Komputasi Numerik

PERTEMUAN 13

Integrasi

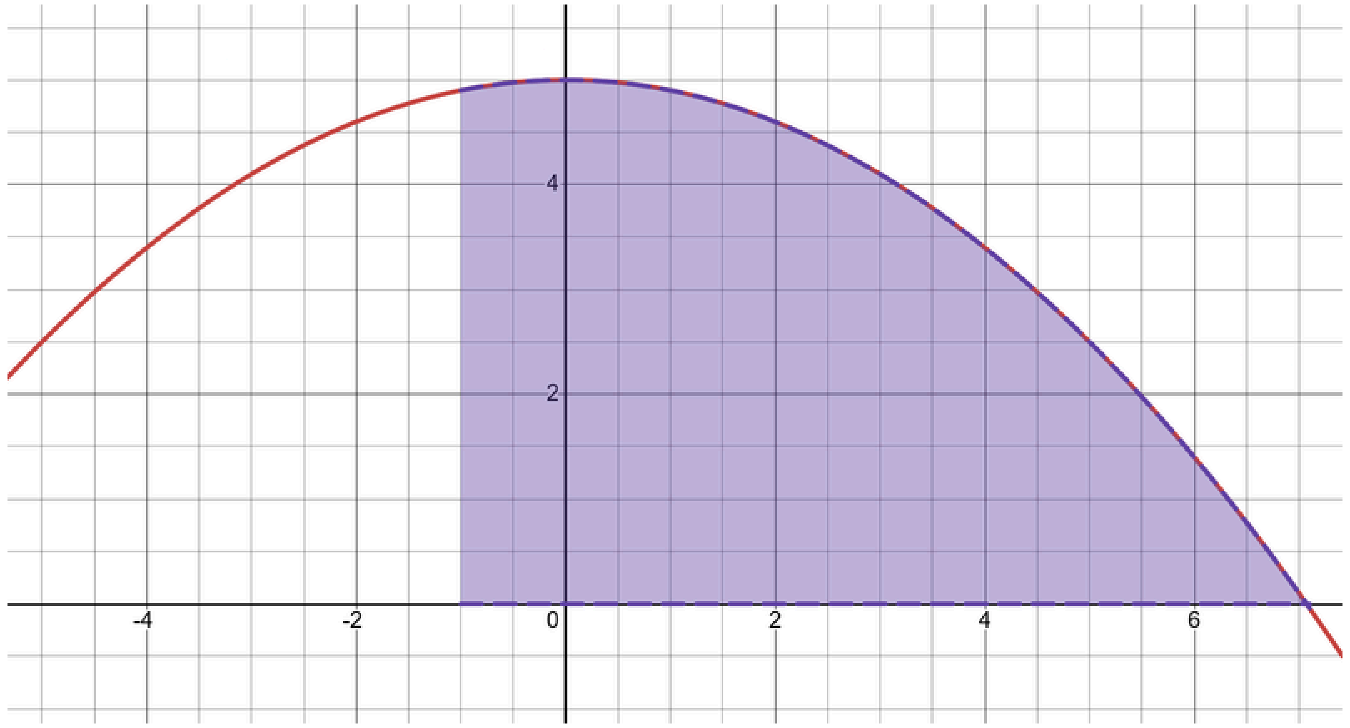
2024/2025

KOMNUM Week 13

Integrasi

Tujuan: Mencari luas area di bawah sebuah kurva

Contoh:



$$L = \int_a^b f(x)\, dx$$

KOMNUM Week 13

Integrasi

01 Trapesium

02 Trapesium Segmen berganda

03 Simpson 1/3

04 Simpson ⅓ segmen berganda

05 Simpson 3/8

7.1 Aturan Trapesium

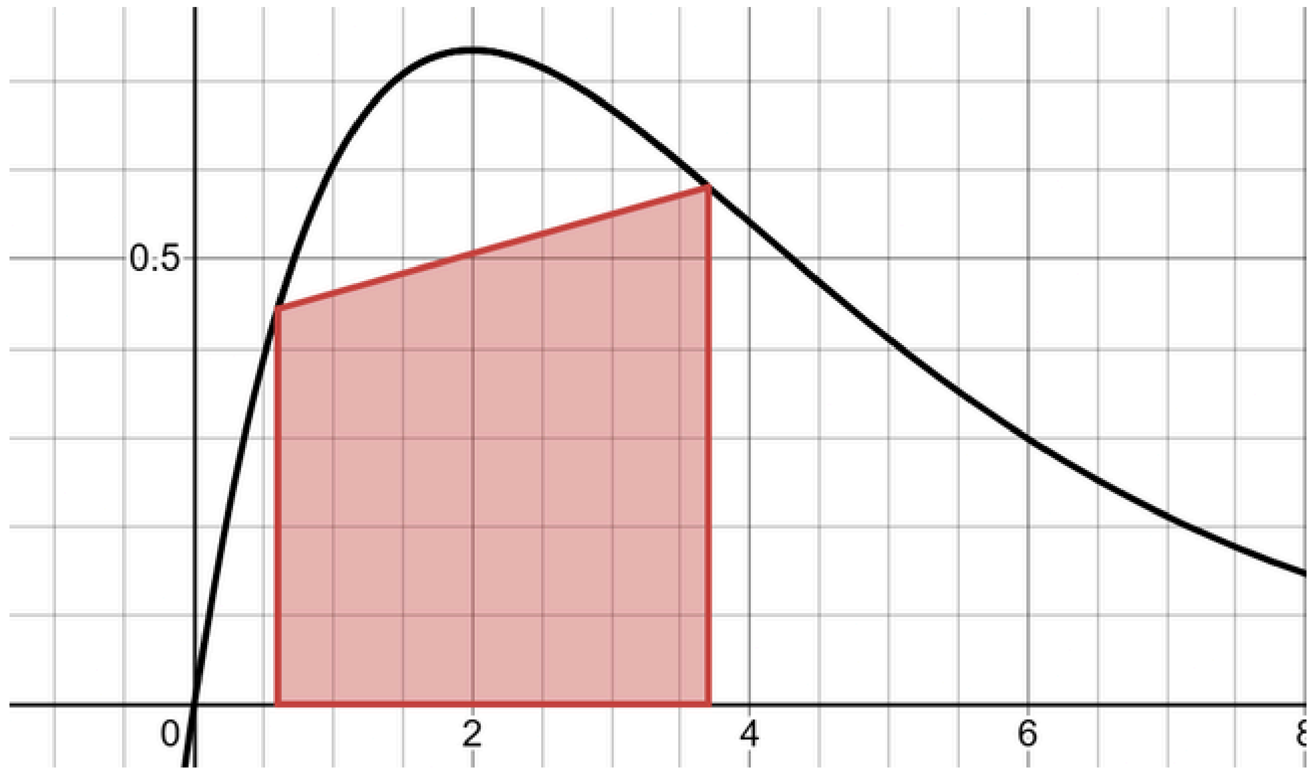
Contoh: 13.1

Hitung integral dari fuungsi f(x) di bawah ini menggunakan aturan trapesium

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 sampai b = 0.8

$$L = \text{alas} \times \text{tinggi rata-rata}$$
$$= (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Sub: Harga Sesungguhnya

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{0.8} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\,dx \\
&= \left[0.2x + \frac{25}{2}x^2 - \frac{200}{3}x^3 + \frac{675}{4}x^4 - \frac{900}{5}x^5 + \frac{400}{6}x^6\right]_0^{0.8} \\
&= 1.64053334
\end{aligned}
$$

Harga L jika menggunakan metode trapesium

$$a = 0 \qquad f(a) = f(0) = 0.2$$

$$b = 0.8 \qquad f(b) = f(0.8) = 0.232$$

$$L = (0.8 - 0) \cdot \frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.8 \cdot \frac{0.432}{2} = 0.1728$$

Error Estimasi

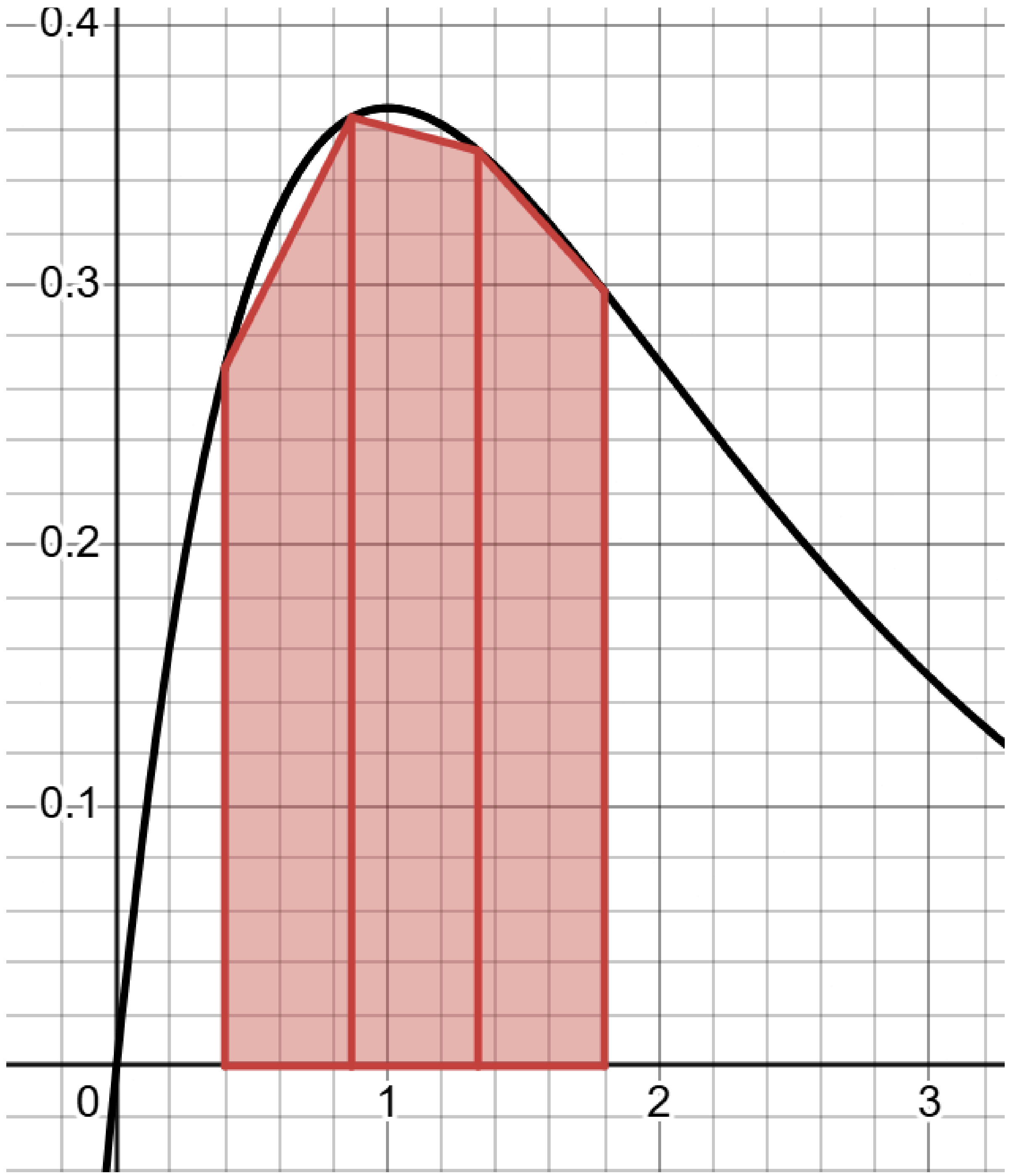
$$E = 85.9\%$$

Komnum Week 13

Integrasi

- untuk memperbaiki trapesium
- membagi menjadi beberapa segmen
- lebar antar segmen sama
- menerapkan metode trapesium pada tiap segmen
- menjumlahkan seluruh segmen untuk mendapatkan luas

Komnum Week 13



Diketahui:

$$b = 3, \quad a = 0, \quad n = 3$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = 1$$

Penyusun Intergral:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Menggunakan Trapesium:

$$L = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h \cdot \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + h \cdot \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

dengan menyederhanakan suku-suku:

$$L = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

substitusi $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$L = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}\right]$$

Alas

Tinggi rata-rata

Contoh 13.2:

Gunakan aturan trapesium dengan 2 segmen untuk menaksir integral dari

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a=0 sampai b=0,8 dengan LLuas sebenanrnya= 1,6405333

$$L = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Maka:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{2} = 0.4$$

$$f(0) = 0.2, \quad f(0.4) = 2.456, \quad f(0.8) = 0.232$$

$$\begin{aligned} L &= (0.8-0)\cdot\frac{0.2+2\cdot 2.456+0.232}{4} \\ &= 0.8\cdot\frac{0.2+4.912+0.232}{4} \\ &= 0.8\cdot\frac{5.344}{4} \\ &= 1.0688 \end{aligned}$$

$$E = 34.9\%$$

Hasil integral dari integral trapesium berganda untuk

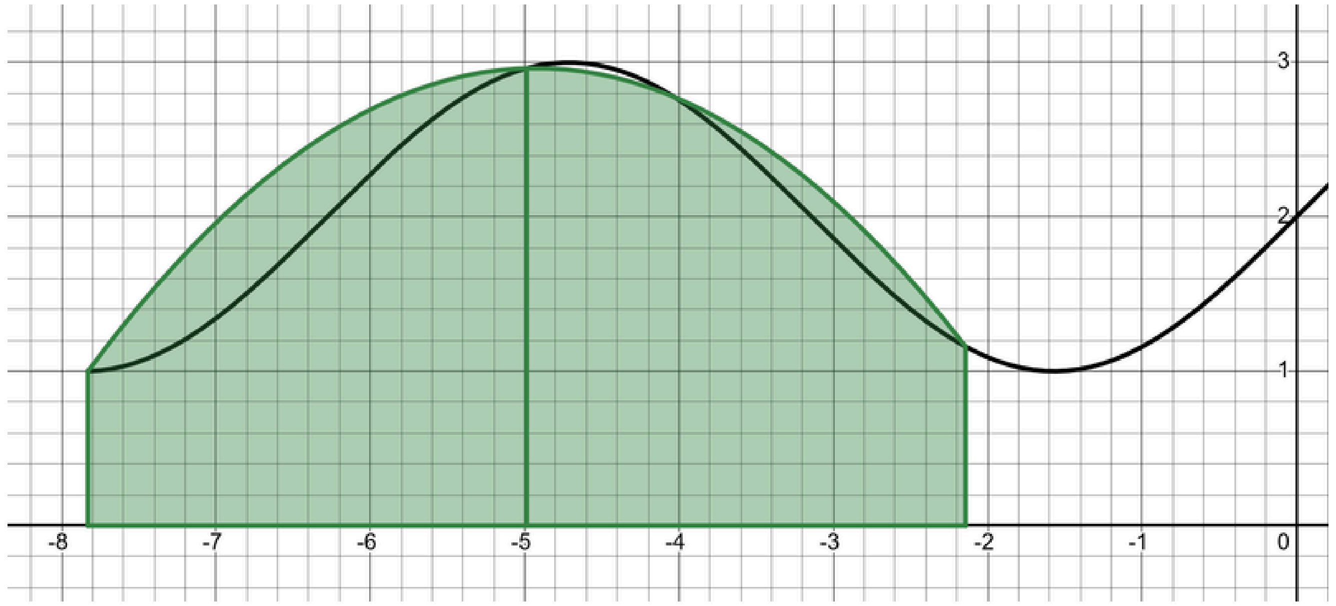
$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 sampai b = 0.8 dapat dilihat pada tabel berikut

n	h	L	$E\,\%$
2	0,4	1,0688	34,9
3	0,2667	1,3695	16,5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
10	0,08	1,615	1,6

7.2 Aturan Simpson

7.2.1 Aturan Simpson ⅓



Lebih teliti dari pada metode Trapesium denga n = 2

Contoh:

Gunakan metode Simpson ⅓ untuk menaksir nilai integral dari:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 sampai b = − 0.8. Perlu diingat, jika nilai sebenarnya adalah 1.64

Komnum Week 13

Gunakan metode Simpson ⅓ untuk menaksir nilai integral dari:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 sampai b = - 0.8

