

Komputasi Numerik



PERTEMUAN 5



Newton-Raphson yang dimodifikasi + Faktorisasi




2024/2025





Komnum Week 5

Apa Yang Akan Kita Pelajari?

-  01 Metoda Terbuka: Newton-Raphson yang dimodifikasi
-  02 Faktorisasi
-  03 Tugas 3

Dalam pertemuan ini kita akan melanjutkan metode-metode untuk mencari akar-akar persamaan (Metode Terbuka).

Akar Ganda



Sebuah akar ganda:

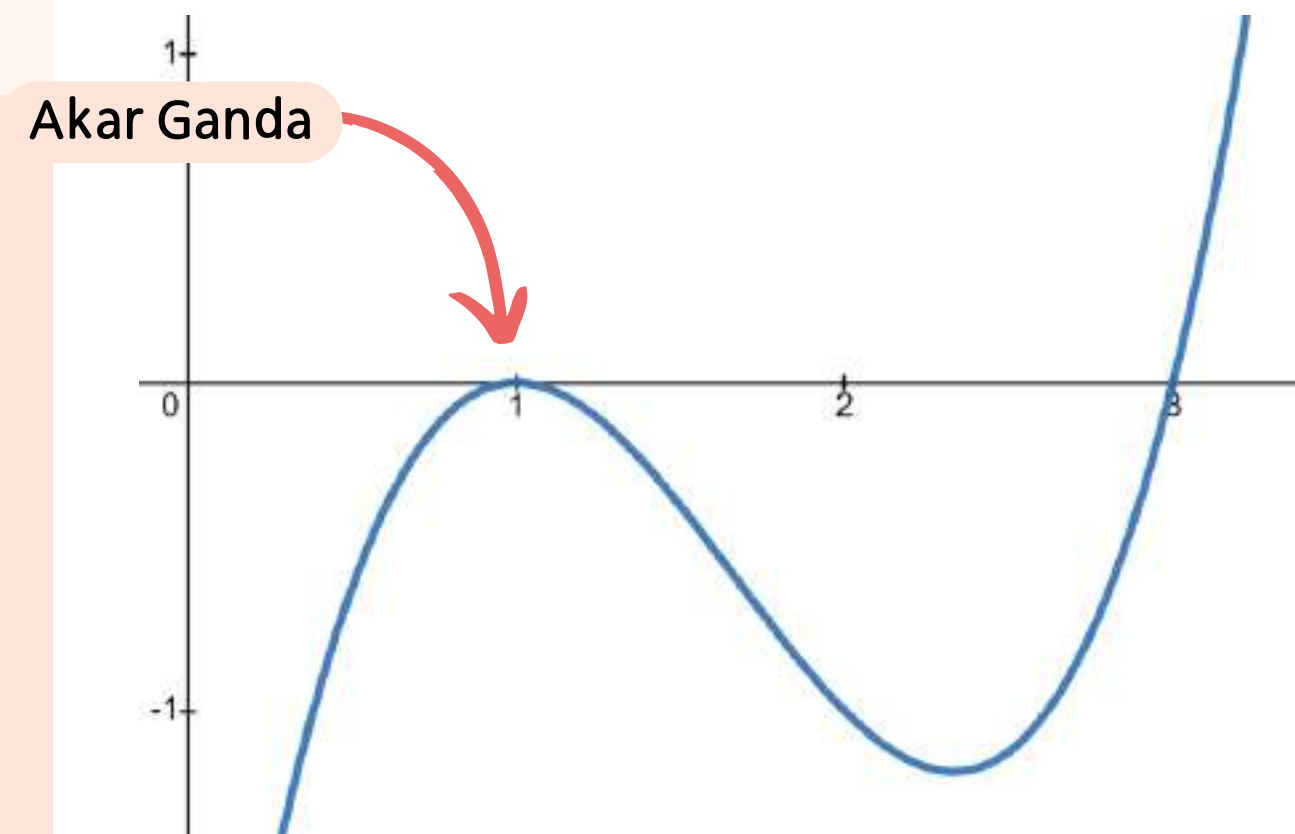
- Berhubungan dengan suatu titik dimana sebuah fungsi **menyinggung** sumbu-x
- Akar-Akar berjumlah **genap**

Contoh:

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)$$

Persamaan memiliki akar ganda karena suatu harga x membuat kedua suku pada persamaan di atas bernilai 0, yaitu $x = 1$

