

# METODE NUMERIK

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

PERTEMUAN : 8

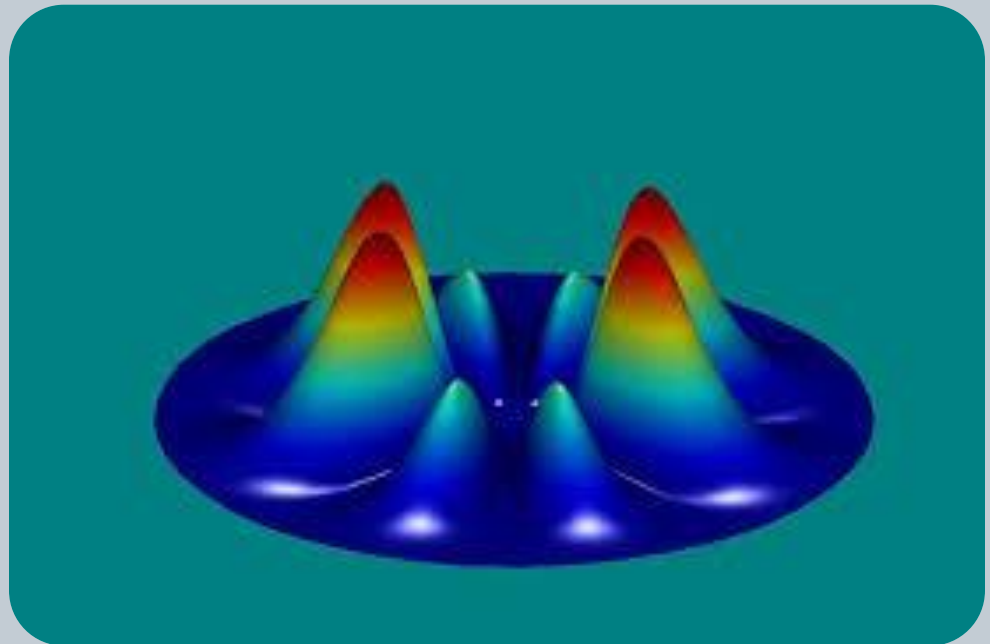


# DIFERENSIASI NUMERIK

## METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq



# MATERI PERKULIAHAN

 $\pi$ 

## SEBELUM-UTS

- Pengantar Metode Numerik
- Sistem Bilangan dan Kesalahan
  - Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
  - Nilai Signifikan
  - Akurasi dan Presisi
  - Pendekatan dan Kesalahan
- Penyelesaian Persamaan Non Linier
  - Metode Tabel
  - Metode Biseksi
  - Metode Regula Falsi
- Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)
  - Metode Iterasi Sederhana
  - Metode Newton Raphson
  - Metode Secant
- Penyelesaian Persamaan Simultan
  - Metode Eliminasi Gauss
  - Metode Gauss Jordan
- Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
  - Metode Gauss Seidel
  - Studi Kasus

## SETELAH-UTS

- **Diferensi Numerik**
  - **Selisih Maju**
  - **Selisih Mundur**
  - **Selisih Tengah**
  - **Diferensi Tingkat Tinggi**
- Integrasi Numerik
  - Metode Reimann
  - Metode Trapezoida
  - Metode Simpson
- Integrasi Numerik (Lanjutan)
  - Metode Gauss
  - Studi Kasus
- Interpolasi
  - Metode Linier
  - Metode Kuadrat
- Interpolasi (Lanjutan)
  - Metode Polinomial
  - Metode Lagrange
- Regresi
  - Linier
  - Eksponensial
  - Polinomial
- Tugas Akhir Semester

# PENDAHULUAN

- › Perhitungan kalkulus banyak digunakan untuk keperluan perhitungan geometrik, yang berhubungan dengan perubahan nilai per-satuan waktu atau jarak.
- › Secara kalkulus, didefinisikan sebagai perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- › penentuan titik puncak kurva  $y = f(x) \rightarrow dy/dx = 0$



## MENGAPA PERLU METODE NUMERIK?

- › Terkadang terdapat suatu fungsi yang sulit dihitung secara manual.
- › Untuk mengotomatiskan, tanpa harus menghitung manualnya.

# DIFERENSIASI NUMERIK

- › Hubungan antara nilai fungsi dan perubahan fungsi untuk setiap titiknya didefinisikan :

$$y = f(X) + f'(x).h(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



# DIFERENSIASI DENGAN METODE NUMERIK

- › Metode Selisih Maju
- › Metode Selisih Mundur
- › Metode Selisih Tengah

# METODE SELISIH MAJU

- › Metode selisih maju merupakan metode yang mengadopsi secara langsung definisi differensial

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- › Pengambilan  $h$  diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil
- › Error yang dihasilkan

$$E(f) = -\frac{1}{2}hf''(x)$$



# METODE SELISIH MUNDUR

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$E(f) = -\frac{1}{2}hf''(x)$$

# METODE SELISIH TENGAH

- › Metode selisih tengah merupakan metode pengambilan perubahan dari dua titik sekitar dari titik yang diukur.
- › Perhatikan selisih maju pada titik  $x-h$

$$f_1^1(x-h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- › Selisih maju pada titik  $x$

$$f_2^1(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# METODE SELISIH TENGAH

- › Metode selisih tengahan merupakan rata-rata dari dua selisih maju pada titik  $x-h$  dan titik  $x$ :

$$f'(x) = \frac{f_1'(x-h) + f_2'(x)}{2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- › Kesalahan pada metode ini

$$E(f) = -\frac{1}{6}hf'''(x)$$

# CONTOH

Hitung differensial:

$f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$  dari range  $x=[0,1]$  dengan  $h=0.05$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$E(f) = -\frac{1}{6}hf'''(x)$$

no	x	f(x)	f'(x) tengah	f'(x) eksak	err=eksak-tengah
	-0,05	0,89504801	-	-	-
0	0	1	1,999165	2	0,000835
1	0,05	1,094964	1,797634	1,797990	0,000356
2	0,1	1,179763	1,593921	1,593838	-0,000083
3	0,15	1,254357	1,390653	1,390175	-0,000478
4	0,2	1,318829	1,190204	1,189373	-0,000831
5	0,25	1,373377	0,994687	0,993547	-0,001140
6	0,3	1,418297	0,805955	0,804550	-0,001406
7	0,35	1,453973	0,625607	0,623978	-0,001630
8	0,4	1,480858	0,454988	0,453175	-0,001813
9	0,45	1,499471	0,295198	0,293241	-0,001957
10	0,5	1,510378	0,147106	0,145042	-0,002064
11	0,55	1,514182	0,011359	0,009222	-0,002137
12	0,6	1,511514	-0,111604	-0,113782	-0,002177
13	0,65	1,503021	-0,221540	-0,223728	-0,002188
14	0,7	1,489360	-0,318382	-0,320553	-0,002171
15	0,75	1,471183	-0,402225	-0,404355	-0,002131
16	0,8	1,449137	-0,473309	-0,475378	-0,002069
17	0,85	1,423852	-0,532005	-0,533992	-0,001988
18	0,9	1,395937	-0,578793	-0,580684	-0,001891
19	0,95	1,365973	-0,614251	-0,616032	-0,001781
20	1	1,334512	-0,639035	-0,640696	-0,001660
	1,05	1,302070			

# DIFERENSIASI TINGKAT TINGGI

$\pi$

› Differensiasi tingkat tinggi merupakan proses pendifferensialan secara terus-menerus, hingga tingkatan yang ditentukan.

› Differensial tingkat 2

$$f''(x) = f'\{f'(x)\}$$

› Differensial tingkat 3

$$f^{(3)}(x) = f'\{f''(x)\}$$

› Differensial tingkat n

$$f^{(n)}(x) = f^{(1)}\{f^{(n-1)}(x)\}$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right\}$$

# DIFERENSIASI TINGKAT TINGGI

› Differensiasi tingkat 2 untuk Metode Selisih Maju

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

# DIFERENSIASI TINGKAT TINGGI

› Differensiasi tingkat 2 untuk Metode Selisih Mundur

$$› f''(x) = \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}$$

$$› f''(x) = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h}$$

$$› f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

# DIFERENSIASI TINGKAT TINGGI

- › Differensiasi tingkat 2 untuk Metode Selisih Tengah

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \frac{f(x) - f(x-2h)}{2h}}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$$



# DIFERENSIASI TINGKAT TINGGI

› Differensiasi tingkat 3 untuk Metode Selisih Tengah

$$› f'''(x) = \frac{f'(x+2h) - 2f'(x) + f'(x-2h)}{4h^2}$$

$$› f'''(x) = \frac{\frac{f(x+3h) - f(x+2h)}{h} - 2\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{4h^2}$$

$$› f'''(x) = \frac{f(x+3h) - f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x) + f(x-h) - f(x-2h)}{4h^3}$$

# RINGKASAN RUMUS DIFERENSIASI NUMERIK

## › Metode Selisih Maju

$$\text{Maju : } f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\text{Error : } E(f) = -\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{2h}$$

## › Metode Selisih Mundur

$$\text{Mundur : } f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$\text{Error : } E(f) = -\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2h}$$

## › Metode Selisih Tengah

$$\text{Tengah : } f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\text{Error : } e(f) = -\frac{f(x+3h)-f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x)+f(x-h)-f(x-2h)}{24h^2}$$

# CONTOH 1

Hitung diferensial:

$f(x) = e^{-x} \sin(2x) + 1$  dari range  $x = [0,1]$  dengan  $h=0,05$

- a. Menggunakan Metode Selisih Maju
- b. Menggunakan Metode Selisih Mundur
- c. Menggunakan Metode Selisih Tengah

# CONTOH 1: METODE SELISIH MAJU

$$f(x) = e^{-x} \sin(2x) + 1; x_0 = 0; x_n = 1; h = 0,05$$

$$\text{Rumus : } f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \text{ Error : } E(f) = -\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{2h}$$

no	x	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)	f'(x) maju	e(f)
0	0	1	1,0949645	1,1797634	1,8992897	0,1016552
1	0,05	1,094964	1,1797634	1,2543566	1,6959792	0,1020581
2	0,1	1,179763	1,2543566	1,3188288	1,4918631	0,1012098
3	0,15	1,254357	1,3188288	1,3733770	1,2894435	0,0992396
4	0,2	1,318829	1,3733770	1,4182974	1,0909642	0,0962776
5	0,25	1,373377	1,4182974	1,4539725	0,8984090	0,0924535
6	0,3	1,418297	1,4539725	1,4808582	0,7135020	0,0878946
7	0,35	1,453973	1,4808582	1,4994713	0,5377127	0,0827251
8	0,4	1,480858	1,4994713	1,5103780	0,3722624	0,0770646
9	0,45	1,499471	1,5103780	1,5141819	0,2181332	0,0710270
10	0,5	1,510378	1,5141819	1,5115139	0,0760793	0,0647199
11	0,55	1,514182	1,5115139	1,5030215	- 0,0533604	0,0582439
12	0,6	1,511514	1,5030215	1,4893599	- 0,1698483	0,0516921
13	0,65	1,503021	1,4893599	1,4711833	- 0,2732326	0,0451496
14	0,7	1,489360	1,4711833	1,4491374	- 0,3635317	0,0386931
15	0,75	1,471183	1,4491374	1,4238523	- 0,4409179	0,0323913
16	0,8	1,449137	1,4238523	1,3959369	- 0,5057005	0,0263042
17	0,85	1,423852	1,3959369	1,3659731	- 0,5583090	0,0204839
18	0,9	1,395937	1,3659731	1,3345118	- 0,5992767	0,0149740
19	0,95	1,365973	1,3345118	1,3020695	- 0,6292247	0,0098105
20	1	1,334512	1,3020695	1,2691251	- 0,6488457	0,0050218

# CONTOH 1: METODE SELISIH MUNDUR

$$f(x) = e^{-x} \sin(2x) + 1; x_0 = 0; x_n = 1; h = 0,05$$

$$\text{Mundur : } f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}; \text{ Error : } E(f) = -\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h}$$

no	x	f(x)	f(x+h)	f(x-h)	f'(x) mundur	e(f)
0	0	1	1,0949645	0,8950480	2,0990397	0,0998750
1	0,05	1,094964	1,1797634	1,0000000	1,8992897	0,1016552
2	0,1	1,179763	1,2543566	1,0949645	1,6959792	0,1020581
3	0,15	1,254357	1,3188288	1,1797634	1,4918631	0,1012098
4	0,2	1,318829	1,3733770	1,2543566	1,2894435	0,0992396
5	0,25	1,373377	1,4182974	1,3188288	1,0909642	0,0962776
6	0,3	1,418297	1,4539725	1,3733770	0,8984090	0,0924535
7	0,35	1,453973	1,4808582	1,4182974	0,7135020	0,0878946
8	0,4	1,480858	1,4994713	1,4539725	0,5377127	0,0827251
9	0,45	1,499471	1,5103780	1,4808582	0,3722624	0,0770646
10	0,5	1,510378	1,5141819	1,4994713	0,2181332	0,0710270
11	0,55	1,514182	1,5115139	1,5103780	0,0760793	0,0647199
12	0,6	1,511514	1,5030215	1,5141819	- 0,0533604	0,0582439
13	0,65	1,503021	1,4893599	1,5115139	- 0,1698483	0,0516921
14	0,7	1,489360	1,4711833	1,5030215	- 0,2732326	0,0451496
15	0,75	1,471183	1,4491374	1,4893599	- 0,3635317	0,0386931
16	0,8	1,449137	1,4238523	1,4711833	- 0,4409179	0,0323913
17	0,85	1,423852	1,3959369	1,4491374	- 0,5057005	0,0263042
18	0,9	1,395937	1,3659731	1,4238523	- 0,5583090	0,0204839
19	0,95	1,365973	1,3345118	1,3959369	- 0,5992767	0,0149740
20	1	1,334512	1,3020695	1,3659731	- 0,6292247	0,0098105

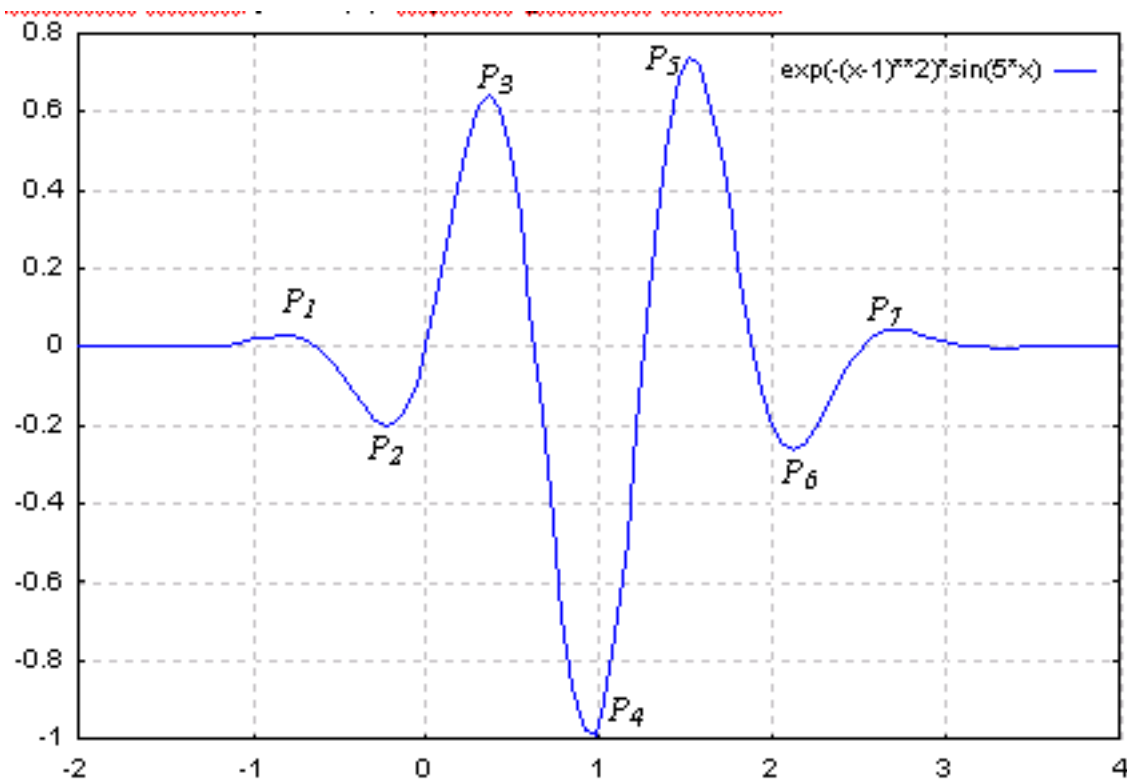
# CONTOH 1: METODE SELISIH TENGAH

$$f(x) = e^{-x} \sin(2x) + 1; x_0 = 0; x_n = 1; h = 0,05$$

$$\text{Tengah : } f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}; \text{ Error : } e(f) = -\frac{f(x+3h) - f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x) + f(x-h) - f(x-2h)}{24h^2}$$

no	x	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)	f(x+3h)	f(x-h)	f(x-2h)	f'(x) tengah	e(f)
0	0	1	1,0949645	1,1797634	1,2543566	0,895048	0,7804364	1,999165	0,012071
1	0,05	1,094964	1,1797634	1,2543566	1,3188288	1,000000	0,8950480	1,797634	0,002896
2	0,1	1,179763	1,2543566	1,3188288	1,3733770	1,094964	1,0000000	1,593921	- 0,005440
3	0,15	1,254357	1,3188288	1,3733770	1,4182974	1,179763	1,0949645	1,390653	- 0,012918
4	0,2	1,318829	1,3733770	1,4182974	1,4539725	1,254357	1,1797634	1,190204	- 0,019530
5	0,25	1,373377	1,4182974	1,4539725	1,4808582	1,318829	1,2543566	0,994687	- 0,025282
6	0,3	1,418297	1,4539725	1,4808582	1,4994713	1,373377	1,3188288	0,805955	- 0,030186
7	0,35	1,453973	1,4808582	1,4994713	1,5103780	1,418297	1,3733770	0,625607	- 0,034264
8	0,4	1,480858	1,4994713	1,5103780	1,5141819	1,453973	1,4182974	0,454988	- 0,037547
9	0,45	1,499471	1,5103780	1,5141819	1,5115139	1,480858	1,4539725	0,295198	- 0,040072
10	0,5	1,510378	1,5141819	1,5115139	1,5030215	1,499471	1,4808582	0,147106	- 0,041880
11	0,55	1,514182	1,5115139	1,5030215	1,4893599	1,510378	1,4994713	0,011359	- 0,043018
12	0,6	1,511514	1,5030215	1,4893599	1,4711833	1,514182	1,5103780	-0,111604	- 0,043537
13	0,65	1,503021	1,4893599	1,4711833	1,4491374	1,511514	1,5141819	-0,221540	- 0,043489
14	0,7	1,489360	1,4711833	1,4491374	1,4238523	1,503021	1,5115139	-0,318382	- 0,042929
15	0,75	1,471183	1,4491374	1,4238523	1,3959369	1,489360	1,5030215	-0,402225	- 0,041912
16	0,8	1,449137	1,4238523	1,3959369	1,3659731	1,471183	1,4893599	-0,473309	- 0,040494
17	0,85	1,423852	1,3959369	1,3659731	1,3345118	1,449137	1,4711833	-0,532005	- 0,038729
18	0,9	1,395937	1,3659731	1,3345118	1,3020695	1,423852	1,4491374	-0,578793	- 0,036673
19	0,95	1,365973	1,3345118	1,3020695	1,2691251	1,395937	1,4238523	-0,614251	- 0,034376
20	1	1,334512	1,3020695	1,2691251	1,2361177	1,365973	1,3959369	-0,639035	- 0,031889