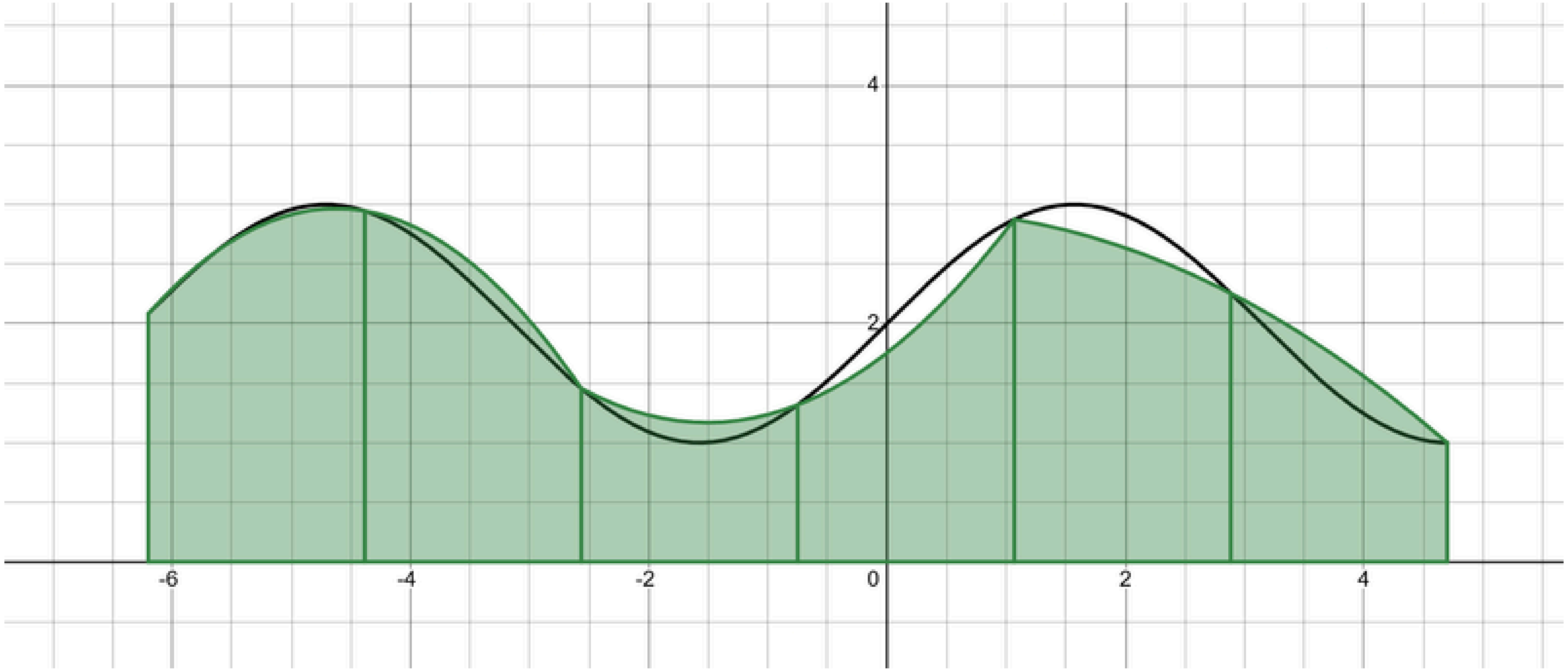
$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0.2$$
$$x_1 = 0.4 \rightarrow f(x_1) = 2.46$$
$$x_2 = 0.8 \rightarrow f(x_2) = 0.23$$

$$L = (0.8 - 0)\frac{0.2 + 4 \times 2.46 + 0.23}{6}$$
$$= 1.37$$

$$E_t = 16.62\%$$

7.2.2 Aturan Simpson ⅓ segmen berganda

Berlaku jika segmen berjumlah GENAP



$$L = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)\right)$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$L = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ganjil}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ genap}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Atau sebagai berikut:

$$L = \frac{(b-a)}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ganjil}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ genap}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Contoh:

Gunakan aturan simpson $\frac{1}{3}$ segmen berganda dengan n=4 untuk menaksir harga integral dari:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a=0 sampai b=0,8 dengan harga asli adalah 1.64

$$n = 4 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$$

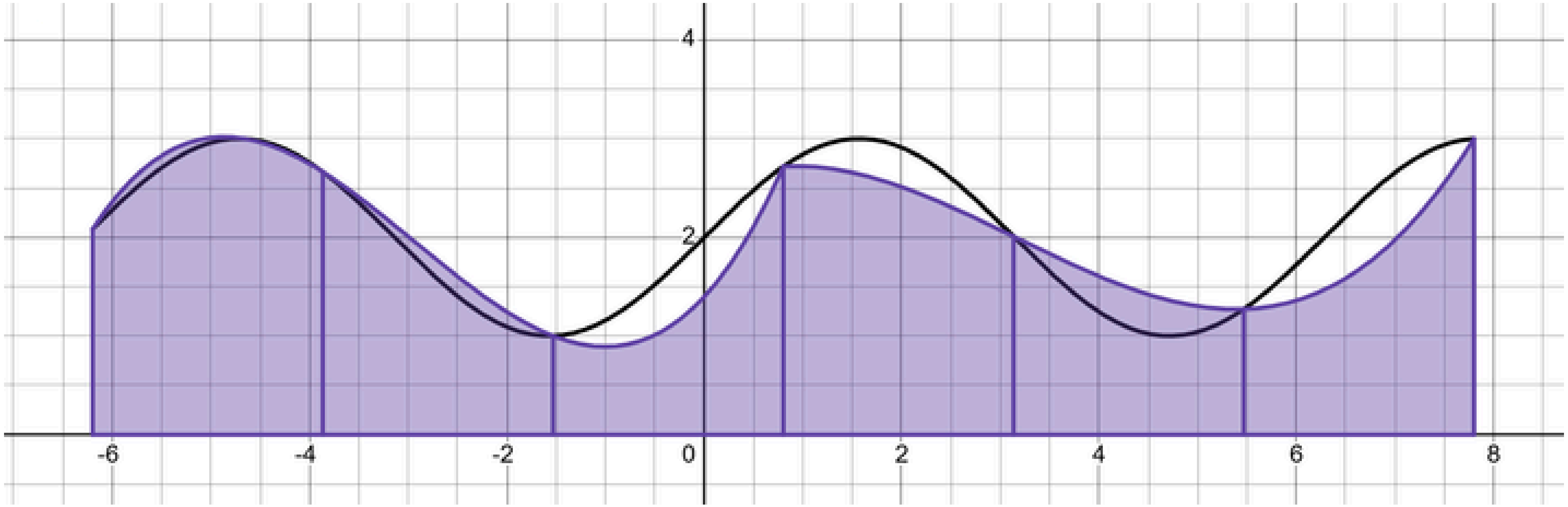
$$\begin{aligned} f(0) &= 0.2 \\ f(0.2) &= 1.29 \\ f(0.4) &= 2.46 \\ f(0.6) &= 3.46 \\ f(0.8) &= 0.23 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan Luas sebesar:

