Komputasi Numerik

PERTEMUAN 15

Euler, Heun dan Runge-Kutta

2025/2026

KOMNUM Week 15

Apa Yang Akan Kita Pelajari?

01 Metode Euler

02 Metode Heunn

03 Metode Runge-Kutta

Metode Euler

- Tujuan → mencari nilai $y(x)$ pada titik x, jika diketahui deferensiasi $f(x, y)$
- Tujuan: Untuk mencari titik berikutnya dengan menggunakan turunan yang diberikan, dimana:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Step-size

Formula:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \times h$$

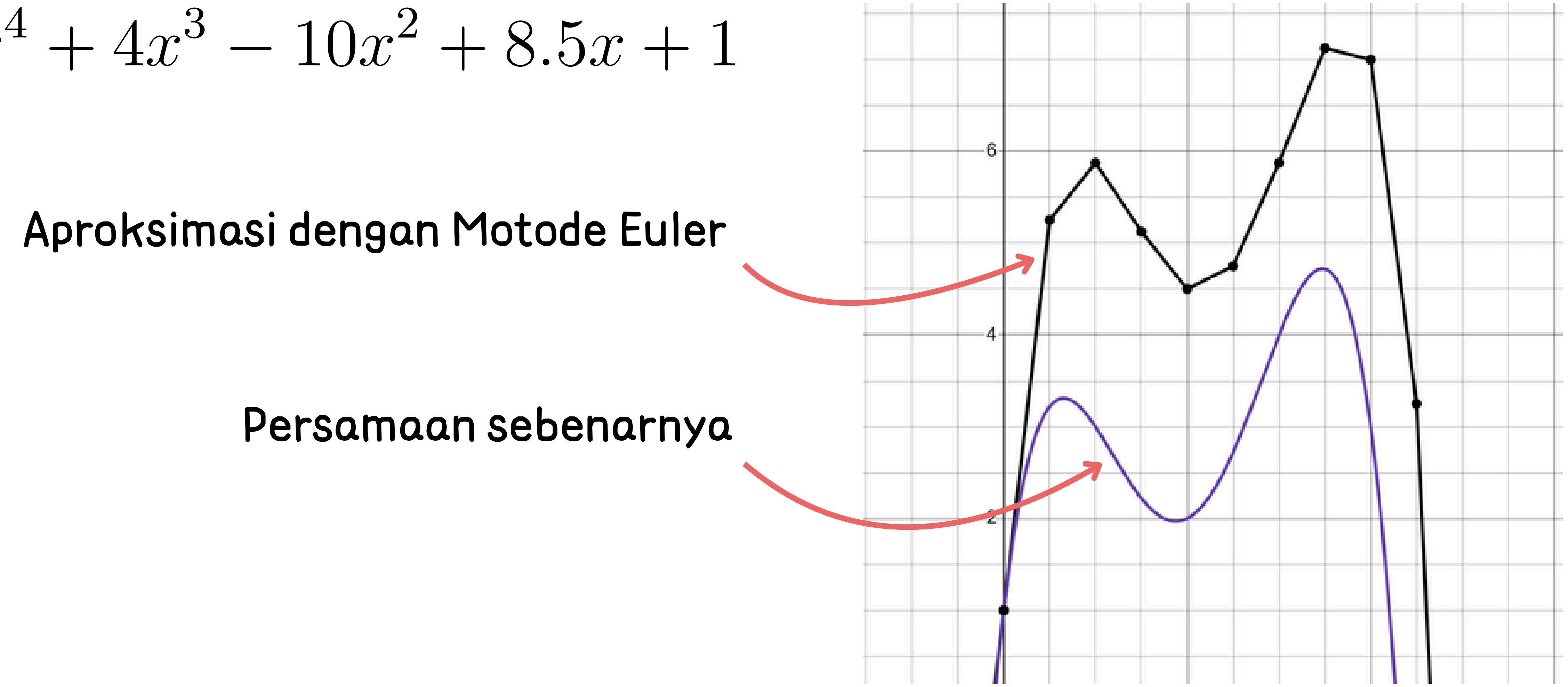
Contoh Soal 1

Menggunakan metode Euler, lakukan pada persamaan:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

dari x = 0 sampai x = 4 dengan ukuran step h = 0.5, dimana diketahui persamaan sebenarnya:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$



Jawaban Contoh 1

Iterasi 1:

Sebenarnya: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$

Untuk pertama, sama dengan fungsi asli

Metode Euler: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$$x_1 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

$$= 1 + (8.5)(0.5) = 5.25$$

$$E_t = \left| \frac{3.22 - 5.25}{3.22} \right| \times 100\% = 63.04\%$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 2:

Sebenarnya: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$

$x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3$

Metode Euler: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 1.25$

$$x_2 = 1$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h \\ &= 5.25 + (1.25)(0.5) = 5.88 \end{aligned}$$

$$E_t = \left| \frac{3 - 5.88}{3} \right| \times 100\% = 96\%$$

Metode Heunn

Berdasarkan formula Euler, Heunn menemukan kesalahan pada metode Euler dimana turunan awal interval selalu dianggap akan diterapkan sepanjang interval

Metode yang Heunn usulkan adalah merata-ratakan 2 titik

Formula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) + f\left(x_i, y_i\right)}{2} \times h$$

Contoh Soal 1

Menggunakan metode Heunn, lakukan pada persamaan:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

dari x = 0 sampai x = 4 dengan ukuran step h = 0.5, dimana diketahui persamaan sebenarnya:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 1:

Sebenarnya: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$$x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$$

Untuk pertama, sama dengan fungsi asli

Metode Heunn: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$$x_1 = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} h$$

$$= 1 + \frac{8.5 + 1.25}{2}(0.5) = 2.44$$

$$E_t = \left| \frac{2.22 - 2.44}{2.22} \right| \times 100\% = 9.91\%$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 2:

Sebenarnya: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$

$x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3$

Metode Heunn: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 2.44$

$$x_2 = 1$$

$$y_2 = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2} h$$

$$= 2.44 + \frac{1.25 - 1.5}{2}(0.5) = 2.38$$

$$E_t = \left| \frac{2 - 2.38}{2} \right| \times 100\% = 19\%$$

KOMNUM Week 15

Runge-Kutta Orde Kedua

Formula: $y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$

Dimana: $k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$

$$a_2 + a_2 = 1 \rightarrow a_1 = 1 - a_2$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \rightarrow p_1 = \frac{1}{2a_2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \rightarrow q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Kita bisa memberikan sembarang nilai a_2

Runge-Kutta Orde Kedua

Kita lakukan substitusi pada Metode Heunn dengan sebuah korektor tunggal, dimana:

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = q_{11} = 1$$

Sehingga menghasilkan Formula:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Runge-Kutta Orde Kedua

Jika kita melakukan substitusi pada Metode Polygon yang diperbaiki dengan sebuah korektor tunggal, dimana:

$$a_2 = 1 \longrightarrow \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ p_1 &= q_{11} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan Formula:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Runge-Kutta Orde Kedua

Jika kita melakukan substitusi pada Metode Ralson dengan sebuah korektor tunggal, dimana:

$$a_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$$

Sehingga menghasilkan Formula:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Contoh Soal 1

Menggunakan metode Runge-Kutta Orde Kedua, dengan menentukan $a_2 = \frac{1}{2}$ lakukan pada persamaan:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

dari $x = 0$ sampai $x = 4$ dengan ukuran step $h = 0.5$, dimana diketahui persamaan sebenarnya:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ p_1 &= q_{11} = 1 \end{aligned}$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 1:

Sebenarnya: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$

Untuk pertama, sama dengan fungsi asli

Metode Heunn: $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$x_1 = 0.5$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \\ &= 8.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h) \\ &= 4.22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + k_2 h \\ &= 1 + 4.22(0.5) = 3.11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t &= \left| \frac{3.22 - 3.11}{3.22} \right| \times 100\% \\ &= 3.42\% \end{aligned}$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 2:

Sebenarnya: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.22$

$x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3$

Metode Heunn: $x_1 = 0.5 \rightarrow y_1 = 3.11$

$x_2 = 1$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = 1.25$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right) = -0.59$$

$$y_2 = y_1 + k_2 h = 3.11 - 0.59(0.5) = 2.81$$

$$E_t = \left|\frac{3 - 2.81}{3}\right| \times 100\% = 6.33\%$$

KOMNUM Week 15

TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali