

Komputasi Numerik



# PERTEMUAN 7



SPL → Jacobi dan Gauss-Seidel

2024/2025



# Sistem Persamaan Linier

Contoh → Berapa nilai  $x$ ,  $y$  dan  $z$

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ 3x - 5y &= 1\end{aligned}$$



# Metode Jacobi dan Gauss Seidel

Penyelesaian Sistem Linier



- Cara Biasa → SMA
- Gauss
- Gauss-Jordan

- Invers (Jika bisa dicari)
  - $2 \times 2 \rightarrow$  biasa
  - OBE
  - Kofaktor Adjoint

- Cramer
- Gauss Seidel
- Jacobi

Pada pertemuan ini, kita akan berfokus pada Metode Jacobi dan Gauss Seidel

## Metode Jacobi

- Bersifat Iteratif
- Kita mempunyai persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

- Dan diubah menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}\end{aligned}$$

- Sehingga kita dapat mengetahui nilai  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  secara langsung
- Nilai Awal  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

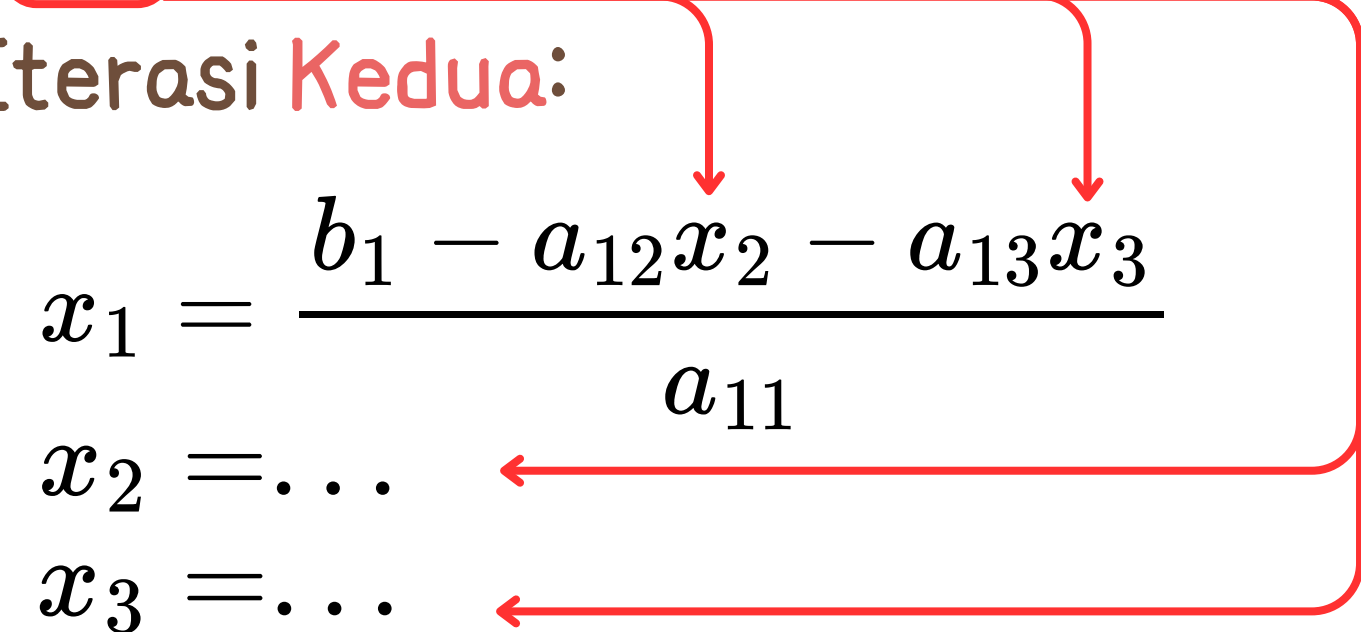
# Metode Jacobi

Nilai Awal:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 &= \dots \\ x_3 &= \dots \end{aligned}$$

Iterasi **Kedua**:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 &= \dots \\ x_3 &= \dots \end{aligned}$$


# ➤ Contoh Soal ➤

## Contoh Soal

$$\begin{aligned}20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\-x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18\end{aligned}$$

## Dirubah menjadi

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{17}{20} - \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3 \\x_2 &= -\frac{13}{10} + \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_3 \\x_3 &= \frac{18}{10} + \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2\end{aligned}$$

## Jawaban

Atau:

$$x_1 = 0.85 - 0.05x_2 - 0.05x_3$$

$$x_2 = -1.3 + 0.1x_1 + 0.1x_3$$

$$x_3 = 1.8 + 0.1x_1 - 0.1x_2$$

Nilai **Awal**:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$x_1 = 0.85$$

$$x_2 = -1.3$$

$$x_3 = 1.8$$

Iterasi **Kedua**:

$$x_1 = 0.85 - 0.05(-1.3) - 0.05(1.8) = 1.01$$

$$x_2 = -1.3 + 0.1(0.85) + 0.1(1.8) = -1.04$$

$$x_3 = 1.8 + 0.1(0.85) - 0.1(-1.3) = 2.01$$



# Contoh Soal



## Jawaban

Iterasi **Kedua**:

$$x_1 = 0.85 - 0.05(-1.04) - 0.05(2.01) = 1$$

$$x_2 = -1.3 + 0.1(1.01) + 0.1(2.01) = -1$$

$$x_3 = 1.8 + 0.1(1.01) - 0.1(-1.04) = 2$$

Sehingga Tabel **Metode Jacobi** sebagai berikut:

Iterasi	x_1	x_2	x_3
0	0.85	-1.3	1.8
1	1.01	-1.04	2.01
2	1.0	-1.0	2.0
3	1.0	-1.0	2.0

## ➤ Contoh Soal ➤

### Contoh Lain

- Carilah nilai  $a_0$ ,  $a_1$ , dan  $a_2$  dengan menggunakan metoda Jacobi. Hitunglah dari iterasi 0, 1, 2 dan 3.

$$\begin{aligned}8a_0 + 5a_2 &= 59 \\ -2a_0 - 7a_1 + 3a_2 &= 41 \\ -5a_1 + 12a_2 &= 104\end{aligned}$$

### Jawaban

Nilai **Awal**:  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$a_0 = \frac{59}{8} - \frac{5}{8}a_2 = 7.38$$

$$a_1 = -\frac{41}{7} - \frac{2}{7}a_0 + \frac{3}{7}a_2 = -5.86$$

$$a_2 = \frac{104}{12} + \frac{5}{12}a_1 = 8.67$$

Iterasi **Kedua**:

$$a_0 = \frac{59}{8} - \frac{5}{8}(8.67) = 1.96$$

$$a_1 = -\frac{41}{7} - \frac{2}{7}(7.38) + \frac{3}{7}(8.67) = -4.25$$

$$a_2 = \frac{104}{12} + \frac{5}{12}(-5.86) = 6.23$$

# ➤ Contoh Soal ➤

## Jawaban

Iterasi Ketiga:

$$a_0 = \frac{59}{8} - \frac{5}{8}(6.23) = 3.48$$

$$a_1 = -\frac{41}{7} - \frac{2}{7}(1.96) + \frac{3}{7}(6.23) = -3.75$$

$$a_2 = \frac{104}{12} + \frac{5}{12}(-4.25) = 6.9$$

# ➤ Metode Gauss - Seidel ➤

- Pengembangan dari Metode **Jacobi**
- Nilai  $x$  **berikutnya** langsung menggunakan nilai  $x$  yang baru didapat dari **iterasi sebelumnya**

Dengan aturan **nilai awal yang sama**:

Nilai awal:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Setiap **Iterasi**:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

# ➤ Contoh Soal ➤

## Contoh Soal

$$\begin{aligned}20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\-x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18\end{aligned}$$

## Dirubah menjadi

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.85 - 0.05x_2 - 0.05x_3 \\x_2 &= -1.3 + 0.1x_1 + 0.1x_3 \\x_3 &= 1.8 + 0.1x_1 - 0.1x_2\end{aligned}$$

## Jawaban

Nilai **Awal**:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$x_1 = 0.85$$

$$x_2 = -1.3 + 0.1(0.85) + 0.1(0) = -1.22$$

$$x_3 = 1.8 + 0.1(0.85) - 0.1(-1.22) = 2.01$$

Iterasi **Kedua**:

$$x_1 = 0.85 - 0.05(-1.22) - 0.05(2.01) = 1.01$$

$$x_2 = -1.3 + 0.1(1.01) + 0.1(2.01) = -1$$

$$x_3 = 1.8 + 0.1(1.01) - 0.1(-1) = 2$$

# ➤ Contoh Soal ➤

## Jawaban

Tabel metode **Gauss-Seidel**:

Iteration	x_0	x_1	x_2
0	0	0	0
1	0.85	-1.22	2.01
2	1.01	-1.0	2.0
3	1.0	-1.0	2.0

Tabel metode **Jacobi**:

Iterasi	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0.85	-1.3	1.8
2	1.01	-1.04	2.01
3	1.0	-1.0	2.0
4	1.0	-1.0	2.0

# Metode Gauss - Seidel

Metode **Gaus-Seidel** dan **Jacobi** tidak selalu dapat kita gunakan. Terkadang metode tersebut dapat menghasilkan hasil yang **divergen**. Agar dijamin **konvergen**, maka matriks dari konstanta harus “**dominan diagonal**” secara tepat, artinya pada sebuah baris angka mutlak pada diagonal harus **lebih besar** dari jumlah angka lainnya.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$7 > |-2| + 3$$

$$1 > 4 + |-4|$$

$$|-4| > 5 + 12$$

Karena ada yang salah, hasil yang akan didapat pasti **Divergen**. Untuk menjamin hasil dapat **Konvergen**, maka baris 2 dan 3 harus **ditukar**.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 12 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$7 > |-2| + 3$$

$$12 > 5 + |-4|$$

$$|-6| > 4 + 1$$

# ➤ Contoh Soal ➤

## Contoh Lain

Carilah nilai  $a_0$ ,  $a_1$ , dan  $a_2$  dengan menggunakan metode **Jacobi** dan **Gauss-Seidel**. Hitunglah dari iterasi 0, 1, 2 sampai 3.

$$20a_0 + a_1 - a_2 = 17$$

$$a_0 - 7a_1 + a_2 = 13$$

$$-a_0 + 12a_1 + 10a_2 = 18$$

## Jawaban

### Jacobi:

Nilai **Awal**:  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(0) + 0.05(0) = 0.85$$

$$a_1 = -1.86 + 0.14(0) + 0.14(0) = -1.86$$

$$a_2 = 1.8 + 0.1(0) - 1.2(0) = 1.8$$

Iterasi **Kedua**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(-1.86) + 0.05(1.8) = 1.03$$

$$a_1 = -1.86 + 0.14(0.85) + 0.14(1.8) = -1.48$$

$$a_2 = 1.8 + 0.1(0.85) - 1.2(-1.86) = 4.11$$

## ➤ Contoh Soal ➤

### Jawaban

Iterasi **Ketiga**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(-1.48) + 0.05(4.11) = 1.13$$

$$a_1 = -1.86 + 0.14(1.03) + 0.14(4.11) = -1.12$$

$$a_2 = 1.8 + 0.1(1.03) - 1.2(-1.48) = 3.68$$

## ➤ Contoh Soal ➤


### Jawaban


#### Gauss-Seidel:

Nilai **Awal**:  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(0) + 0.05(0) = 0.85$$


$$a_1 = -1.86 + 0.14(0.85) + 0.14(0) = -1.74$$


$$a_2 = 1.8 + 0.1(0.85) - 1.2(-1.74) = 3.97$$

## ➤ Contoh Soal ➤

### Jawaban

Iterasi **Kedua**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(-1.74) + 0.05(3.97) = 1.14$$

$$a_1 = -1.86 + 0.14(1.14) + 0.14(3.97) = -1.13$$

$$a_2 = 1.8 + 0.1(1.14) - 1.2(-1.13) = 3.27$$

Iterasi **Ketiga**:

$$a_0 = 0.85 - 0.05(-1.13) + 0.05(3.27) = 1.07$$

$$a_1 = -1.86 + 0.14(1.07) + 0.14(3.27) = -1.24$$

$$a_2 = 1.8 + 0.1(1.07) - 1.2(-1.24) = 3.39$$

## Contoh Soal



Cari persamaan polinomial ber-orde 2 terhadap data-data berikut:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Carilah nilai  $a_2 + a_1 + a_0$  dengan menggunakan Jacobi dan Gauss-Seidel (antar baris jangan di tukar) carilah iterasi 1 dan iterasi 2.

$x$	$y$
3	15
4	32
5	55
6	84
7	119



## ➤ Jawaban ➤

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$n = 5$$

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
3	15	9	27	81	45	135
4	32	16	64	256	128	512
5	55	25	125	625	275	1375
6	84	36	216	1296	504	3024
7	119	49	343	2401	833	5831
$\Sigma = 25$	$\Sigma = 305$	$\Sigma = 135$	$\Sigma = 775$	$\Sigma = 4659$	$\Sigma = 1785$	$\Sigma = 10877$

➤ **Persamaan Simulasi untuk orde 2** ➤

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$

$$5a_0 + 25a_1 + 135a_2 = 305$$

$$25a_0 + 135a_1 + 775a_2 = 1785$$

$$135a_0 + 775a_1 + 4659a_2 = 10877$$

# ➤ Metode Jacobi ➤

Nilai **Awal**:  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$a_0 = \frac{305 - 25(0) - 135(0)}{5} = 61$$

$$a_1 = \frac{1785 - 25(0) - 775(0)}{135} = 13.22$$

$$a_2 = \frac{10877 - 135(0) - 775(0)}{4659} = 2.33$$

## **Metode Jacobi**

Iterasi **Kedua**:

$$a_0 = \frac{305 - 25(13.22) - 135(2.33)}{5} = -68.15$$

$$a_1 = \frac{1785 - 25(61) - 775(2.33)}{135} = -11.48$$

$$a_2 = \frac{10877 - 135(61) - 775(13.22)}{4659} = -1.63$$

## ➤ Metode Gauss - Seidel ⚡

Nilai **Awal**:  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Iterasi **Pertama**:

$$a_0 = \frac{305 - 25(0) - 135(0)}{5} = 61$$

$$a_1 = \frac{1785 - 25(61) - 775(0)}{135} = 1.93$$

$$a_2 = \frac{10877 - 135(61) - 775(1.93)}{4659} = 0.25$$

## ➤ Metode Gauss-Seidel ➤

Iterasi **Kedua**:

$$a_0 = \frac{305 - 25(1.93) - 135(0.25)}{5} = 44.71$$

$$a_1 = \frac{1785 - 25(44.71) - 775(0.25)}{135} = 3.53$$

$$a_2 = \frac{10877 - 135(44.71) - 775(3.53)}{4659} = 0.45$$

<https://its.id/m/komnum25>

Komnum PPT 7

# Tugas Kelompok

1. Buatlah contoh soal sendiri, boleh mengarang atau mengambil dari internet:
  - a. Cari persamaan polynomial ber-orde 2 terhadap table (buatan sendiri) dan dijawab dengan menggunakan Jacobi 4 iterasi → 5 kelompok
  - b. Cari persamaan polynomial ber-orde 2 terhadap table (buatan sendiri) dan dijawab dengan menggunakan Gauss seidel 4 iterasi → 5 kelompok

Ditanya :

- Tiap iterasi cari  $E_t$  dan  $E_a$
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Cari dari iterasi 1 sampai iterasi 3
- Tuliskan rumusnya terlebih dahulu



<https://its.id/m/komnum25>

Komnum PPT 7

**PR!!**



Buatlah soal anda sendiri, kemudian carilah nilai  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$  dengan menggunakan :

1. Gauss
2. Gauss – jourdan
3. Invers adjoint
4. Invers OBE
5. Cramer
6. Jacobi → 6 iterasi
7. Gauss-Seidel → 6 iterasi

Komnum PPT 7



# TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali

