METODE NUMERIK

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

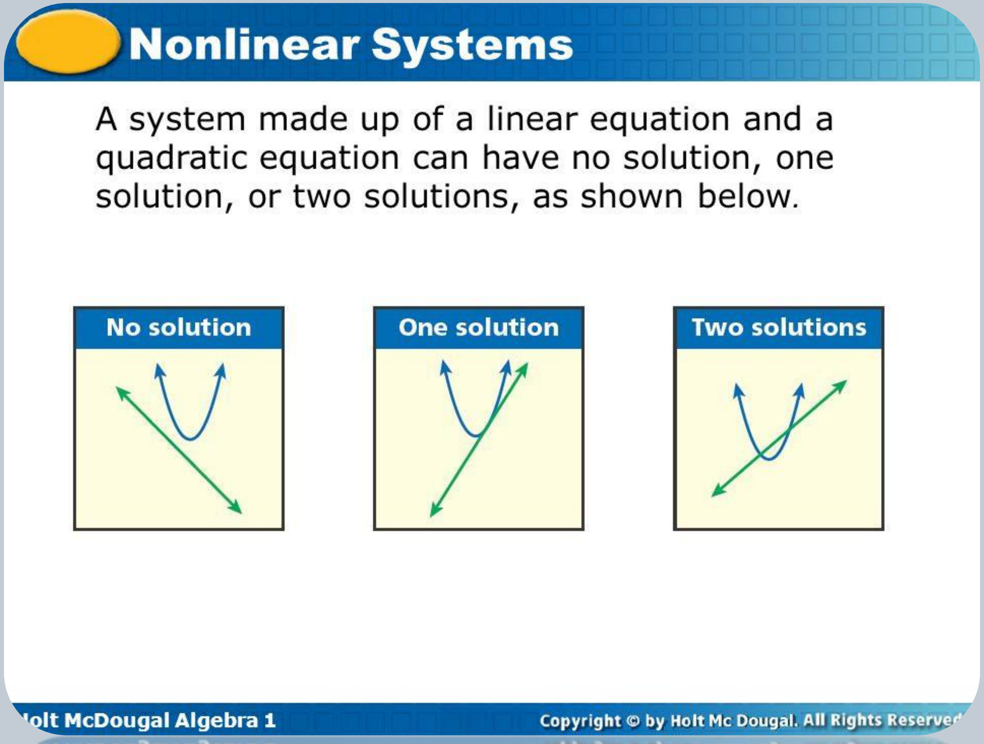
PERTEMUAN : 3 & 4

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq



MATERI PERKULIAHAN

SEBELUM-UTS

- Pengantar Metode Numerik
- Sistem Bilangan dan Kesalahan
  - Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
  - Nilai Signifikan
  - Akurasi dan Presisi
  - Pendekatan dan Kesalahan
- Penyelesaian Persamaan Non Linier
  - Metode Tabel
  - Metode Biseksi
  - Metode Regula Falsi
- Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)
  - Metode Iterasi Sederhana
  - Metode Newton Raphson
  - Metode Secant
- Penyelesaian Persamaan Simultan
  - Metode Eliminasi Gauss
  - Metode Gauss Jordan
- Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
  - Metode Gauss Seidel
  - Studi Kasus
- Diferensi Numerik
  - Selisih Maju
  - Selisih Tengahan
  - Diferensi Tingkat Tinggi

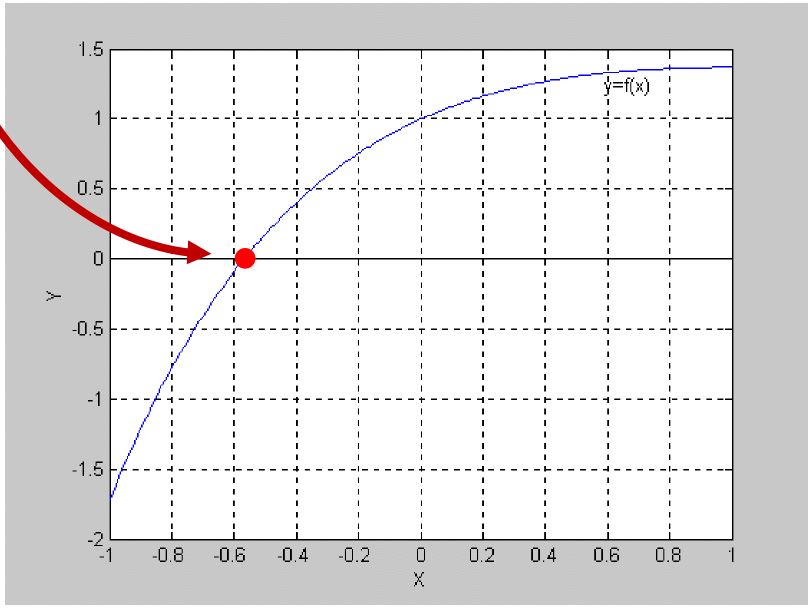
SETELAH-UTS

- Integrasi Numerik
  - Metode Reimann
  - Metode Trapezoida
  - Metode Simpson
- Integrasi Numerik (Lanjutan)
  - Metode Gauss
  - Studi Kasus
- Interpolasi
  - Metode Linier
  - Metode Kuadrat
- Interpolasi (Lanjutan)
  - Metode Polinomial
  - Metode Lagrange
- Regresi
  - Linier
  - Eksponensial
  - Polinomial
- Tugas Akhir Semester

PERSAMAAN NON LINIER

Fokus pada menentukan akar-akar persamaan non linier.

- Akar sebuah persamaan f(x) =0 adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol.
- Akar persamaan f(x) adalah titik potong antara kurva f(x) dan sumbu X.



PERSAMAAN NON LINIER

- Penyelesaian persamaan linier *mx + c = 0* dimana *m* dan *c* adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{m}$$

- Penyelesaian persamaan kuadrat ax2 + bx + c = 0 dapat dihitung dengan menggunakan rumus ABC.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

- Metode Tertutup
  - Mencari akar pada range [a,b] tertentu
  - Dalam range[a,b] dipastikan terdapat satu akar
  - Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen
- Metode Terbuka
  - Diperlukan tebakan awal
  - x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
  - Hasil dapat konvergen atau divergen

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

Metode Tertutup

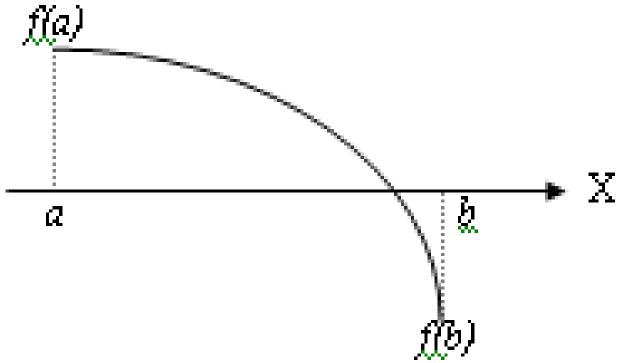
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

Metode Terbuka

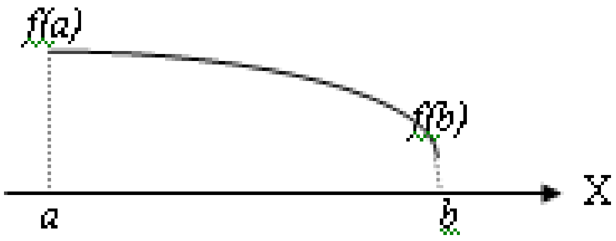
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton-Raphson
- Metode Secant

THEOREMA

- Suatu range *x=[a,b]* mempunyai akar bila *f(a) dan f(b)* berlawanan tanda atau memenuhi *f(a).f(b)<0*
- Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena *f(a).f(b)<0* maka pada range x=[a,b] terdapat akar.



Karena *f(a).f(b)>0* maka pada range x=[a,b] tidak dapat dikatakan terdapat akar.

METODE TABEL :: PRINSIP

- Metode Tabel atau pembagian area.
- Di mana untuk x di antara *a* dan *b* dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai *f(x)* sehingga diperoleh tabel :

x	**f(x)**
$x_0=a$	$f(a)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
……	……
$x_n=b$	$f(b)$

METODE TABEL :: TAHAPAN

(1) Defisikan fungsi $f(x)$

(2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah} dan batas atas x_{atas}.

(3) Tentukan jumlah pembagian N

(4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$$

(5) Untuk i = 0 s/d N, hitung

$x_i = x_{bawah} + i.h$

$y_i = f(x_i)$

(6) Untuk I = 0 s/d N dicari k dimana

*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1}.

METODE TABEL :: CONTOH

- Selesaikan persamaan:

  $x + e^x = 0$ dengan range x = [-1, 0]

- Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = [-1, 0] dibagi menjadi beberapa bagian atau interval kecil, misal sebanyak 10 bagian.
- Sehingga diperoleh:

x	f(x)
-1.0	-0.63212
-0.9	-0.49343
-0.8	-0.35067
-0.7	-0.20341
-0.6	-0.05119
-0.5	0.10653
-0.4	0.27032
-0.3	0.44082
-0.2	0.61873
-0.1	0.80484
0.0	1.00000

METODE TABEL :: CONTOH

- Dari tabel diperoleh penyelesaian berada di antara –0.6 dan –0.5 dengan nilai f(x) masing-masing -0.0512 dan 0.1065. sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di x=-0.6 (f(x) yang terdekat dengan 0).
- Bila pada range x = [-0.6,-0.5] dibagi 10 maka diperoleh f(x) terdekat dengan nol pada x = -0.57 dengan f(x) = 0.00447

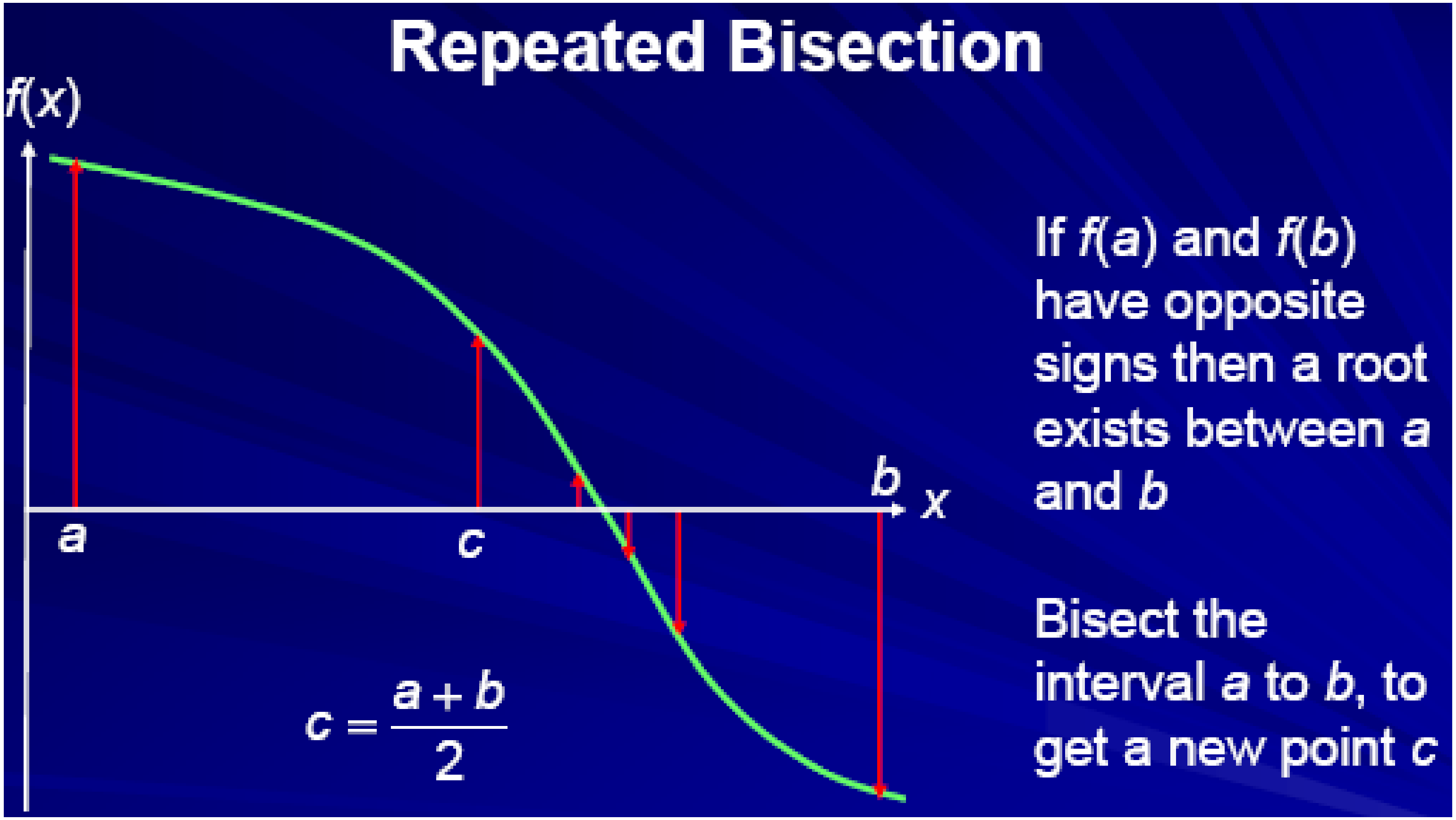
METODE TABEL :: KELEMAHAN

- Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini sering tidak digunakan dalam mencari akar penyelesaian persamaan non linier
- Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

METODE BISEKSI :: PRINSIP

- Ide awal metode ini adalah metode tabel, di mana area dibagi menjadi N bagian.
- Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung akar dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

METODE BISEKSI :: PRINSIP



METODE BISEKSI :: PRINSIP

- Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*). Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

- Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a) \,.\, f(b) < 0$$

- Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

METODE BISEKSI :: ALGORITMA

Algoritma Metode Biseksi

(1) Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari akarnya

(2) Tentukan nilai a dan b

(3) Tentukan torelansi e dan iterasi maksimum N

(4) Hitung $f(a)$ dan $f(b)$

(5) Jika $f(a).f(b)>0$ maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan

(6) Hitung x= $\dfrac{a+b}{2}$

(7) Hitung $f(x)$

(8) Bila $f(x).f(a)<0$ maka $b=x$ dan $f(b)=f(x)$, bila tidak $a=x$ dan $f(a)=f(x)$

(9) Jika |b-a|<e atau iterasi>iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x, dan bila tidak, ulangi langkah 6.

METODE BISEKSI :: CONTOH

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, dengan menggunakan range x=[-1,0], maka diperoleh tabel biseksi sebagai berikut:

iterasi	a	B	x	f(x)	f(a)	Keterangan
1	-1	0	-0,5	0,175639	-1,71828	berlawanan tanda
2	-1	-0,5	-0,75	-0,58775	-1,71828	
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,16765	-0,58775	
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,012782	-0,16765	berlawanan tanda
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,07514	-0,16765	
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,03062	-0,07514	
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,00878	-0,03062	
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	0,002035	-0,00878	berlawanan tanda
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00336	-0,00878	
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00066	-0,00336	

METODE BISEKSI :: CONTOH

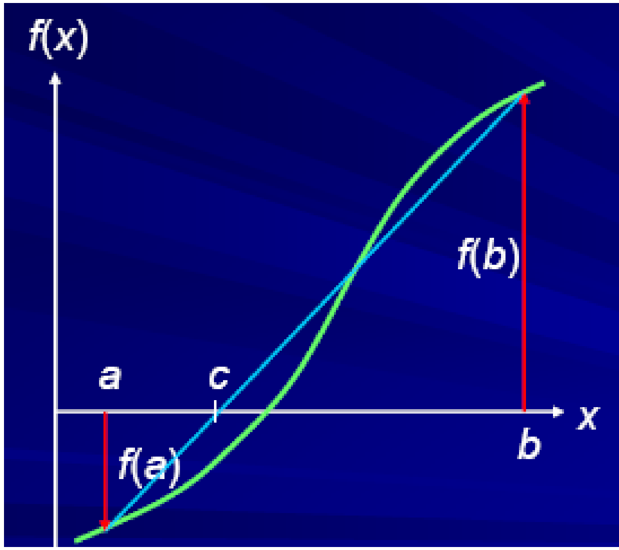
- Di mana x = $\dfrac{a+b}{2}$

  Pada iterasi ke 10 diperoleh nilai x = -0.56738 dan nilai f(x) = -0.00066

- Untuk menghentikan iterasi, dapat dilakukan dengan menggunakan toleransi error atau iterasi maksimum.
- *Catatan:* Dengan menggunakan metode biseksi dengan tolerasi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errornya) maka semakin besar jumlah iterasi yang dibutuhkan.

METODE REGULA FALSI :: PRINSIP

- Metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range.
- Dua titik a dan b pada fungsi f(x) digunakan untuk mengestimasi posisi c dari akar interpolasi linier.
- Dikenal dengan metode False Position



$$\text{slope} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{0-f(a)}{c-a}$$

$$c-a = -f(a)\times\frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c = a - f(a)\times\frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

METODE REGULA FALSI :: PRINSIP

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - 0}{b - x}$$

$$x = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

METODE REGULA FALSI :: HOW TO

1. definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung Fa = f(a) dan Fb = f(b)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau error > e
   - $x = \dfrac{Fb.a - Fa.b}{Fb - Fa}$
   - Hitung Fx = f(x)
   - Hitung error = |Fx|
   - Jika Fx.Fa <0 maka b = x dan Fb = Fx jika tidak a = x dan Fa = Fx.
6. Akar persamaan adalah x.

METODE REGULA FALSI :: CONTOH

- Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1=0$ pada range x= [0,-1]

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
1	-1	0	-0,36788	0,468536	-1,71828	1
2	-1	-0,36788	0,074805	1,069413	-1,71828	0,468536
3	-1	0,074805	-0,42973	0,339579	-1,71828	1,069413
4	-1	-0,42973	0,1938	1,159657	-1,71828	0,339579
5	-1	0,1938	-0,51866	0,128778	-1,71828	1,159657
6	-1	-0,51866	0,412775	1,273179	-1,71828	0,128778
7	-1	0,412775	-0,6627	-0,28565	-1,71828	1,273179
8	-0,6627	0,412775	-0,6169	-0,14323	-0,28565	1,273179
9	-0,6169	0,412775	-0,59626	-0,0824	-0,14323	1,273179
10	-0,59626	0,412775	-0,58511	-0,05037	-0,0824	1,273179
11	-0,58511	0,412775	-0,57855	-0,03181	-0,05037	1,273179
12	-0,57855	0,412775	-0,57451	-0,02047	-0,03181	1,273179
13	-0,57451	0,412775	-0,57195	-0,01333	-0,02047	1,273179
14	-0,57195	0,412775	-0,5703	-0,00874	-0,01333	1,273179

Metode Regula Falsi :: Contoh

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
15	-0,5703	0,412775	-0,56922	-0,00576	-0,00874	1,273179
16	-0,56922	0,412775	-0,56852	-0,00381	-0,00576	1,273179
17	-0,56852	0,412775	-0,56806	-0,00252	-0,00381	1,273179
18	-0,56806	0,412775	-0,56775	-0,00167	-0,00252	1,273179
19	-0,56775	0,412775	-0,56755	-0,00111	-0,00167	1,273179
20	-0,56755	0,412775	-0,56741	-0,00074	-0,00111	1,273179

Akar persamaan diperoleh di x=-0.56741 dengan kesalahan e =0,00074

METODE ITERASI SEDERHANA :: PRINSIP

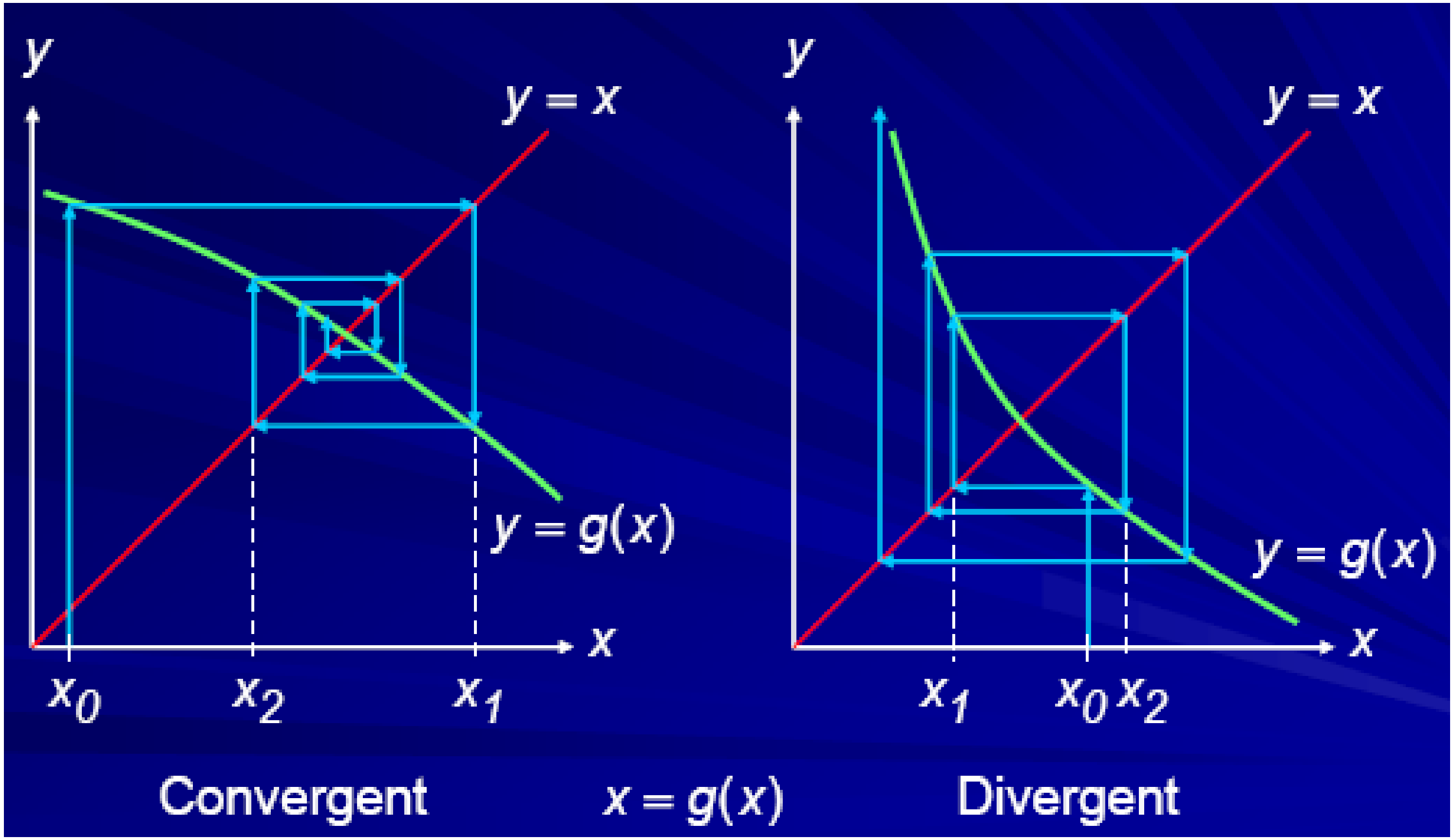
- Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh: $x = g(x)$.
- Contoh:

  $x - e^x = 0 \rightarrow$ diubah menjadi:

  $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$

- g(x) inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini

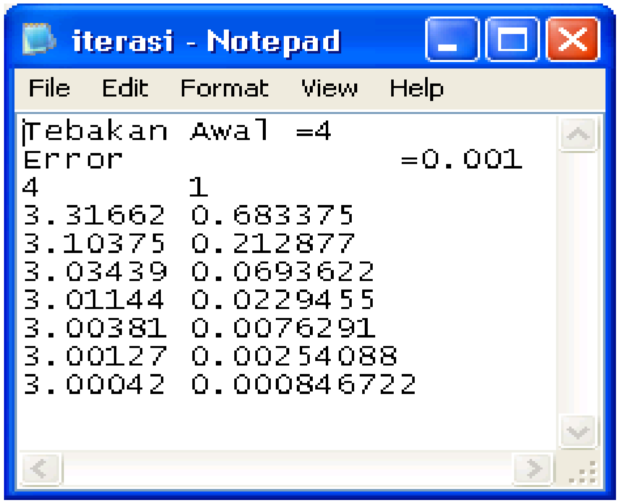
METODE ITERASI SEDERHANA :: PRINSIP



METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

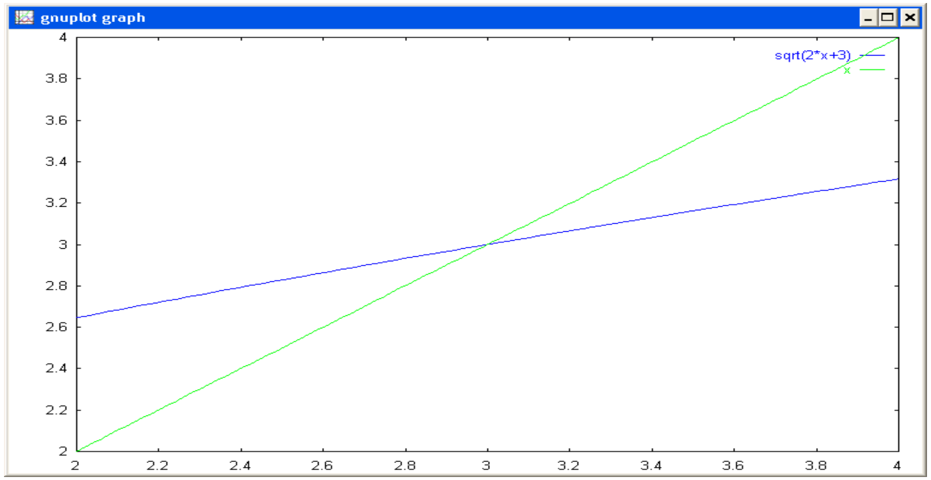
- Carilah akar pers $f(x) = x^2-2x-3$
- $x^2-2x-3 = 0$
- $x^2 = 2x + 3$

$$x = \sqrt{2x+3}$$



- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001

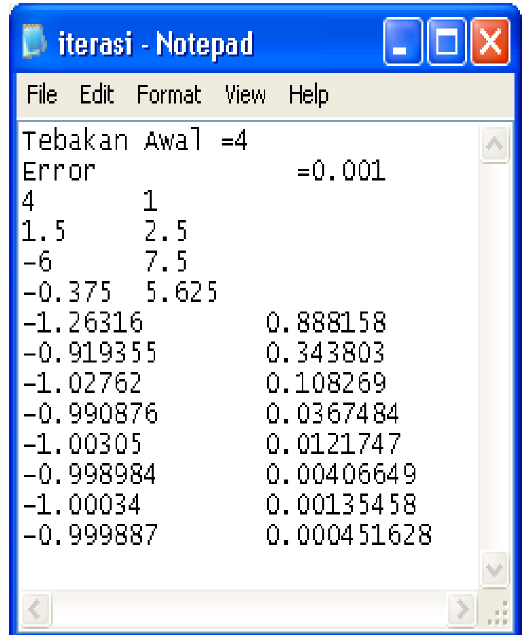
$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3}$$



- Hasil = 3

METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

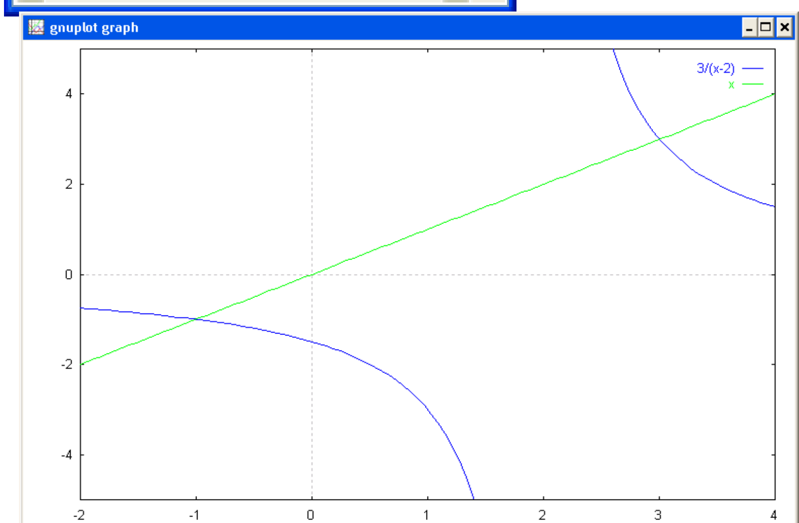
- $x^2-2x-3 = 0$
- $x(x-2) = 3$
- $x = 3/(x-2)$
- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001
- Hasil = -1


iterasi - Notepad

File Edit Format View Help

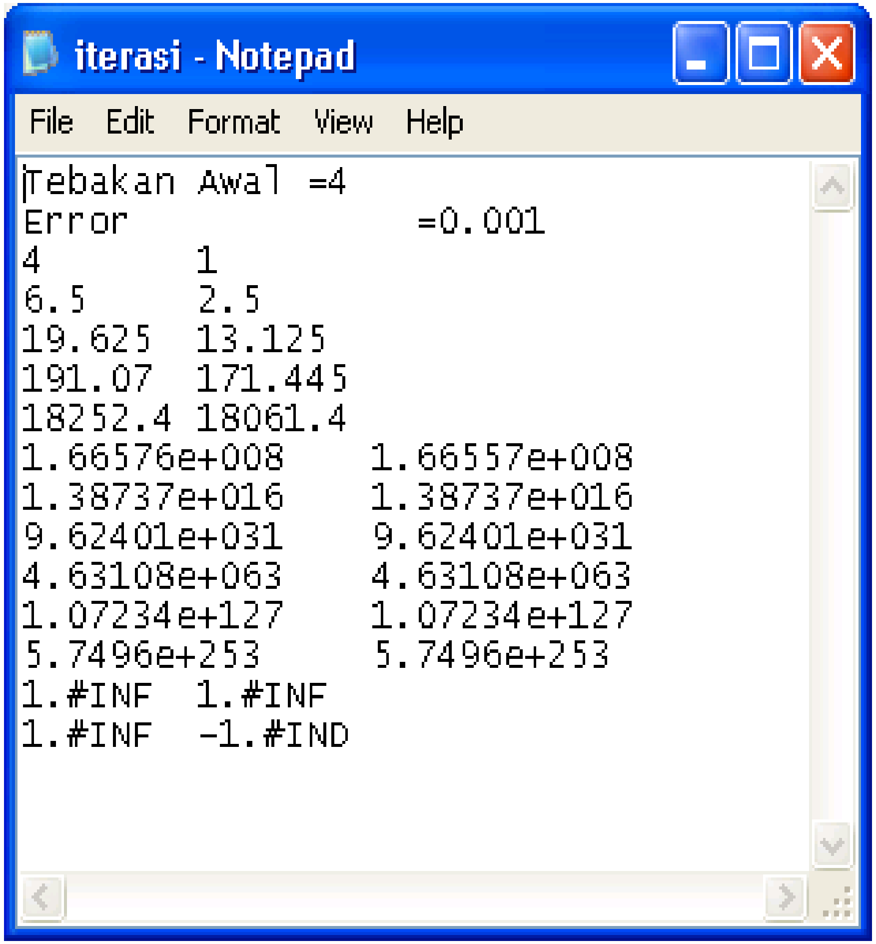
Tebakan Awal =4
Error =0.001

4	1
1.5	2.5
-6	7.5
-0.375	5.625
-1.26316	0.888158
-0.919355	0.343803
-1.02762	0.108269
-0.990876	0.0367484
-1.00305	0.0121747
-0.998984	0.00406649
-1.00034	0.00135458
-0.999887	0.000451628



METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

- $x^2-2x-3 = 0$
- $x = (x^2-3)/2$
- Tebakan awal = 4
- E = 0.00001
- Hasil divergen




```
Tebakan Awal =4
Error                =0.001
4        1
6.5      2.5
19.625   13.125
191.07   171.445
18252.4  18061.4
1.66576e+008    1.66557e+008
1.38737e+016    1.38737e+016
9.62401e+031    9.62401e+031
4.63108e+063    4.63108e+063
1.07234e+127    1.07234e+127
5.7496e+253     5.7496e+253
1.#INF   1.#INF
1.#INF   -1.#IND
```

SYARAT KONVERGENSI

Pada range $I = [s-h, s+h]$ dengan s titik tetap

- Jika $0 < g'(x) < 1$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen monoton.
- Jika $-1 < g'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$ iterasi konvergen berosilasi.
- Jika $g'(x) > 1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen monoton.
- Jika $g'(x) < -1$ untuk setiap $x \in I$, maka iterasi divergen berosilasi.

KONVERGENSI :: CONTOH

$$x_{r+1} = \sqrt{2x_r + 3}$$

$$g(x) = \sqrt{2x_r + 3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_r + 3}}$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = 0.3015 < 1
- Konvergen Monoton

$$x_{r+1} = \frac{3}{(x_r - 2)}$$

$$g(x) = \frac{3}{(x-2)}$$

$$g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = |-0.75| < 1
- Konvergen Berisolasi

KONVERGENSI :: CONTOH

$$g(x) = \frac{(x^2 - 3)}{2}$$

$$g'(x) = x$$

- Tebakan awal 4
- G'(4) = 4 > 1
- Divergen Monoton

METODE ITERASI SEDERHANA :: CONTOH

Selesaikan $x + e^x = 0$, maka persamaan diubah menjadi $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$.

Ambil titik awal di $x_0 = -1$, maka

Iterasi 1 : $x = -e^{-1} = -0.3679$ → $F(x) = 0,3243$

Iterasi 2 : $x = e^{-0,3679} = -0,6922$

$F(x) = -0,19173$

Iterasi 3 : $x = -e^{-0,6922} = -0,50047$

$F(x) = 0,10577$

Iterasi 4 : $x = -e^{-0,50047} = -0,60624$

$F(x) = -0,06085$

Iterasi 5 = $x = -e^{-0,60624} = -0,5454$

$F(x) = 0,034217$

Pada iterasi ke 10 diperoleh $x = -0,56843$ dan $F(x) = 0,034217$.

METODE ITERASI SEDERHANA :: LATIHAN SOAL

- Apa yang terjadi dengan pemilihan x^0 pada pencarian akar persamaan :
- $x^3 + 6x - 3 = 0$
- Dengan:

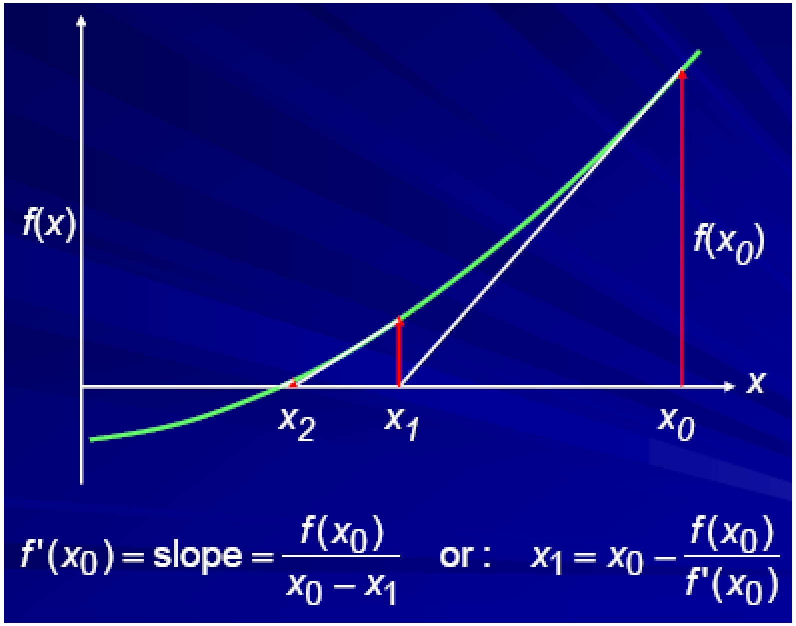
$$x_{r+1} = \frac{-x_r^{\;3} + 3}{6}$$

- Cari akar persamaan dengan $x^0 = 0.5$; $x^0 = 1.5$, $x^0 = 2.2$, $x^0 = 2.7$

METODE NEWTON RAPHSON :: PRINSIP

- Metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan:

$$\frac{F(x_n)}{F^1(x_n)}$$



METODE NEWTON RAPHSON :: TAHAP

1. Definisikan fungsi f(x) dan $f^1(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|f(x_i)| > e$
   – Hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$$

6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- **Selesaikan persamaan x - e^{-x} = 0 dengan titik pendekatan awal x_0 = 0**
- $f(x) = x - e^{-x} \rightarrow f'(x)=1+e^{-x}$
- $f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$
- $f'(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0{,}5$$

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $f(x_1) = -0.106631$ dan $f^1(x_1) = 1.60653$

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)} = 0.5 - \frac{-0{,}106531}{1{,}60653} = 0.566311$$

- $f(x_2) = -0.00130451$ dan $f^1(x_2) = 1.56762$

$$x_2 - \frac{f(x_2)}{f^1(x_2)} = 0.566311 - \frac{-0.00130451}{1.56762} = 0{,}567143$$

- $f(x_3) = -1.96.10^{-7}$. Suatu bilangan yang sangat kecil.
- Sehingga akar persamaan x = 0.567143.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $x - e^{-x} = 0 \rightarrow x_0 = 0$, $e = 0.00001$

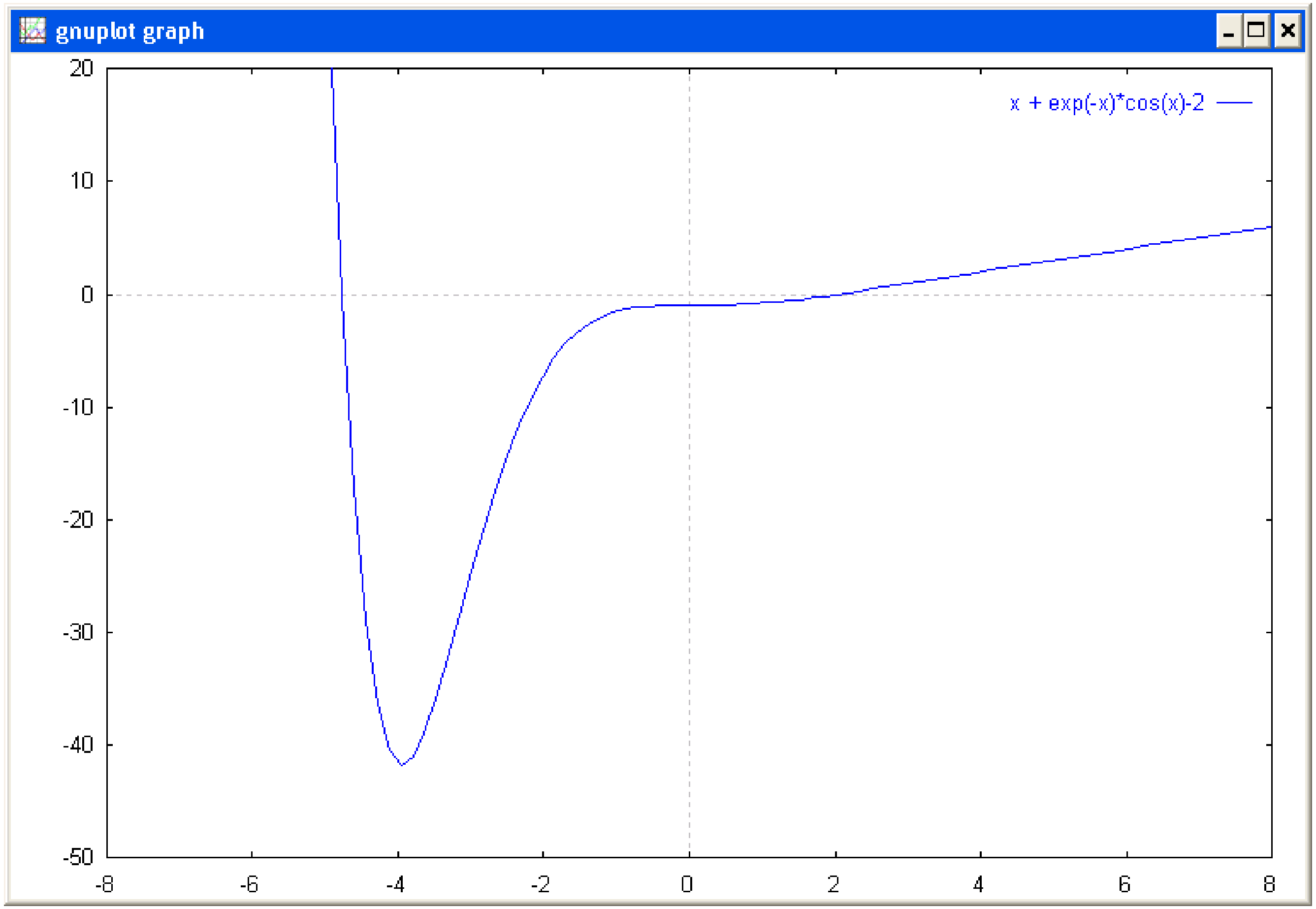
Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714
Akar terletak di x = 0.567143			

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH

- $x + e^{-x} \cos x - 2 = 0 \rightarrow x_0 = 1$
- $f(x) = x + e^{-x} \cos x - 2$
- $f'(x) = 1 - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	1	-0.801234	0.491674
1	2.6296	0.566743	1.02753
2	2.07805	0.0172411	0.951394
3	2.05993	3.62703e-005	0.947372
4	2.05989	1.64926e-010	0.947364
Akar terletak di x = 2.05989			

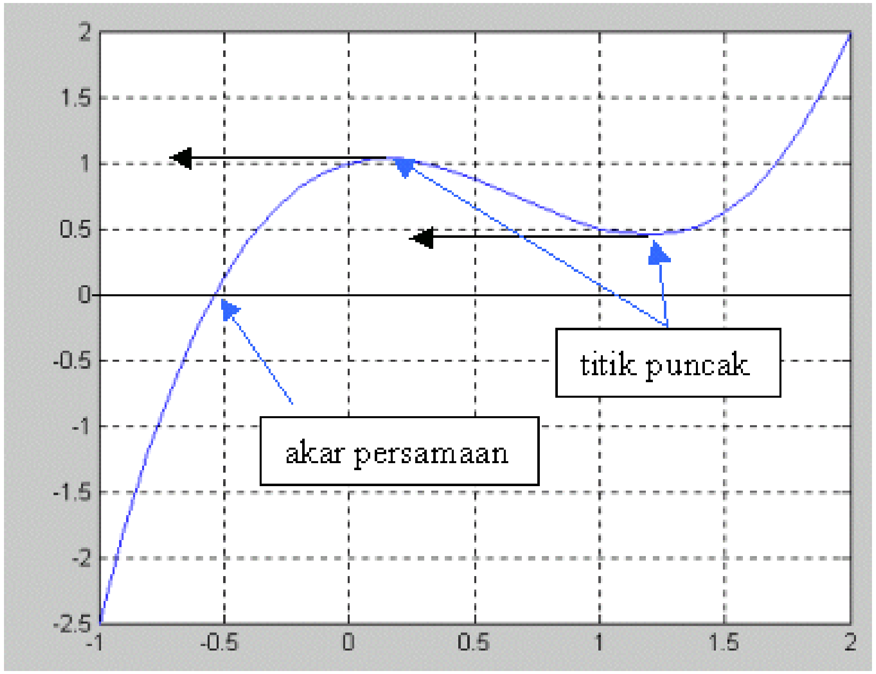
METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH



METODE NEWTON RAPHSON :: PERMASALAHAN

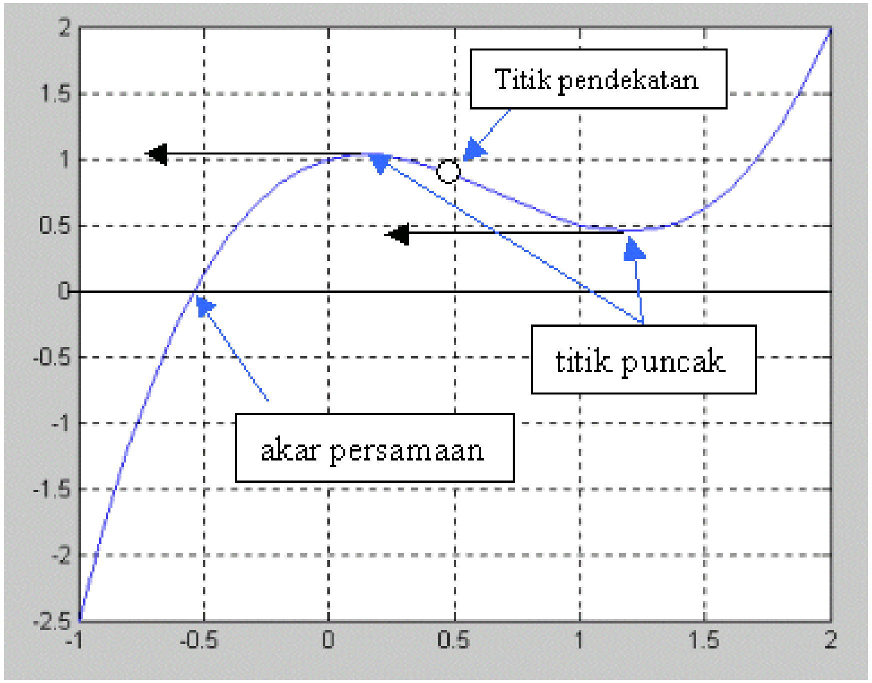
- Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:

Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

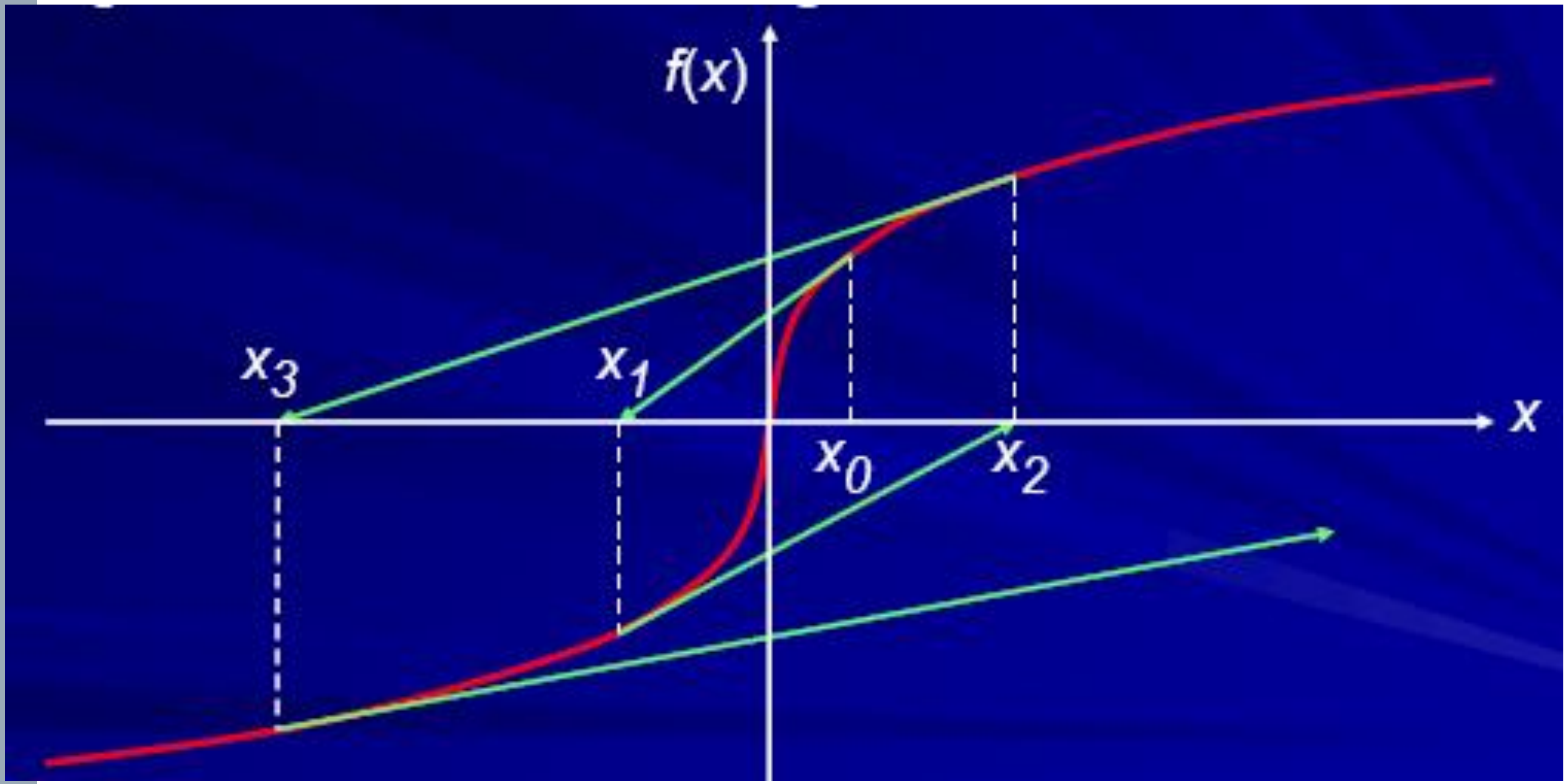


METODE NEWTON RAPHSON :: PERMASALAHAN

- Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.
- Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*).
- Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.



HASIL TIDAK KONVERGEN



METODE NEWTON RAPHSON :: PENYELESAIAN PERMASALAHAN

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ di mana δ adalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode newton raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

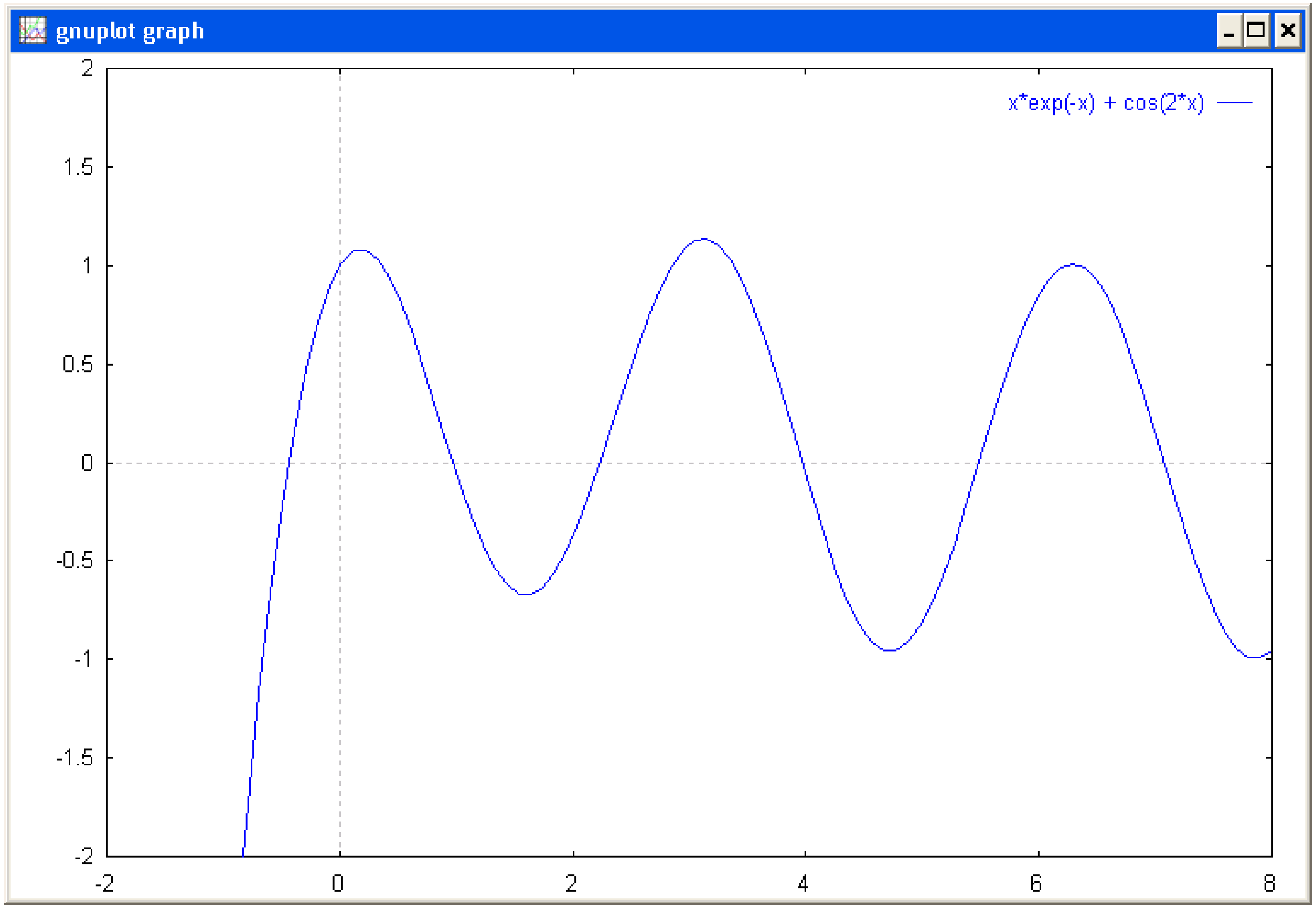
- $x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0 \rightarrow x_0 = 0{,}176281$
- $f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$
- $f1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$
- $f(x_0) = 1{,}086282$
- $f^1(x_0) = -0{,}000015$

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

X = 71365.2

padahal dalam range 0 sampai dengan 1 terdapat akar di sekitar 0.5 s/d 1.

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN



METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

- Untuk menghindari hal ini sebaiknya digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik. Digunakan pendekatan awal x_0=0.5

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

x

METODE NEWTON RAPHSON :: CONTOH PENYELESAIAN PERMASALAHAN

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991
Akar terletak di x = 0.973692			

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989
Akar terletak di x = 2.23549			

Iterasi	x	f(x)	f' (x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059
Akar terletak di x = 3.96464			

- Hasil dari penyelesaian persamaan:

  x * exp(-x) + cos(2x) = 0 pada range [0,5]

METODE NEWTON RAPHSON :: DENGAN MODIFIKASI TABEL

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai $x = [a, b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :

   $F(x_k) \cdot F(x_{k+1}) < 0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F(abs(F^1(x_0))) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)

   $x_0 = x_0 + dx$

   hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

   $$x_1 = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$

   bila $|F^1(x_i)| < e$ maka

   $x_i = x_i + dx$

   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8. Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

METODE NEWTON RAPHSON :: DENGAN MODIFIKASI TABEL :: CONTOH

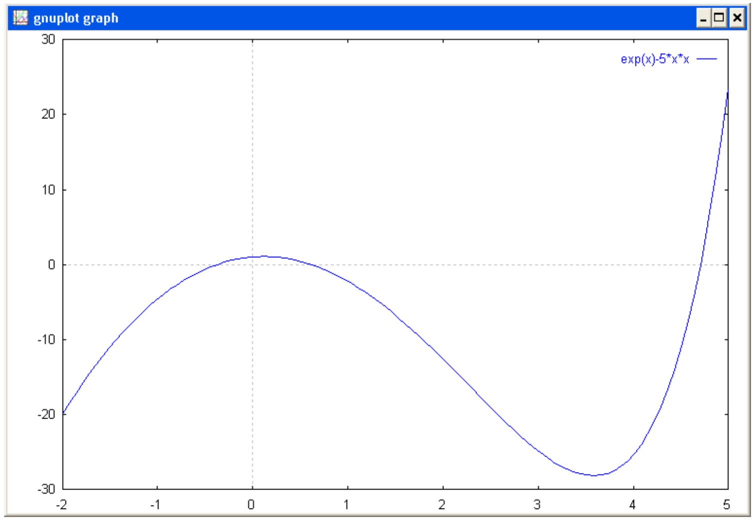
- Hitunglah akar dengan metode Newthon Raphson. Gunakan e=0.00001. Tebakan awal akar $x_0 = 1$
  $f(x) = e^x - 5x^2$
- Penyelesaian

$$f(x) = e^x - 5x^2 \qquad f'(x) = e^x - 10x \qquad x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}$$

Prosedur iterasi Newthon Raphson

0	1	-2.28172
1	0.686651	-0.370399
2	0.610741	-0.0232286
3	0.605296	-0.000121011
4	0.605267	-3.35649e-009

Akar terletak di x = 0.605267

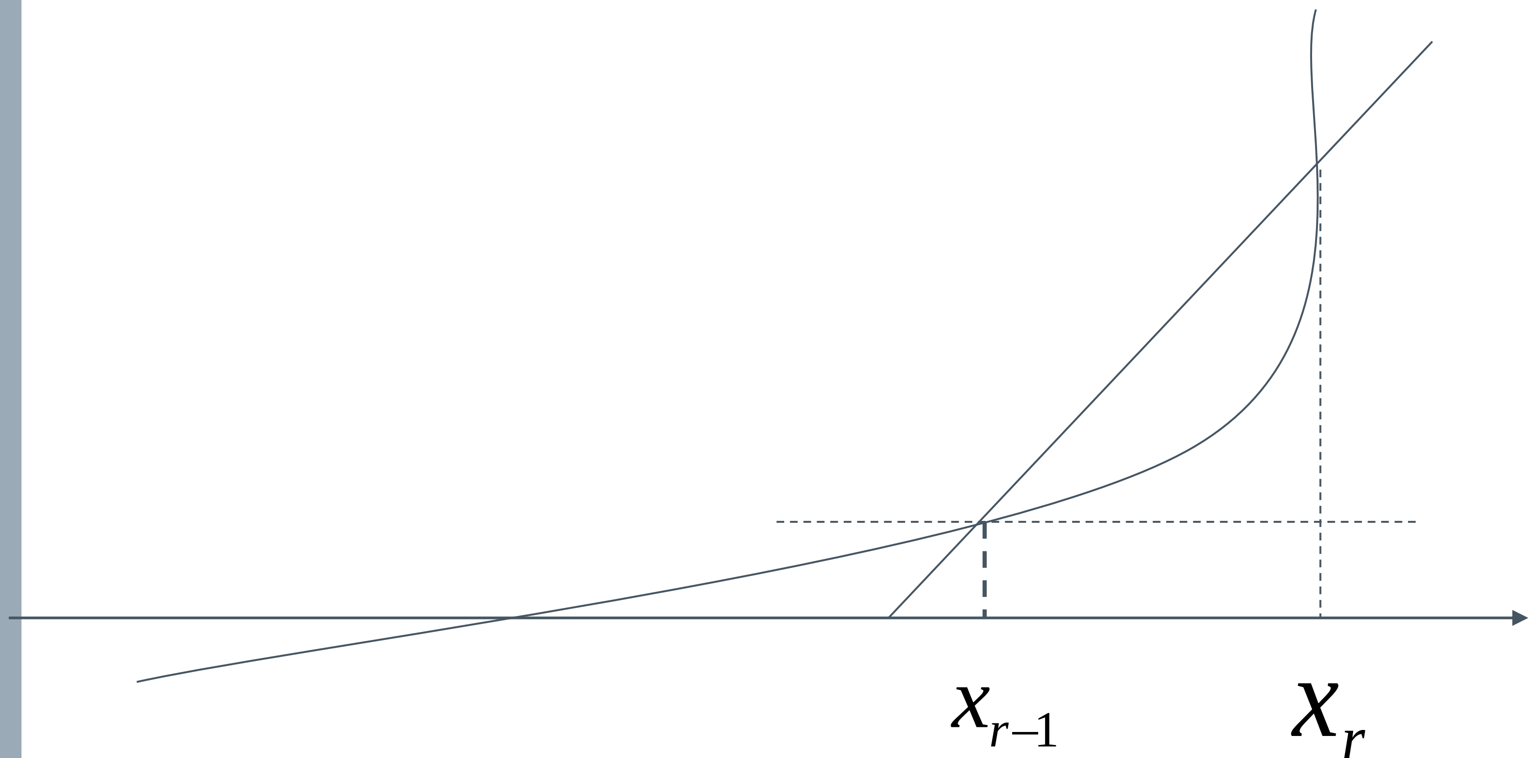


METODE SECANT :: PRINSIP

- Metode Newton Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi f’(x).
- Tidak semua fungsi mudah dicari turunannya terutama fungsi yang bentuknya rumit.
- Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekivalen
- Modifikasi metode Newton Raphson dinamakan metode Secant.

METODE SECANT :: PRINSIP

x_r



METODE SECANT :: PRINSIP

$$f'(x) = \frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

- Metode Newton-Raphson

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

METODE SECANT :: PRINSIP

- Definisikan fungsi F(x)
- Definisikan torelansi error (e) dan iterasi maksimum (n)
- Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x0 dan x1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendakatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
- Hitung F(x0) dan F(x1) sebagai y0 dan y1
- Untuk iterasi I = 1 s/d n atau |F(xi)|

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

Hitung $y_{i+1} = F(x_{i+1})$

- Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

METODE SECANT :: CONTOH

- Penyelesaian dari $x^2 -(x + 1)\, e^{-x} = 0$?

ambil $x_0 = 0{,}8$ dan $x_1 = 0{,}9$ maka dapat dihitung

$$y_0 = F(x_0) = -0{,}16879$$

$$y_1 = F(x_1) = 0{,}037518$$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

Iterasi 1 : $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0{,}881815$

$$y_2 = 0{,}00153$$

Iterasi 2 : $x_3 = x_2 - y_2 \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0{,}882528$

$$y_3 = 1{,}3.10^{-5}$$

Iterasi 3 : $x_4 = x_3 - y_3 \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0{,}882534$

$$y_4 = 4{,}91.e^{-9}$$

Diperoleh akar $x = 0{,}882534$

CONTOH KASUS PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

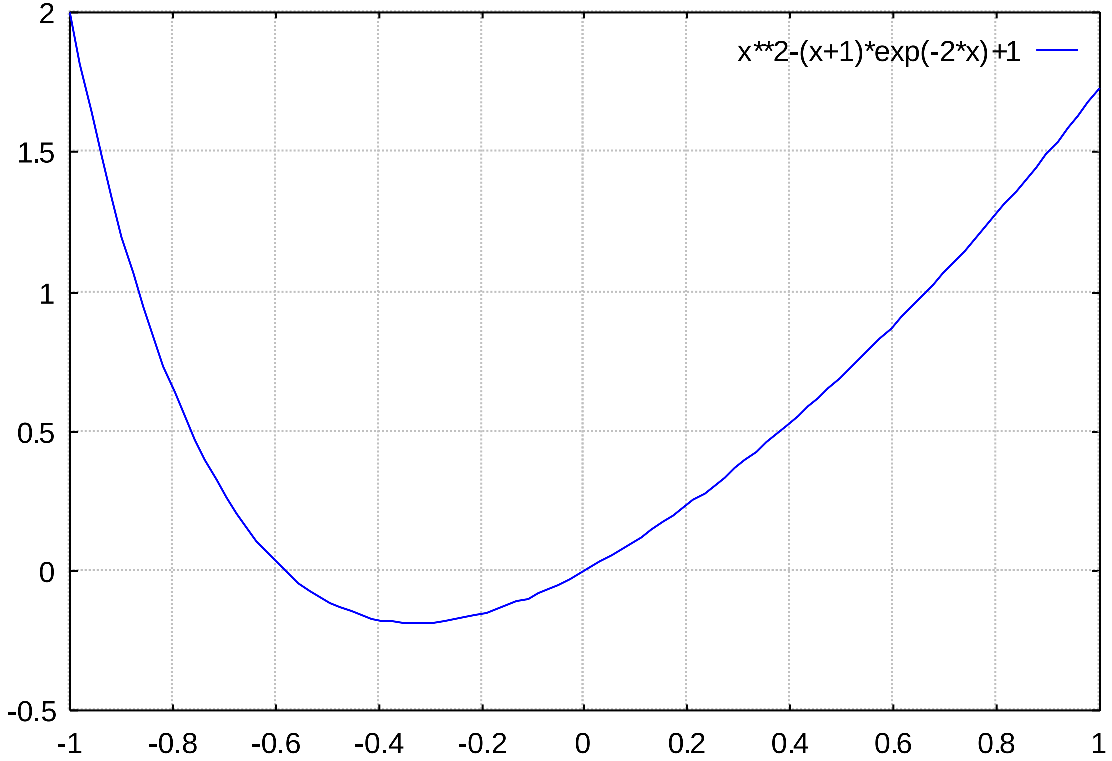
- Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
- Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permasalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
- Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

PENENTUAN NILAI MAKSIMAL DAN MINIMAL FUNGSI NON LINIER

- nilai maksimal dan minimal dari f(x) → memenuhi f'(x)=0.
- g(x)=f'(x) → g(x)=0
- Menentukan nilai maksimal atau minimal → f''(x)

CONTOH SOAL

- Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2-(x+1)e^{-2x}+1$



Nilai minimal terletak antara –0.4 dan –0.2

CONTOH SOAL

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung g(x)=f' (x)

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x + (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

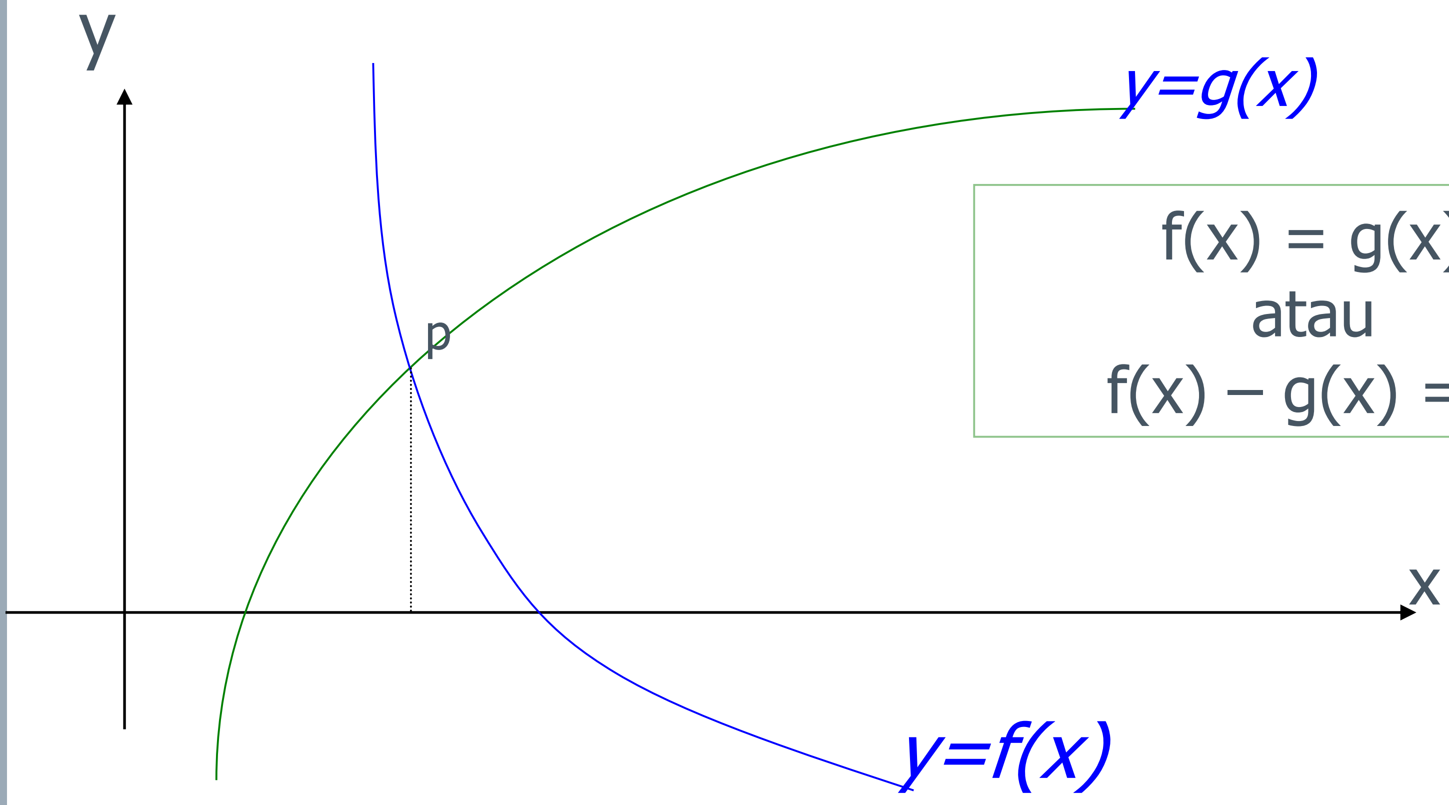
$$2x + (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0=-0.4 dan x1=-0.2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi    x           f(x)
1          -0.316495   0.0581765
2          -0.332006   -0.0113328
3          -0.329477   0.000208218
4          -0.329523   7.28621e-007
Akar persamaan di x = -0.329523
```

Jadi nilai minimal fungsi f(x) terletak di x=-0.329523

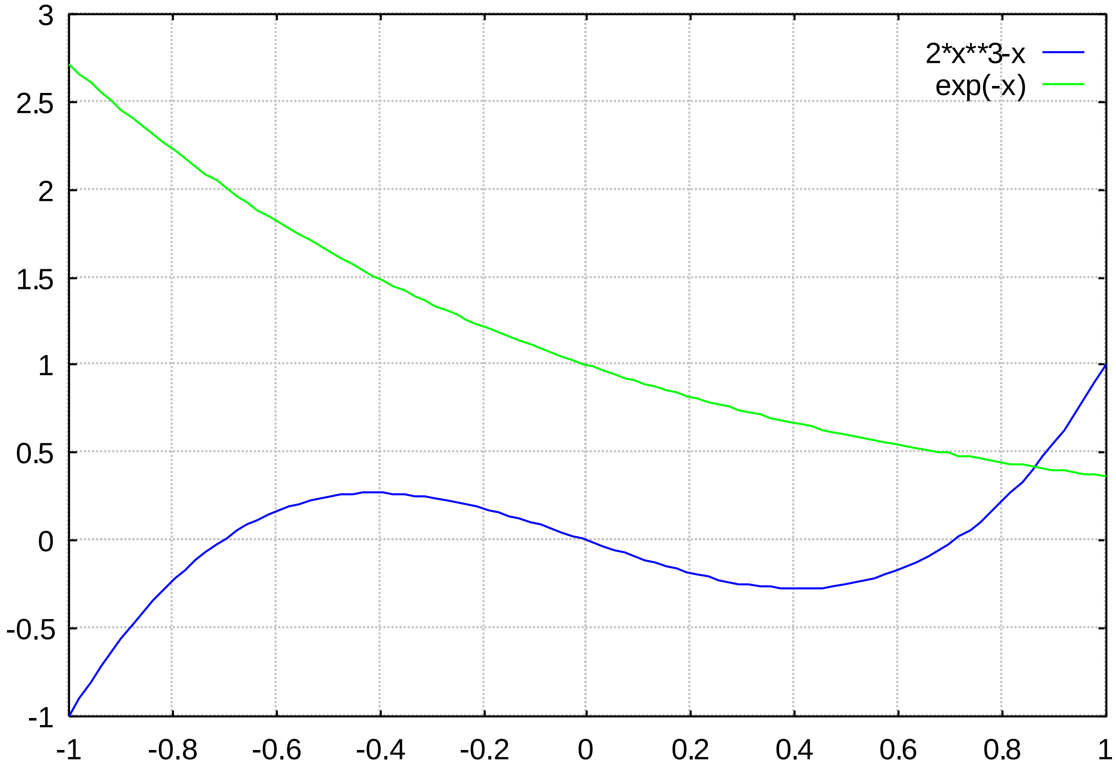
MENGHITUNG TITIK POTONG 2 BUAH KURVA



f(x) = g(x)
atau
f(x) – g(x) = 0

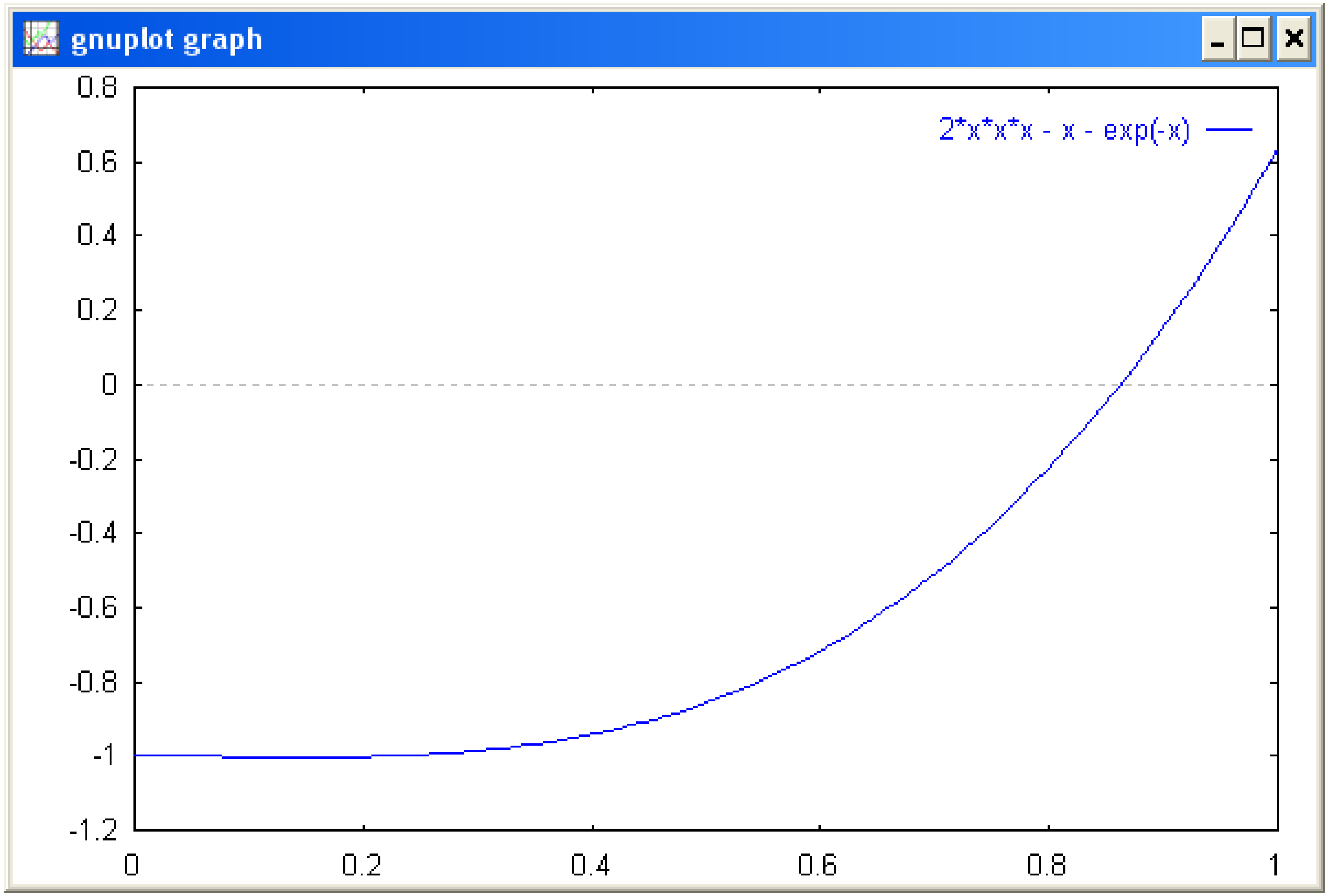
CONTOH SOAL

- Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$



Akar terletak di antara 0.8 dan 1

CONTOH SOAL


gnuplot graph
2*x*x*x - x - exp(-x)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

SOAL-SOAL

- Tahun 1225 Leonardo da Pisa mencari akar persamaan:
  $F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$
  dan menemukan x = 1.368808107.
- Tidak seorangpun yang mengetahui cara Leonardo menemukan nilai ini. Sekarang rahasia ini dapat dipecahkan dengan metode iterasi sederhana.
- Carilah salah satu dari kemungkinan $x = g(x)$. Lalu dengan memberikan sembarang input awal, tentukan $x=g(x)$ yang mana yang menghasilkan akar persamaan yang ditemukan Leonardo itu.

SOAL-SOAL

- Hitung akar 27 dan akar 50 dengan biseksi dan regula falsi! Bandingkan ke dua metode tersebut! Mana yang lebih cepat ? Catat hasil uji coba

a	b	N	e	Iterasi Biseksi	Iterasi Regula Falsi
			0.1		
			0.01		
			0.001		
			0.0001		

- Tentukan nilai puncak pada kurva y = x2 + e-2xsin(x) pada range x=[0,10] dengan metode newthon raphson