$$\begin{aligned} L &= \frac{0.2}{3}[0.2 + 4(1.29 + 3.46) + 2(2.46) + 0.23] \\ &= 1.62 \\ E_t &= 1.01\% \end{aligned}$$

7.2.3 Aturan Simpson ⅜

Berlaku jika segmen berjumlah KELIPATAN 3 (3, 6, 9, ...)



Komnum Week 13

Gunakan aturan simpson 3/8 utk mengintegralkan :

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a=0 sampai b=0,8

Jawab:

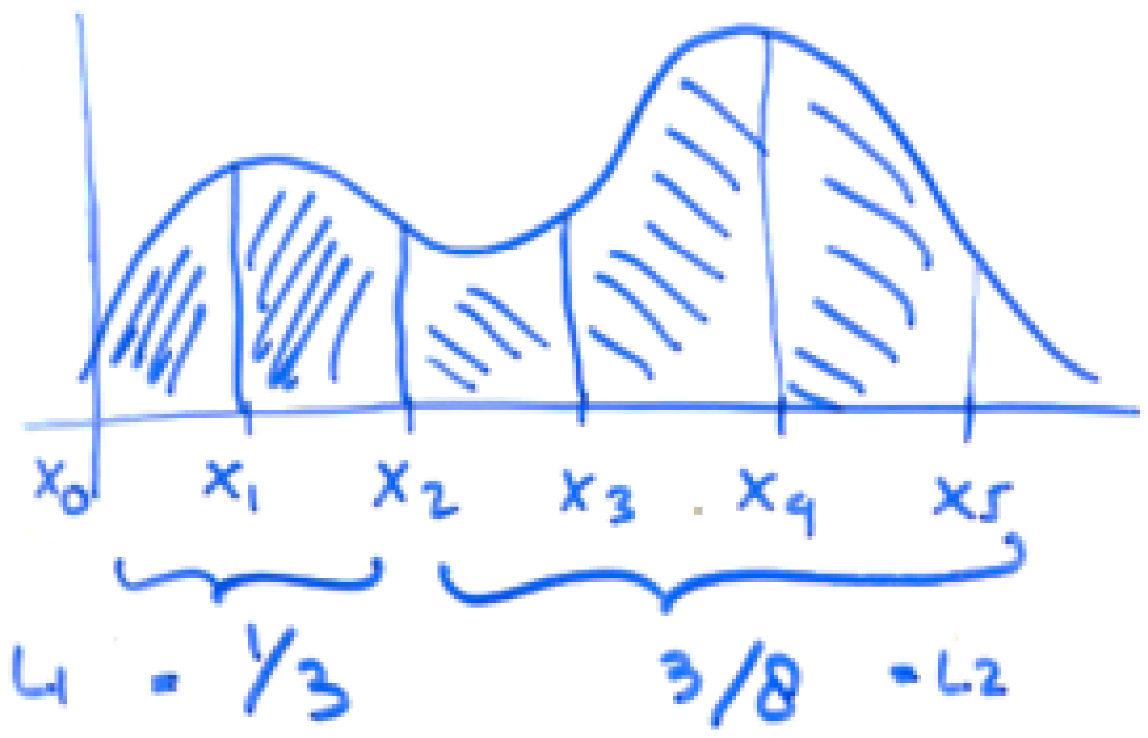
$$n = 3 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{3} = 0.27$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0.2 \\ f(0.27) &= 1.29 \\ f(0.53) &= 2.46 \\ f(0.8) &= 3.46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{3 \times 0.27}{8} [0.2 + 3(1.29 + 2.46) + 3.46] \\ &= 1.52 \\ E_t &= 7.37\% \end{aligned}$$

Kita memerlukan 5 segmen, sehingga:

$$h = \frac{0.8}{5} = 0.16$$



$$f(0.0) = 0.2$$
$$f(0.16) = 1.3$$
$$f(0.32) = 1.74$$
$$f(0.48) = 3.19$$
$$f(0.64) = 3.18$$
$$f(0.8) = 0.23$$

$$L_1 = \frac{0.32}{2 \times 3}[0.2 + 4(1.3) + 1.74]$$
$$= 0.38$$

$$L_2 = \frac{3 \times 0.16}{8}[1.74 + 3(3.18) + 0.23]$$
$$= 1.26$$

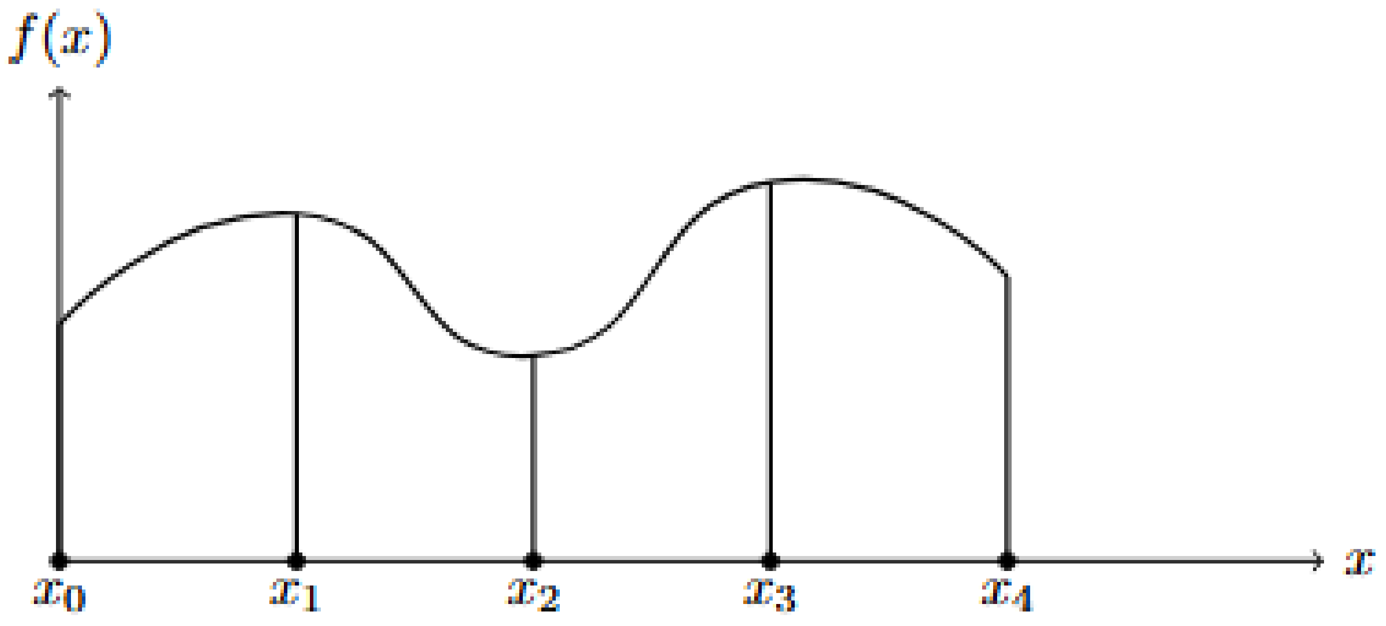
$$L = L_1 + L_2 = 0.38 + 1.26 = 164$$
$$E_t = 0\%$$

7.3 Integrasi dengan segmen tidak sama

- Sub Bab sebelumnya → segmen sama
- Sub Bab saat ini → pada kenyataannya banyak segmennya yang tidak sama

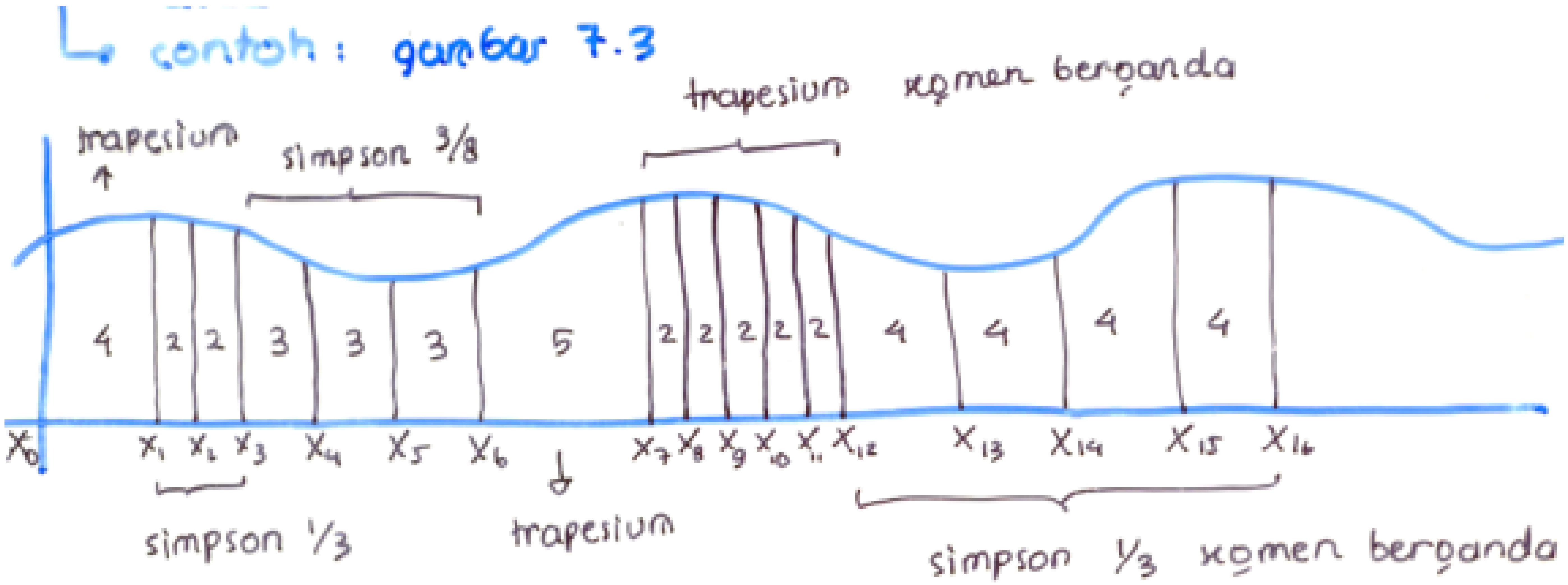
Cara:

- Menerapkan aturan trapesium pada tiap segmen

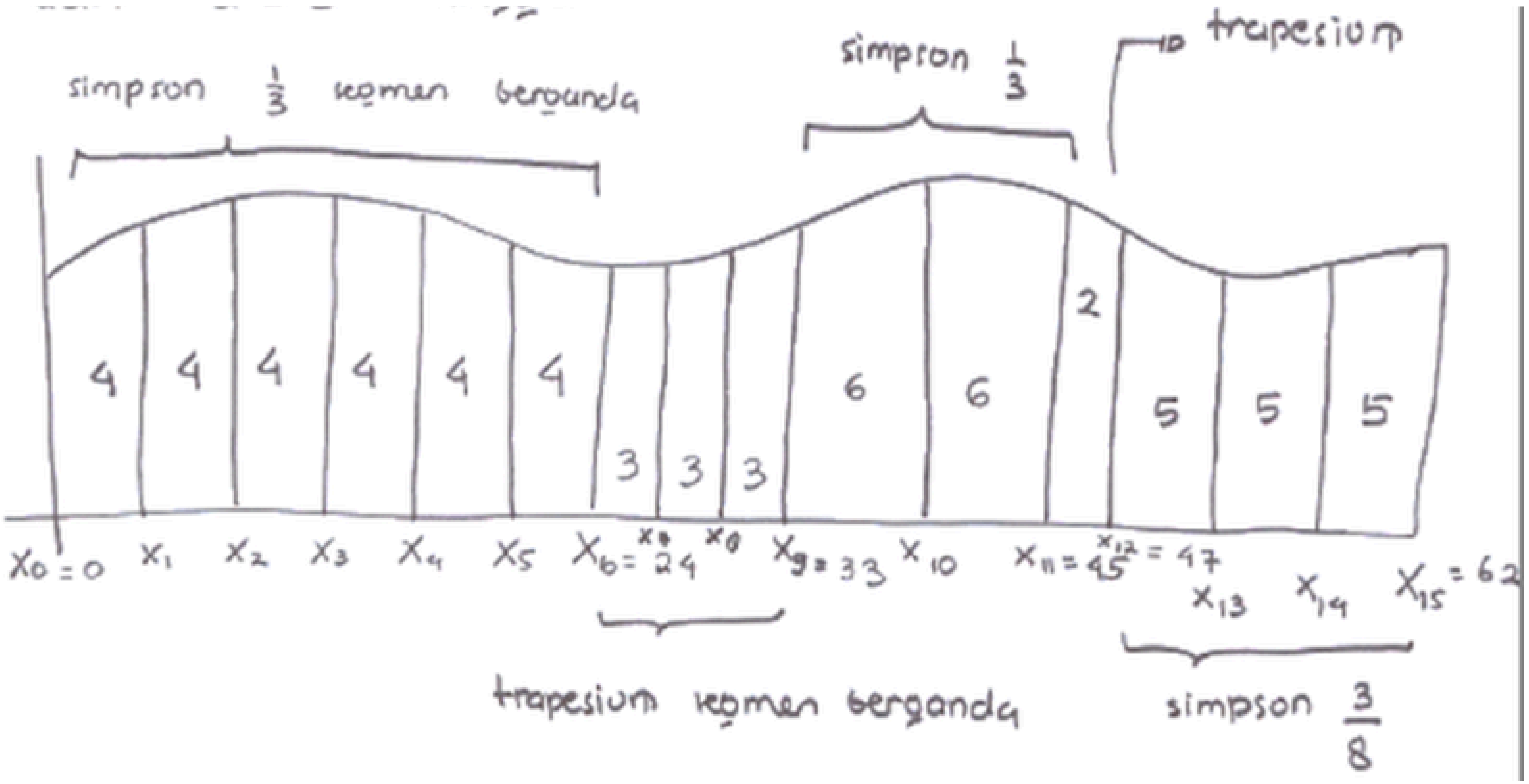


$$L = h_1 \cdot \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h_2 \cdot \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \cdots + h_n \cdot \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

Jika memungkinkan, kita bisa menggunakan aturan Trapesium atau Simpson
Contoh: gambar 7.3



Gunakan aturan: Trapesium, Trapesium segmen berganda, Simpson ⅓, Simpson ⅓ segmen berganda dan Simpson ⅜. Aturan-Aturan ini digunakan untuk mengintergrasikan $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ dari a = 0 hingga b = 62



Cari luas sebenarnya

- **Dengan menggunakan integral**
  $F(x) = 3x^2 + 7x - 5$

- **Luas sebenarnya:**

$$\left[\frac{x^3}{1} + \frac{7}{2}x^2 - 5x\right]_0^{62}$$

luas sebenarnya ⇒ 251.472

Jawaban

jawab :

a) simpson $\frac{1}{3}$ segmen berganda

$$\left.\begin{array}{l} n = 6 \\ a = 0 \\ b = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{24-0}{6} = 4$$

$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 3.0^2 + 7.0 - 5 = -5$ 2

$x_1 = 4 \Rightarrow f(4) = 3.4^2 + 7.4 - 5 = 71$ 2

$x_2 = 8 \Rightarrow f(8) = 3.8^2 + 7.8 - 5 = 243$ 2

$x_3 = 12 \Rightarrow f(12) = 3.12^2 + 7.12 - 5 = 511$ 2

$x_4 = 16 \Rightarrow f(16) = 3.16^2 + 7.16 - 5 = 875$ 2

Jawaban

$X_5 = 20 \Rightarrow f(20) = 3 \cdot 20^2 + 7 \cdot 20 - 5 = 1335$ (2)

$X_6 = 24 \Rightarrow f(24) = 3 \cdot 24^2 + 7 \cdot 24 - 5 = 1891$ (2)

$$L = (b-a) \cdot \frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)]}{3 \cdot n}$$

$$L = (24-0) \cdot \frac{[-5 + 4 \cdot 71 + 2 \cdot 243 + 4 \cdot 511 + 2 \cdot 875 + 4 \cdot 1335 + 1891]}{3 \cdot 6}$$ (2)

$L = 15.720$ (2)

Jawaban

b) trapezium ragam berganda :

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ a = 24 \\ b = 33 \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{33-24}{3} = 3$$

$x_0 = 24 \Rightarrow f(24) = 3 \cdot 24^2 + 7 \cdot 24 - 5 = 1891$

$x_1 = 27 \Rightarrow f(27) = 3 \cdot 27^2 + 7 \cdot 27 - 5 = 2371$ (2)

$x_2 = 30 \Rightarrow f(30) = 3 \cdot 30^2 + 7 \cdot 30 - 5 = 2905$ (2)

$x_3 = 33 \Rightarrow f(33) = 3 \cdot 33^2 + 7 \cdot 33 - 5 = 3493$ (2)

$$L = (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + f(x_3)}{2 \cdot n}$$

$$= (33-24) \cdot \frac{1891 + 2 \cdot 2371 + 2 \cdot 2905 + 3493}{2 \cdot 3}$$ (2)

$L = 23.904$ (2)

Jawaban

(c) simpson $\frac{1}{3}$

$n = 2$

$a = 33$

$b = 45$

$X_0 = 33 \Rightarrow f(33) = 3493$

$X_1 = 39 \Rightarrow f(39) = 3 \cdot 39^2 + 7 \cdot 39 - 5 = 4831$ (2)

$X_2 = 45 \Rightarrow f(45) = 3 \cdot 45^2 + 7 \cdot 45 - 5 = 6385$ (2)

$$L = (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$= (45-33) \cdot \frac{3493 + 4 \cdot 4831 + 6385}{6}$$

$L = 58.404$ (2)

Jawaban

d) trapezium :

$a = 45 \Rightarrow f(45) = 6385$

$b = 47 \Rightarrow f(47) = 3.47^2 + 7.47 - 5 = 6951$ 2

$$L = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$= (47-45) \cdot \frac{6385 + 6951}{2}$$

$L = 13.336$ 2

Jawaban

(e) Simpson $\frac{3}{8}$:

$a = 47$

$b = 62$

$X_0 = 47 \Rightarrow f(47) = 6951$

$X_1 = 52 \Rightarrow f(52) = 3 \cdot 52^2 + 7 \cdot 52 - 5 = 8471$ (2)

$X_2 = 57 \Rightarrow f(57) = 3 \cdot 57^2 + 7 \cdot 57 - 5 = 10\,141$ (2)

$X_3 = 62 \Rightarrow f(62) = 3 \cdot 62^2 + 7 \cdot 62 - 5 = 11\,961$ (2)

$$L = (b-a) \cdot \frac{f(X_0) + 3f(X_1) + 3 \cdot f(X_2) + f(X_3)}{8}$$

$$= (62 - 47) \cdot \frac{6951 + 3 \cdot 8471 + 3 \cdot 10141 + 11961}{8}$$ (2)

$L = 140\,152{,}5$ (2)

Jawaban

$\therefore$ luas total adalah : $L = 15720 + 23904 + 58404 + 13336 + 140152,5$

$L = 251516,5$ 2

$$Error = \frac{|251.472 - 251.516,5|}{251.472 \times 100\%}$$

$$Error = 0,02\%$$

Soal 1

Diketahui:

- $f(x) = 3x^5 - 8x^4$
- Batas atas = 16
- Batas bawah = 4

Ditanya:

- Cari luas sebenarnya dengan **Integral**!

Jawaban Soal 1

Selesaikan Persamaan dengan Integral

$$\int_{4}^{16} f(x) = \int_{4}^{16} 3x^5 - 8x^4 = \left[\frac{3}{6}x^6 - \frac{8}{5}x^5\right]_{4}^{16}$$

$$= \left(\frac{3}{6}(16)^6 - \frac{8}{5}(16)^5\right) - \left(\frac{3}{6}(4)^6 - \frac{8}{5}(4)^5\right)$$

$$= 6.710.476,8$$

Soal 2

Diketahui:

- $f(x) = 3x^5 - 8x^4$
- Batas atas = 16
- Batas bawah = 4

Ditanya:

- Cari hasil dari fungsi berikut!
    - f(4)
    - f(7)
    - f(10)
    - f(13)
    - f(16)
- Cari luas persamaan dengan **Simpson 1/3 Segmen Berganda** dan error dari hasilnya!

Jawaban Soal 2a

masukkan Xi ke dalam fungsi

$$f(4) = 3(4)^5 - 8(4)^4 = 1024$$

$$f(7) = 3(7)^5 - 8(7)^4 = 31213$$

$$f(10) = 3(10)^5 - 8(10)^4 = 220000$$

$$f(13) = 3(13)^5 - 8(13)^4 = 885391$$

$$f(16) = 3(16)^5 - 8(16)^4 = 2621440$$

Jawaban Soal 2b

masukkan Xi ke dalam fungsi

a. $Luas = (b - a)\frac{[f(x_0)+4\sum_{i=1,3}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=2,4}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)]}{3n}$

b. $Luas = (16 - 4)\frac{[1024+4(31{,}213+885{,}391)+2(220000)+2621440]}{3\times4} = 6728880$

c. $Error = \frac{6.710.476{,}8-6728880}{6.710.476{,}8}\times100 = 0{,}27$

Jadi luas dari f(x) dan errornya adalah 6728880 dan 0,27

https://its.id/m/komnum25

Komnum Week 13

Tugas Individu

Hitunglah integral dari fungsi f(x) = $-4 + 7x^2$ dengan menggunakan aturan :

a. $x_0 - x_4$ menggunakan simpson 1/3 segmen berganda

b. $x_4 - x_7$ menggunakan simpson 3/8

c. $x_7 - x_{10}$ menggunakan trapesium segmen berganda

X	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
angka	0	3	6	9	12	16	20	24	26	28	30 49

Komnum Week 5

TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali