ALJABAR Linier

Pertemuan 2: Matrix

Agenda Kita

1. Definisi Matrix
2. Mencari Invers Matrix
3. Solving SPL dengan Invers Matrix
4. Pekerjaan Rumah

Learning Outcomes

1. Mengetahui Definisi Matrix
2. Dapat mencari invers
3. Dapat menyelesaikan SPL dengan Invers Matrix

Matriks & Operasinya

Bab 1.3

Review or Summary

1. Matriks

- Suatu **kumpulan nilai** bentuk empat persegi panjang
- Terdiri dari **baris-baris** dan **kolom-kolom**
- Tiap **nilai dalam matriks disebut entri; cara menyebutkan** entri adalah **dengan subskrip / indeks (baris, kolom)**

Review or Summary

Matriks: Contoh

Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Semua entri: real

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom :

A 1,1 = 1 **A 1,2 = 5** **A 1,3 = 9**

A 2,1 = 7 **A 2,2 = 3** **A 2,3 = 0**

Definisi-definisi:

1. Matriks A= Matriks B jika ukuran baris A & baris B dan ukuran kolom A & kolom B sama; dan entri Ai,j = entri Bi,j
2. Jika C = A ± B, maka Ci,j = Ai,j ± Bi,j
3. Jika M = cA (dengan c = real / skalar), maka Mi,j= cAi,j
4. 1.Jika A1, A2, ..., An adalah matriks-matriks berukuran sama, dan c1, c2, ..., cn adalah bilangan-bilangan skalar, maka c1 A1 + c2A2 + ...+ cnAn disebut kombinasi linier dari A1, A2, ..., An dengan koefisien c1, c2, ..., cn.

Definisi-definisi:

5. **Suatu matriks dapat di-partisi menjadi beberapa submatriks dengan "menarik" garis horisontal dan/atau garis vertikal.**
   Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & \qquad A_{21} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} A_{21} & \qquad A_{22} \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{array} \end{array}$$

Definisi-definisi:

6. **Matriks A dikalikan dengan matriks B;syaratnya adalah banyaknya kolom A = banyaknya baris B.**

Catatan: perhatikan bahwa perkalian matriks (kedua matriks bujur sangkar dengan ukuran sama) tidak komutatif (AB ≠ BA)

Contoh: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

kesimpulan : AB ≠ BA

Definisi-definisi:

7. Transpos(A) = matriks A dengan baris-kolom ditukar tempatnya
8. Trace(A) = jumlah semua entri diagonal A = A11 + A22 + ... + Ann

Sifat-Sifat Matriks

1. Sifat perkalian matriks:

A matriks bujur sangkar, maka:

1. $(A^r)(A^s) = A^{(r+s)}$
2. $(A^r)^s = A^{(rs)}$

2. Sifat matriks transpos:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = k(A^T)$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Matriks-matriks khusus:

1. Matriks O = matriks nol; semua entrinya nol
2. Matriks In = matriks identitas berukuran (n x n);
   semua entri diagonalnya = 1, entri lain = 0
3. Matriks (vektor) baris adalah matriks dengan 1 baris.
4. Matriks (vektor) kolom adalah matriks dengan 1 kolom.

Teorema: A, B, C merepresentasikan matriks
a, b merepresentasikan bilangan skalar

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
5. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6. $a(B \pm C) = aB \pm aC$
7. $(a \pm b)C = aC \pm bC$
8. $a(bC) = (ab)C$
9. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Teorema:A, O merepresentasikan matriks O adalah matriks nol (semua entrinya = nol)

1. $A + O = O + A = A$
2. $A - A = O$
3. $O - A = -A$
4. $AO = O; OA = O$

Review or Summary

Matriks: Contoh

Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Semua entri: real

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom :

A 1,1 = 1 A 1,2 = 5 A 1,3 = 9

A 2,1 = 7 A 2,2 = 3 A 2,3 = 0

MATRIKS INVERS

Bab 1.4 - 1.6

invers dari Sebuah matriks

A adalah matriks bujur sangkar

Jika AB = BA = I maka B adalah invers dari A dan A adalah invers dari B. (invers matriks A dinotasikan dengan A– 1)

Jika B invers dari A dan C juga invers dari A maka B = C

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dan $D = ad - bc \neq 0$, maka invers A dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = (1/D) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Matriks inverse

Matriks A, B adalah matriks-matriks invertibel

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. (kA) adalah matriks invertibel dan $(kA)^{-1} = (1/k)\, A^{-1}$
4. A^T invertibel dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. A dan B keduanya matriks invertibel, maka AB invertibel dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

INVERSE dengan OBE

Algoritma untuk mencari invers sebuahmatriks A (n x n) ubah menjadi matrix identitas dengan menggunakan OBE.

Contoh:

$$
\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}_{\text{matriks A}}
\;\middle|\;
\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{matriks identitas I}}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 2 \quad 3}}^{\text{matriks A}}} & & & \\
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

dengan OBE dihasilkan

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\
0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\
 & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-40 \quad 16 \quad 9}}_{\text{invers A}}}
\end{array}\right]
$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}_{\text{matriks A}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}}_{\text{invers A}}$$

jika kedua matriks ini dikalikan, akan didapat

$$\begin{pmatrix} -40+26+15=1 & 16-10-6=0 & 9-6-3=0 \\ -80+65+15=0 & 32-25-6=1 & 18-15-3=0 \\ -40+0+40=0 & 16-0-16=0 & 9-0-8=1 \end{pmatrix}$$

INVERSE MATRIX MATHLAB

```
>> k = [1 2 3; 2 5 3; 1 0 8]

k =

     1     2     3
     2     5     3
     1     0     8

>> r = inv (k)

r =

  -40.0000   16.0000    9.0000
   13.0000   -5.0000   -3.0000
    5.0000   -2.0000   -1.0000
```

PERKALIAN MATRIX MATHLAB

```
>> a = [1 2; 1 3]

a =

     1     2
     1     3

>> j = a*a*a

j =

    11    30
    15    41
```

invers matrix menggunakan excel

Cari Inverse Matrix Dari A

A	1	2	3
	2	5	3
	1	0	8

A-1 menggunakan OBE

1	2	3	1	0	0
2	5	3	0	1	0
1	0	8	0	0	1

b2 = b1 * -2 + b2 => Iterasi 1

1	2	3	1	0	0
0	1	-3	-2	1	0
1	0	8	0	0	1

b3 = b1 * -1 + b3 => Iterasi 2

1	2	3	1	0	0
0	1	-3	-2	1	0
0	-2	5	-1	0	1

b3 = b2 * 2 + b3 => Iterasi 3

1	2	3	1	0	0
0	1	-3	-2	1	0
0	0	-1	-5	2	1

b3 = b3 * -1 => Iterasi 4

1	2	3	1	0	0
0	1	-3	-2	1	0
0	0	1	5	-2	-1

b2 = b3 * 3 + b2 => Iterasi 5

1	2	3	1	0	0
0	1	0	13	-5	-3
0	0	1	5	-2	-1

b1 = b3 * -3 + b1 => Iterasi 6

1	2	0	-14	6	3
0	1	0	13	-5	-3
0	0	1	5	-2	-1

b1 = b3 * -3 + b1 => Iterasi 7

1	0	0	-40	16	9
0	1	0	13	-5	-3
0	0	1	5	-2	-1

Step by Step mencari matrix invers

Find the invers of A =

$$A = \begin{matrix} 12 & 17 & -16 \\ 24 & 18 & -4 \\ -15 & -4 & 31 \end{matrix}$$

12.00	17.00	-16.00	1.00	0.00	0.00
24.00	18.00	-4.00	0.00	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00
1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
24.00	18.00	-4.00	0.00	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00
1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	-16.08	27.92	-1.92	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00
1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	-16.08	27.92	-1.92	1.00	0.00
0.00	17.30	11.05	1.20	0.00	1.00

Pada iterasi ke 1 berapa isi sel A(1,2) = 1.42

Pada iterasi ke 2 berapa isi sel A(2,3) = 27.92

Pada iterasi ke 3 berapa isi sel A(3,3) = 11.05

Step by Step mencari matrix invers

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	17.30	11.05	1.20	0.00	1.00
1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	0.00	41.15	-0.88	1.04	1.00
1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 4 berapa isi sel A(2,3) = -1.74

Pada iterasi ke 5 berapa isi sel A(3,4) = -0.88

Pada iterasi ke 6 berapa isi sel A(3,5) = 0.03

Step by Step mencari matrix invers

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02
1.00	1.42	0.00	0.05	0.04	0.03
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02
1.00	0.00	0.00	-0.08	0.05	-0.01
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 7 berapa isi sel A(2,6) = 0.03

Pada iterasi ke 8 berapa isi sel A(1,5) = 0.04

Pada iterasi ke 9 berapa isi sel A(1,6) = -0.01

Carilah invers matrix berikut dengan menggunakan OBE

$$A = \begin{matrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & -4 & 3 \end{matrix}$$

```
>> a=[-5 4 1 1 0 0;3 2 7 0 1 0;6 -4 3 0 0 1]

a =

    -5     4     1     1     0     0
     3     2     7     0     1     0
     6    -4     3     0     0     1
```

```
>> a(1,:)=a(1,:)*-1/5

a =

    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
    3.0000    2.0000    7.0000         0    1.0000         0
    6.0000   -4.0000    3.0000         0         0    1.0000
```

```
>> a(2,:)=a(1,:)*-3 + a(2,:)

a =
                              4          4

    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    4.4000    7.6000    0.6000    1.0000         0
    6.0000   -4.0000    3.0000         0         0    1.0000
```

```
>> a(3,:)=a(1,:)*-6 + a(3,:)

a =
                                        4          4

    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    4.4000    7.6000    0.6000    1.0000         0
         0    0.8000    4.2000    1.2000         0    1.0000
```

```
>> a(2,:)=a(2,:)*1/4.4

a =
                                        4                    4

    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    1.0000    1.7273    0.1364    0.2273         0
         0    0.8000    4.2000    1.2000         0    1.0000
```

```
>> a(3,:)=a(2,:)*-0.8 + a(3,:)

a =
                                                       4           4
    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    1.0000    1.7273    0.1364    0.2273         0
         0    0.0000    2.8182    1.0909   -0.1818    1.0000
```

```
>> a(3,:)=a(3,:)*1/2.8182
                                             4
a =
                                                                4
    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    1.0000    1.7273    0.1364    0.2273         0
         0    0.0000    1.0000    0.3871   -0.0645    0.3548
```

```
>> a(2,:)=a(3,:)*-1.7273 + a(2,:)

a =                                                  4     4

    1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000         0         0
         0    1.0000   -0.0000   -0.5323    0.3387   -0.6129
         0    0.0000    1.0000    0.3871   -0.0645    0.3548
```

```
>> a(1,:)=a(3,:)*0.2 + a(1,:)

a =

    1.0000   -0.8000   -0.0000   -0.1226   -0.0129    0.0710
         0    1.0000   -0.0000   -0.5323    0.3387   -0.6129
         0    0.0000    1.0000    0.3871   -0.0645    0.3548
```

4 4

```
>> a(1,:)=a(2,:)*0.8 + a(1,:)

a =

    1.0000   -0.0000   -0.0000   -0.5484    0.2581   -0.4194
         0    1.0000   -0.0000   -0.5323    0.3387   -0.6129
         0    0.0000    1.0000    0.3871   -0.0645    0.3548
```

4 4

Example 7 page 44

Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Applying the formula in theorem 1.4.5,we obtain

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad AB^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

therefore $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, as guaranteed by theorem1.4.6

Example 10 page 44

Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Applying Theorem 1.4.5 yields

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

As guaranteed by Theorem 1.4.10, these matrices satisfy (4)

Matrix yang tidak dapat dibalik

Jika pada suatu tahap muncul baris bilangan nol pada ruas kiri -> maka hentikan perhitungan

Example 5 Hal 56

$$A = \begin{matrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Gunakan Prosedur Pada Example 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

....

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

MATRIKS INVERS

if A = matrix nxn yang dapat dibalik, maka :

$A.x = B \Rightarrow x = A^{-1}.B$

Contoh :

Persamaan linear :

$x1 + 2x2 + 3x3 = 5$

$2x1 + 5x2 + 3x3 = 3$

$x1 \quad + 8x3 = 17$

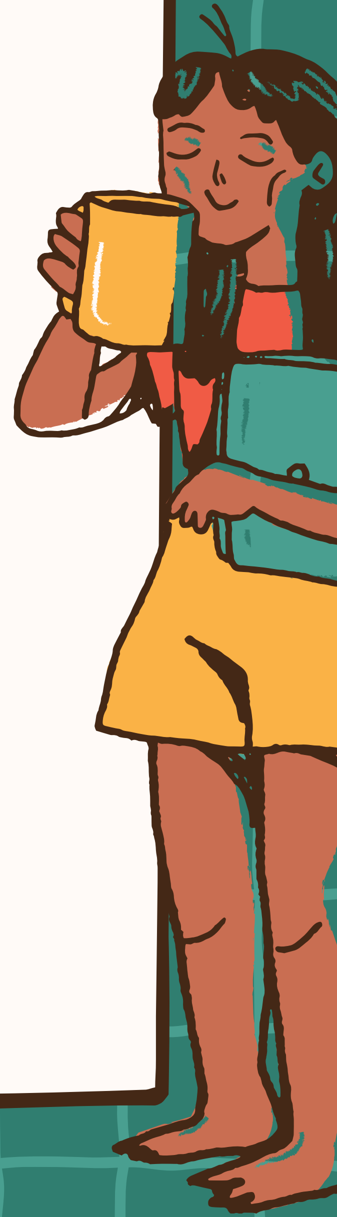
Dalam matrix A.x = B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka $X = A^{-1}.B$

$$= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Aplikasi:

jika A = matrix (nxn) yang punya invers (invertible / dapat dibalik), maka dalam sebuah Sistem Persamaan Linier:

$$Ax = B \dashrightarrow x = A^{-1}B$$

Contoh:

dalam mendapatkan solusi dari Sistem Persamaan Linier

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + 8x_3 = 1$$

matriks A berisi koefisien-koefisien dari x1, x2, x3

vektor x = (x1, x2, x3) yang dicari

vektor B = (1, 1, 1)T

Contoh:

Akan dicari solusi dari Ax = b, di mana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solusi dari Ax = b adalah **x** sbb.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Cek:</u> apakah benar A**x** = **b** ?

$$\begin{pmatrix} -15 + 10 + 6 \\ -30 + 25 + 6 \\ -15 + 0 + 16 \end{pmatrix}$$

MATRIKS ELEMENTER

Matriks A(nxn) disebut elementer jika A dihasilkan dari matriks identitas In dengan satu Operasi Baris Elementer.

Contoh:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIKS-MATRIKS DENGAN BENTUK KHUSUS

BAB 1.7

Matriks A(n x n) bujur sangkar, artinya banyaknya baris A sama dengan banyaknya kolom A.

Bentuk-bentuk khusus sebuah matriks bujur sangkar a. l. :

1. **Matriks diagonal D**
2. **Matriks segi-3 atas**
3. **Matriks segi-3 bawah**
4. **Matriks simetrik**

1. Matriks diagonal D:

$A_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{3} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{n} \end{pmatrix}$$

2. Matriks Segi-3 atas:

$A_{ij} = 0$ untuk $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Matriks Segi-3 bawah:

Aij = 0 untuk i < j

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Matriks Simetrik:

$A_{ij} = A_{ji}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

TEOREMA:

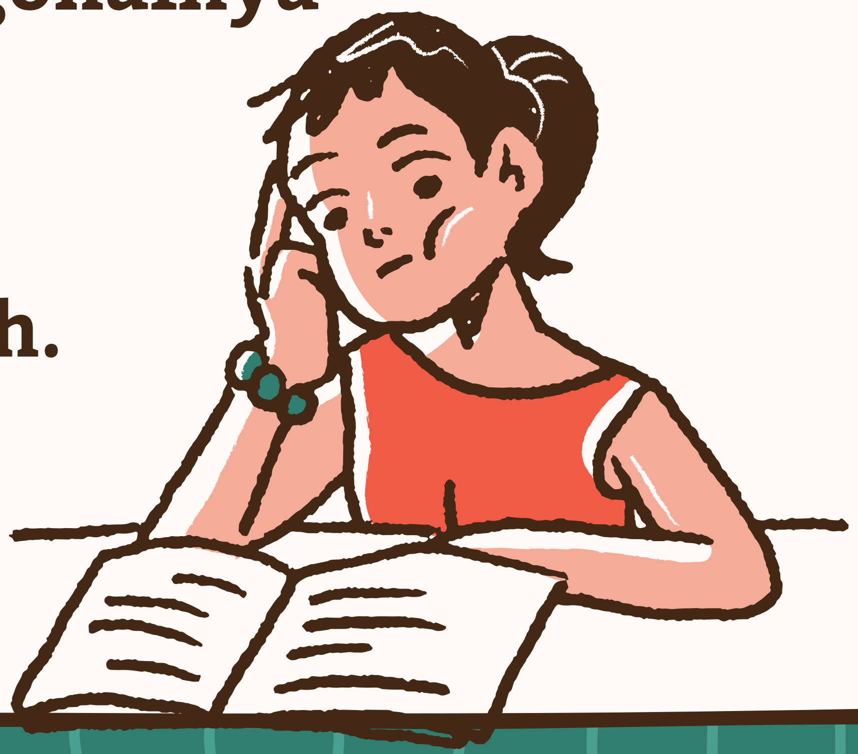
1. Transpos dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 atas; transpos dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 bawah.

2. Perkalian dua matriks segi-3 bawah menghasilkan matriks segi-3 bawah; perkalian dua matriks segi-3 atas menghasilkan matriks segi-3 atas.

3. Matriks segi-3 invertibel jika dan hanya jika semua entri diagonalnya tidak nol.

4. Invers dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 bawah.

5. Invers dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 atas.



TEOREMA:

A dan B matriks simetrik, k adalah skalar

6. A^T simetrik
7. A + B simetrik dan A – B simetrik
8. Matriks kA simetrik
9. Jika A invertibel, maka A^{-1} simetrik

TEOREMA:

10. Jika A matriks invertibel, maka AA^T dan A^TA juga invertibel.