

Komputasi Numerik



PERTEMUAN 5



Newton-Raphson yang dimodifikasi + Faktorisasi




2024/2025





Komnum Week 5

Apa Yang Akan Kita Pelajari?

-  01 Metoda Terbuka: Newton-Raphson yang dimodifikasi
-  02 Faktorisasi
-  03 Tugas 3

Dalam pertemuan ini kita akan melanjutkan metode-metode untuk mencari akar-akar persamaan (Metode Terbuka).

Akar Ganda



Sebuah akar ganda:

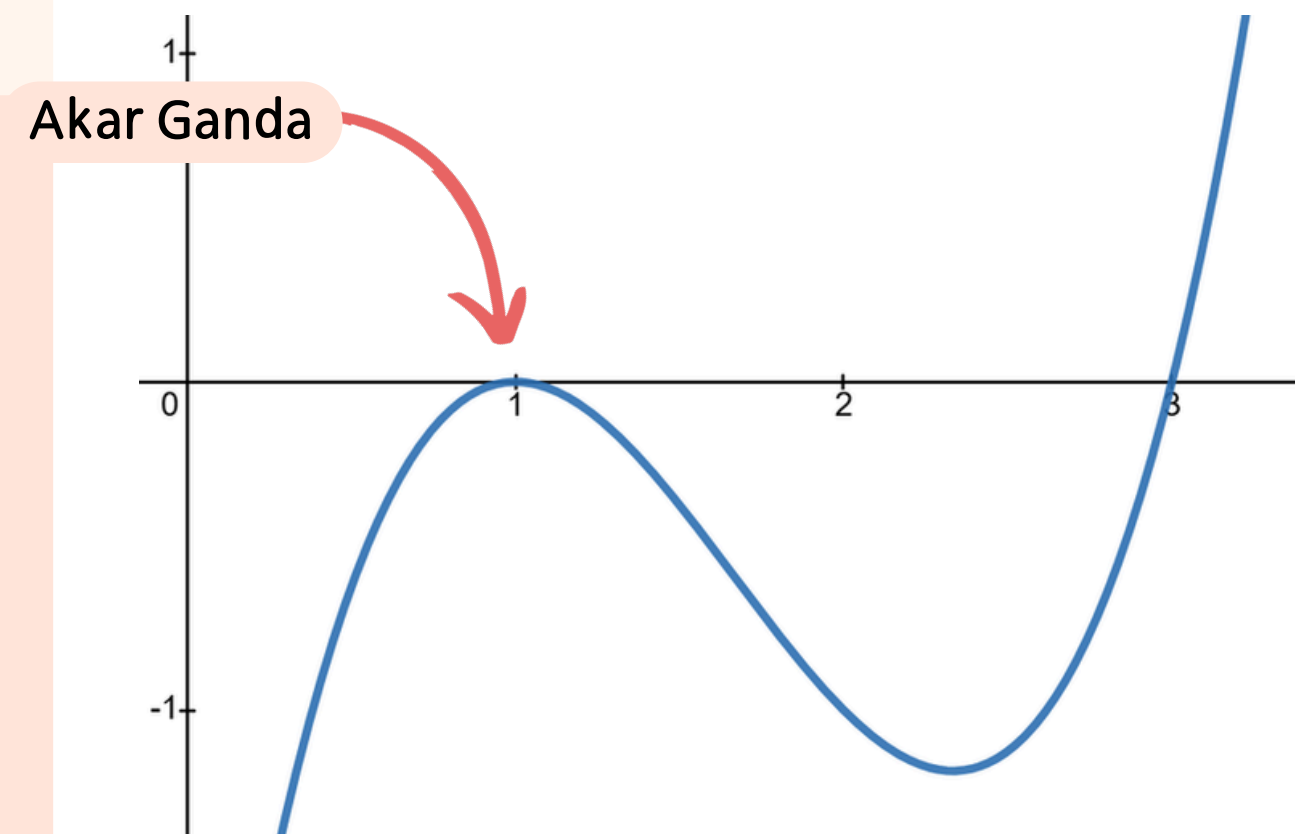
- Berhubungan dengan suatu titik dimana sebuah fungsi **menyinggung** sumbu-x
- Akar-Akar berjumlah **genap**

Contoh:

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)$$

Persamaan memiliki akar ganda karena suatu harga x membuat kedua suku pada persamaan di atas bernilai 0, yaitu $x = 1$

Grafik



Akar Triple

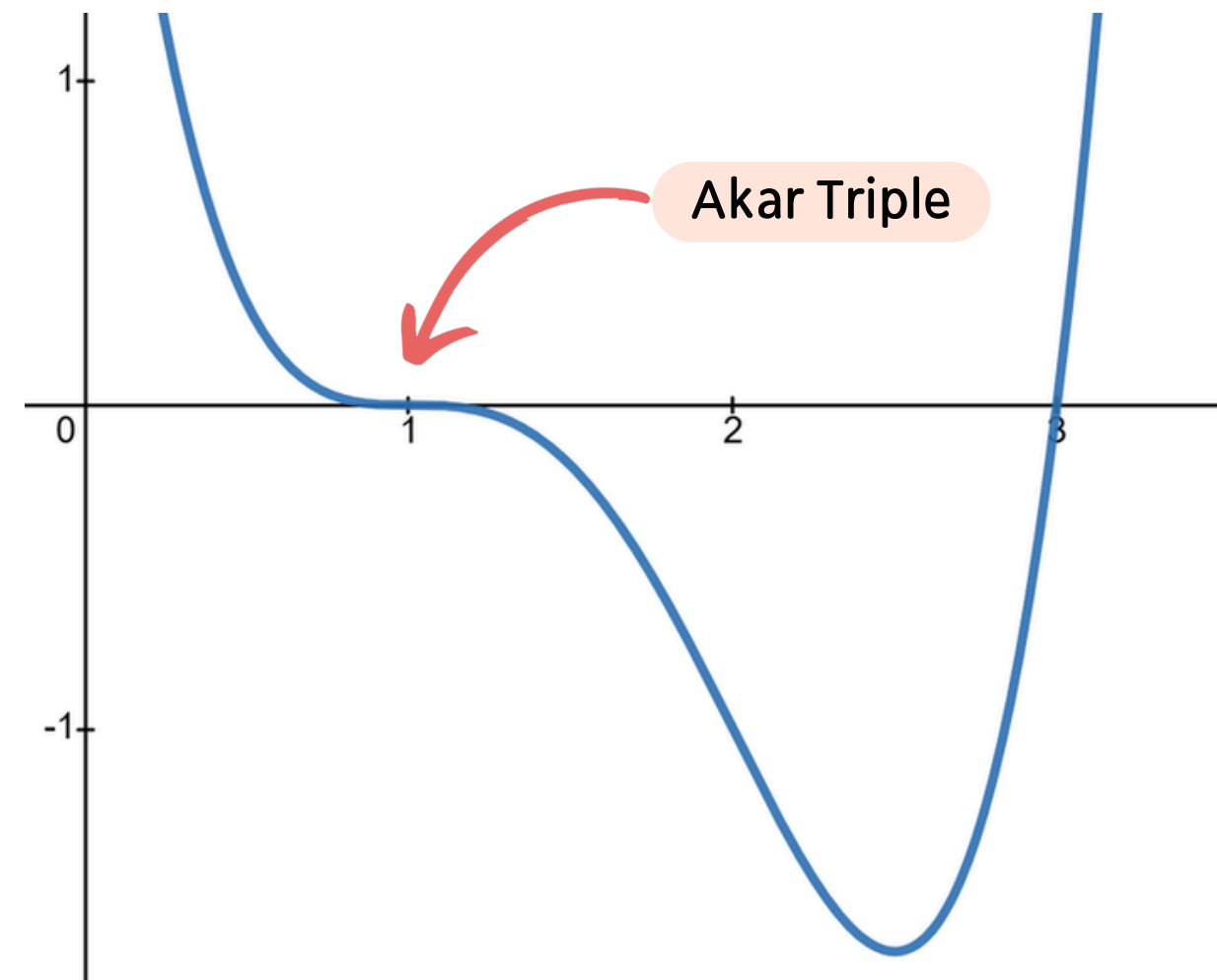
- Akar **ganjil**
- Jika nilai **x** membuat **3 suku** dalam persamaan menjadi **0**
- Menyinggung dan Memotong sumbu-**x**



Contoh:

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Grafik:



➤ **Newton-Raphson yang Dimodifikasi** ⚡

Rumus dengan metoda Newton-Raphson yang **dimodifikasi**:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

Gunakan:

- Newton-Raphson Standar
- Newton-Raphson yang dimodifikasi untuk mencari akar-akar ganda:
 - $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)$
 - $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

1. Newton-Raphson Standar

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

Tebakan awal, $x_0 = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

Iterasi	x_i	E_t	E_a
1	0	100%	
2	0.43	57%	100%
3	0.69	31%	37.68%
⋮	⋮	⋮	⋮
6	0.96	4%	0%

2. Newton-Raphson yang dimodifikasi

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 10$$

Tebakan awal, $x_0 = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i - 10x_i + 7)}{[3x_i - 10x_i + 7]^2 - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Iterasi	x_i	E_t	E_a
1	0	100%	
2	1.11	11%	100%
3	1.02	2%	38.82%

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Untuk akar $x = 3$, maka tebakan awal $x_0 = 4$

Iterasi	N-R Standar	N-R Dimodifikasi
0	4	4
1	3.41	2.64
\vdots	\vdots	\vdots
5	3	2.96

- Untuk akar ganda, jika menggunakan Newton-Raphson yang dimodifikasi hasilnya lebih baik daripada menggunakan Newton-Raphson Standar
- Untuk akar biasa, menggunakan Newton-Raphson Standar hasilnya lebih baik daripada Newton-Raphson yang dimodifikasi

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Contoh Soal 1

Diketahui:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 42x + 90$$

$$x_0 = 2$$

nilai x sebenarnya = 3

Ditanya:

- Cari akar x
- Tiap iterasi cari Et dan Ea
- Ketelitian 2 angka di belakang koma
- Cari iterasi 1 sampai 2

Rumus

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

Jawaban Contoh 1

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 42x + 90 \quad f'(x) = 6x^2 - 4x - 42$$
$$f''(x) = 12x - 4$$

Iterasi 1:

$$f(x_0) = 14$$

$$f'(x_0) = -26$$

$$f''(x_0) = 20$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - f(x_0)f''(x_0)}$$
$$= 2 - \frac{(14)(-26)}{(-26)^2 - (14)(20)}$$
$$= 2.92$$

$$E_t = \left| \frac{3 - 2.92}{3} \right| \times 100\%$$
$$= 2.67\%$$

$$E_a = \left| \frac{2.92 - 2}{2.92} \right| \times 100\%$$
$$= 31.51\%$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 2:

$$f(x_1) = 0.1$$

$$f'(x_1) = -2.52$$

$$f''(x_1) = 31.04$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)f'(x_1)}{(f'(x_1))^2 - f(x_1)f''(x_1)} \\ &= 2.92 - \frac{(0.1)(-2.52)}{(-2.52)^2 - (0.1)(31.04)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t &= \left| \frac{3 - 3}{3} \right| \times 100\% \\ &= 0\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_a &= \left| \frac{3 - 2.92}{3} \right| \times 100\% \\ &= 2.67\% \end{aligned}$$

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Contoh Soal 2

Diketahui:

$$f(x) = 12x^3 - 30x^2 - 84x + 48$$

$$x_0 = -1$$

nilai x sebenarnya = -2

Ditanya:

- Cari akar x
- Tiap iterasi cari Et dan Ea
- Ketelitian 2 angka di belakang koma
- Cari iterasi 1 sampai 3

Rumus

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

➤ Jawaban Contoh 2 ⚡

$$f(x) = 12x^3 - 30x^2 - 84x + 48 \quad f'(x) = 36x^2 - 60x - 84$$

$$f''(x) = 72x - 60$$

Iterasi 1:

$$f(x_0) = 90$$

$$f'(x_0) = 12$$

$$f''(x_0) = -132$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)f'(x_0)}{(f'(x_0))^2 - f(x_0)f''(x_0)} \\ &= -1 - \frac{(90)(12)}{(12)^2 - (90)(-132)} \\ &= -1.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t &= \left| \frac{-2 - (-1.09)}{-2} \right| \times 100\% \\ &= 45.5\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_a &= \left| \frac{-1.09 - (-1)}{-1.09} \right| \times 100\% \\ &= 8.26\% \end{aligned}$$

➤ Jawaban Contoh 2 ⚡

Iterasi 2:

$$f(x_1) = 88.38$$

$$f'(x_1) = 24.17$$

$$f''(x_1) = -138.48$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)f'(x_1)}{(f'(x_1))^2 - f(x_1)f''(x_1)} \\ &= -1 - \frac{(88.38)(24.17)}{(24.17)^2 - (88.38)(-138.48)} \\ &= -1.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t &= \left| \frac{-2 - (-1.26)}{-2} \right| \times 100\% \\ &= 37\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_a &= \left| \frac{-1.26(-1.09)}{-1.26} \right| \times 100\% \\ &= 13.49\% \end{aligned}$$

➤ Jawaban Contoh 2 ⚡

Iterasi 3:

$$f(x_2) = 82.21$$

$$f'(x_2) = 48.75$$

$$f''(x_2) = -150.72$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)f'(x_2)}{(f'(x_2))^2 - f(x_2)f''(x_2)} \\ &= -1 - \frac{(82.21)(48.75)}{(48.75)^2 - (82.21)(-150.72)} \\ &= -1.53 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t &= \left| \frac{-2 - (-1.53)}{-2} \right| \times 100\% \\ &= 23.5\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_a &= \left| \frac{-1.53 - (-1.26)}{-1.53} \right| \times 100\% \\ &= 17.65\% \end{aligned}$$

Faktorisasi

Metode Faktorisasi hanya memberikan rumusan untuk **polynomial** berderajat 3, 4 dan 5

$$P_3 = (1, 2)$$

$$P_4 = (2, 2)$$

$$P_5 = (1, 2, 2)$$



1. Derajat 3



$$P_3 = (1, 2)$$

Syarat:

- A_0, A_1 dan A_2 harus **ada nilainya**
- Konstanta X_3 harus bernilai 1

Dengan $P_3(x) = x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \rightarrow (x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$

Maka $b_0 = \frac{A_0}{a_0}$

$$a_1 = A_2 - b_0$$

$$a_0 = A_1 - a_1b_0$$

Dengan **inisiasi**
awal $b_0 = 0$



2. Derajat 4

$$P_4 = (2, 2)$$

Syarat:

- A_0, A_1, A_2 , dan A_3 harus ada nilainya
- Konstanta X_4 harus bernilai 1



$$P_3(x) = x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \rightarrow (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$$

Maka

$$b_0 = \frac{A_0}{a_0}$$
$$b_1 = \frac{A_1 - a_1b_0}{a_0}$$

$$a_1 = A_3 - b_1$$

$$a_0 = A_2 - a_1b_1$$

Dengan inisiasi awal:

$$b_0 = b_1 = 0$$

3. Derajat 5 \leq

$$P_5 = (1, 2, 2)$$

Syarat:

- A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 dan A_5 harus ada nilainya
- Konstanta X_5 harus bernilai 1

Dengan

$$P_3(x) = x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

$$\rightarrow (x + a_0)(x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + c_1x + ac_0)$$

Maka
$$b_0 = \frac{A_1 - a_0A_2 + a_0^2A_3 - a_0^3A_4 + a_0^4}{c_0}$$

$$b_1 = \frac{A_2 - a_0A_3 + a_0^2A_4 - a_0^3 + c_1b_0}{c_0}$$

$$a_0 = \frac{A_0}{b_0c_0}$$

$$c_1 = A_4 - a_0 - b_1$$

$$c_0 = A_3 - a_0A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1b_1$$

Dengan inisiasi awal: $a_0 = b_0 = b_1 = 0$



➤ Derajat 3 ⚡

Contoh Soal 1

Diketahui

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 59x - 126$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b_0 , a_0 dan a_1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Lakukan iterasi 1 sampai 3
- Hasil akhir b_0 , a_0 dan a_1 dibulatkan (hilangkan desimalnya)

Rumus

$$b_0 = \frac{A_0}{a_0}$$

$$a_1 = A_2 - b_0$$

$$a_0 = A_1 - a_1 b_0$$

Jawaban Contoh 1

$$A_0 = -126$$

$$A_1 = -59$$

$$A_2 = 4$$

Iterasi 1:

$$b_0 = 0$$

$$a_1 = 4 - 0$$

$$= 4$$

$$a_0 = -59 - (4)(0)$$

$$= -59$$

Iterasi 2:

$$b_0 = \frac{-126}{-59}$$

$$= 2.14$$

$$a_1 = 4 - 2.14$$

$$= 1.86$$

$$a_0 = -59 - (1.86)(2.14)$$

$$= -62.98$$

Jawaban Contoh 1

Iterasi 3:

$$b_0 = \frac{-126}{-62.98}$$

$$= 2$$

$$a_1 = 4 - 2$$

$$= 2$$

$$a_0 = -59 - (2)(2)$$

$$= -63$$

Jadi

$$b_0 = 2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_0 = -63$$

Sehingga

$$(x + 2)(x^2 + 2x - 63)$$

$$(x + 2)(x - 7)(x + 9)$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 7$$

$$x_3 = -9$$

➤ Derajat 3 ➤

Contoh Soal 2

Diketahui:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x + 90$$

Ditanya:

- Carilah nilai b_0 , a_0 dan a_1 dengan metode faktorisasi
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Lakukan iterasi 1 sampai 3

Rumus

$$b_0 = \frac{A_0}{a_0}$$
$$a_1 = A_2 - b_0$$
$$a_0 = A_1 - a_1 b_0$$

➤ Jawaban Contoh 2 ➤

$$A_2 = 4$$

$$A_1 = -51$$

$$A_0 = 90$$

Iterasi 1:

$$b_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -51 - (4)(0) \\ &= -51 \end{aligned}$$

Iterasi 2:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{90}{-51} \\ &= -1.76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - (-1.76) \\ &= 5.76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -51 - (5.76)(-1.76) \\ &= -40.86 \end{aligned}$$

Iterasi 3:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{90}{-40.86} \\ &= -2.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - (-2.2) \\ &= 6.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -51 - (6.2)(-2.2) \\ &= -37.36 \end{aligned}$$

➤ Derajat 4 ⚡

Contoh Soal 4

Diketahui

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, b1, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0) \end{aligned}$$

Jawaban Contoh 4

$$\begin{aligned} A_0 &= 50 \\ A_1 &= -62 \\ A_2 &= 39 \\ A_3 &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= A_0 / a_0 \\ b_1 &= (A_1 - a_1.b_0) / a_0 \\ a_1 &= A_3 - b_1 \\ a_0 &= A_2 - b_0 - a_1.b_1 \end{aligned}$$

Iterasi	b0	b1	a1	a0
0	0	0	-8	39
1	1.28	-1.33	-6.67	28.85
2	1.73	-1.75	-6.25	26.33
3	1.9	-1.9	-6.1	25.51
4	1.96	-1.96	-6.04	25.2
5	1.98	-1.99	-6.01	25.06
6	2.0	-1.99	-6.01	25.04
7	2.0	-2.0	-6.0	25.0
8	2.0	-2.0	-6.0	25.0
9	2.0	-2.0	-6.0	25.0

Contoh Soal yang tidak dapat diselesaikan dengan Faktorisasi



Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^4 - 8x - 57$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, b1, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0) \end{aligned}$$

A0 =	-57	b0 = A0 / a0
A1 =	-8	b1 = (A1 - a1.b0) / a0
A2 =	0	a1 = A3 - b1
A3 =	0	a0 = A2 - b0 - a1.b1

iterasi	bo	b1	a1	a0
1	0	0	0	0
2	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
3	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!

Contoh soal jika A2, A1 atau A0 tidak memiliki nilai 

Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^3 - 5x + 12$$

Nilai X = -3

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$b_0 = A_0 / a_0; \quad a_1 = A_2 - b_0; \quad a_0 = A_1 - a_1 b_0;$$

A0 12

A1 -5

A2 0

$$b_0 = A_0 / a_0$$

$$a_1 = A_2 - b_0$$

$$a_0 = A_1 - a_1 b_0$$

iterasi	bo	a1	a0
1	0.00	0.00	-5.00
2	-2.40	2.40	0.76
3	15.79	-15.79	244.31
4	0.05	-0.05	-5.00
5	-2.40	2.40	0.77

Derajat 5 (Akar Ganda)

Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^5 - x^4 - 27x^3 + x^2 + 146x - 120$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai c_0 , b_0 , b_1 , a_0 , dan a_1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x + a_0)(x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + c_1x + c_0) \end{aligned}$$

harga awal diasumsikan $b_1 = b_0 = a_0 = 0$

Iterasi 1:

yang dpt dihitung hanya c_1 dan c_0 yaitu:

$$b_1 = b_0 = a_0 = 0$$

$$c_1 = A_4 - a_0 - b_1 = -1$$

$$c_0 = A_3 - a_0A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1b_1 = -27$$

Iterasi 2:

dicari nilai b_0 , b_1 , a_0 , c_1 dan c_0 yaitu:

$$b_0 = (A_1 - a_0A_2 + a_0^2A_3 - a_0^3A_4 + a_0^4)/c_0 = -5,407$$

$$b_1 = (A_2 - a_0A_3 + a_0^2A_4 - a_0^3 + c_1b_0)/c_0 = 0,163$$

$$a_0 = A_0/(b_0c_0) = 0,822$$

$$c_1 = A_4 - a_0 - b_1 = -1,985$$

$$c_0 = A_3 - a_0A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1b_1 = -19,771$$

Iterasi di samping harus terus dilanjutkan sampai diperoleh nilai b_0 , b_1 , a_0 , c_1 dan c_0 yang relatif tetap (tidak berubah).

<https://its.id/m/komnum25>

Komnum Week 5

Tugas Kelompok

1. Buatlah contoh soal sendiri, boleh mengarang atau mengambil dari internet:
 - a. Newton-Raphson Modifikasi = 4 kelompok
 - b. Faktorisasi Derajat 3 = 4 kelompok
 - c. Faktorisasi Derajat 4 = 4 kelompok
2. Bentuk file PPT + nama kelompok dan anggota
3. Berikan contoh implementasi di dunia nyata dari metode yang digunakan

Ditanya :

- Tiap iterasi cari E_t dan E_a
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Cari dari iterasi 1 sampai iterasi 3
- Tuliskan rumusnya terlebih dahulu



Komnum Week 5



TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali

