METODE NUMERIK

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

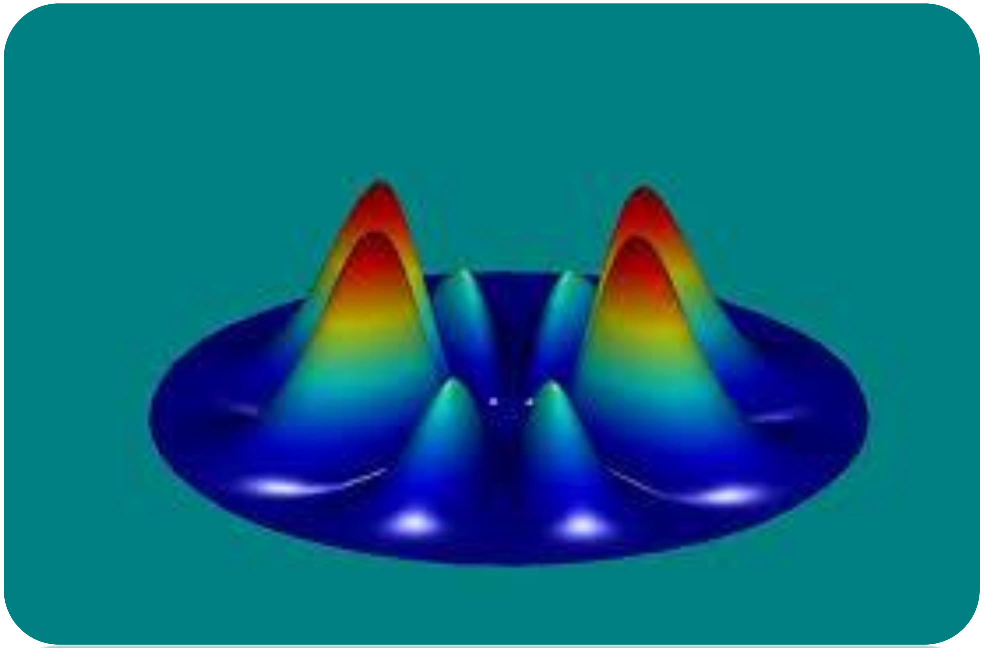
PERTEMUAN : 9-10

INTEGRASI NUMERIK

METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq



MATERI PERKULIAHAN

SEBELUM-UTS	SETELAH-UTS

▪ Pengantar Metode Numerik
▪ Sistem Bilangan dan Kesalahan
  ▪ Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
  ▪ Nilai Signifikan
  ▪ Akurasi dan Presisi
  ▪ Pendekatan dan Kesalahan
▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier
  ▪ Metode Tabel
  ▪ Metode Biseksi
  ▪ Metode Regula Falsi
▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)
  ▪ Metode Iterasi Sederhana
  ▪ Metode Newton Raphson
  ▪ Metode Secant
▪ Penyelesaian Persamaan Simultan
  ▪ Metode Eliminasi Gauss
  ▪ Metode Gauss Jordan
▪ Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
  ▪ Metode Gauss Seidel
  ▪ Studi Kasus
	▪ Diferensi Numerik
	  ▪ Selisih Maju
	  ▪ Selisih Mundur
	  ▪ Selisih Tengah
	  ▪ Diferensi Tingkat Tinggi
	▪ Integrasi Numerik
	  ▪ Metode Reimann
	  ▪ Metode Trapezoida
	  ▪ Metode Simpson
	▪ Integrasi Numerik (Lanjutan)
	  ▪ Metode Gauss
	  ▪ Studi Kasus
	▪ Interpolasi
	  ▪ Metode Linier
	  ▪ Metode Kuadrat
	▪ Interpolasi (Lanjutan)
	  ▪ Metode Polinomial
	  ▪ Metode Lagrange
	▪ Regresi
	  ▪ Linier
	  ▪ Eksponensial
	  ▪ Polinomial
	▪ Tugas Akhir Semester

INTEGRASI NUMERIK

- Pengintegralan numerik merupakan alat atau cara untuk memperoleh jawaban hampiran (aproksimasi) dari pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.
- Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan.
- Digunakan untuk menghitung luas daerah dan volume benda putar

INTEGRASI NUMERIK

- Fungsi yang dapat dihitung integralnya :

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\tfrac{1}{a}\cos(a+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \tfrac{1}{a}\sin(a+b) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

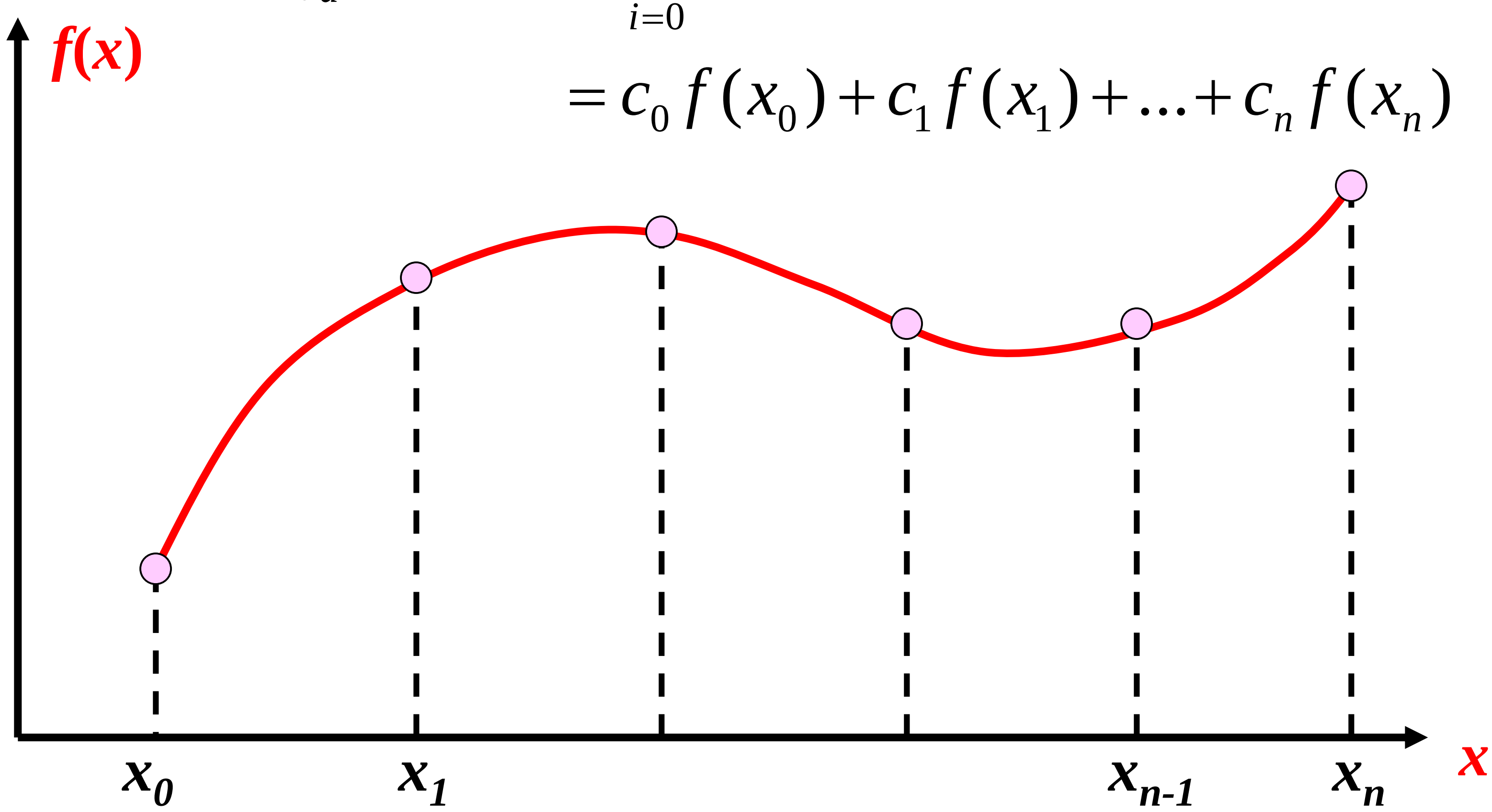
$$\int \ln|x| dx = x\ln|x| - x + C$$

- Fungsi yang rumit misal : $\displaystyle\int_0^2 \frac{2+\cos(1+x^{3/2})}{\sqrt{1+0.5\sin x}} e^{0.5x} dx$

DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

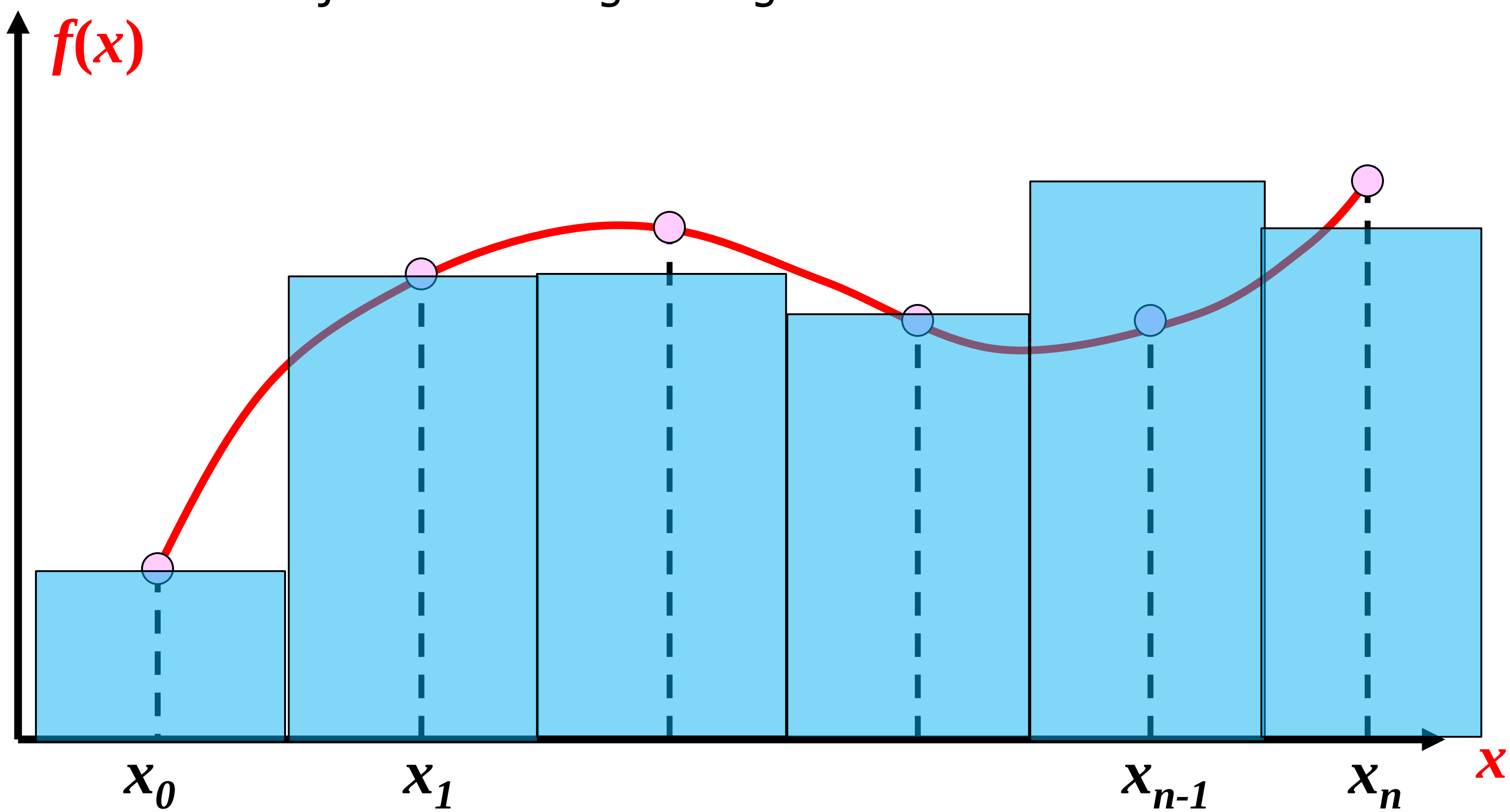
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n)$$



DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

- Melakukan penginteralan pada bagian-bagian kecil, dan menjumlahkan bagian-bagian kecil tersebut.



DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

Formula Newton-Cotes

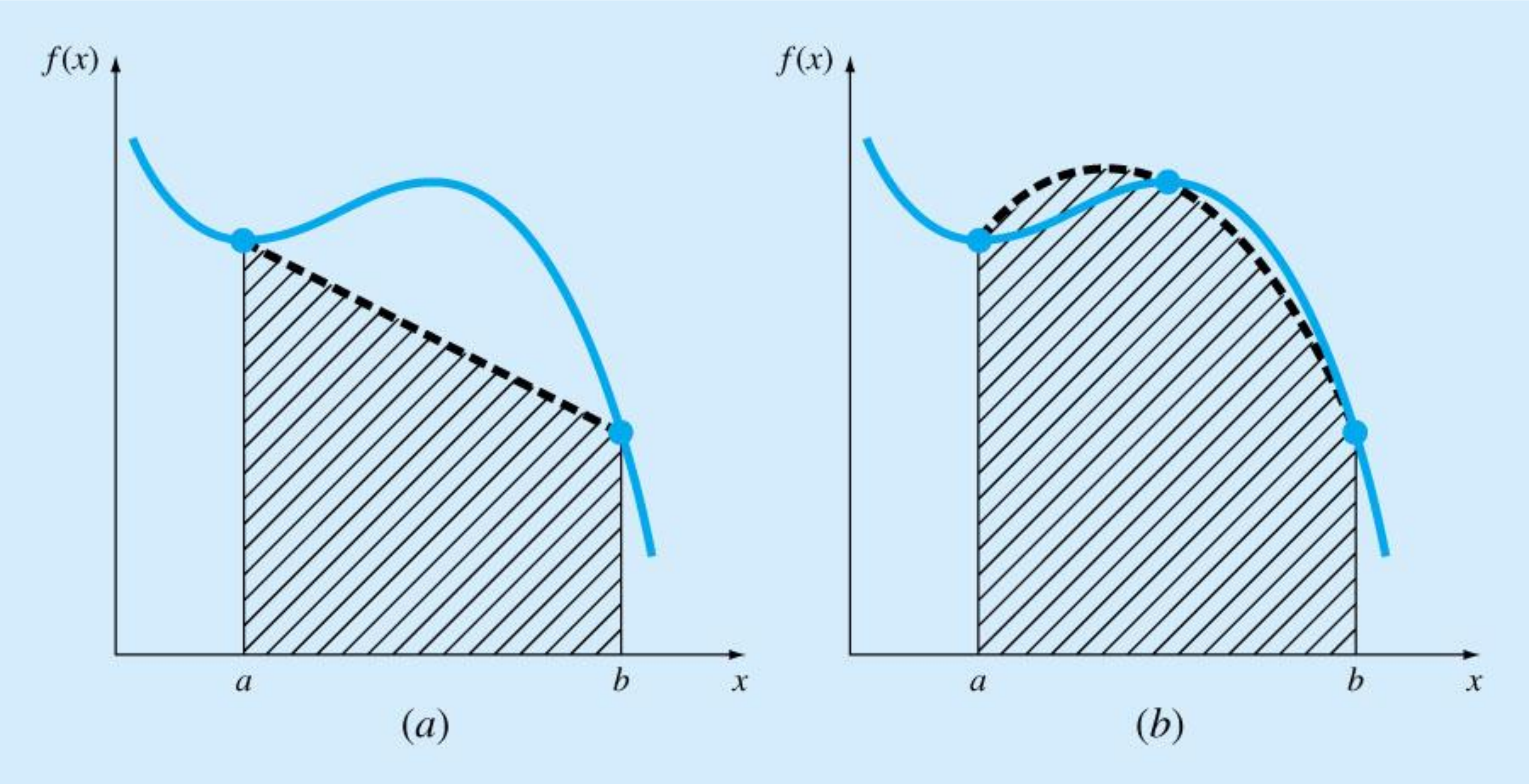
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

Nilai hampiran $\boldsymbol{f(x)}$ dengan polinomial

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

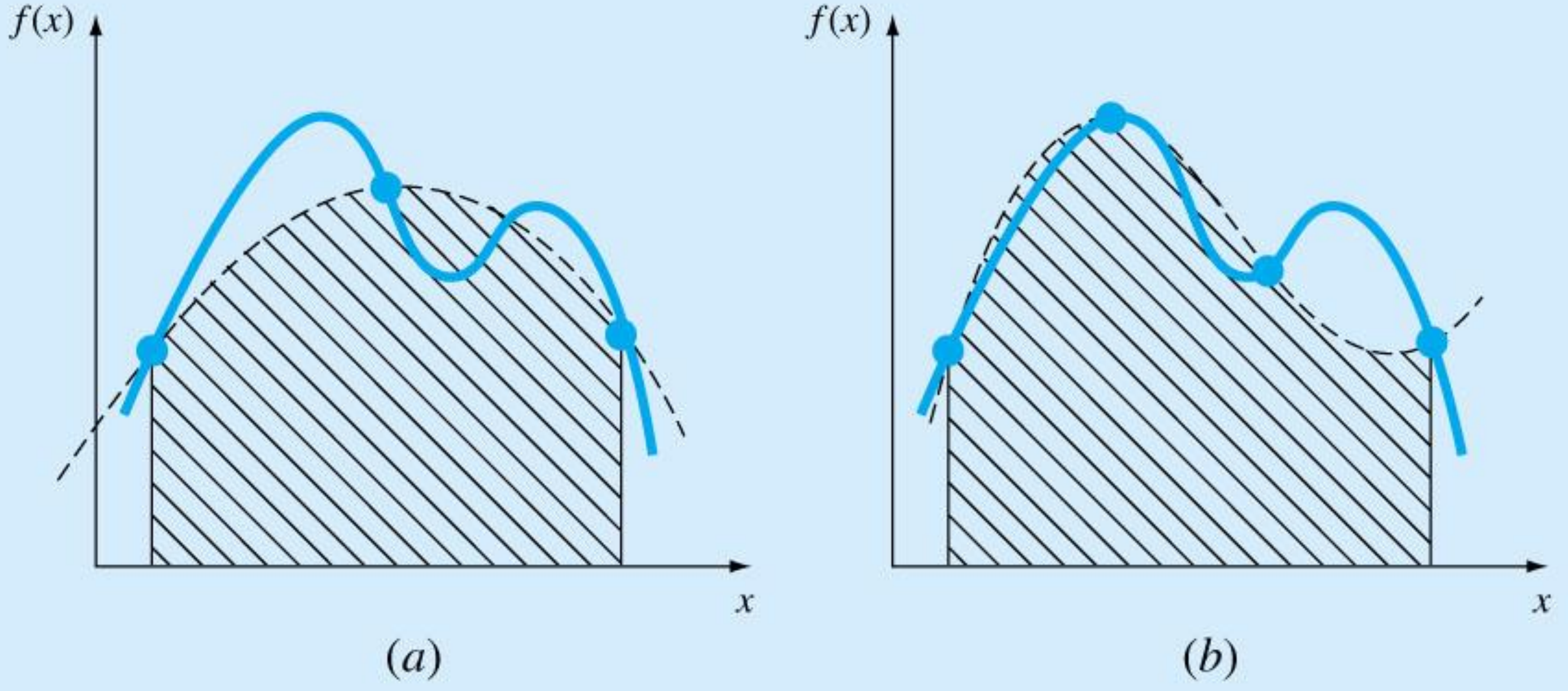
DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

$f_n(x)$ bisa fungsi linear, bisa fungsi kuadrat



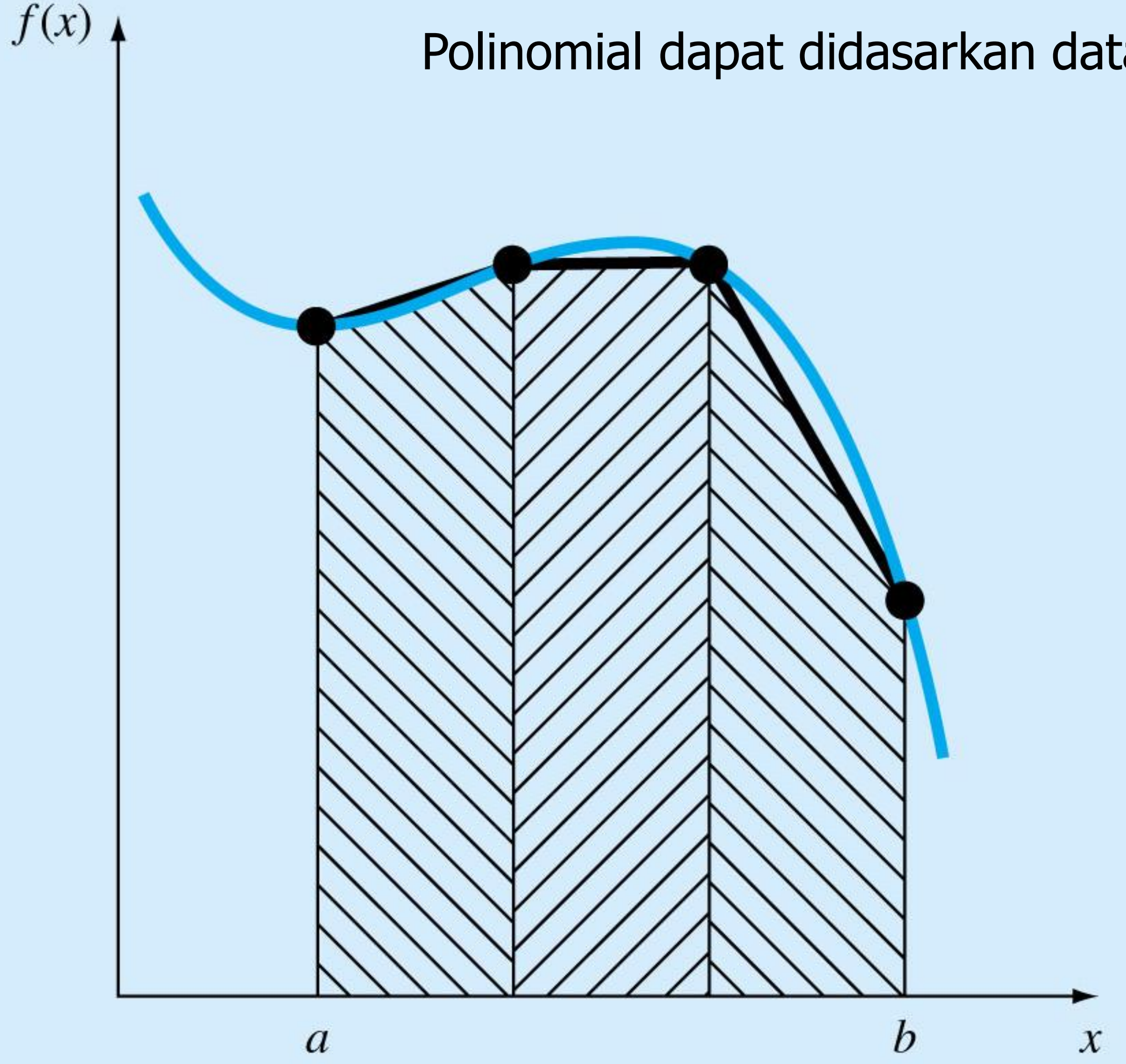
DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

$f_n(x)$ bisa fungsi kubik atau polinomial



DASAR PENGINTEGRALAN NUMERIK

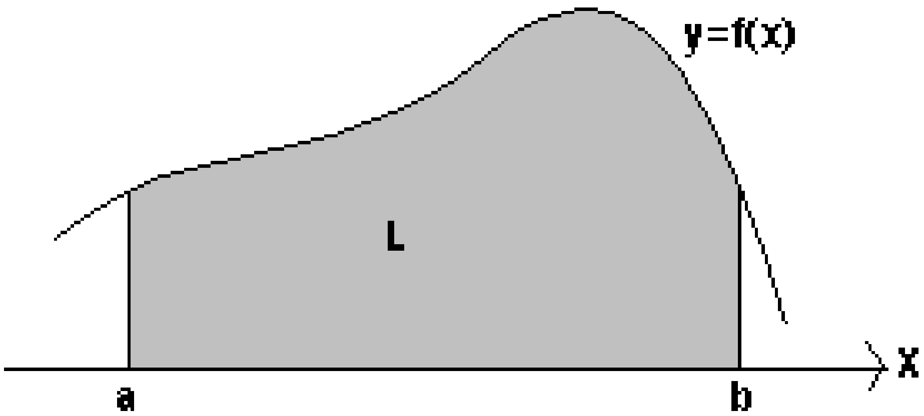
Polinomial dapat didasarkan data



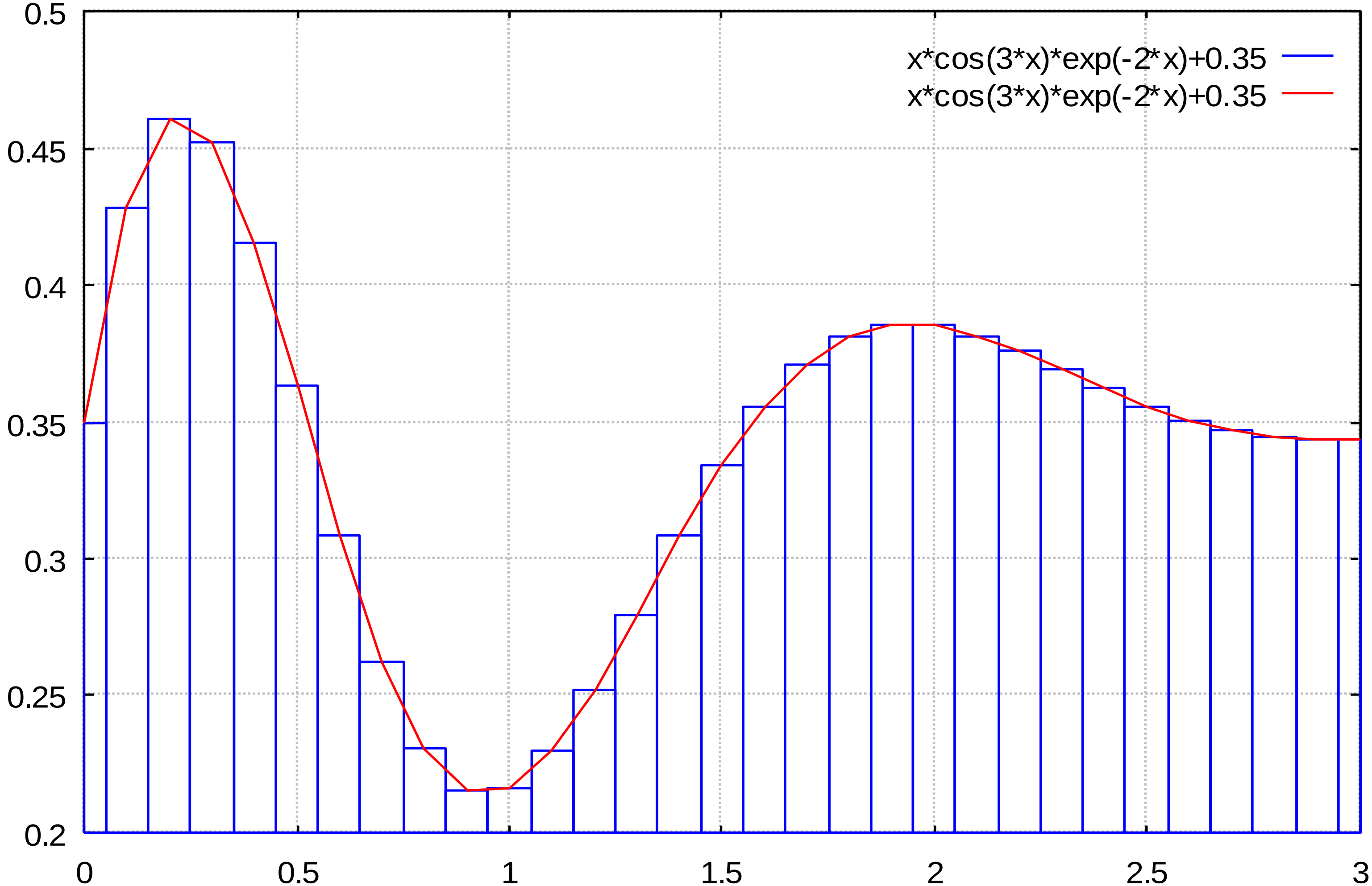
INTEGRASI NUMERIK

- Luas daerah yang diarsir L dapat dihitung dengan:

- L = $\int_{a}^{b} f(x)dx$



METODE INTEGRAL REIMANN



METODE INTEGRAL REIMANN

- Luasan yang dibatasi $y = f(x)$ dan sumbu x.
- Luasan dibagi menjadi N bagian pada range $x = [a,b]$.
- Kemudian dihitung L_i : luas setiap persegi panjang di mana $L_i=f(x_i).\Delta x_i$

METODE INTEGRAL REIMANN

- Luas keseluruhan adalah jumlah L_i dan dituliskan:

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + .. + L_n$$

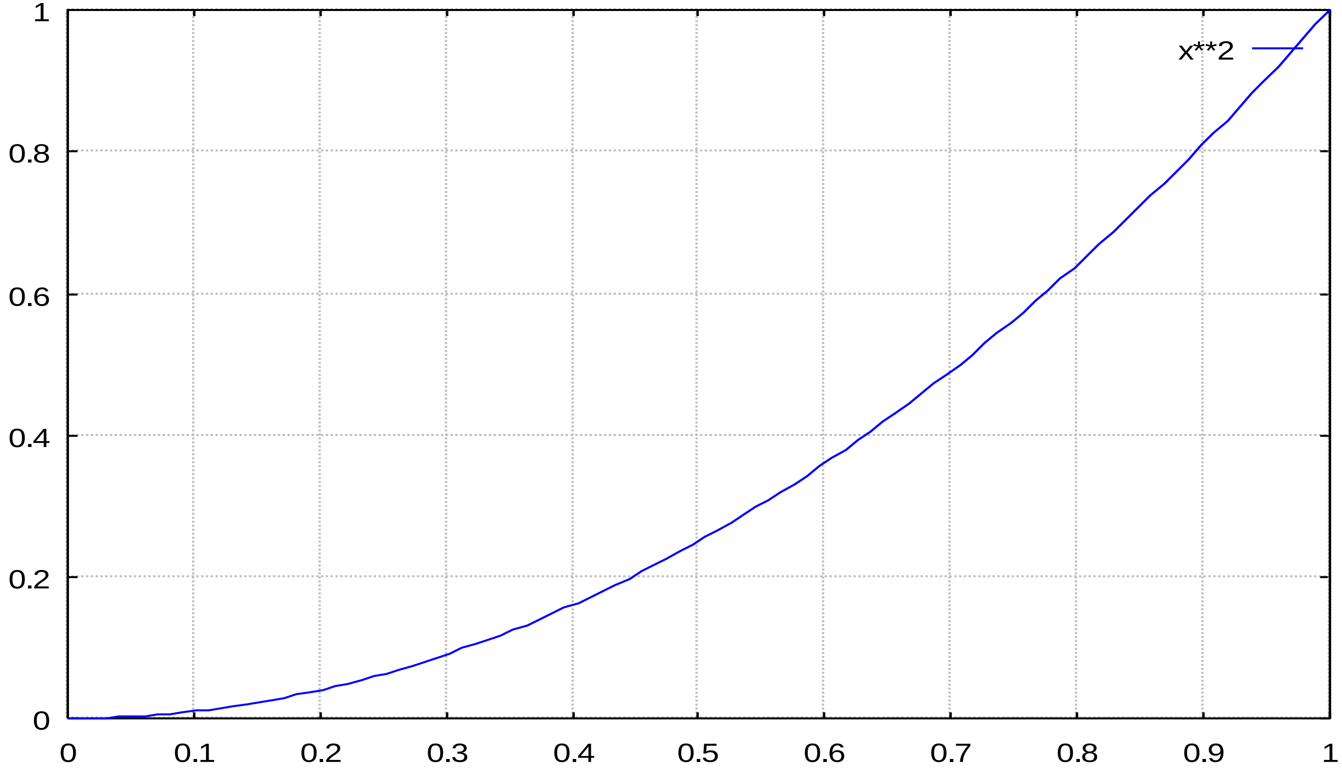
$$= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_3$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

- Di mana: $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = h$
- Didapat : $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$

CONTOH

- Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x untuk range x = [0,1]



CONTOH

- Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$L = h.\sum_{i=0}^{10} f(x_i)$$

$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00)$$

$$= (0.1)(3{,}85) = 0{,}385$$

- Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0{,}3333.....$
- Terdapat kesalahan e = 0,385-0,333
  = 0,052

ALGORITMA METODE INTEGRAL REIMANN

- Definisikan fungsi f(x)
- Tentukan batas bawah dan batas ata integrasi
- Tentukan jumlah pembagi area N
- Hitung h=(b-a)/N
- Hitung

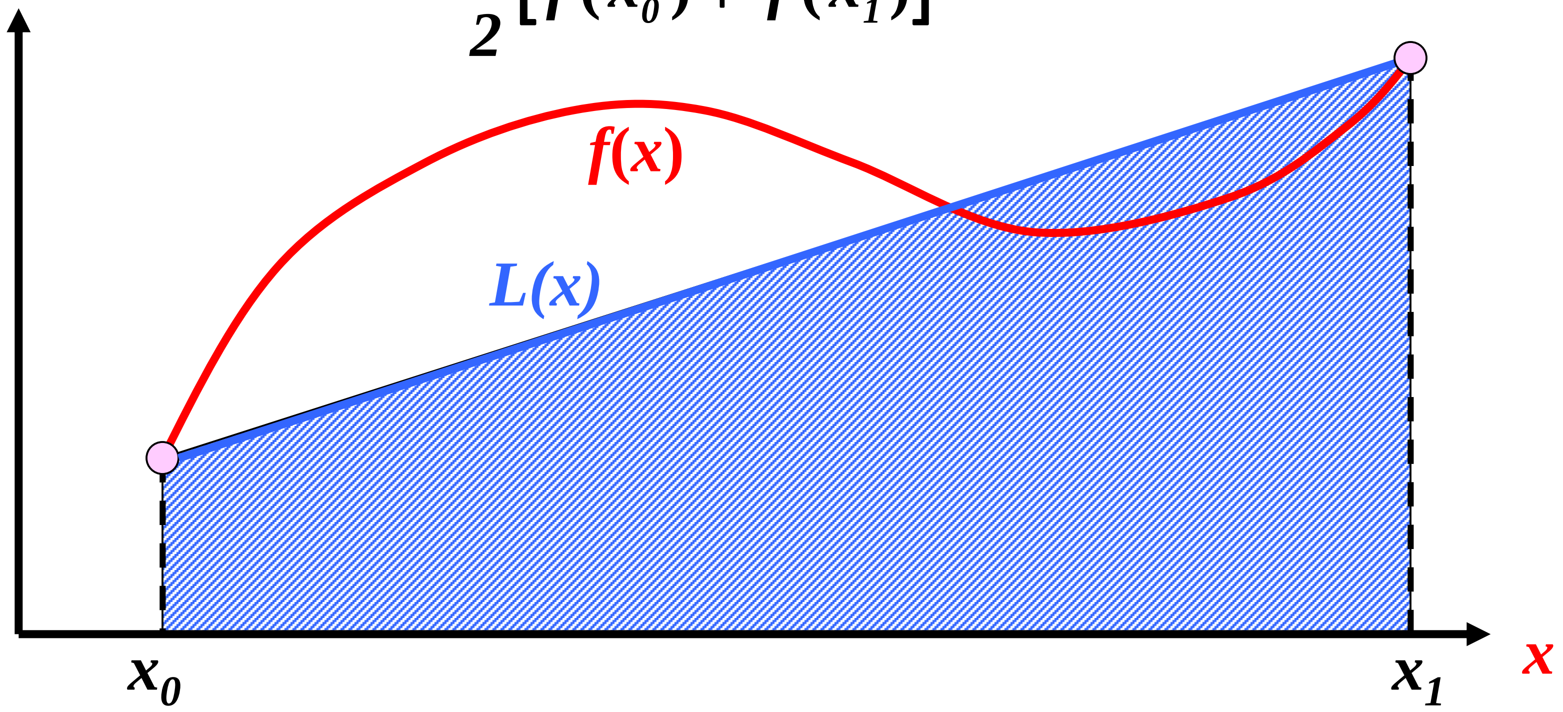
$$L = h.\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$$

METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

Aproksimasi garis lurus (linier)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$



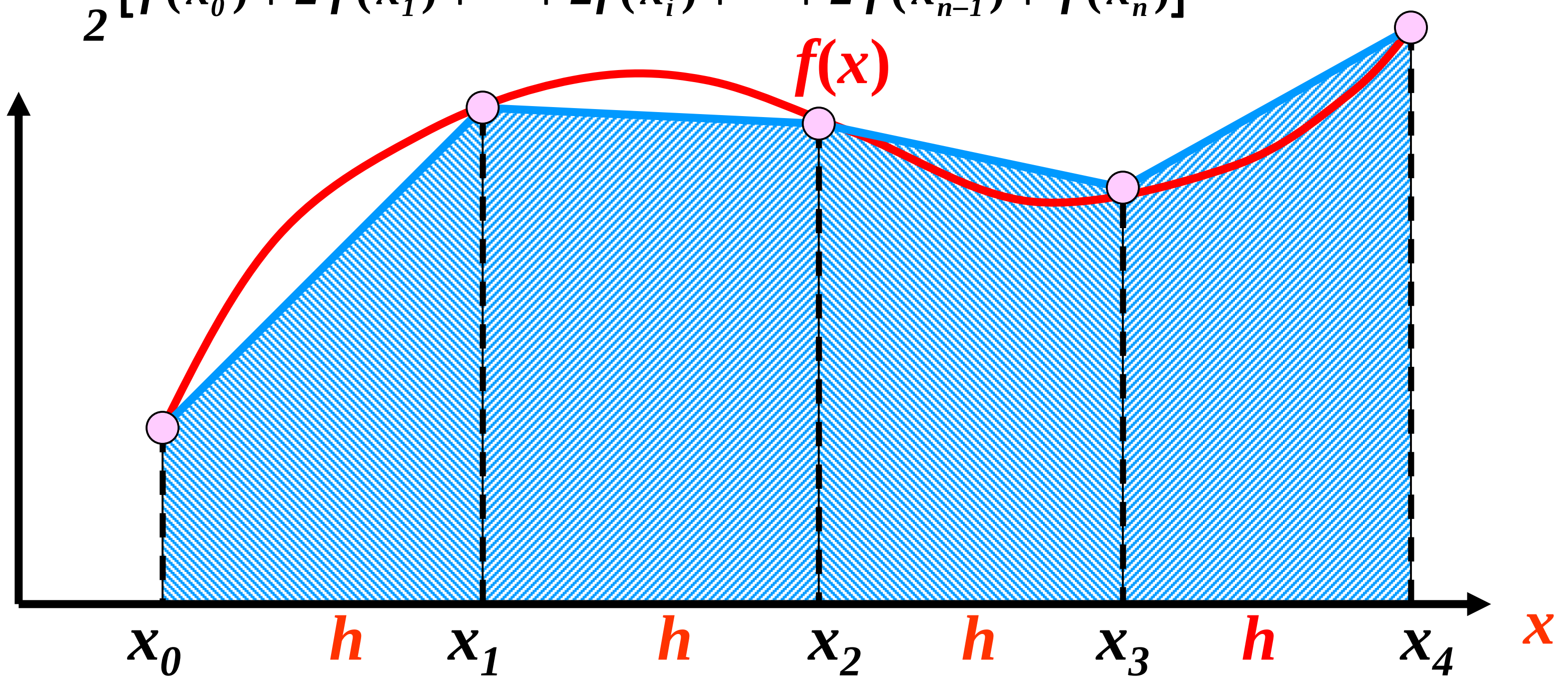
ATURAN KOMPOSISI TRAPESIUM

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$



METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right).\Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right).\Delta x_i \qquad L = \sum_{i=0}^{\eta-1} L_i$$

$$\boxed{L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right)}$$

$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

ALGORITMA METODE INTEGRASI TRAPEZOIDA

- Definisikan y=f(x)
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Tentukan jumlah pembagi n
- Hitung h=(b-a)/n
- Hitung

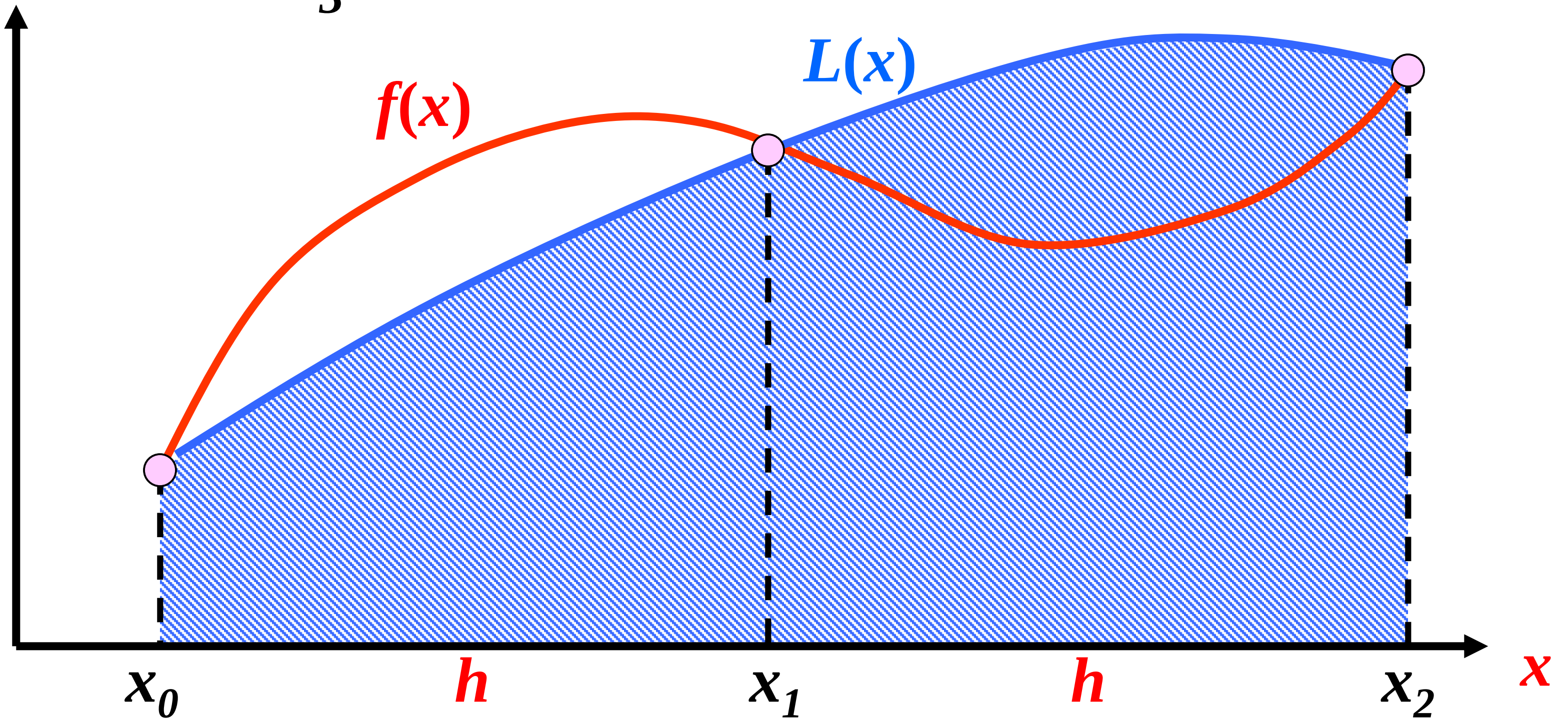
$$L = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

ATURAN SIMPSON 1/3

Aproksimasi dengan fungsi parabola

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$



ATURAN SIMPSON 1/3

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$let \quad x_0 = a,\ x_2 = b,\ x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{2},\ \xi = \frac{x-x_1}{h},\ d\xi = \frac{dx}{h}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \Rightarrow \xi = -1 \\ x = x_1 \Rightarrow \xi = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow \xi = 1 \end{cases}$$

$$L(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} f(x_0) + (1-\xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi+1)}{2} f(x_2)$$

ATURAN SIMPSON 1/3

$$\boldsymbol{L(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} f(x_0) + (1-\xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi+1)}{2} f(x_2)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_{-1}^{1} L(\xi)d\xi = f(x_0)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi-1)d\xi$$

$$+ f(x_1)h\int_0^1(1-\xi^2)d\xi + f(x_2)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi+1)d\xi$$

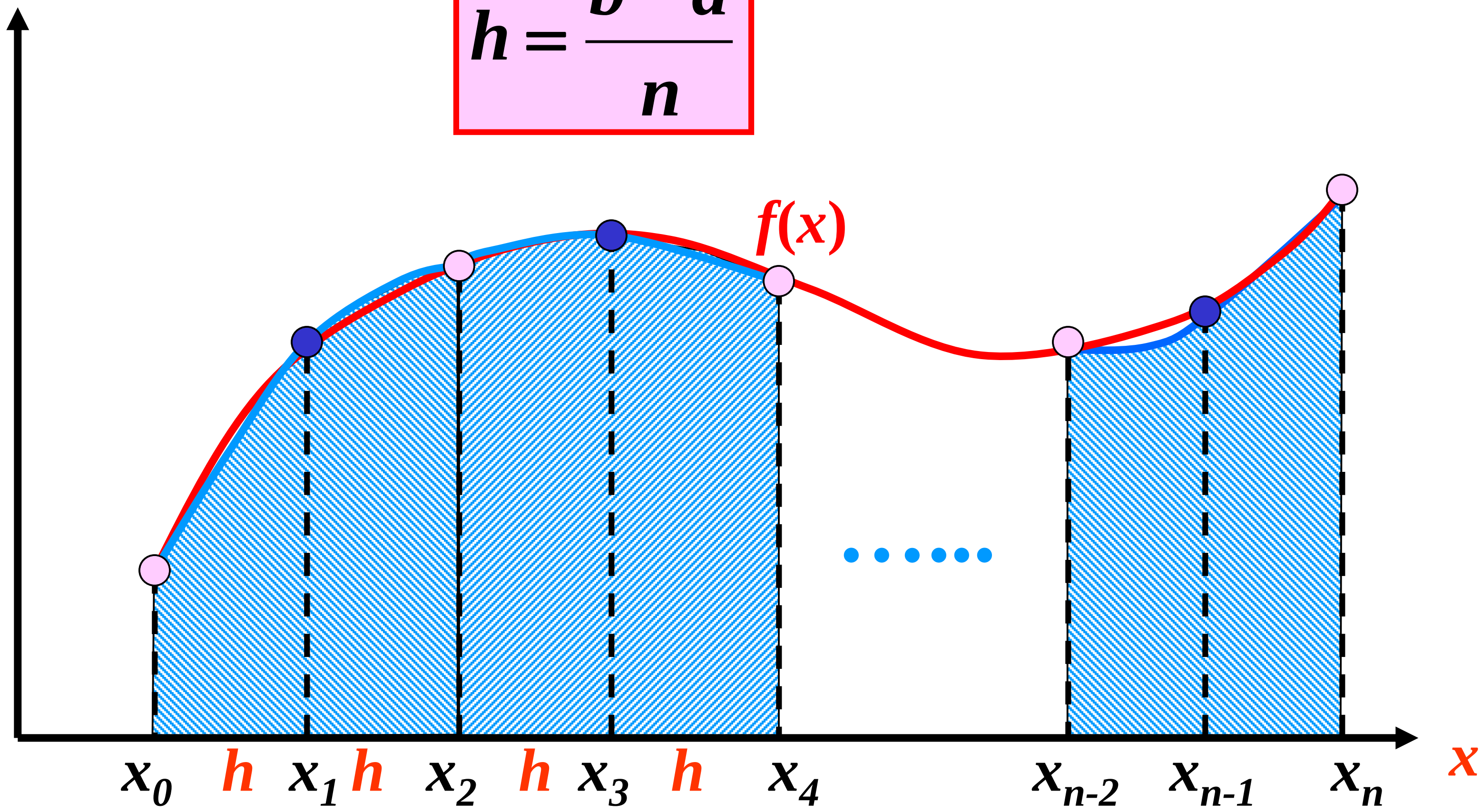
$$= f(x_0)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + f(x_1)h\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+ f(x_2)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

ATURAN KOMPOSISI SIMPSON

$$h = \frac{b-a}{n}$$



METODE INTEGRASI SIMPSON

- Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi y=f(x) dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

  N = 0 – n

  L = L1 + L3 + L5 + . . . + Ln

$$L=\frac{h}{3}\left(f_0+2f_1\right)+\frac{h}{3}\left(2f_1+f_2\right)+\frac{h}{3}\left(f_2+2f_3\right)+\frac{h}{3}\left(2f_3+f_4\right)+\ldots+\frac{h}{3}\left(f_{n-2}+2f_{n-1}\right)+\frac{h}{3}\left(2f_{n-1}+f_n\right)$$

- atau dapat dituliskan dengan:

$$\boxed{L=\frac{h}{3}\left(f_0+4\sum_{i\ ganjil} f_i+2\sum_{i\ genap} f_i+f_n\right)}$$

CARA II

- Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga titik tersebut

$$p_2 x = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) = f_0 + \frac{x}{h} f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

CARA II

- Integrasikan p2(x) pd selang [0,2h]

$$L = \int_0^{2h} f(x)dx = \int_0^{2h} p_2 x dx$$

$$L = \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 \right) dx$$

$$L = f_0 x + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h^2} \right)\Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$L = 2hf_0 x + \frac{4h^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h} \right)\Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h \right)\Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0$$

Cara II

- Mengingat $\Delta f_0 = f_1 - f_0$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

- Maka selanjutnya

$$L = 2hf_0x + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$L = 2hf_0x + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3}f_2 - \frac{2h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_0$$

$$L = \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2$$

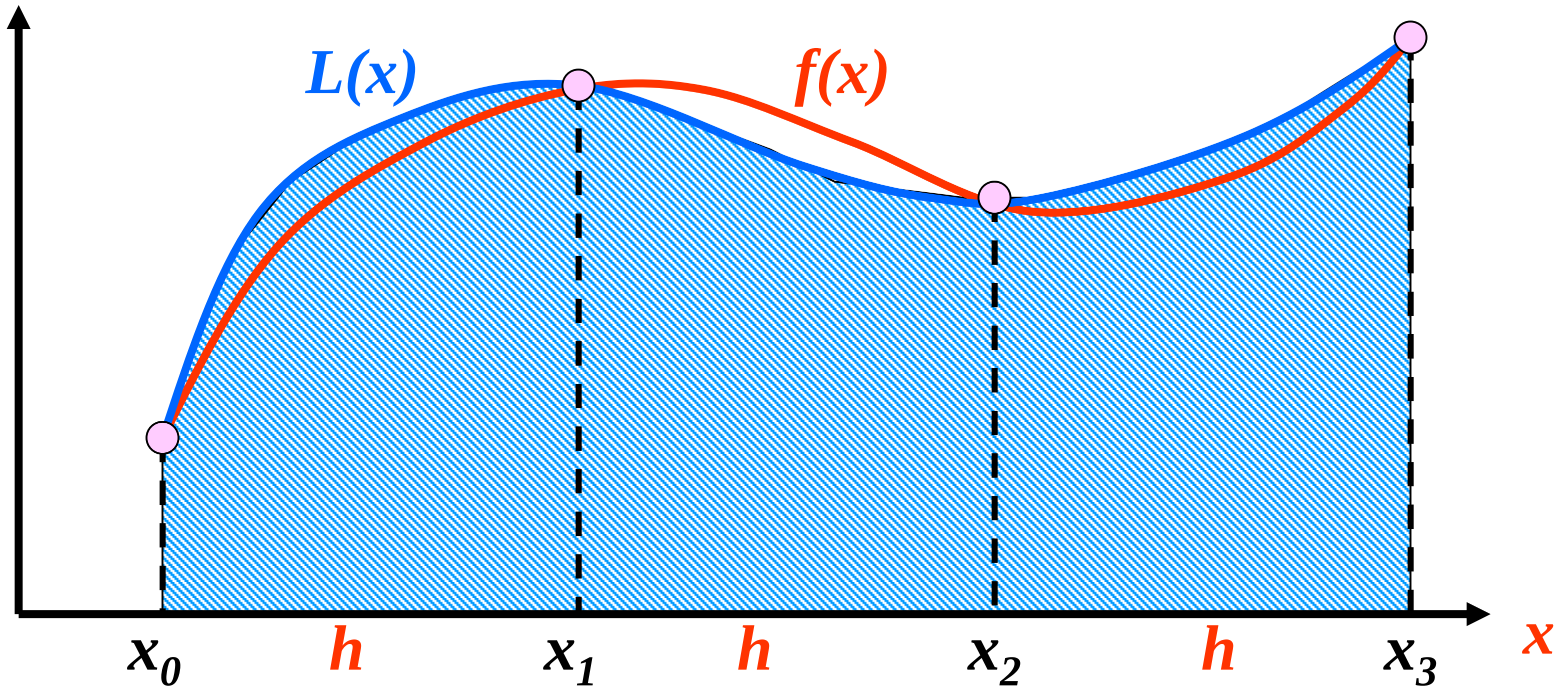
$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

ATURAN SIMPSON 3/8

Aproksimasi dengan fungsi kubik

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3 f(x_1) + 3 f(x_2) + f(x_3) \right]$$



ATURAN SIMPSON 3/8

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx \;\; ; \quad h = \frac{b-a}{3}$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

Error Pemenggalan

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \,;\; h = \frac{b-a}{3}$$

METODE INTEGRASI GAUSS

- Metode Newton Cotes (Trapezoida, Simpson) → berdasarkan titik-titik data diskrit. Dengan batasan :
  - H sama
  - Luas dihitung dari a sampai b
- Mengakibatkan error yang dihasilkan cukup besar.

METODE INTEGRASI GAUSS

- Misal menghitung Luas dengan metode trapezoida dengan selang [-1,1]

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(1) + f(-1)\right) \approx f(1) + f(-1)$$

$$h = 2$$

- Persamaan ini dapat ditulis (disebut pers Kuadratur Gauss)

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

- Misal x_1=-1, x_2=1 dan c_1=c_2=1 → menjadi m. trapezoida
- Karena x_1, $x_{2,}$,c_1 dan c_2 sembarang maka kita harus memilih nilai tersebut sehingga error integrasinya min

METODE INTEGRASI GAUSS

- Bagaimana mencari x_1, x_2, c_1 dan c_2 Persamaan dibawah ini dianggap memenuhi secara tepat bila empat polinom berikut dijadikan fungsi integral pada interval integrasi [-1, 1]
- f(x) = 1 ; f(x) = x ; f(x) = x^2 ; f(x) = x^3

$$c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

Didapat

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

METODE INTEGRASI GAUSS

- Persamaan dibawah ini dinamakan metode Gauss Legendre 2 titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

TRANSFORMASI

$$L_i = \int_a^b f(x)dx \longrightarrow L_i = \int_{-1}^{1} g(u)du$$

- Range [a,b] → [-1,1]
- X → u   f(x) → g(u) dx →du

TRANSFORMASI

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{u+1}{2}$$

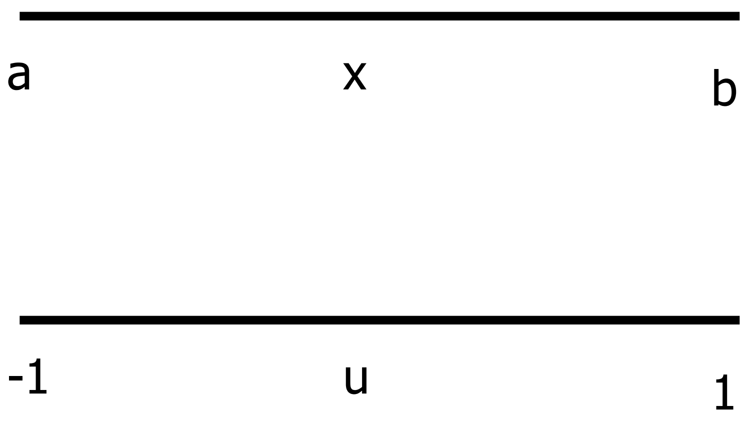
$$2x-2a=(u+1)(b+a)$$

$$2x=(u+1)(b+a)+2a$$

$$x=\frac{a+b+bu-au}{2}$$

$$x=\frac{(a+b)+(b-a)u}{2}$$

$$dx=\left(\frac{b-a}{2}\right)du$$



TRANSFORMASI

$$L_i = \int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\,f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

$$\int_{-1}^{1} g(u)\,du = \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(a+b)+(b-a)u}{2}\right)du$$

ANALISIS METODE

- Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson 1/3, 3/8) metode Gauss-Legendre 2 titik lebih sederhana dan efisien dalam operasi aritmatika, karena hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi.
- Lebih teliti dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.
- Namun kaidah ini harus mentransformasi terlebih dahulu menjadi

$$\int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

ALGORITMA INTEGRASI KUADRATUR GAUSS DENGAN PENDEKATAN 2 TITIK

- Definisikan fungsi f(x)
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

- Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\, f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

- Hitung $L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

CONTOH SOAL

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah menghitung u, dengan:

$$u = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)} = \frac{2x-1}{1} = 2x-1$$

$$\text{atau } x = \frac{1}{2}(u+1)$$

Dengan demikian diperoleh fungsi g(u):

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2 = \frac{1}{8}(u+1)^2$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0.311004 + 0.022329$$

$$= 0.33333$$

METODE GAUSS LEGENDRE 3 TITIK

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Parameter x_1, x_2 , x_3 ,c_1 ,c_2 dan c_3 dapat dicari dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat untuk 6 buah fungsi berikut :

$$f(x) = 1;\ f(x) = x;\ f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^3;\ f(x) = x^4;\ f(x) = x^5$$

- Dengan cara yang sama didapat

$$c_1 = \frac{5}{9}; c_2 = \frac{8}{9}; c_3 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = -\sqrt{3/5}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{3/5}$$

METODE GAUSS LEGENDRE 3 TITIK

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

ALGORITMA METODE INTEGRASI GAUSS DENGAN PENDEKATAN 3 TITIK

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)

(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

(4) Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

(5) Hitung:

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

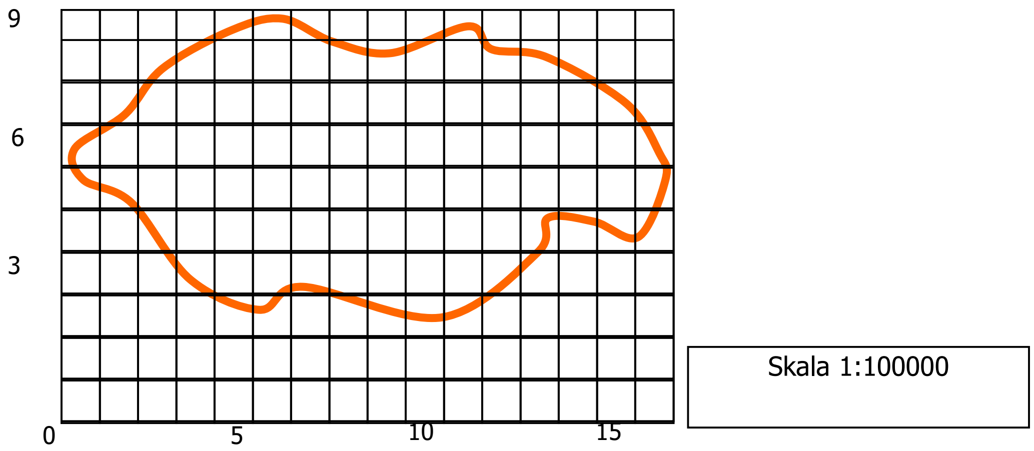
METODE GAUSS N-TITIK

Titik (n)	(k)	Bobot ($w_{n,k}$)	Absis ($x_{n,k}$)	Galat pemotongan
2	1	1.000000000	-0.577350269	$= f^{(4)}(\xi)$
	2	1.000000000	0.577350269	
3	1	0.555555556	-0.774596669	$= f^{(6)}(\xi)$
	2	0.888888889	0.000000000	
	3	0.555555556	0.774596669	
4	1	0.347854845	-0.861136312	$= f^{(8)}(\xi)$
	2	0.652145155	-0.339981044	
	3	0.652145155	0.339981044	
	4	0.347854845	0.861136312	
5	1	0.236926885	-0.906179846	$= f^{(10)}(\xi)$
	2	0.478628670	-0.538469310	
	3	0.568888889	0.000000000	
	4	0.478628670	0.538469310	
	5	0.236926885	0.906179846	

BEBERAPA PENERAPAN INTEGRASI NUMERIK

- **Menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar**
- **Menghitung Luas dan Volume Benda Putar**

MENGHITUNG LUAS DAERAH BERDASARKAN GAMBAR



- Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak. Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera maka berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.
- Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini n=22). Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y(n)	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0

MENGHITUNG LUAS DAERAH BERDASARKAN GAMBAR

- Dari tabel di atas, luas area dapat dihitung dengan menggunakan 3 macam metode:
- Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h\sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_{16} + 2\sum_{i=1}^{15} y_i \right) = 73.5$$

- Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{16} + 4\sum_{i=ganjil} y_i + 2\sum_{i=genap} y_i \right) = 74$$

MENGHITUNG LUAS DAN VOLUME BENDA PUTAR

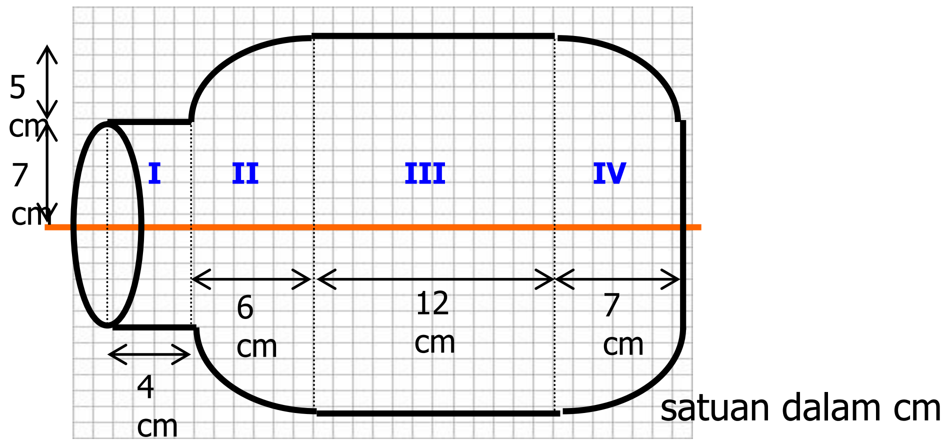
- Luas benda putar:

$$L_p = 2\pi\int_a^b f(x)dx$$

- Volume benda putar:

$$V_p = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

CONTOH



- Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian
  - bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya,
  - bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.

Bagian I:

$$L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$$

$$V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$$

Bagian II:

$$L_{II} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$$

$$V_{II} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$$

CONTOH

- Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil h=1 diperoleh:

n	0	1	2	3	4	5
y(n)	7	10	11	11.5	12	12

- Pada bagian II dan IV: $L_{II} = L_{IV}$ dan $V_{II} = V_{IV}$
- Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II}(L_{IV}) = 2\pi \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II}(= V_{IV}) = \pi \frac{h}{2}\left[y_0^2 + y_5^2 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$

CONTOH

- Luas permukaan dari botol adalah:

$$L = L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV}$$
$$= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi$$
$$= 560\pi$$
$$= 1758.4$$

- Luas = 1758.4 cm2
- Volume botol adalah:

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV}$$
$$= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi$$
$$= 6024\pi$$

- Volume = 18924.78 cm3