ALJABAR LINIER

Vektor Dimensi 2 dan Dimensi 3

Learning Outcomes

1

Mengetahui definisi Vektor Dimensi 2 dan 3

2

Menghitung panjang vektor dan jarak antara 2 vektor

BAB 3.1

Vektor di Ruang-2
Vektor di Ruang-3

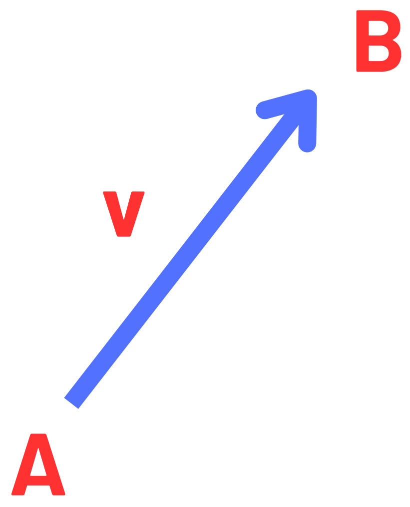
VEKTOR

- Besaran skalar yang mempunyai arah

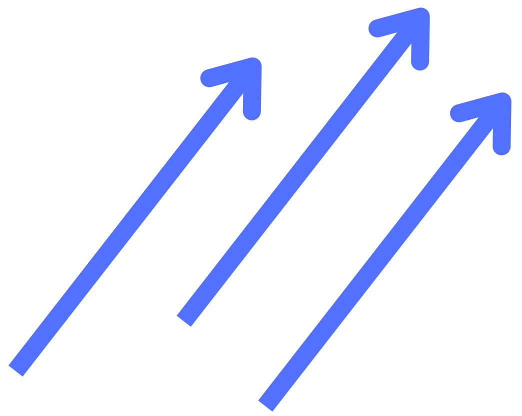
  ex : gaya, ke kanan bernilai (+) , ke kiri bernilai (-)

- Secara geometris

vektor v = AB

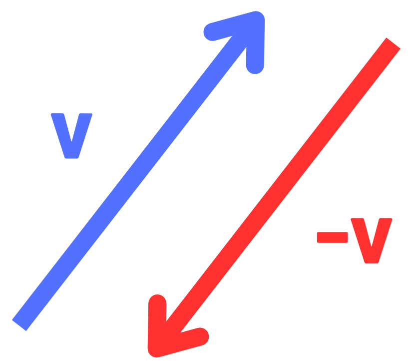


A disebut titik awal/inisial
B disebut titik akhir/terminal
Arah panah = arah vektor
Panjang panah = besar vektor



vektor ekivalen dianggap sama jika panjang & arahnya sama

Negasi vektor

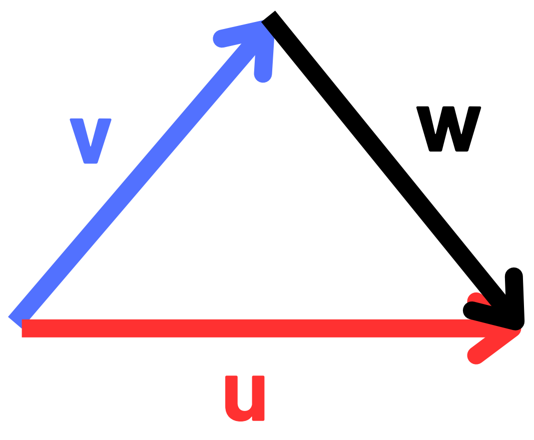


v ⟶ -v

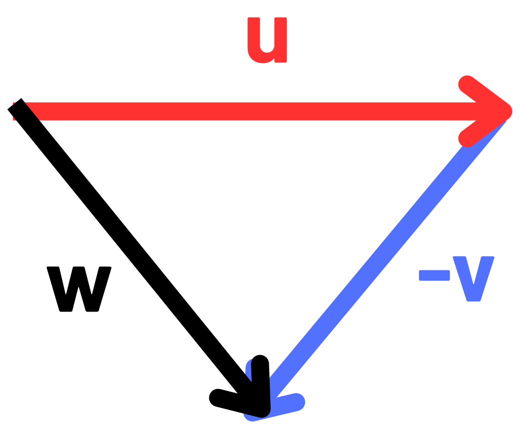
secara geometrik

panjang sama, arah berlawanan

Selisih dua vektor

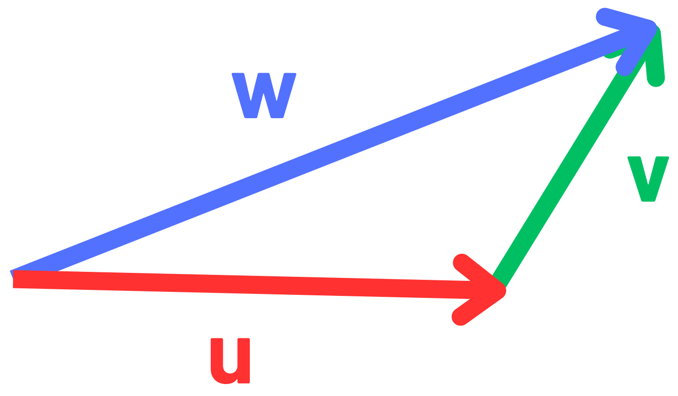


w = u - v



w = u + (-v)

Penjumlahan Vektor



secara geometrik

w = u + v

cara analitik :

Vektor-vektor u, v, w di Ruang-2 atau Ruang-3

Ruang-2 :

$$u = (u_1, u_2);\ v = (v_1, v_2);\ w = (w_1, w_2);$$

$$w = (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$$

$$= (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$$

$$w_1 = u_1 + v_1$$

$$w_2 = u_2 + v_2$$

Perkalian Vektor

w = k v; k = skalar

perkalian vektor dengan skalar (bilangan nyata/real number)

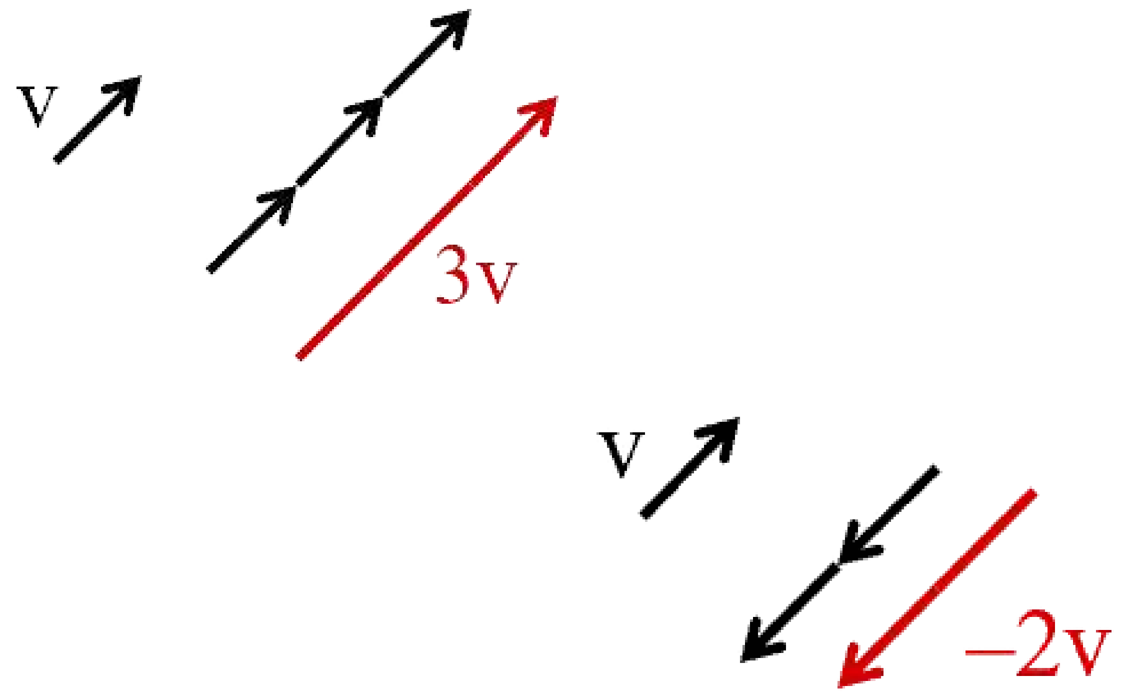
cara analitik :

Ruang-2 :

$$\mathbf{w} = k\mathbf{v} = (k\mathrm{v}_1, k\mathrm{v}_2)$$
$$(\mathrm{w}, \mathrm{w}_2) = (k\mathrm{v}_1, k\mathrm{v}_2)$$

$$\mathrm{w}_1 = k\mathrm{v}_1$$
$$\mathrm{w}_2 = k\mathrm{v}_2$$

secara geometrik :



Koordinat Cartesius:

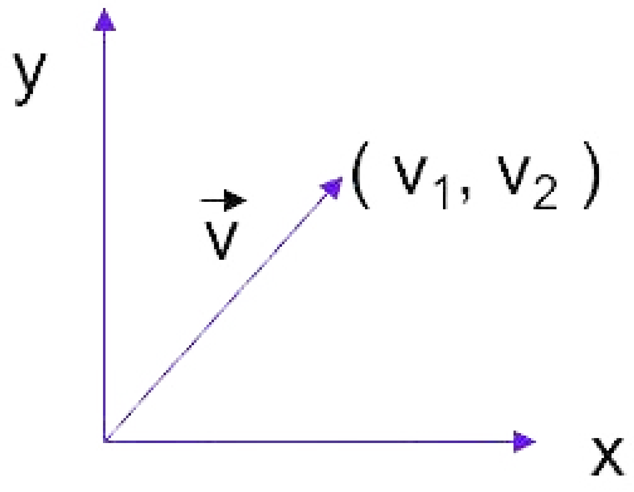
$$P_1 = (x_1, y_1) \ dan \ P_2 = (x_2, y_2)$$

P_1 dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_1, y_1) atau sebagai vektor OP_1 di Ruang-2 dengan komponen pertama x_1 dan komponen kedua y_1

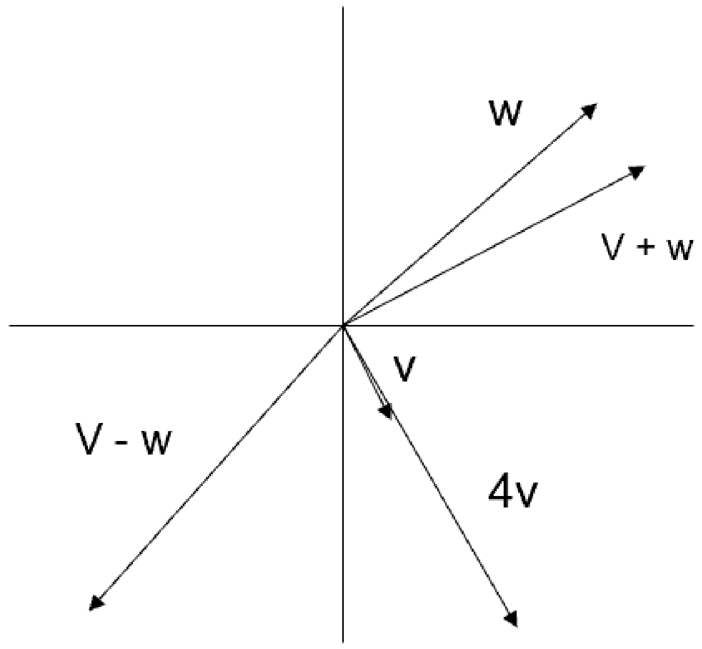
P_2 dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_1, y_1) atau sebagai vektor OP_2 di Ruang-2 dengan komponen pertama x_2 dan komponen kedua y_2

$$\text{vektor } P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Using Coordinat



v_1 & v_2 $\longrightarrow$ komponen2 $\vec{v}$



Mis: $\vec{v} = (1, -2)$ & $\vec{w} = (7, 6)$

$(+) \longrightarrow \vec{v} + \vec{w} = (1, -2) + (7, 6)$
$= (1 + 7, -2 + 6)$
$= (8, 4)$

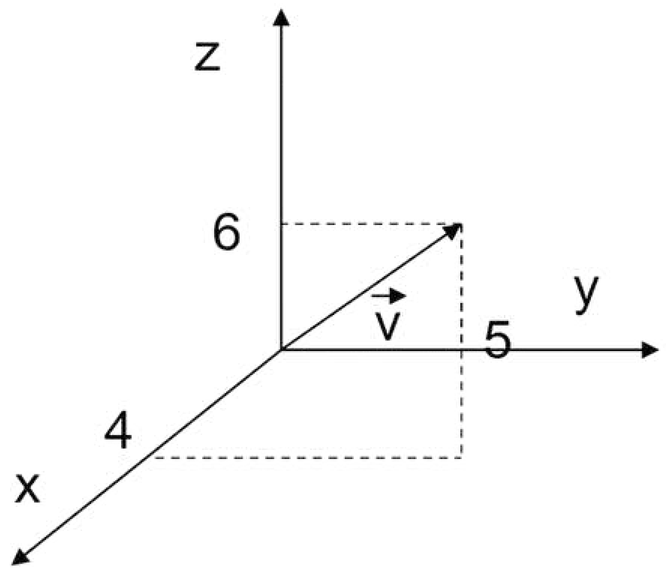
$(-) \longrightarrow \vec{v} - \vec{w} = (1, -2) - (7, 6)$
$= (1 - 7, -2 - 6)$
$= (-6, -8)$

$(*) \longrightarrow 4\vec{v} = 4 (1, -2)$
$= (4, -8)$

Vektor 3 dimensi

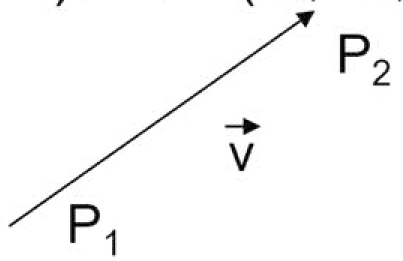
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Misal:
$\vec{v} = (4, 5, 6)$



Mis : $\vec{v} = (1, -3, 2)$
$\vec{w} = (4, 2, 1)$

$(+)\ \vec{v} + \vec{w} = (5, -1, 3)$
$(\ )\ \vec{v} - \vec{w} = (-3, -5, 1)$
$(*)\ 2\vec{v} = (2, -6, 4)$



$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

EXAMPLE 2 (124)

Example 2: the component of the vector $v = \overrightarrow{P_1 P_2}$ with the initial point P_1 (2, -1, 4)

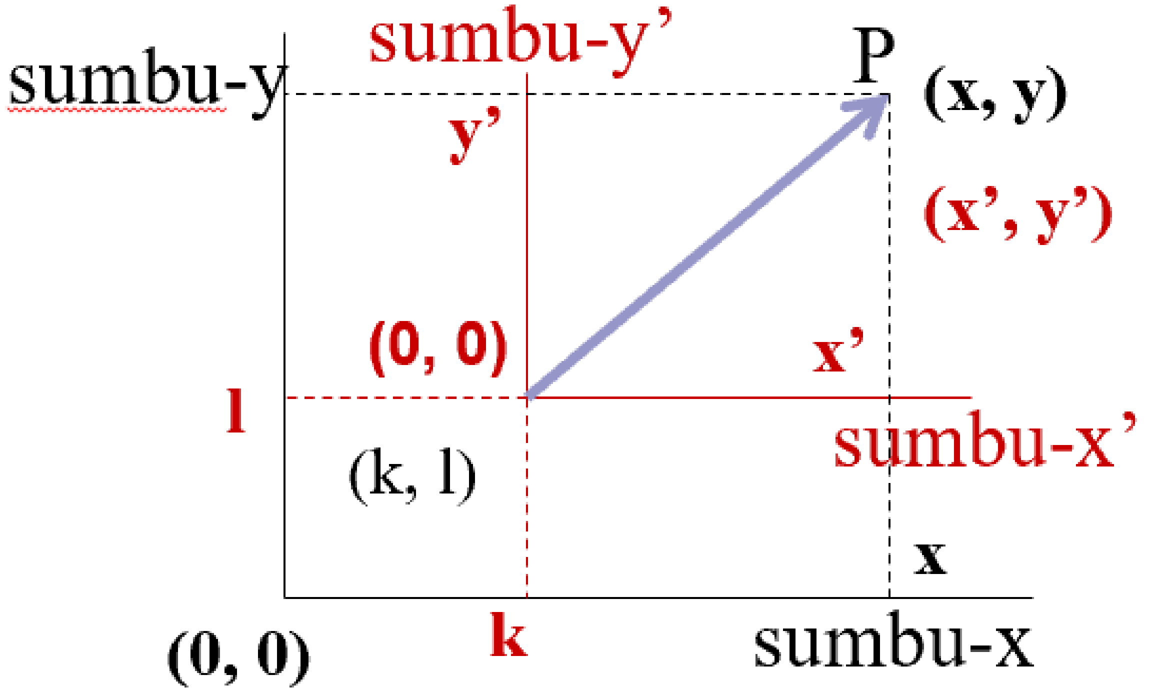
And terminal point P_2 (7, 5, -8) are

$$\mathbf{v = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)}$$

in 2-space, the vector with initial point P_1 (x_1, y_1) and terminal point P_2 (x_2, y_2) is

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$$

TRANSLASI



pers.Translasi :

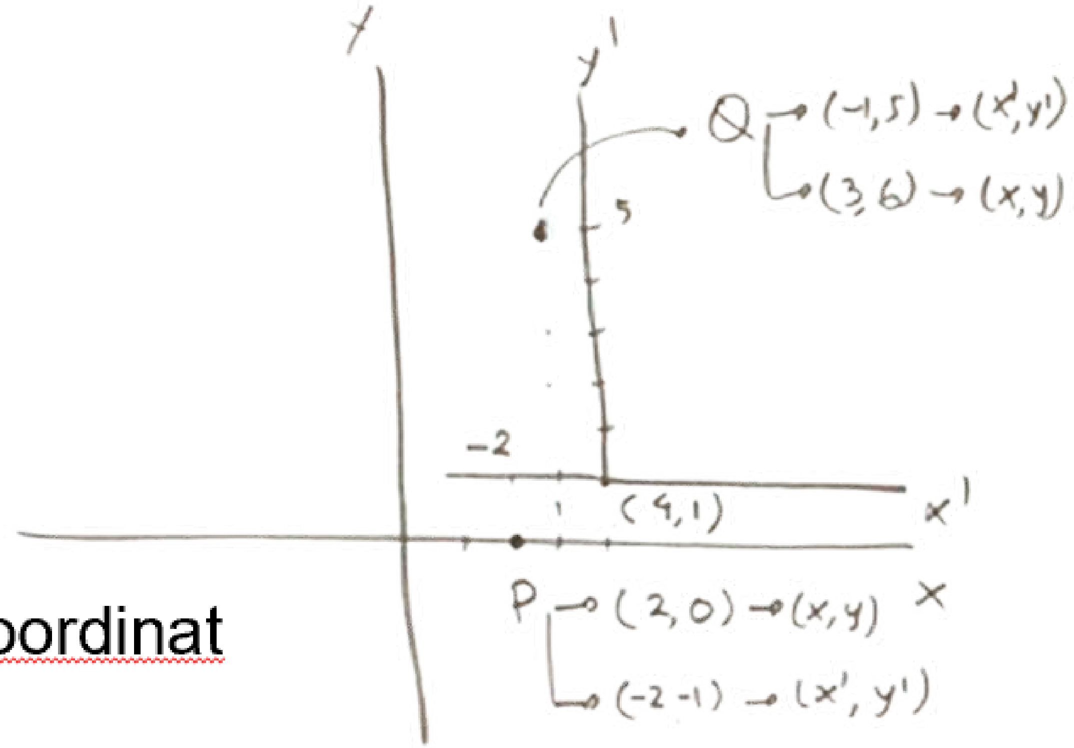
x' = x - k

y' = y – l

x = x' + k

y = y' + l

$$\boxed{x = k + x' \qquad y = l + y'}$$



Ex: (k, l) = (4, 1), koordinat (x, y) titik P (2, 0). Berapakah koordinat (x' , y')?

