Komputasi Numerik

PERTEMUAN 7

SPL → Jacobi dan Gauss-Seidel

2024/2025

Sistem Persamaan Linier

Contoh Soal → Berapa nilai x,y, dan z

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$X + y = 3$$
$$3x - 5y = 1$$

Metode Jacobi dan Gauss Seidel

Penyelesaiaan Sistem Linier

1. Cara Biasa → SMA
2. Gauss
3. Gauss - Jordan
4. Invers (jk bisa dicari)
    1. 2 X 2 --> biasa
    2. OBE
    3. Kofaktor Adj
5. Cramer
6. Gauss Seidel
7. Jacobi

Pada pertemuan ini, kita akan berfokus pada Metode Jacobi dan Gauss Seidel

Metode Jacobi

- Bersifat Iteratif
- Kita memp. persamaan linier sbb:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

- Dirubah menjadi:

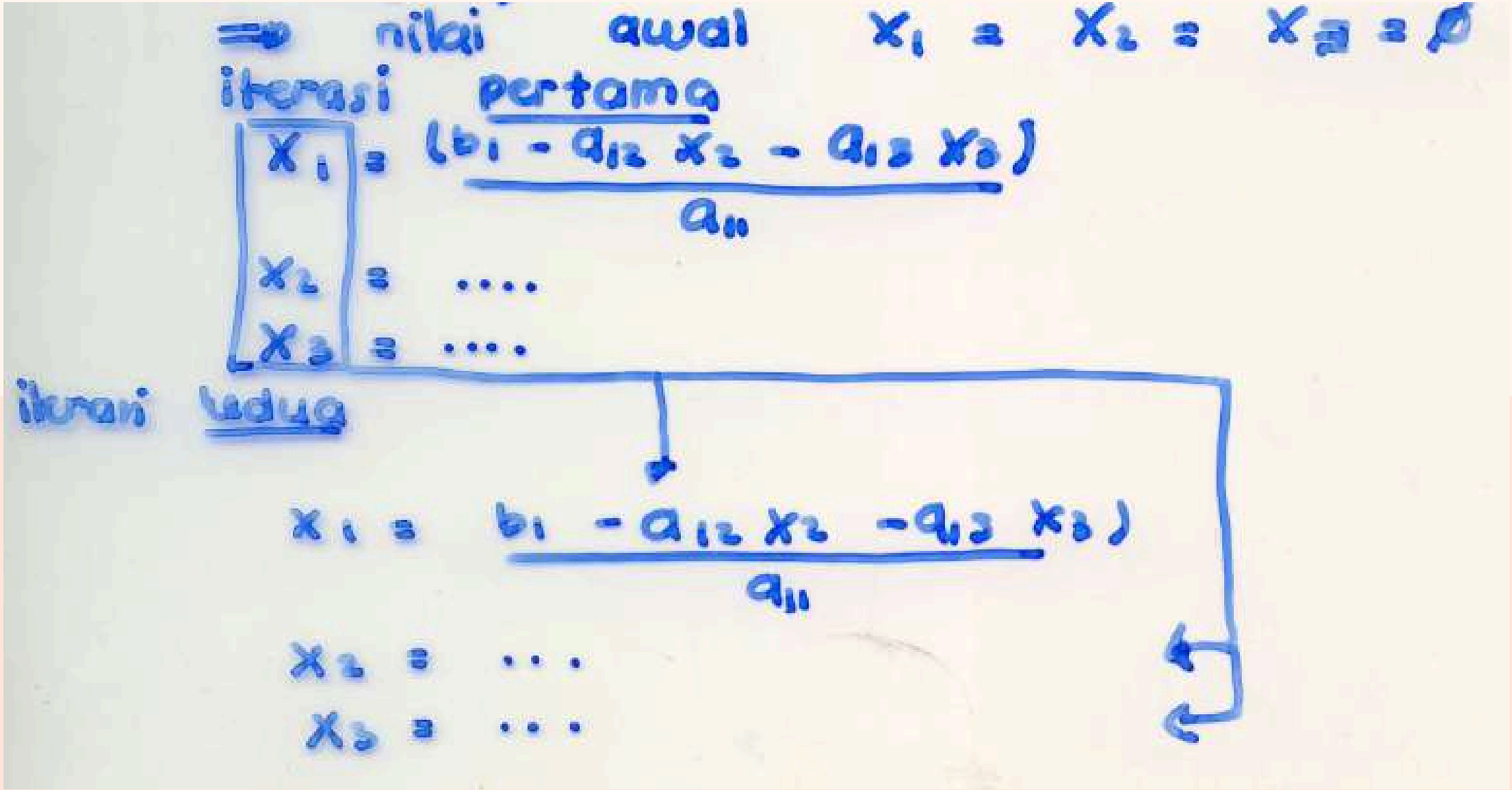
$$X_1 = \frac{(b1 - a12\ X2 - a13\ X3)}{a11}$$

$$X_2 = \frac{(b2 - a11\ X1 - a23\ X3)}{a22}$$

$$X_3 = \frac{(b3 - a31\ X1 - a32\ X2)}{a33}$$

- Sehingga kita dapat mengetahui nilai X1, X2, dan X3 secara langsung
- Nilai Awal X1 = X2 = X3 =! 0

Metode Jacobi



Contoh Soal

Contoh Soal

$$20X_1 + X_2 - X_3 = 17$$
$$X_1 - X_2 + X_3 = 13$$
$$-X_1 + X_2 + 10X_3 = 18$$

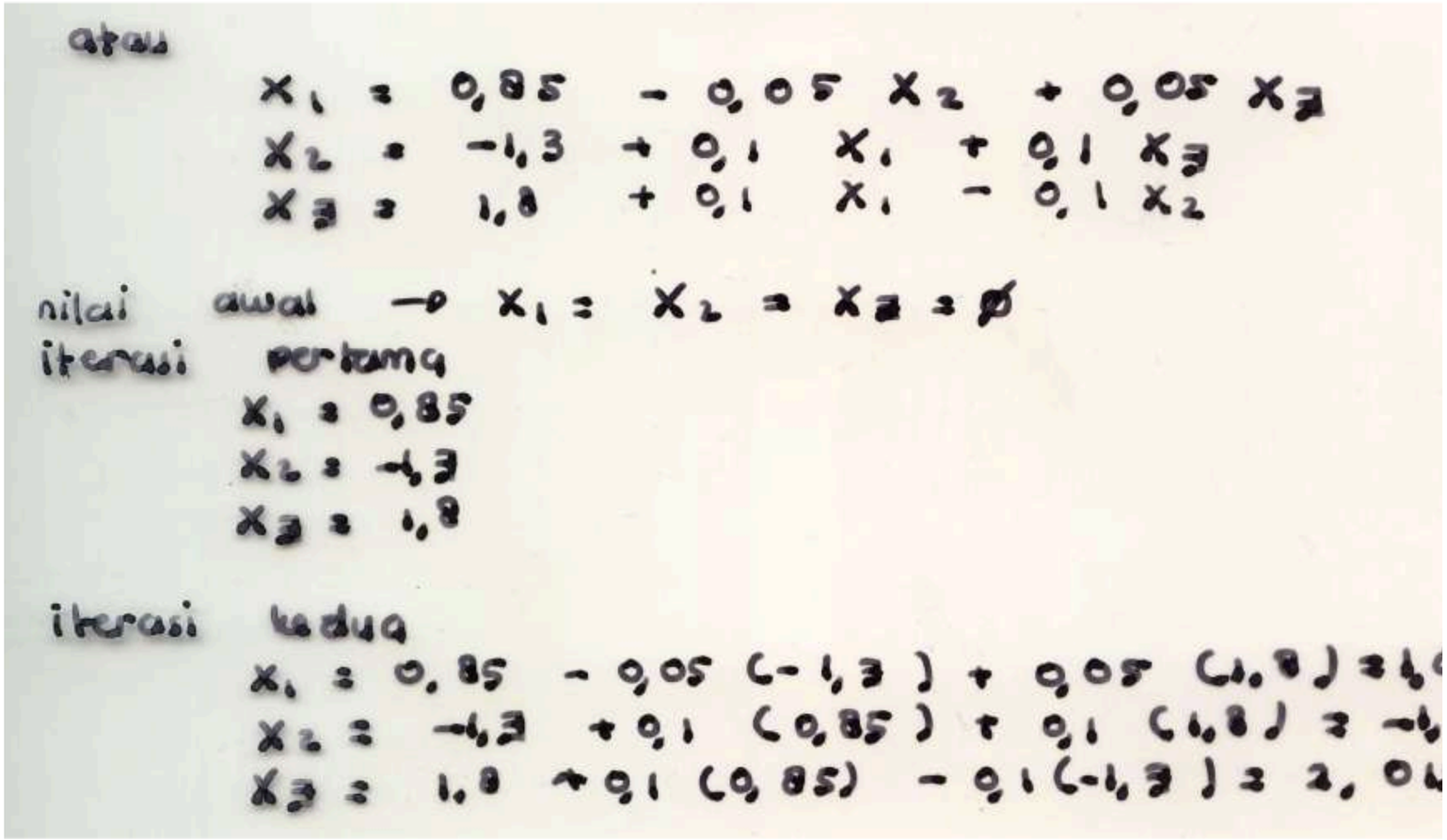
Dirubah menjadi

$$X_1 = \frac{17}{20} - \frac{1}{20}x2 - \frac{1}{20}x3$$

$$X_2 = \frac{-13}{10} + \frac{1}{10}x1 + \frac{1}{10}x3$$

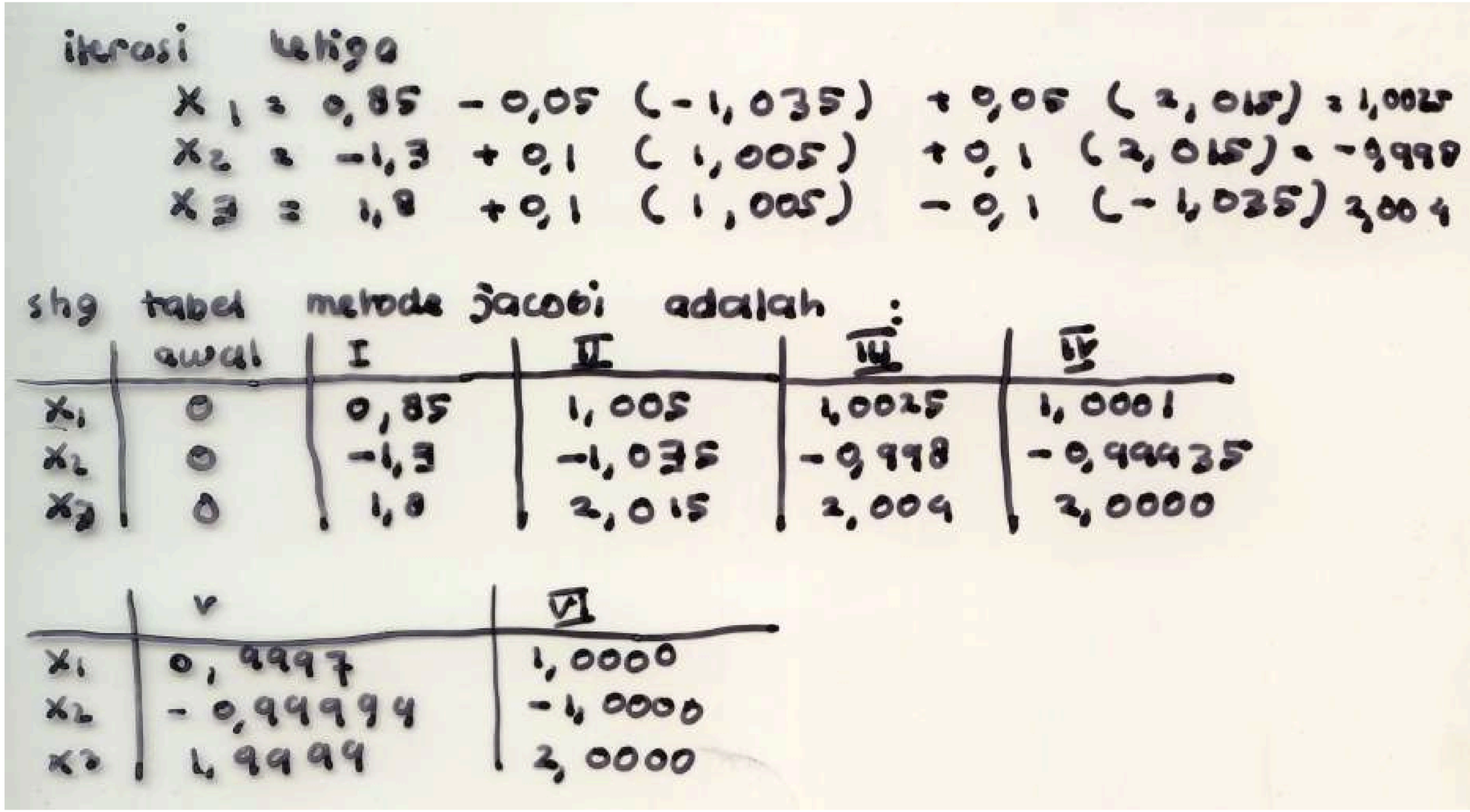
$$X_3 = \frac{18}{10} + \frac{1}{10}x1 - \frac{1}{10}x2$$

Jawaban



Contoh Soal

Jawaban



iterasi ketiga

$x_1 = 0,85 - 0,05(-1,035) + 0,05(2,015) = 1,0025$

$x_2 = -1,3 + 0,1(1,005) + 0,1(2,015) = -0,998$

$x_3 = 1,8 + 0,1(1,005) - 0,1(-1,035) = 3,004$

shg tabel metode jacobi adalah :

	awal	I	II	III	IV
x_1	0	0,85	1,005	1,0025	1,0001
x_2	0	-1,3	-1,035	-0,998	-0,999835
x_3	0	1,8	2,015	2,004	2,0000

	V	VI
x_1	0,9997	1,0000
x_2	-0,999994	-1,0000
x_3	1,9999	2,0000

Contoh Soal

Contoh Lain

(Nilai 18) Carilah nilai ao, a1, dan a2 dengan menggunakan metoda Jacobi. Hitunglah dari iterasi 0, 1, 2 dan 3.

$$8a_0 + 5a_2 = 59$$

$$-2a_0 - 7a_1 + 3a_2 = 41$$

$$-5a_1 + 12a_2 = 104$$

Jawaban

										8	ao	+	0	a1	+	5	a2	=	59
										-2	ao	+	-7	a1	+	3	a2	=	41
iterasi (	ao, a1, a2 =		0							0	ao	+	-5	a1	+	12	a2	=	104
iterasi 1				DENGAN METODA			JACOBI													
ao =	59	-	0	*	0	-	5	*	0		nilai = 3									
	8																			
ao =	7.38																			
a1 =	41	-	-2	*	0	-	3	*	0											
	-7																			
a1 =	-5.86																			
a2 =	104	-	0	*	0	-	-5	*	0											
	12																			
a2 =	8.67																			

Contoh Soal

Jawaban

iterasi 2									
ao =	59	-	0	*	-5.86	-	5	*	8.67
					8				
ao =	1.96								
a1 =	41	-	-2	*	7.375	-	3	*	8.67
					-7				
a1 =	-4.25								
a2 =	104	-	0	*	7.375	-	-5	*	-5.86
					12				
a2 =	6.23								
iterasi 3									
ao =	59	-	0	*	-4.25	-	5	*	6.23
					8				
ao =	3.48								
a1 =	41	-	-2	*	1.95833	-	3	*	6.23
					-7				
a1 =	-3.75								
a2 =	104	-	0	*	1.95833	-	-5	*	-4.25
					12				
a2 =	6.90								

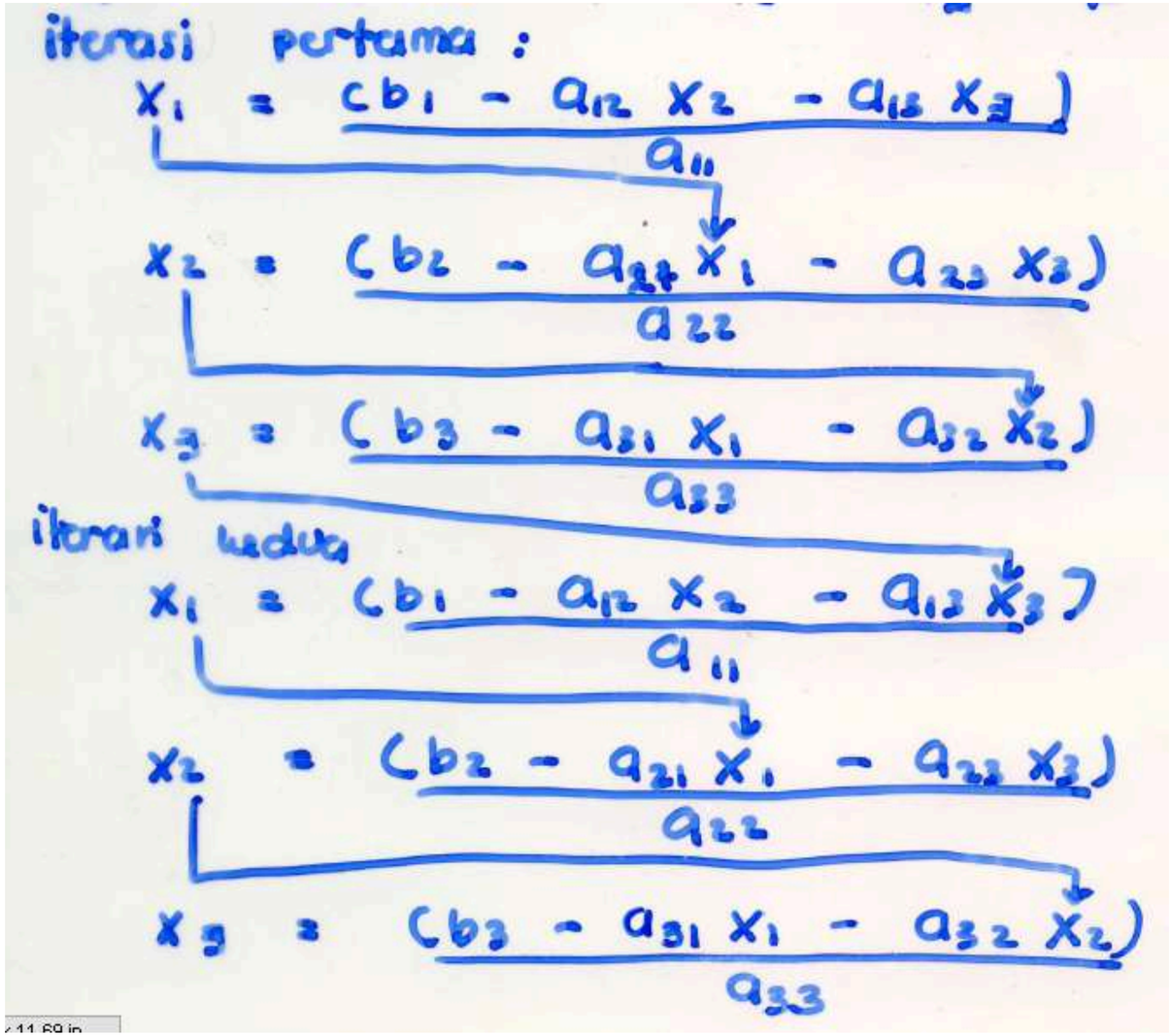
Metode Gauss - Seidel

- Pengembangan dari Jacobi
- Nilai X berikutnya langsung menggunakan nilai x yang baru di dapat

Kita memp. persamaan linier sbb:

} idem

Nilai awal → X1 = X2 = X3 =! 0



Contoh Soal

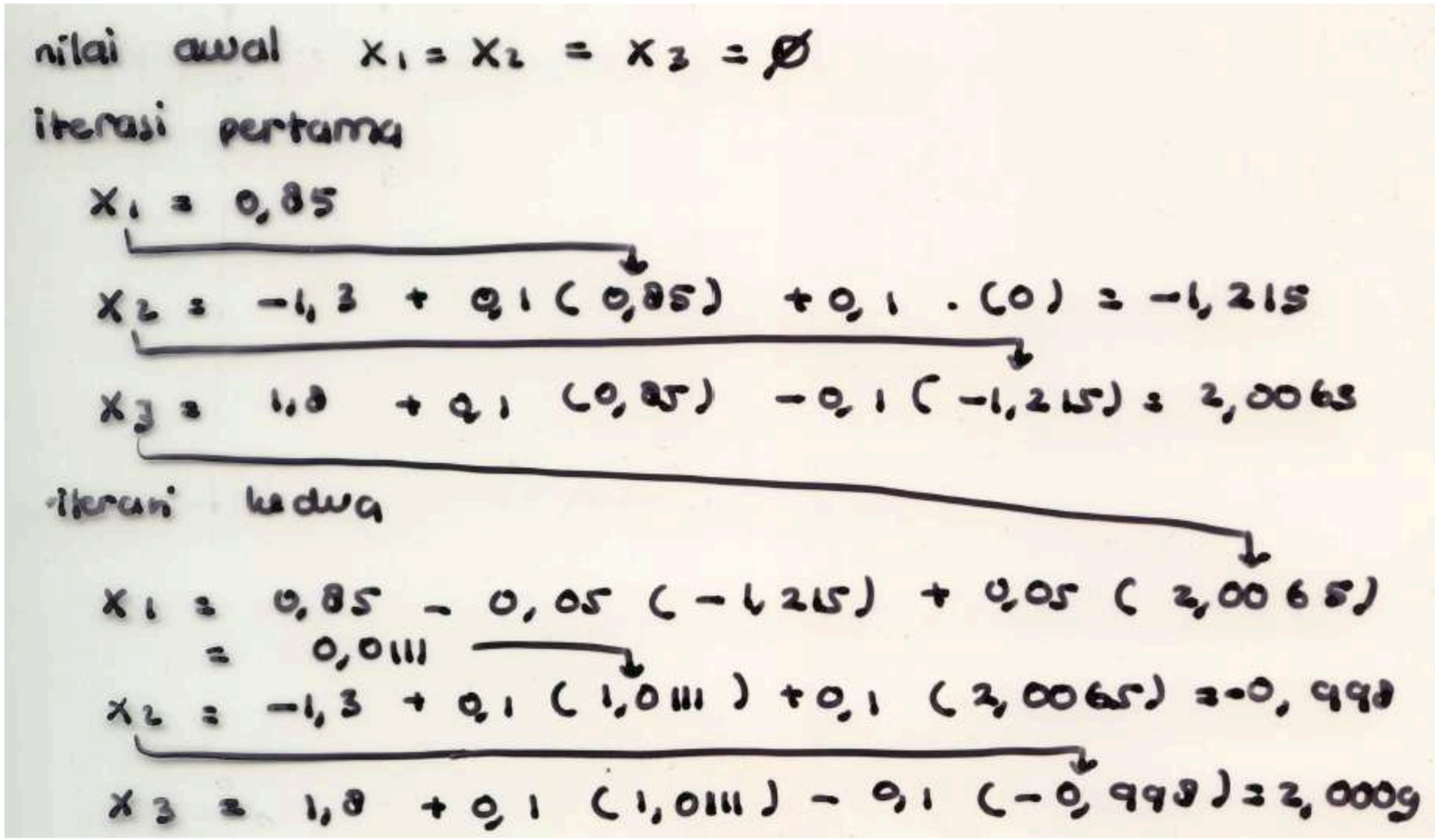
Contoh Soal

$$20X_1 + X_2 - X_3 = 17$$
$$X_1 - X_2 + X_3 = 13$$
$$-X_1 + X_2 + 10X_3 = 18$$

Dirubah menjadi

$$X_1 = 0{,}85 - 0{,}005X_2 + 0{,}005X_3$$
$$X_2 = -1{,}3 + 0{,}1X_1 + 0{,}1X_3$$
$$X_3 = 1{,}8 + 0{,}1X_1 - 0{,}1X_2$$

Jawaban



Contoh Soal

Jawaban

shg tabel metoda gauss / seidel adalah :

	awal	I	II	III	IV
x_1	0	0,85	1,0111	0,9995	1,0000
x_2	0	-1,215	-0,998	-0,99992	-1,0000
x_3	0	2,0065	2,0009	2,0000	2,0000

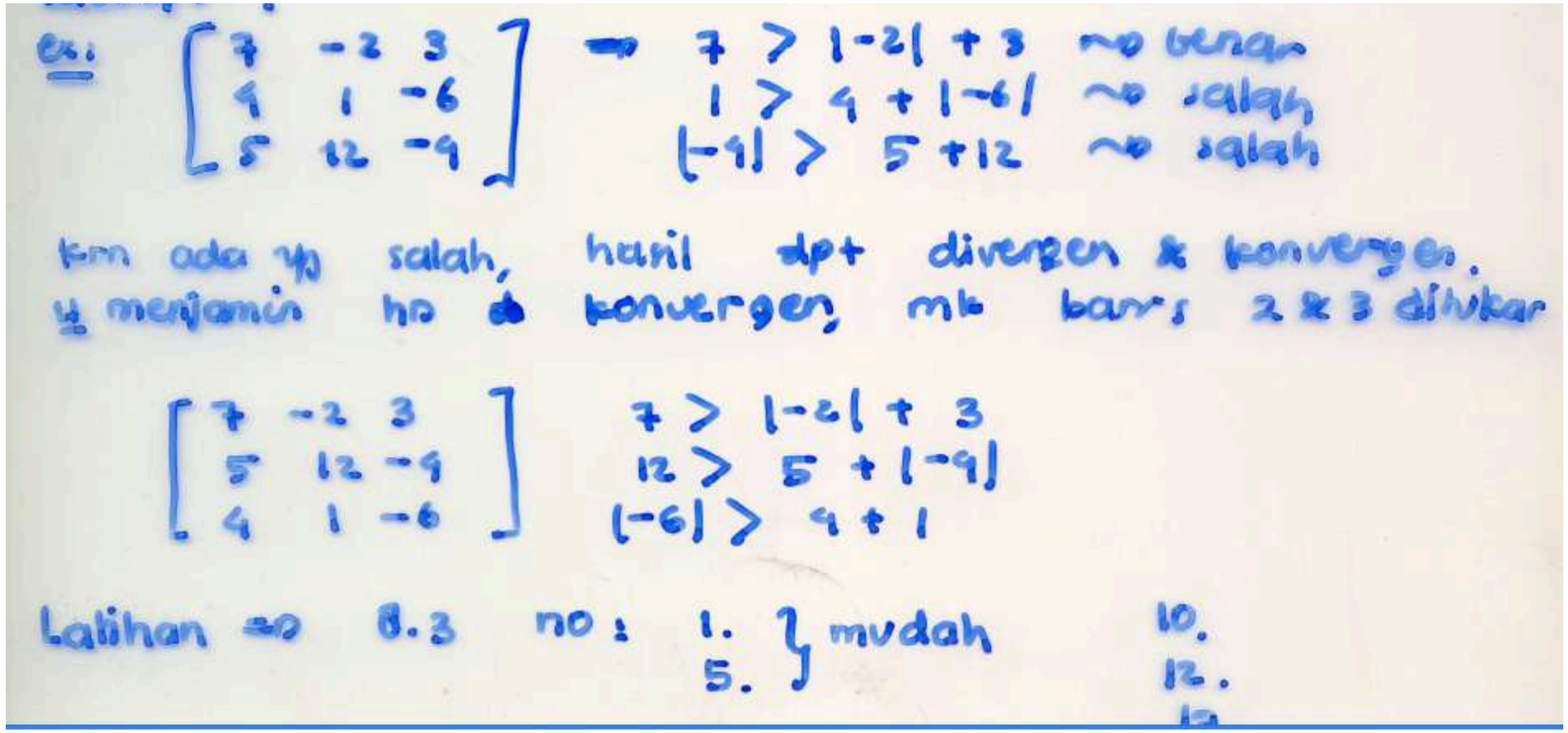
shg tabel metode jacobi adalah :

	awal	I	II	III	IV
x_1	0	0,85	1,005	1,0025	1,0001
x_2	0	-1,3	-1,035	-0,998	-0,99935
x_3	0	1,8	2,015	2,004	2,0000

	V	VI
x_1	0,9997	1,0000
x_2	-0,99994	-1,0000
x_3	1,9999	2,0000

Metode Gauss - Seidel

Metoda Gaus Seidel & Jacobi tidak selalu dapat kita gunakan. Kadang hasil bisa divergen. Agar dijamin divergen, maka matriks dari konst harus “dominan diagonal secara tepat” artinya pada sebuah baris angka mutlak pada diagonal harus > jumlah angka lainnya.



Contoh Soal

Contoh Lain

Carilah nilai ao, a1, dan a2 denganmenggunakan metoda Jacobi dan Gauss-Seidel. Hitunglah dari iterasi 0, 1, 2 dan 3.

$$20a_0 + 1\,a_1 + (-1)\,a_2 = 17$$

$$1\,a_0 + (-7)\,a_1 + 1\,a_2 = 13$$

$$-1\,a_0 + 12\,a_1 + 10a_2 = 18$$

Jawaban

iterasi 0 ao, a1, a2 = 0

iterasi 1

DENGAN METODA JACOBI

ao =	17	-	1	*	0	-	-1	*	0
					20				
ao =	0,85								
a1 =	13	-	1	*	0	-	1	*	0
					-10				
a1 =	-1,30								
a2 =	18	-	-1	*	0	-	1	*	0
					10				
a2 =	1,80								

iterasi 2

ao =	17	-	1	*	-1,30	-	-1	*	1,80
					20				
ao =	1,01								
a1 =	13	-	1	*	0,85	-	1	*	1,80
					-10				
a1 =	-1,04								
a2 =	18	-	-1	*	0,85	-	1	*	-1,30
					10				
a2 =	2,02								

Contoh Soal

Jawaban

iterasi 3

ao =	17	-	1	*	-1,04	-	-1	*	2,02
					20				
ao =	1,00								
a1 =	13	-	1	*	1,005	-	1	*	2,02
					-10				
a1 =	-1,00								
a2 =	18	-	-1	*	1,005	-	1	*	-1,04
					10				
a2 =	2,00								

iterasi 4

ao =	17	-	1	*	-1,00	-	-1	*	2,00
					20				
ao =	1,00								
a1 =	13	-	1	*	1,0025	-	1	*	2,00
					-10				
a1 =	-1,00								
a2 =	18	-	-1	*	1,0025	-	1	*	-1,00
					10				
a2 =	2,00								

Contoh Soal

Jawaban

iterasi 0 ao, a1, a2 = 0 -1 ao

iterasi 1

DENGAN METODA GAUSS SEIDEL

ao = (17 - 1 * 0 - -1 * 0) / 20

ao = 0,85

a1 = (13 - 1 * 0,85 - 1 * 0) / -10

a1 = -1,22

a2 = (18 - -1 * 0,85 - 1 * -1,22) / 10

a2 = 2,01

iterasi 2

ao = (17 - 1 * -1,22 - -1 * 2,01) / 20

ao = 1,01

a1 = (13 - 1 * 1,01 - 1 * 2,01) / -10

a1 = -1,00

a2 = (18 - -1 * 1,01 - 1 * -1,00) / 10

a2 = 2,00

Contoh Soal

Jawaban

iterasi 3

$$ao = \frac{17 - 1 * -1{,}00 - -1 * 2{,}00}{20}$$

ao = 1,00

$$a1 = \frac{13 - 1 * 1{,}00 - 1 * 2{,}00}{-10}$$

a1 = -1,00

$$a2 = \frac{18 - -1 * 1{,}00 - 1 * -1{,}00}{10}$$

a2 = 2,00

iterasi 4

$$ao = \frac{17 - 1 * -1{,}00 - -1 * 2{,}00}{20}$$

ao = 1,00

$$a1 = \frac{13 - 1 * 1{,}00 - 1 * 2{,}00}{-10}$$

a1 = -1,00

$$a2 = \frac{18 - -1 * 1{,}00 - 1 * -1{,}00}{10}$$

a2 = 2,00

Contoh Soal

Cari persamaan polynomial ber-orde 2 terhadap table berikut :

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Carilah nilai a2 + a1 + a0 dengan menggunakan Jacobi dan Gauss-Seidel (antar baris jangan di tukar) carilah iterasi 1 dan iterasi 2.

x	y
3	15
4	32
5	55
6	84
7	119

Jawaban

$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$n = 5$

x	y	x . X	x . x .x	x . x .x . X	x . Y	x . X . Y
3	15	9	27	81	45	135
4	32	16	64	256	128	512
5	55	25	125	625	275	1375
6	84	36	216	1296	504	3024
7	119	49	343	2401	833	5831
25	**305**	**135**	**775**	**4659**	**1785**	**10877**

Persamaan Simulasi untuk orde 2

n	ao	+	Σ Xi	a1	+	Σ Xi.Xi	a2	=	Σ yi
Σ Xi	ao	+	Σ Xi.Xi	a1	+	Σ xi.xi.xi	a2	=	Σ xi.yi
Σ Xi.Xi	ao	+	Σ xi.xi.xi	a1	+	Σ xi.xi.xi.xi	a2	=	Σ xi.xi.yi

5	ao	+	25	a1	+	135	a2	=	305
25	ao	+	135	a1	+	775	a2	=	1785
135	ao	+	775	a1	+	4659	a2	=	10877

Metode Jacobi

iterasi 0, ao, a1, a2 = 0

iterasi 1

ao = $\frac{305 - 25 * 0 - 135 * 0}{5}$

ao = 61.00

a1 = $\frac{1785 - 25 * 0 - 775 * 0}{135}$

a1 = 13.22

a2 = $\frac{10877 - 135 * 0 - 775 * 0}{4659}$

a2 = 2.33

Metode Jacobi

iterasi 2

$$a_o = \frac{305 - 25 * 13.22 - 135 * 2.33}{5}$$

$$a_o = -68.15$$

$$a_1 = \frac{1785 - 25 * 61 - 775 * 2.33}{135}$$

$$a_1 = -11.48$$

$$a_2 = \frac{10877 - 135 * 61 - 775 * 13.22}{4659}$$

$$a_2 = -1.63$$

Metode Gauss - Seidel

iterasi 0, ao, a1, a2 = 0

iterasi 1

ao = $\frac{305 - 25 * 0 - 135 * 0}{5}$

ao = 61.00

a1 = $\frac{1785 - 25 * 61.00 - 775 * 0}{135}$

a1 = 1.93

a2 = $\frac{10877 - 135 * 61.00 - 775 * 1.93}{4659}$

a2 = 0.25

Metode Gauss - Seidel

iterasi 2

$$ao = \frac{305 - 25 * 1.93 - 135 * 0.25}{5}$$

$$ao = 44.71$$

$$a1 = \frac{1785 - 25 * 44.71 - 775 * 0.25}{135}$$

$$a1 = 3.53$$

$$a2 = \frac{10877 - 135 * 44.71 - 775 * 3.53}{4659}$$

$$a2 = 0.45$$

Soal 2

Cari nilai ao, a1, dan a2 menggunakan Metoda Jacobi dalam 2 iterasi:

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

X	3	4	5	6	7
Y	33	57	89	129	177

Jawaban Soal 2

1. Menggunakan *Metode Jacobi*
2. Dari tabel ditemukan data berikut:

$$\sum x = 25$$
$$\sum y = 485$$
$$\sum x^2 = 135$$
$$\sum x^3 = 775$$
$$\sum x^4 = 4659$$
$$\sum x.y = 2785$$
$$\sum x^2.y = 16751$$

3. Diubah ke sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5a_0 + 25a_1 + 135a_2 &= 485 \\ 25a_0 + 135a_1 + 775a_2 &= 2785 \\ 135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 &= 16751 \end{aligned}$$

Jawaban Soal 2

4. Pada iterasi 1

$a_0 = \frac{485}{5} = 97$

$a_1 = \frac{2785}{135} = 20{,}63$

$a_2 = \frac{16751}{4659} = 3{,}6$

5. Pada iterasi 2

- $a_0 = \frac{1}{5}\left(485 - 25(20{,}63) - 135(3{,}6)\right) = -103{,}35$
- $a_1 = \frac{1}{135}\left(2785 - 25(97) - 775(3{,}6)\right) = -18$
- $a_2 = \frac{1}{4659}\left(16751 - 135(97) - 775(20{,}63)\right) = -2{,}65$

Jadi berdasarkan iterasi 2, nilai $a_0 = -103{,}35$, $a_1 = -18$, dan $a_2 = -2{,}65$

Soal 3

Cari nilai ao, a1, dan a2 menggunakan Metode Gauss-Seidell dalam 2 iterasi!

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

X	3	4	5	6	7
Y	33	57	89	129	177

Jawaban Soal 3

1. Menggunakan *Metode Gauss Seidell*
2. Dari tabel ditemukan data berikut:

$$\sum x = 25$$
$$\sum y = 485$$
$$\sum x^2 = 135$$
$$\sum x^3 = 775$$
$$\sum x^4 = 4659$$
$$\sum x.y = 2785$$
$$\sum x^2.y = 16751$$

3. Diubah ke sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5a_0 + 25a_1 + 135a_2 &= 485 \\ 25a_0 + 135a_1 + 775a_2 &= 2785 \\ 135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 &= 16751 \end{aligned}$$

Jawaban Soal 3

4. Pada iterasi 1

$a_0 = 97$

$a_1 = \frac{1}{135}\left(2785 - 25(97) - 775(0)\right) = 2{,}67$

$a_2 = \frac{1}{4659}\left(16751 - 135(97) - 775(2{,}67)\right) = 0{,}34$

5. Pada iterasi 2

- $a_0 = \frac{1}{5}\left(485 - 25(2{,}67) - 135(0{,}34)\right) = 74{,}47$
- $a_1 = \frac{1}{135}\left(2785 - 25(74{,}47) - 775(0{,}34)\right) = 4{,}89$
- $a_2 = \frac{1}{4659}\left(16751 - 135(74{,}47) - 775(4{,}89)\right) = 0{,}62$

Jadi berdasarkan iterasi 2, nilai $a_0 = 74{,}47$, $a_1 = 4{,}89$, dan $a_2 = 0{,}62$

Soal 4

Cari nilai ao, a1, dan a2 menggunakan Metode Gauss-Jordan!

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

X	3	4	5	6	7
Y	33	57	89	129	177

Jawaban Soal 4

1. Menggunakan *Metode Gauss Jordan*
2. Dari tabel ditemukan data berikut:

$$\sum x = 25$$
$$\sum y = 485$$
$$\sum x^2 = 135$$
$$\sum x^3 = 775$$
$$\sum x^4 = 4659$$
$$\sum x.y = 2785$$
$$\sum x^2.y = 16751$$

3. Diubah ke sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 5a_0 + 25a_1 + 135a_2 &= 485 \\ 25a_0 + 135a_1 + 775a_2 &= 2785 \\ 135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 &= 16751 \end{aligned}$$

Jawaban Soal 4

4. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 1:

$$a_0 + 5a_1 + 27a_2 = 97$$
$$25a_0 + 135a_1 + 775a_2 = 2785$$
$$135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 = 16751$$
$$\Rightarrow A(1,4) = 97$$

5. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 2:

$$a_0 + 5a_1 + 27a_2 = 97$$
$$10a_1 + 100a_2 = 360$$
$$135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 = 16751$$
$$\Rightarrow A(2,3) = 100$$

Jawaban Soal 4

6. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 3:

$$\begin{aligned} a_0 \quad &+ 5a_1 \quad + 27a_2 \quad = 97 \\ &10a_1 \quad + 100a_2 \quad = 360 \\ &100a_1 + 1014a_2 = 3656 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(3,2) = 100$$

7. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 4:

$$\begin{aligned} a_0 \quad &+ 5a_1 \quad + 27a_2 \quad = 97 \\ &a_1 \quad + 10a_2 \quad = 36 \\ &100a_1 + 1014a_2 = 3656 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(2,4) = 36$$

Jawaban Soal 4

8. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 5:

$$a_0 + 5a_1 + 27a_2 = 97$$
$$a_1 + 10a_2 = 36$$
$$14a_2 = 56$$

$$\Rightarrow A(3,4) = 56$$

9. Eliminasi Gauss Jordan pada Iterasi 6:

$$a_0 + 5a_1 + 27a_2 = 97$$
$$a_1 + 10a_2 = 36$$
$$a_2 = 4$$

$$\Rightarrow A(3,4) = 4$$

Jawaban Soal 4

10. Mencari $a_0, a_1, dan\ a_2$
    - $a_2 = 4$
    - $a_1 = 36 - 10(4) = -4$
    - $a_0 = 97 - 5(-4) - 27(4) = 9$
11. Jadi nilai dari $a_0, a_1,$ dan a_2 secara berturut adalah $4, -4,$ dan 9

https://its.id/m/komnum25

Komnum PPT 7

Tugas Kelompok

1. Buatlah contoh soal sendiri, boleh mengarang atau mengambil dari internet:

- Cari persamaan polynomial ber-orde 2 terhadap table (buatan sendiri) dan dijawab dengan menggunakan Jacobi 4 iterasi
  --> 5 kelompok
- Cari persamaan polynomial ber-orde 2 terhadap table (buatansendiri) dan dijawab dengan menggunakan Gauss seidel 4 iterasi
  --> 5 kelompok

Ditanya :

- Tiap iterasi cari Et dan Ea
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Cari dari iterasi 1 sampai iterasi 3
- Tuliskan rumusnya terlebih dahulu

https://its.id/m/komnum25

Komnum PPT 7

PR!!

- Buatlah soal anda sendiri, kemudian carilah nilai x1, x2 dan x3 dengan menggunakan :

1. Gauss
2. Gauss – jourdan
3. Invers adjoint
4. Invers OBE
5. Cramer
6. Jacobi --> 6 iterasi
7. Gauss – seidel --> 6 iterasi

Komnum PPT 7

TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali