Pertemuan II

Basis untuk persamaan homogen.
Koordinat titik pada basis standar dan basis baru.
General Solusi.

Bab Pembahasan

- 1. Basis untuk persamaan homogen
- 2. Koordinat titik pada basis standar dan basis baru
- 3. General Solusi

Soal 1

Basis untuk persamaan homogen

Contoh 37 :

Tent : basis dan dimensi } u ruang pemecahan dr sist. homogen :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}- 3x_4} + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}- 3x_4} - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

jwb:

Tujuan : mencari vector-vector basis

jwb:

→ kita rubah pers homogen menj. pers bebas linier

$$\overline{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{k_1}\,\overline{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_2}}{k_2}\,\overline{v_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_3}}{k_3}\,\overline{v_3} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_4}}{k_4}\,\overline{v_4} + \underset{\substack{\uparrow \\ x_5}}{k_5}\,\overline{v_5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ skg kita cari nilai x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

if $x_1 \ldots x_5 = 0$ mk bebas linier,

if $x_1 \ldots x_5$ ada nilai lain, mk ≠ bebas linier

Dari ex. 6 bab 1.2 è yang diumpamakan selalu index yang besar

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -s-t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= t \end{aligned}\right\}$$

ternyata ada banyak nilai u $x_1 \ldots x_5$, shg → bebas linier, skg bgm cara mencari basis & dimensi dr hasil ini?!... caranya :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ basis → $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Cari X1,x2, x3, x4 dan x5 dengan gauss jordan

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution. The nullspace of A is the solution space of the homogeneous system

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-3x_4} + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

X1 = -s-t
X2 = s
X3 = -t
X4 = 0
X5 = t

In Example 10 of Section 5.4 we showed that the vectors

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

form a basis for this space.

Contoh 4 : Nullspace (A) = Solution space dari $A\vec{x} = \vec{0}$

catatan : $\vec{x} \in R^5$ (perhatikan $A\,(\underset{\uparrow\,m}{4} \times \underset{\uparrow\,n}{5})$)

Basis dari Nullspace (A) = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Tambahan (1) Dimensi ~~Basis~~ Nullspace (A) = 2

(2) Semua vektor di Nullspace (A) merupakan vektor-vektor solusi (yang memenuhi) $A\vec{x} = \vec{0}$ dan dinyatakan dengan $\vec{x} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$

(Lihat Contoh 10 Bab 5.4. untuk proses penyelesaiannya)

Basis : Nullspace (A)

↳ Rentang Nullspace (A)

↳ Basis Lin. Indept

- Jadi $\vec{x}$ kombinasi linier dari $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ atau Nullspace (A) direntang oleh $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

- $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaiannya (coba sendiri) : $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lin. independent

Koordinat titik pada basis standar dan basis baru

Contoh: (lihat Example 3 halaman 246) Dalam contoh ini ditunjukkan dua basis untuk R3

$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

di mana $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$

Bukti bahwa B adalah basis untuk R^3. B disebut basis standar untuk R^3.

B linearly independent?

$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B linearly independent

B merentang R^3?

$\mathbf{u} = (x, y, z) \in R^3$

$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

B merentang R^3

• Koordinat titik pada basis B è $(k1, k2, k3) = V$

–Basis è $e1, e2, e3$

• Koordinat titik pada basis S è $(c1, c2, c3) = V_s$

–Basis è $v1, v2, v3$

- Lama = baru
- $k1e1 + k2e2 + k3e3 = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $K1(1,0,0) + k2(0,1,0) + k3(0,0,1) = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $(k1, k2, k3) = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $v = c1v1 + c2v2 + c3v3$

Bukti bahwa S = {v1, v2, v3} juga basis R3 bisa dibaca di buku.
Jadi benar bahwa B dan S adalah basis untuk R3

B = {e1, e2, e3} dan S = {v1, v2, v3}

di mana e1 = (1, 0, 0); e2 = (0, 1, 0); e3 = (0, 0, 1)

v1 = (1, 2, 1); v2 = (2, 9, 0); v3 = (3, 3, 4)

Koordinat sebuah vektor akan berbeda jika dinyatakan berdasarkan dua basis yang berbeda.

lihat Example 4 halaman 247

(5, –1, 9)B "ekivalen" (1, –1, 2)S

(11, 31, 7)B"ekivalen" (–1, 3, 2)S

Soal 2

Example 4 Let $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ be the basis for R^3 in the preceding example.

Soal 2

(a) Find the coordinate vector of $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ with respect to S.

(b) Find the vector $\mathbf{v}$ in R^3 whose coordinate vector with respect to the basis S is $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

di mana $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$

$v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2 = (2, 9, 0)$; $v_3 = (3, 3, 4)$

Solution (a). We must find scalars c_1, c_2, c_3 such that

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

or, in terms of components,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Equating corresponding components gives

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Carilah nilai c1, c2 dan c dengan gauss jourdan

Solving this system, we obtain $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ (verify). Therefore,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Solution (b). Using the definition of the coordinate vector $(\mathbf{v})_S$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$

Let S = {v1, v2, v3} be the basis for R3.				
Find the coordinate vektor of v = (14, 60, -20) with respect to S				
v1 = (-6, 4, 3) v2 = (7, -4, 2) v3 = (9, 6, -3)				
Carilah nilai c1, c2 dan c3 dengan menggunakan gauss-jordan				

-6.00	7.00	9.00	14.00		
4.00	-4.00	6.00	60.00		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,4)	-2.33
4.00	-4.00	6.00	60.00		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,3)	12
0.00	0.68	12.00	69.32		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,2)	5.51
0.00	0.68	12.00	69.32		
0.00	5.51	1.50	-13.01		

1.00	-1.17	-1.50	-2.33		Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,4)	101.94
0.00	1.00	17.65	101.94			
0.00	5.51	1.50	-13.01			
1.00	-1.17	-1.50	-2.33		Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4)	-574.7
0.00	1.00	17.65	101.94			
0.00	0.00	-95.75	-574.70			
1.00	-1.17	-1.50	-2.33		Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,4)	6
0.00	1.00	17.65	101.94			
0.00	0.00	1.00	6.00			
1.00	-1.17	-1.50	-2.33		Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,4)	-3.96
0.00	1.00	0.00	-3.96			
0.00	0.00	1.00	6.00			
1.00	-1.17	0.00	6.67		Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,4)	6.67
0.00	1.00	0.00	-3.96			
0.00	0.00	1.00	6.00			
1.00	0.00	0.00	2.04		Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4)	2.04
0.00	1.00	0.00	-3.96			
0.00	0.00	1.00	6.00			

General Solusi

Ruang baris, Ruang kolom, Basis untuk Null Space.

Keyword

- Bab terdahulu
  - Kombinasi linier
  - Merentang
  - Bebas Linier
  - Basis

- Bab sekarang
  - Row vektor/vektor baris
  - Colomn vector/ vektor kolom
  - Row space/ruang baris
  - Colomn space / ruang kolom
  - Null space/ruang nol
  - General Solusi
  - Partikular Solusi
  - Basis untuk Null Space

Pengertian

1) kombinasi Linier

$\vec{w}$ → kombinasi Linier dr $\vec{v_1}$ $\vec{v_2}$ ... $\vec{v_n}$ jk $\vec{w}$ dpt diungkapkan dlm bentuk :

$\vec{w} = k_1 \vec{v_1} + k_2 \vec{v_2} + \ldots + k_n \vec{v_n}$

dimana

$k_1, k_2 \ldots k_n$ → skalar

ingat !! baris di atas bkn hanya satu baris, tp terdiri dari beberapa baris

$\exists$ kombinasi Linier → ada nilai $\forall$ $k_1, k_2 \ldots k_n$

Merentang = spanning

4.5

2. Merentang :

- $\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$ merentang ruang vektor V jk sembarang vektor pd ruang vektor V dpt dinyatakan sbg kombinasi linier dr $\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$
- ada banyak nilai k $k_1\ k_2 \dots k_n$
- det $\neq 0$ (jk bisa dicari det)

ex:

tent. apakah $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ & $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ merentang R^2

jwb: merentang jk → sembarang vektor pd R^2 dpt dinyatakan sbg kombinasi linier $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$

5.3 Kebebasan Linier

- $\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \ldots \ \bar{v}_n \longrightarrow$ bebas linier jk hanya ada satu pemecahan u persamaan :

$$k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \cdots + k_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

yaitu $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$

- det $\neq 0$ (jk bisa dicari det)
- jk ada sebuah or lebih vektor dpt dinyatakan sbg k.l vektor lainnya mk $\neq$ bebas linier

ex:

Basis

$\{ \bar{v}_1 \; \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n \}$

merentang

$\bar{x} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \ldots + k_n \bar{v}_n$

$\bar{x}$ = sembarang vektor

$k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_n \rightarrow$ ada nilai-nya

or

Det $\neq 0$

bebas Linier

$\bar{0} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \ldots + k_n \bar{v}_n$

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0 \rightarrow$ hanya satu jawaban

or

Det $\neq 0$

$$\text{matriks } A\ (m \times n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{vektor-vektor } \left.\begin{array}{l} \mathbf{r_1} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\cdots\ a_{1n}) \in R^n \\ \mathbf{r_2} = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\cdots\ a_{2n}) \in R^n \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{r_m} = (a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \cdots\cdots\ a_{mn}) \in R^n \end{array}\right\} \text{ disebut vektor-vektor baris dari A}$$

$$\text{vektor-vektor } \mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in R^m \qquad \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \in R^m \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in R^m$$

disebut vektor-vektor kolom dari A

Row, colom and null space

- Row space/ruang baris è
  - Sub ruang dari Rn yang direntang oleh {rl, r2, ..., rm}{vektorbaris}
  - Matriks yang dibentuk dari {rl, r2, ..., rm}
  - Merupakan sebuah himpunan {rl, r2, ..., rm}

- Colomn space/ruang kolom è
  - Sub ruang dari Rm yang direntang oleh {cl, c2, ..., cn}{vektorkolom}
  - Matriks yang dibentuk dari {cl, c2, ..., cn}
  - Merupakan sebuah himpunan {cl, c2, ..., cn}

- Null space è sub ruang dari Rn yang merupakan ruang solusi dari SPL homogen A.X = O

RANK (A) : dimensi ruang baris (A) = dimensi ruang kolom(A)

NULITAS (A) / nullity(A) : dimensi ruang nol (A)

Dimensi => banyaknya vektor pada suatu baris

Teorema 5.6.1 è rank (A) + nullity (A) = n

n = jumlah kolom

<u>Catatan:</u>

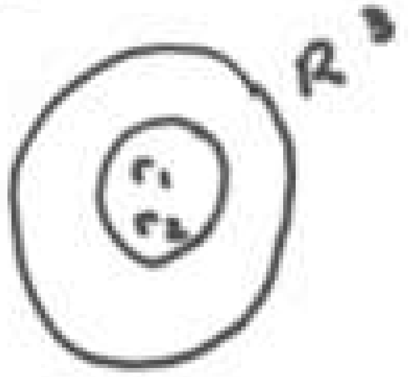
1. Ruang / space : himpunan / set
2. Subruang / subspace: subset dari ruang-vektor yang memenuhi aksioma (1) dan (6)
3. Ruang vektor V direntang S = { $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ }: semua vektor $\mathbf{x} \in$ V bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S; $\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$
4. Ruang vektor V punya basis B = { $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ }: B merupakan himpunan yang linearly independent, dan B merupakan rentang ruang vektor V
5. Dimensi ruang vektor V: jika basis ruang vektor V adalah B, dimensi V = | B |

ex : 1 hal 258

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

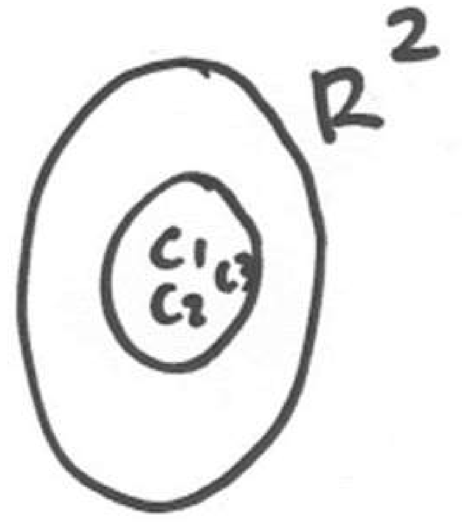
$$\left.\begin{array}{l} r_1 = [2\ 1\ 0] \in R^3 \\ r_2 = [3\ -1\ 4] \in R^3 \end{array}\right\}$$ vektor baris dari A

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in R^2 \\ c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in R^2 \\ c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in R^2 \end{array}\right\}$$ vektor kolom dari A



- ruang baris / row space A :
  - sub ruang dari R^3 yg direntang
    $\{r_1, r_2\}$
  - $\bar{x} = k_1 r_1 + k_2 r_2$
    - untuk sembarang nilai $\bar{x}$
    - ada nilai $k_1 \times k_2$

- ruang kolom / column space A :
  - subruang dari R^2 yg direntang
  - $\underline{o}$ $\{c_1, c_2, c_3\}$
  - $\bar{x} = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3$
    - $\underline{v}$ sembarang vektor $\bar{x}$
    - ada nilai $\underline{v}$ k_1 k_2 k_3



Soal 3

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent if and only if* **b** *is in the column space of A.*

Example 2 Let $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that **b** is in the column space of A, and express **b** as a linear combination of the column vectors of A.

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent if and only if* $\mathbf{b}$ *is in the column space of* A.

Example 2 Let $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that $\mathbf{b}$ is in the column space of A, and express $\mathbf{b}$ as a linear combination of the column vectors of A.

Solution. Solving the system by Gaussian elimination yields (verify)

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 3$$

Since the system is consistent, $\mathbf{b}$ is in the column space of A. Moreover, from (2) and the solution obtained, it follows that

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

Buktikan $\vec{b} \in$ Ruang kolom A — defn. Ruang kolom

artinya : $\vec{b}$ direntang $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$

—"— : $\vec{b}$ kombinasi linier $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ — defn. Rentang

—"— : $\vec{b} = k_1\vec{c}_1 + k_2\vec{c}_2 + k_3\vec{c}_3$

$k_1 = ?$ $k_2 = ?$ $k_3 = ?$

Dalam soal ini : $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Solusinya : $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$

Maka : TERBUKTI bahwa $\vec{b} \in$ Ruang kolom A

dan $\vec{b} = (2)\,\vec{c}_1 + (-1)\,\vec{c}_2 + (3)\,\vec{c}_3$

Theorem 5.5.2. *If* $\mathbf{x}_0$ *denotes any single solution of a consistent nonhomogeneous linear system* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *and if* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *form a basis for the nullspace of* A, *that is, the solution space of the homogeneous system* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *then every solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *can be expressed in the form*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{3}$$

and, conversely, for all choices of scalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, *the vector* $\mathbf{x}$ *in this formula is a solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Cari "General Solution" dari $A.x = b$
  $X = X_o + r.V1 + s.V2 + t.V3$
- Cari "particular Solution" dari $A.x = b$
  X_o
- Cari "General Solution" dari $A.x = 0$
  $X = r.V1 + s.V2 + t.V3$
- Cari basis untuk null space A
  $v1$, $v2$ dan $v3$

Soal 4

Cari solusi untuk A.X = b dan A.X = 0

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \phantom{{}- 2x_4} + 2x_5 \phantom{{}- 3x_6} &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \phantom{{}+ 4x_5} + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \phantom{{}- 5x_3} + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Cari solusi untuk A.X = b dan A.X = 0

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \tag{4}
$$

and obtained

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

This result can be written in vector form as

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

which is the general solution of (4). Comparing this to (3), the vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

is a particular solution of (4) and

$$\mathbf{x} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is the general solution of the homogeneous system

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \phantom{{}-2x_4} + 2x_5 \phantom{{}-3x_6} &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\
5x_3 + 10x_4 \phantom{{}+4x_5} + 15x_6 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 \phantom{{}-5x_3} + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0
\end{aligned}$$

(verify).

Contoh 3: Penerapan Teorema 5.5.2.

$$\underset{(4\times 6)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \; \uparrow$
$m \;\; n$

Ruang Solusi (Solution SET/space) dari $A\vec{x} = \vec{b}$
(catatan: $\vec{x} \in R^6$)

bilangan real

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3$ disebut "General Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x}_0$ disebut "Particular Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis dari Nullspace (A)/Solution Space $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \bar{x}_0 + r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal

$$\left.\begin{array}{l} r=1 \\ s=0 \\ t=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

→ masukkan ke pers → hasilnya benar

$$\left.\begin{array}{l} r=0 \\ s=1 \\ t=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

→ masukkan ke pers → hasilnya benar

∴ U sembarang
nilai r, s, t → hasil benar jk di masukkan ke persamaan.

$A\,\bar{x} = \bar{O}$

$\bar{x} \rightarrow$ berapa nilai $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ agar menjadi $A \cdot \bar{x} = \bar{O} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

jawab $\rightarrow$ $\bar{x} = r\,\bar{v_1} + s\,\bar{v_2} + t\,\bar{v_3}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal : $\rightarrow$ $\left.\begin{matrix} r = 1 \\ s = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ masukkan ke pers

$A \cdot \bar{x} = \bar{O}$

$\rightarrow$ hasil benar

$\rightarrow$ $\left.\begin{matrix} r = 0 \\ s = 1 \\ t = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ masukkan ke pers

$A \cdot \bar{x} = \bar{O}$

$\rightarrow$ hasil benar

∴ solusi u $A.\bar{x} = \bar{b}$ adalah

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3$$

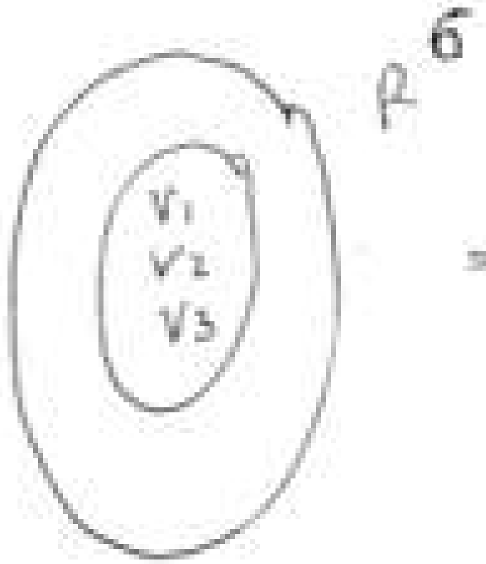
solusi u $A.\bar{x} = \bar{0}$ adalah

$A\bar{x} = \bar{0}$

$$\bar{x} = r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3$$

dan ⇒ $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ adalah basis u nullspace (A)

bukan basis u $A\bar{x} = \bar{b}$



⇒ $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ ruang nol ⇒ yg menghasilkan $\bar{0}$ pada $A.\bar{x}$

Carilah general solusi untuk A . X = B

kerjakan dengan Gauss – Jordan.

-6	X1	-4	X2	6	X3	5	X4	6	X5	-2	X6	=	-96
3	X1	9	X2	-3	X3	-4	X4	-3	X5	9	X6	=	160
9	X1	2	X2	5	X3	7	X4	9	X5	-2	X6	=	16

-6	-4	6	5	6	-2	-96		
3	9	-3	-4	-3	9	160		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,5)	-1
3	9	-3	-4	-3	9	160		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,7)	112
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,3)	14
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112		
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128		

1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,6) 1.15
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4) 13.58
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	14	13.58	18	-0.34	-63.44	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,7) ..... -4.53
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,5) 0
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0.67	0	0.14	0.29	0.31	11.47	Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,6) 0.31
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0	0	0.29	0.29	-0.46	0.74	Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4) 0.29
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	

20. X1 = -0,29 t – 0,29 s + 0,46 r +0,74
21. X2 = 0,22 t – 1,15 r + 16,02
22. X3 = - 0,97 t – 1,29 s + 0,02 r – 4,53
23. X4 = t
24. X5 = s
25. X6 = r

Thank you for your attention!

See you next time!