

Komputasi Numerik

PERTEMUAN 11

Diferensiasi Newton-Gregory dan Lagrange

2024/2025





Komnum Week 11

Apa Yang Akan Kita Pelajari?

01

Deferensiasi Newton-Gregory

02

Diferensiasi Lagrange

⇒ Diferensiasi Numerik ⇌

Ke depan anda akan sering menjumpai 2 jenis operasi matematis dalam kehidupan ilmiah anda, yaitu **Diferensiasi Numerik** dan **Integrasi Numerik**.

Untuk diferensiasi numerik, konsepnya hampir sama dengan **regresi** dan **interpolasi**. Yaitu mencari nilai **turunan sebuah fungsi** hanya dengan menggunakan himpunan nilai dari fungsi tersebut.

Permasalahan diferensiasi numerik ini diselesaikan dengan menyatakan fungsi yang dimaksud melalui **rumusan interpolasi** yang telah di-diferensiasi.

Untuk permasalahan yang bersifat **equispaced**, dapat diselesaikan dengan rumus **Newton-Gregory**, **Stirling** atau **Bessel**. Sementara untuk permasalahan **non-equispaced**, digunakan **Lagrange** atau **Hermite** (jika **periodik**).

⇒ Diferensiasi Newton-Gregory ⇐

Interpolasi Newton-Gregory Forward:

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

Diferensiasi Newton-Gregory Forward:

$$f_n(x_s) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{4s^3-18s^2+22s-6}{4!}\Delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}, \quad h = \Delta x$$

⇒ Diferensiasi Newton-Gregory ⇐

Interpolasi Newton-Gregory **backward**:

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

Diferensiasi Newton-Gregory **backward**:

$$f_n(x_s) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{3s^2+6s+2}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \frac{4s^3+18s^2+22s+6}{4!}\Delta^4 f_{-4} + \dots \right]$$

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}, \quad h = \Delta x$$

Diferensiasi Newton-Gregory

Contoh Soal 1

Diketahui Tabel sebagai berikut:

x	y	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2	18.00			
2.4	126.53	108.53	192.82	
2.8	427.87	301.34	389.24	196.42
3.2	1118.45	690.58	705.35	316.11
3.6	2514.38	1395.93	1181.69	476.34
4	5092.00	2577.62	1864.72	683.03
4.4	9534.34	4442.34		

- Carilah nilai $f'(x)$, ketika $x = 3.3$ dengan menggunakan Newton-Gregory **Forward** dengan $x_0 = 3.2$
- Carilah nilai $f'(x)$, ketika $x = 3.3$ dengan menggunakan Newton-Gregory **Backward** dengan $x_0 = 3.2$

☰ Jawaban Contoh Soal 1 ☰

$$x_s = 3.3$$

$$x_0 = 3.2, \quad h = 0.4$$

x	y	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2	18.00	108.53		
2.4	126.53	301.34	192.82	196.42
2.8	427.87	690.58	389.24	316.11
3.2	1118.45	1395.93	705.35	476.34
3.6	2514.38	2577.62	1181.69	683.03
4	5092.00	4442.34	1864.72	
4.4	9534.34			

$$s = \frac{3.3 - 3.2}{0.4} = 0.25$$

-295.42

$$f_3(3.3) = \frac{1}{0.25} \left[1395.93 + \frac{2(0.25) - 1}{2!} (1181.69) + \right.$$

78.26

$$\left. \frac{3(0.25)^3 - 6(0.25) + 2}{3!} (683.03) \right]$$

$$= 2946.93$$

=> Jawaban Contoh Soal 1 <=

- Newton-Gregory Forward:

x	y	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2	18.00	108.53	192.82	196.42
2.4	126.53	301.34	389.24	
2.8	427.87	690.58		316.11
3.2	1118.45	1395.93	705.35	476.34
3.6	2514.38	2577.62	1181.69	683.03
4	5092.00	4442.34	1864.72	
4.4	9534.34			

$$x_s = 3.3$$

$$x_0 = 3.2, \quad h = 0.4$$

$$s = \frac{3.3 - 3.2}{0.4} = 0.25$$

291.93



$$\begin{aligned}
 f_3(3.3) &= \frac{1}{0.25} \left[690.58 + \frac{2(0.25) + 1}{2!} (389.24) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{3(0.25)^3 + 6(0.25) + 2}{3!} (196.42) \right]
 \end{aligned}$$

120.72



$$= 2758.08$$

> Diferensiasi Lagrange <

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x_i - x_j)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k, l \neq i}}^{n-1} (x - x_l) \right) \right]$$

> Diferensiasi Lagrange <

$$f_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

⋮

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

= Untuk menghitungnya harus
sabar dan telaten 😊

Komnum Week 11

Tugas Kelompok



1. Buatlah contoh soal sendiri dan kerjakan dengan menggunakan:
 - a. Stirling
 - b. Bessel
 - c. Diferensiasi:
 - i. Newton-Gregory Forward
 - ii. Newton-Gregory Backward
 - iii. Lagrange
2. Bentuk file PPT + nama kelompok dan anggota

Komnum Week 8

TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali