

## Teoretická informatika (TIN) – 2020/2021

### Úkol 3

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Ferko Amundsen se rozhodl navštívit Grónsko. Vytipoval si  $n$  slavných grónských měst, která chce navštívit. Chtěl by přiletět do kteréhokoliv z nich a všechna ostatní z něj projet, tradičně na psím spřežení, tak, aby v žádném městě nebyl dvakrát. Odletět by chtěl z posledního  $n$ -tého města na své trase. Aby viděl krásy Grónska, ohodnotil si každou cestu mezi dvěma městy podle toho, jaký na ní uvidí hezký přírodní úkaz (například nekonečnou bílou planinu) nebo zajímavou památku (velmi starý sníh). Cesty, kde se nic zajímavého nenachází, ohodnotil nulou. Ne mezi každými dvěma městy existuje cesta. Ferko by nejraději viděl alespoň polovinu grónských krás, proto si chce naplánovat trasu tak, aby součet skóre cest mezi městy na trase měl hodnotu alespoň poloviny součtu skóre všech krás Grónska. Chtěl by nejdříve zjistit, zda taková trasa vůbec existuje. Formalizujte problém Ferka Amundsena, a ukažte, že je NP-úplný.

Pomůžte Vám NP-úplnost některého z problémů uvedených zde:

[https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete\\_problems](https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems)  
v odstavci „NP-complete problems“.

20 bodů

2. Mějme dán jazyk  $L$  na abecedou  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Na jeho základě definujme jazyk  $L'$  jako

$$L' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v : u \neq v \wedge u \sqsubseteq w \wedge v \sqsubseteq w \wedge u \in L \wedge v \in L\},$$

kde  $\sqsubseteq$  je relace být podslovem ( $L'$  je jazyk všech slov, která mají dvě různá podslova z  $L$ ). Snažte se najít co nejmenší  $k$  takové, aby platilo

$$L \in DTIME[n^2] \Rightarrow L' \in DTIME[n^k].$$

Dokažte, že vztah platí, ale nedokazujte, že vaše  $k$  je opravdu nejmenší možné.

15 bodů

3. Dokažte, že jazyk  $L$  všech slov nad abecedou  $\Sigma = \{0, 1\}$ , která obsahují přesně  $2^n$  nepřekrývajících se výskytů nějakého neprázdného slova nad  $\Sigma$ , náleží do PSPACE. Pro úplnost,  $L$  můžeme definovat formálně jako

$$L = \{u_1 w u_2 w \cdots u_{2^n} w u_{2^n+1} \mid w \in \Sigma^+, n > 0, u_1, \dots, u_{2^n+1} \in \Sigma^* \setminus (\Sigma^* w \Sigma^*)\}.$$

Pomůžte zopakovat si fakta o třídě PSPACE.

15 bodů

Při popisech Turingových strojů v rámci řešení tohoto úkolu se omezte na stručný, přesný, a přehledný popis principu jejich funkce. Nevypisujte formálně přechodovou funkci ani nekreslete detailní diagram.