Jwb : x' = x – k
= 2 – 4
= -2

y' = y – l
= 0 - 1
= -1

(k, l) = (4, 1)
(x, y) = (2, 0)

x' = x - k
= 2 - 4
= -2

y' = y - l
= 0 - 1
= -1

EXAMPLE 3 (125)

Suppose that an xy-coordinate system translated to obtain an x'y'-coordinate system whose origin has xy-coordinates (k, l) = (4, 1)

(a) Find the x'y'-coordinates of the point with the xy-coordinate P (2, 0)

(b) Find the xy-coordinates of the point with the x'y'-coordinate Q (-1, 5)

Solutions (a): the translations equations are

$$x' = x - 4 \qquad y' = y - 1$$

So the x'y'-coordinates of P (2, 0) are $x' = 2 - 4 = -2$ and $y' = 0 - 1 = -1$

Solutions (b): the translations equations in (a) can be rewritten as

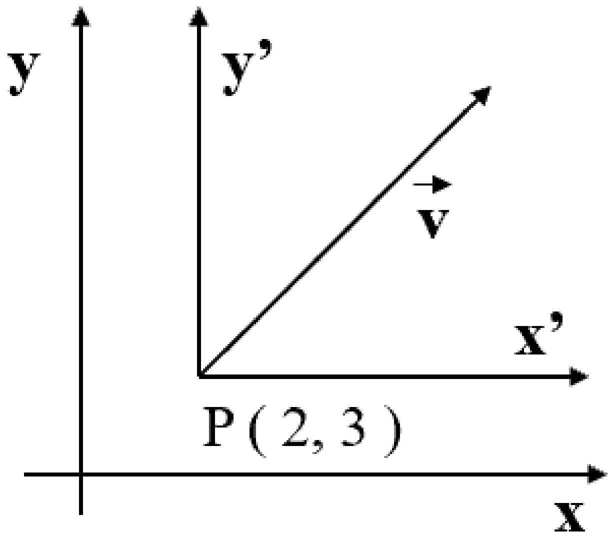
$$x = x' + 4 \qquad y = y' + 1$$

So the xy-coordinates of Q are $x = -1 + 4 = 3$ and $y = 5 + 1 = 6$

CONTOH SOAL

Diketahui titik P(k, l) = (2, 3), koordinat (x', y') titik v (4, 5). Berapakah koordinat (x, y) ?

jwb :



$\vec{v}$ = (4, 5) dari titik P

so, x' = 4

y' = 5

Maka P(2, 3) dianggap sebagai titik pusat baru. k = 2 dan l = 3. yang kita cari adalah keberadaan vektor v terhadap sumbu koordinat mula-mula (0, 0)

$$x = k + x' = 2 + 4 = 6 \qquad y = l + y' = 3 + 5 = 8$$

Jadi vector dengan koordinat (x,y) adalah Q (6, 8)

CONTOH SOAL

Diketahui titik P (k, l) = (-2, 4), koordinat (x', y') titik v (7,3). Berapakah koordinat (x, y) ?

(4) Rumus ➔ x' = x – k

Y' = y – l

Titik pusat lama, koordinat (x,y) ➔ (0,0)

(2)Titik pusat baru, koordinat (x',y') ➔ (-2,4)

Berarti ➔ k = -2

l = 4

S = (7,3) berarti ➔ x' = 7 dan y' = 3

Jawab ➔

(2)X = x' + k ➔ x = 7 + -2 ➔ x = 5

(2)Y = y' + l ➔ y = 3 + 4 ➔ y = 7

Jadi vektor yang dicari adalah ➔ T = (5,7)

BAB 3.2

Aritmatika Vektor
Norma sebuah Vektor

Aritmatika Vektor di Ruang-2 dan Ruang-3

Teorema 3.2.1. u,v,w vektor-vektor di Ruang-2/Ruang-3

***k,l* adalah skalar (bilangan *real*)**

1. $u+v = v+u$
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
3. $u+0 = 0+u = u$
4. $u+(-u) = (-u)+u = 0$
5. $k(lu) = (kl)u$
6. $k(u+v) = ku + kv$
7. $(k+l)u = ku + lu$
8. $1u = u$

Bukti Teorema 3.2.1

1. Secara geometrik (digambarkan)
2. Secara analitik (dijabarkan)

Bukti secara analitik untuk teorema 3.2.1. di Ruang-3

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3); \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3); \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{0} &= (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) \\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0) \\ &= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{u} \\ &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(l\mathbf{u}) &= k\,(lu_1, lu_2, lu_3) \\ &= (klu_1, klu_2, klu_3) \\ &= kl(u_1, u_2, u_3) \\ &= kl\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) \\ &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, ku_3 + kv_3) \\ &= (ku_1, ku_2, ku_3) + (kv_1, kv_2, kv_3) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k + l)\,\mathbf{u} &= ((k+l)\,u_1, (k+l)\,u_2, (k+l)\,u_3) \\ &= (ku_1, ku_2, ku_3) + (lu_1, lu_2, lu_3) \\ &= k(u_1, u_2, u_3) + l(u_1, u_2, u_3) \\ &= k\mathbf{u} + l\mathbf{u} \end{aligned}$$

Norma sebuah Vektor

(panjang vektor)

Ruang-2 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Ruang-3 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Jika **u** adalah vektor dan *k* adalah skalar, maka

norma *k***u** = | *k* | || **u** ||

Vektor Satuan (unit Vector) : suatu vektor dengan norma 1

Jarak antara dua titik:

Ruang-2: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ruang-3: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2) =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

‘Ruang-n Euclidean’
(Euclidean n-space)

Review: Bab 3 membahas Ruang-2 dan Ruang-3

Ruang-n : himpunan yang beranggotakan vektor- vektor dengan n komponen

$$\{ \ldots , \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n), \ldots\ldots \}$$

- Atribut: arah dan "panjang" / norma llvll
- Aritmatika vektor-vektor di Ruang-n:

1. Penambahanvektor
2. Perkalian vektor dengan skalar
3. Perkalian vektor dengan vektor

Norma sebuah vektor:

Norma Euclidean (Euclidean norm) di Ruang-n :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ \dots, u_n)$$

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ \dots + u_n^2}}$$

Penambahan vektor: di Ruang-n :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n); \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

$$\boxed{\mathbf{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)}$$

$$w_1 = u_1 + v_1$$

$$w_2 = u_2 + v_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_2 = u_n + v_n$$

Negasi suatu vektor:

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$

$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, \ldots, -u_n)$

Selisih dua vektor:

$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

$= (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \ldots, u_n - v_n)$

Vektor nol: $\mathbf{0} = (0_1, 0_2, 0_3, \ldots, 0_n)$

Vektor bisa dinyatakan secara → grafik
→ analitik (diuraikan menjadi komponennya)

Norma v = panjang vektor v

$$= \| v \| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

$$v = P_2 P_1 = (x_2 - x_1,\ \ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1)$$

$$d = \| v \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ex:

- Norma v = (-3, 2, 1) adalah $\| v \| = \sqrt{(-3)^{2} + (2)^{2} + (1)^{2}} = \sqrt{14}$
- Jarak (d) antara titik P_1 (2, -1, -5) dan P_2 (4, -3, 1) adalah

$$d = \sqrt{(4 - 2)^{2} + (-3 + 1)^{2} + (1 + 5)^{2}}$$
$$= \sqrt{44}$$
$$= 2\sqrt{11}$$

Contoh (1):

Cari norma dari $\boldsymbol{v} = (0, 6, 0)$

Penyelesaian :

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

Contoh (2):

Anggap $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 5)$. Carilah semua skalar k sehingga norma $k\boldsymbol{v} = 4$

Penyelesaian :

$$\|k\mathrm{v}\| = |k|\sqrt{[(-1)^2 + 2^2 + 5^2]}$$

$$= |k|\sqrt{30} = 4 \rightarrow |k| = 4 / \sqrt{30} \rightarrow k = \pm\ 4 / \sqrt{30}$$

CONTOH SOAL

Anggap $R = (-5, 1, 4)$. Carilah semua skalar k sehingga

norma $k.R = 9$

CONTOH SOAL

jawab:

2 $|k . P| = 9$

2 $= |k| \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 4^2}$

$= |k| \sqrt{25 + 1 + 16}$

2 $9 = |k| \sqrt{42}$

2 $|k| = \dfrac{9}{\sqrt{42}}$

2 $k = \pm \dfrac{9}{\sqrt{42}}$

Contoh (3):

Carilah jarak antara

a) P1 = (3, 4) dan P2 = (5, 7)
b) P1 = (3, 3, 3) dan P2 = (6, 0, 3)

Penyelesaian :

a) $d = \sqrt{(5-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $d = \sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18}$

THANK YOU