

Komputasi Numerik



PERTEMUAN 11



Diferensiasi Newton-Gregory dan Lagrange

2024/2025





Komnum Week 11

Apa Yang Akan Kita Pelajari?

01  Deferensiasi Newton-Gregory

02  Diferensiasi Lagrange

➤ Diferensiasi Numerik ➤

Ke depan anda akan sering menjumpai 2 jenis operasi matematis dalam kehidupan ilmiah anda, yaitu **Diferensiasi** Numerik dan **Integrasi** Numerik.

Untuk diferensiasi numerik, konsepnya hampir sama dengan **regresi** dan **interpolasi**. Yaitu mencari nilai **turunan sebuah fungsi** hanya dengan menggunakan himpunan nilai dari fungsi tersebut.

Permasalahan diferensiasi numerik ini diselesaikan dengan menyatakan fungsi yang dimaksud melalui **rumusan interpolasi** yang telah di-diferensiasi.

Untuk permasalahan yang bersifat **equispaced**, dapat diselesaikan dengan rumus **Newton-Gregory**, **Stirling** atau **Bessel**. Sementara untuk permasalahan **non-equispaced**, digunakan **Lagrange** atau **Hermite** (jika **periodik**).

➤ Diferensiasi Newton-Gregory ➤

Interpolasi Newton-Gregory **Forward**:

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Diferensiasi Newton-Gregory **Forward**:

$$f_n(x_s) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{4s^3-18s^2+22s-6}{4!}\Delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}, \quad h = \Delta x$$

➤ Diferensiasi Newton-Gregory ➤

Interpolasi Newton-Gregory **backward**:

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

Diferensiasi Newton-Gregory **backward**:

$$f_n(x_s) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{3s^2+6s+2}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \frac{4s^3+18s^2+22s+6}{4!}\Delta^4 f_{-4} + \dots \right]$$

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}, \quad h = \Delta x$$

➤ Diferensiasi Newton-Gregory ➤

Contoh Soal 1

Diketahui Tabel sebagai berikut:

| x | y | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ |
|-----|---------|---------------|-----------------|-----------------|
| 2 | 18.00 | 108.53 | | |
| 2.4 | 126.53 | 301.34 | 192.82 | |
| 2.8 | 427.87 | 690.58 | 389.24 | 196.42 |
| 3.2 | 1118.45 | 1395.93 | 705.35 | 316.11 |
| 3.6 | 2514.38 | 2577.62 | 1181.69 | 476.34 |
| 4 | 5092.00 | 4442.34 | 1864.72 | 683.03 |
| 4.4 | 9534.34 | | | |

- Carilah nilai $f'(x)$, ketika $x = 3,3$ dengan menggunakan Newton-Gregory **Forward** dengan $x_0 = 3.2$
- Carilah nilai $f'(x)$, ketika $x = 3,3$ dengan menggunakan Newton-Gregory **Backward** dengan $x_0 = 3.2$

➤ Jawaban Contoh Soal 1 ⚡

| x | y | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ |
|-----|---------|---------------|-----------------|-----------------|
| 2 | 18.00 | 108.53 | | |
| 2.4 | 126.53 | 301.34 | 192.82 | |
| 2.8 | 427.87 | 690.58 | 389.24 | 196.42 |
| 3.2 | 1118.45 | 1395.93 | 705.35 | 316.11 |
| 3.6 | 2514.38 | | 1181.69 | 476.34 |
| 4 | 5092.00 | 2577.62 | | 683.03 |
| 4.4 | 9534.34 | 4442.34 | 1864.72 | |

$$x_s = 3.3$$

$$x_0 = 3.2, \quad h = 0.4$$

$$s = \frac{3.3 - 3.2}{0.4} = 0.25$$

$$f_3(3.3) = \frac{1}{0.25} \left[1395.93 + \frac{2(0.25) - 1}{2!} (1181.69) + \frac{3(0.25)^3 - 6(0.25) + 2}{3!} (683.03) \right]$$

= 2946.93

➤ Jawaban Contoh Soal 1 ⚡

- Newton-Gregory **Forward**:

| x | y | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ |
|-----|---------|---------------|-----------------|-----------------|
| 2 | 18.00 | 108.53 | | |
| 2.4 | 126.53 | 301.34 | 192.82 | |
| 2.8 | 427.87 | 690.58 | 389.24 | 196.42 |
| 3.2 | 1118.45 | 1395.93 | 705.35 | 316.11 |
| 3.6 | 2514.38 | 2577.62 | 1181.69 | 476.34 |
| 4 | 5092.00 | 4442.34 | 1864.72 | 683.03 |
| 4.4 | 9534.34 | | | |

$$x_s = 3.3$$

$$x_0 = 3.2, \quad h = 0.4$$

$$s = \frac{3.3 - 3.2}{0.4} = 0.25$$

$$f_3(3.3) = \frac{1}{0.25} \left[690.58 + \frac{2(0.25) + 1}{2!} (389.24) + \frac{3(0.25)^3 + 6(0.25) + 2}{3!} (196.42) \right]$$

$$= 2758.08$$

➤ Diferensiasi Lagrange ⚡

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x_i - x_j)} \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k, l \neq i}}^{n-1} (x - x_l) \right) \right]$$

➤ Diferensiasi Lagrange ➤

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \\ &\quad \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ &= \text{Untuk menghitungnya harus} \\ &\quad \text{sabar dan telaten 😊} \end{aligned}$$

<https://its.id/m/komnum25>

Komnum Week 11

Tugas Kelompok

1. Buatlah contoh soal sendiri dan kerjakan dengan menggunakan:
 - a. Stirling
 - b. Bessel
 - c. Diferensiasi:
 - i. Newton-Gregory **Forward**
 - ii. Newton-Gregory **Backward**
 - iii. Lagrange
2. Bentuk file PPT + nama kelompok dan anggota



Komnum Week 8



TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali

