condições iniciais que atendem as duas expectativas simultaneamente e as mostrará num gráfico *2D* (caso não exista uma condição aceita não será feito o gráfico *2D*).

Sugestão 2: Não é necessário rodar todo o programa novamente para se refazer um gráfico ou escolher condições diferentes na parte de análise. Para isso copie a parte desejada num outro script e rode somente esta parte. Isso pode ser necessário para achar pontos que atendem a ambas as condições.

Todo o resto do programa não deve ser alterado.

Achada uma condição inicial adequada podemos ir para o segundo programa.

O script ProjetoJuno simula a orbita com uma certa condição inicial, faz uma animação do resultado e um gráfico da órbita. É bem semelhante ao script PedroMarianoProjeto1.m, mas agora com Juno incluída.

Neste programa podemos testar as condições achadas no primeiro, observar a órbita da sonda e verificar se está de acordo com o esperado. Sempre podemos voltar ao primeiro programa para achar condições mais precisas caso seja necessário.

As condições iniciais estão nas linhas 12 a 68 e podem ser alteradas, com exceção das linhas 21 a 29, conforme queira.

Na linha 230 é possível alterar os limites da simulação caso queira assistir uma parte específica da órbita, como por exemplo o sobrevoo de Juno na Terra. Pode-se alterar o começo, passo e/ou final da animação:

230 - for i=tempo inicial:passo temporal da animação:tempo final

4.2 Descrição da simulação numérica e resultados obtidos.

Estes programas também utilizaram o Método de Runge-Kutta de segunda ordem.

Como a sonda inicia sua jornada muito próxima da Terra, e portanto com forte influência gravitacional da mesma, a primeira interação calculada é muito forte, e se isso demora a ser atualizado a sonda viaja muito tempo sobre influência de uma força muito grande e isso a faz sair totalmente da trajetória, sendo lançada para trás. Foi observado que um passo de $12h$ é suficiente para resolver esse problema.

A primeira coisa é determinar a posição dos astros no dia 5 de agosto de 2011. O site wolfram [9] fornece essa possibilidade.

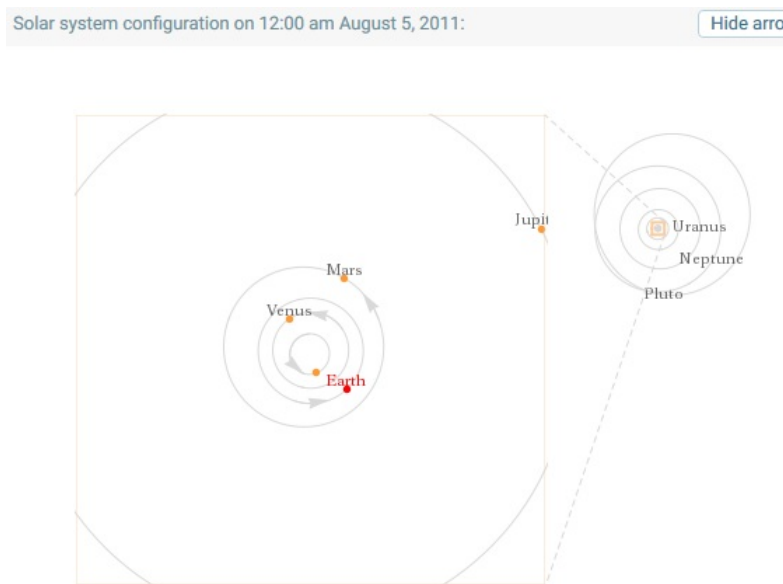


Figure 5: Configuração dos astros no dia do lançamento.

Após 1 órbita de Júpiter começando, por exemplo, no eixo x , pode-se conseguir a velocidade dele na posição da imagem 5. Foi então configurada essa posição e velocidade em ambos os programas.

Foi dito que não havia como mandar Juno diretamente a Júpiter, podemos nos perguntar qual seria a velocidade inicial necessária para se fazer isso no mesmo dia. Utilizando o programa ProjetoJuno podemos chegar a um valor para a velocidade inicial de 30060 km/h , com um passo temporal da simulação de $12h$, a nave sendo lançada na direção $+y$ e na posição $x = 1 - 4 \cdot 10^{-5} \text{ ua}$ e $y = 4 \cdot 10^{-5} \text{ ua}$. Onde $4 \cdot 10^{-5}$ é o raio da Terra em ua . Essa trajetória é mostrada na figura 6 onde o tempo total de simulação foi de 3.7 anos.

Aqui já podemos observar como uma pequena mudança na condição inicial causa grande alteração na órbita, a órbita para uma velocidade inicial de

30000 km/h é bem menor, mesmo a diferença sendo de 0,2 % no valor da velocidade.

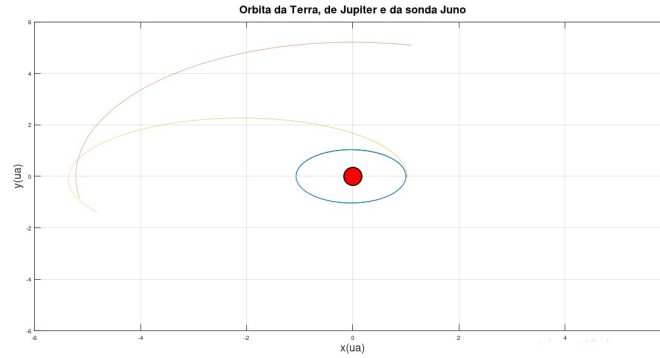


Figure 6: Trajetória diretamente para Júpiter. Astros não estão em escala.

E quanto a trajetória original, utilizando a força gravitacional da Terra?

Aqui começamos a usar o outro programa, ProjetoJunoCalculo, para tentar chegar em condições iniciais. O programa foi executado com os seguintes parâmetros:

x inicial Juno: 0.99 ua
 y inicial Juno: 0.1 ua
 Velocidade de lançamento da Juno: 0.23422 ua/ano
 Ângulo: $\pi/4$ rad
 Passo ângulo = 0.1 rad
 Passo velocidade = 0.029278 ua/ano
 Núm. de passos ângulo: 16
 Núm. de passos velocidade: 40
 Ângulo final: 3.0708 rad
 Velocidade final: 2.9024 ua/ano
 Passo temporal: 1 dia

Devido ao fato desse problema ser bem mais complexo e exigir bem mais simulações o x e y iniciais de Juno foram escolhidos mais distantes da Terra para o passo do tempo ser maior (um dia ao invés de doze horas) e permitir simulações com um número maior de passos levando o mesmo tempo de execução do programa.

Os plots 3D e de curvas de nível são apresentados nas figuras 7 e 8.

Na figura 7 podemos observar que a distância mínima entre Juno e a Terra não parece ser uma função suave em relação as variáveis de ângulo de lançamento e velocidade inicial, variando de forma não uniforme. Isso dificulta muito buscar condições iniciais adequadas, por isso é tão importante um bom programa para nos auxiliar.

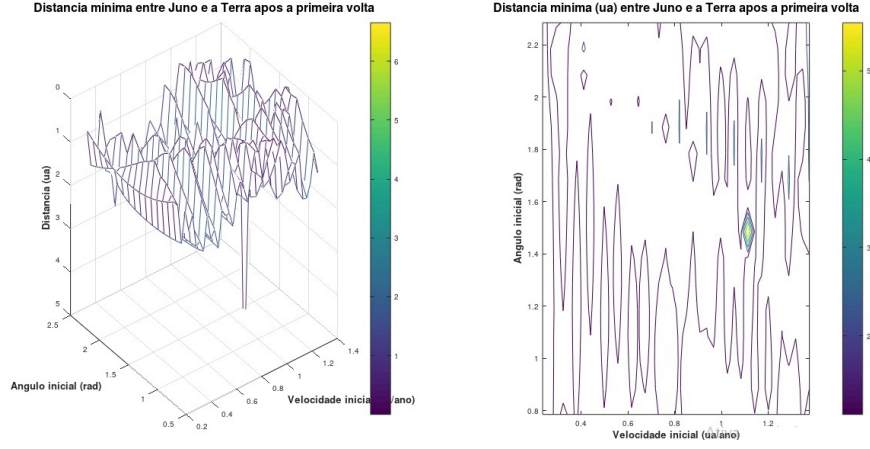


Figure 7: Distância mínima entre Juno e a Terra no sobrevoo.

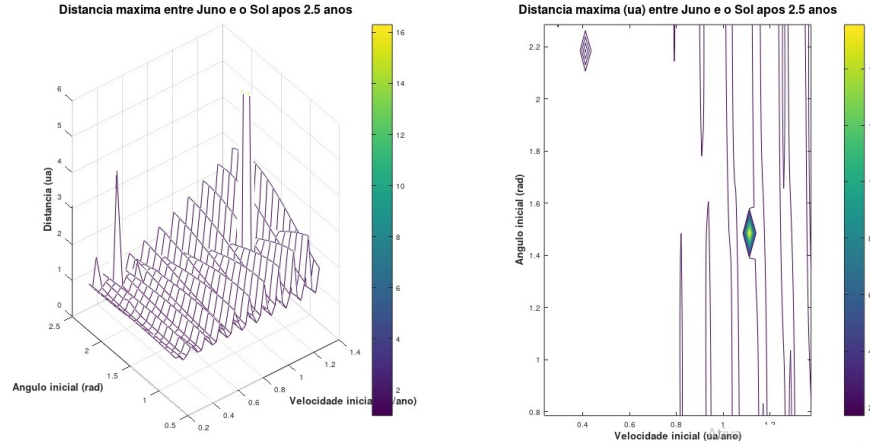


Figure 8: Distância Máxima entre Juno e o Sol após o sobrevoo.

Na figura 8 podemos observar que a distância máxima parece ter um padrão periódico em função das variáveis, ela é mais otimizada para valores maiores de velocidade inicial e para valores de ângulo mais longes de $\pi/2$. Em especial atinge máximos em dois pontos (vel, ang) : $(0.40, 2.20)$ e $(1.11, 1.48)$. Ao comparar esses gráficos com os dois anteriores observamos que ambos os pontos de máximo correspondem a um caso onde a sonda foi, desde o começo, para bem longe, sem voltar para a Terra. No gráfico de proximidade ambos tem valores altos, significando que não chegaram muito perto da Terra depois do lançamento.

Escolhendo na parte de análise as condições: aproximação máxima entre

Juno e Terra $< 0.01 \text{ ua}$ e distância máxima entre Juno e Sol $> 4.9 \text{ ua}$. Conseguimos as condições iniciais apresentadas na figura 9, que vamos chamar de possíveis.

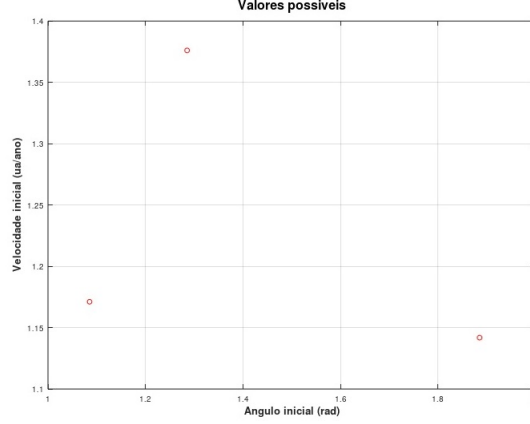


Figure 9: Condições iniciais possíveis.

Conseguimos então três condições iniciais possíveis (vel, ang): (1.14, 1.88), (1.17, 1.09), (1.38, 1.27).

Podemos então obter uma definição maior em cada uma dessas áreas. Apesar desse refinamento não foi possível obter condições iniciais que gerassem a órbita esperada. Apenas órbitas um pouco maiores, mas sem o "estilingue".

O programa ProjetoJunoCalculo é um programa de $\mathcal{O}(2)$ e portanto demora bastante para ser executado. Uma outra possibilidade é variar apenas a velocidade primeiro e achar uma boa velocidade variar o ângulo, ou o contrário. Dessa forma ficamos com dois programas de $\mathcal{O}(1)$.

As imagens 10 e 11 representam a busca por um ponto de mínimo na distância de sobrevoo em função da velocidade inicial. Foram feitas com um ângulo fixo igual a $\pi/2$ e aproximando na região do mínimo aumentando a definição a cada passo.

Os valores de velocidade menores do que 0.3 representam uma sonda que não se desligou da Terra e orbita junto a ela. Os valores de velocidade maiores do que 1.5 representam uma sonda com período muito diferente de dois anos, e que portanto, não se reencontra com a Terra nesse período. Porém não chegamos a uma distância maior do que 2.5 ua do Sol após o sobrevoo, como pode ser visto no gráfico a direita da figura 11.

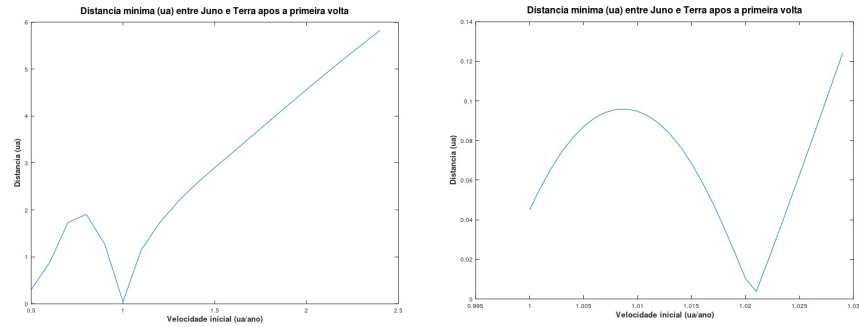


Figure 10: Teste de velocidade com 20 e 40 pontos

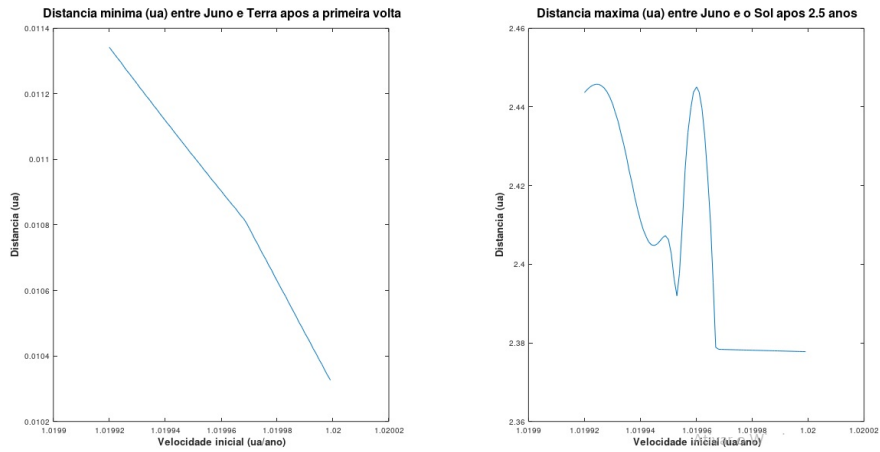


Figure 11: Testes de velocidade com 80 pontos

Durante todo o processo são feitas animações das órbitas no programa ProjetoJuno com alguns parâmetros iniciais para procurar entender o que acontece conforme se variam os parâmetros.

Fazendo o mesmo processo diversas vezes para diversos valores de ângulo conseguimos chegar as seguintes condições iniciais:

x inicial Juno: 0.99 *ua*
 y inicial Juno: 0.1 *ua*
 Velocidade inicial Juno: 1.080400 *ua/ano*
 Ângulo inicial Juno: 1.540 *rad*
 passo temporal: 1 *dia*
 tempo final: 4.05 *anos*

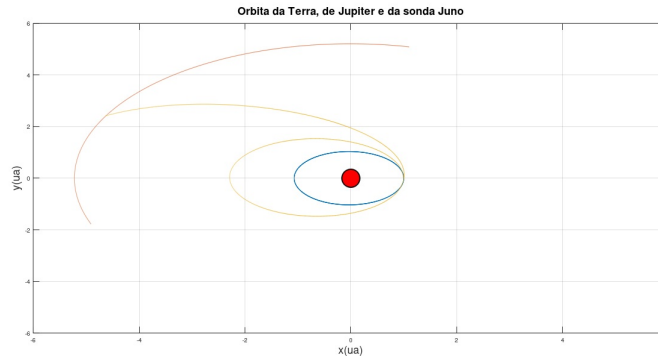


Figure 12: "Estilingue" da sonda Juno. Não está em escala.

Que geram a órbita mostrada na figura 12 para a sonda Juno.

Onde houve um aumento na distância máxima do sol de 2.29 ua na primeira volta, a 5.21 ua depois da manobra gravitacional. A órbita da sonda intercepta a órbita de Júpiter, ainda que um pouco atrasada. Uma velocidade inicial de $1.08040006 \text{ ua/ano}$ ocasiona em uma órbita ainda maior, com uma distância máxima do Sol de 5.72 ua , passando a órbita de Júpiter. A velocidade inicial de 1.080400 ua/ano corresponde a 18450.40 km/h . Essa velocidade corresponde a aproximadamente dois terços da velocidade inicial necessária para se fazer a órbita que vai direto a Júpiter, portanto conseguimos enviar a sonda a Júpiter com menos impulso necessário. A menor distância entre Juno e a Terra durante o voo é de $4 \cdot 10^{-5} \text{ ua}$ que equivale a 5983.9 km . Sua velocidade máxima é de 7.9487 ua/ano que equivale a 135742.99 km/h .

Segundo a NASA, a velocidade máxima possível da sonda Juno seria de 250000 km/h [6]. No sobrevoo Juno passaria a $560 \text{ km} = 3,74337 \cdot 10^{-6} \text{ ua}$ da Terra [10] [6]. Esse valor é muito pequeno. É muito difícil chegar a esse nível de precisão na simulação.

Além disso, na órbita oficial a sonda Juno conta com duas manobras antes de realizar o sobrevoo, as manobras de Agosto e Setembro de 2012, e, segundo a NASA, sem essa manobra não seria possível fazer a órbita até Júpiter, a sonda orbitaria o sistema solar interno para sempre:

"Once Juno reaches a point just beyond the orbit of Mars, it will fire its main engines to perform a deep-space maneuver. This move gives Juno the needed boost toward Jupiter – otherwise, the spacecraft would circle the inner solar system forever. Juno's adjusted trajectory will intersect Earth's orbit, and the spacecraft will zoom right by Earth." [Uma vez que Juno chegar a um ponto depois da órbita de Marte, ela irá ativar seus motores principais para fazer uma manobra no espaço. Esse movimento dará a Juno o impulso necessário para Júpiter - de outra forma a nave iria circular o sistema solar interno para sempre. A trajetória ajustada de Juno irá cruzar a órbita da Terra passando rente a ela] [11]. Primeira manobra em [4]. Segunda manobra em [12].

5 Conclusão

O objetivo primário do projeto, simular a interação gravitacional de três corpos em duas dimensões, foi alcançado com sucesso.

O Projeto Juno também obteve êxito apesar de algumas ressalvas. Apesar da extrema dificuldade em se chegar a precisão necessária para se ter condições iniciais adequadas e a ausência de manobras espaciais durante a trajetória o resultado chegou bem perto do desejado. O sobrevoo foi feito a aproximadamente 5984 *km* apenas uma ordem de grandeza acima da missão oficial, 560 *km*. A órbita de Juno cruza a órbita de Júpiter, porém isso acontece depois de Júpiter ter passado, talvez o mesmo lançamento feito em outro dia do ano fornecesse o encontro de ambos.

Alguns elementos que poderiam ser incrementados ou melhorados são, a adição de manobras espaciais no código, métodos melhores e principalmente mais otimizados de simulação numérica de forma a se conseguir obter mais precisão nos resultados.



Figure 13: Júpiter fotografado pela sonda Juno

References

- [1] John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, and Rik Wehbring. *GNU Octave version 5.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, 2020. URL <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.2.0/>.
- [2] Wikipedia contributors. Juno (spacecraft), 2004. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Juno_\(spacecraft\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Juno_(spacecraft)). [Online; accessed 16-April-2020].

- [3] Kenneth Chang. Nasa's juno spacecraft enters into orbit around jupiter. *The New York Times*, 2016. Last visited on 16/4/2020.
- [4] NASA. *Juno's Two Deep Space Maneuvers are 'Back-To-Back Home Runs'*, 2017. URL https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/news/juno20120917.html.
- [5] NASA. *Juno Earth Flyby - Oct. 9, 2013*, . URL https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/earthflyby.html#.Xptj4Zlv_IU.
- [6] NASA. *Inner Cruise / Earth Flyby*, . URL <https://www.missionjuno.swri.edu/earth-flyby>.
- [7] NASA. *Mission Overview*, . URL https://www.jpl.nasa.gov/news/press_kits/juno/overview/.
- [8] *Juno Mission and Trajectory Design*. URL <http://spaceflight101.com/juno/juno-mission-trajectory-design/>.
- [9] Eric W. Weisstein. Tree. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL <http://mathworld.wolfram.com/Tree.html>. Last visited on 16/4/2020.
- [10] NASA. *The Flight Plan*, . URL <https://www.missionjuno.swri.edu/launch/>.
- [11] NASA. *Deep space maneuver*, . URL <https://www.missionjuno.swri.edu/deploy-the-craft>.
- [12] NASA. *NASA's Juno Spacecraft Burns for Jupiter*, 2016. URL <https://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?feature=4889>.