# PEMAKAIAN DIFFERENSIASI UNTUK MENENTUKAN TITIK PUNCAK KURVA



Kurva tersebut mempunyai 7 titik puncak, yaitu  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  dan  $P_7$ .

# PEMAKAIAN DIFERENSIASI UNTUK MENENTUKAN TITIK PUNCAK KURVA

## › Definisi 5.1.

Suatu titik  $a$  pada kurva  $y = f(x)$  dinamakan titik puncak bila dan hanya bila  $f'(a) = 0$ .

## › Definisi 5.2.

Sebuah titik puncak  $a$  dikatakan titik maksimum pada kurva  $y = f(x)$  bila  $f''(a) < 0$ .

## › Definisi 5.3.

Sebuah titik puncak  $a$  dikatakan titik minimum pada kurva  $y = f(x)$  bila  $f''(a) > 0$ .



# CONTOH

Tentukan titik-titik puncak dari kurva  $y = x^3 - 2x^2 - x$  dengan pada range  $[-0,5 ; 0,5]$  dan  $h=0,05$ .

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Terlihat bahwa nilai puncak terjadi antara -0.25 dan -0.2, karena nilai  $f'(x)$  mendekati nol. Pada nilai tersebut terlihat nilai  $f''(x) < 0$  maka nilai puncak tersebut adalah nilai puncak maksimum.

no	x	f(x)	f(x+h)	f(x+2h)	f'(x) maju	f''(x)
0	-0,5	-0,125000	-0,046125	0,016000	1,577500	-6,700000
1	-0,45	-0,046125	0,016000	0,062125	1,242500	-6,400000
2	-0,4	0,016000	0,062125	0,093000	0,922500	-6,100000
3	-0,35	0,062125	0,093000	0,109375	0,617500	-5,800000
4	-0,3	0,093000	0,109375	0,112000	0,327500	-5,500000
5	-0,25	0,109375	0,112000	0,101625	0,052500	-5,200000
6	-0,2	0,112000	0,101625	0,079000	-0,207500	-4,900000
7	-0,15	0,101625	0,079000	0,044875	-0,452500	-4,600000
8	-0,1	0,079000	0,044875	0,000000	-0,682500	-4,300000
9	-0,05	0,044875	0,000000	-0,054875	-0,897500	-4,000000
10	-7E-17	0,000000	-0,054875	-0,119000	-1,097500	-3,700000
11	0,05	-0,054875	-0,119000	-0,191625	-1,282500	-3,400000
12	0,1	-0,119000	-0,191625	-0,272000	-1,452500	-3,100000
13	0,15	-0,191625	-0,272000	-0,359375	-1,607500	-2,800000
14	0,2	-0,272000	-0,359375	-0,453000	-1,747500	-2,500000
15	0,25	-0,359375	-0,453000	-0,552125	-1,872500	-2,200000
16	0,3	-0,453000	-0,552125	-0,656000	-1,982500	-1,900000
17	0,35	-0,552125	-0,656000	-0,763875	-2,077500	-1,600000
18	0,4	-0,656000	-0,763875	-0,875000	-2,157500	-1,300000
19	0,45	-0,763875	-0,875000	-0,988625	-2,222500	-1,000000
20	0,5	-0,875000	-0,988625	-1,104000	-2,272500	-0,700000