Grafik



Akar Triple

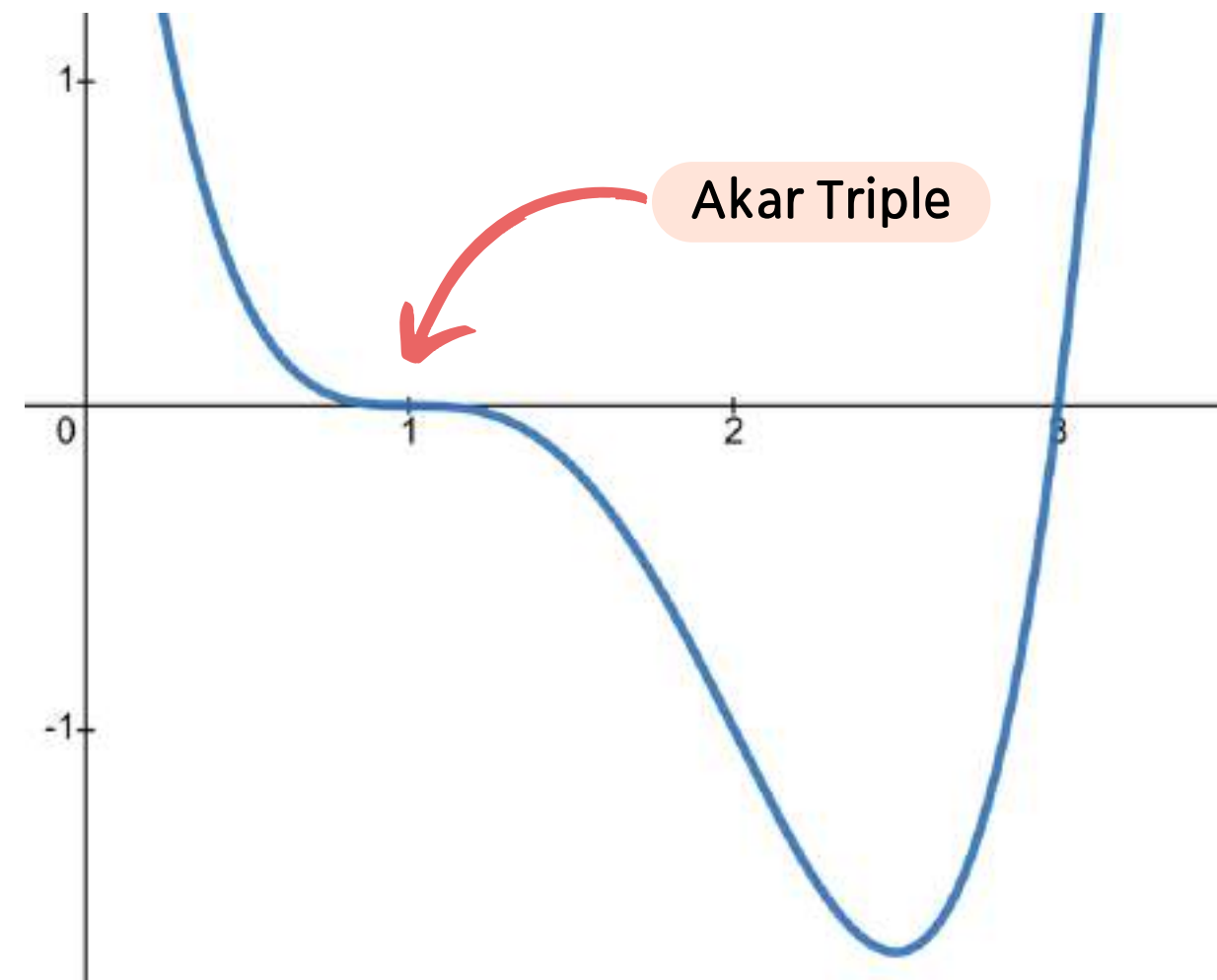
- Akar **ganjil**
- Jika nilai **x** membuat **3 suku** dalam persamaan menjadi **0**
- Menyinggung dan Memotong sumbu-**x**



Contoh:

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Grafik:



➤ **Newton-Raphson yang Dimodifikasi** ⚡

Rumus dengan metoda Newton-Raphson yang **dimodifikasi**:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

Gunakan:

- Newton-Raphson Standar
- Newton-Raphson yang dimodifikasi untuk mencari akar-akar ganda:
 - $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)$
 - $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

1. Newton-Raphson Standar

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

Tebakan awal, $x_0 = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

iterasi i	x_i	$ f(x_i) $	Ea %
0	0	1002	
1	0,42057	57	
2	0,68571	31	
⋮	⋮	⋮	
6	0,97765	2,2	

$$E_a = \left| \frac{\text{sebenarnya} - \text{aproximasi}}{\text{sebenarnya}} \right| \times 100\%$$

$$E_a = \left| \frac{\text{aprox}_{\text{sekarang}} - \text{aprox}_{\text{sebelumnya}}}{\text{aprox}_{\text{sekarang}}} \right| \times 100\%$$

2. Newton-Raphson yang dimodifikasi

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 10$$

Tebakan awal, $x_0 = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i - 10x_i + 7)}{[3x_i - 10x_i + 7]^2 - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

i	x_i	$ Et $	Ea %
0	0	100	
1	0,105263	11	
2	1,00308	0,31	
3	1,000002	0,00024	

$$E_a = \left| \frac{\text{sebenarnya} - \text{aproximasi}}{\text{sebenarnya}} \right| \times 100\%$$

$$E_a = \left| \frac{\text{aprox}_{\text{sekarang}} - \text{aprox}_{\text{sebelumnya}}}{\text{aprox}_{\text{sekarang}}} \right| \times 100\%$$

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Untuk akar $x = 3$, maka tebakan awal $x_0 = 4$

i	NR standar, ϵ_t	NR mod, ϵ_t
0	4 (33%)	4 (33%)
1	3,4 (18%)	2,6863 (12%)
\vdots	\vdots	\vdots
5	3,000 (0,00...%)	2,444... (0,00...%)

- Untuk **akar ganda**, jika menggunakan **Newton-Raphson yang dimodifikasi** hasilnya lebih baik daripada menggunakan **Newton-Raphson Standar**
- Untuk **akar biasa**, menggunakan **Newton-Raphson Standar** hasilnya lebih baik daripada **Newton-Raphson yang dimodifikasi**

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Contoh Soal 1

Diketahui:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 42x + 90$$

$$x_0 = 2$$

nilai x sebenarnya = 3

Ditanya:

- Cari akar x
- Tiap iterasi cari Et dan Ea
- Ketelitian 2 angka di belakang koma
- Cari iterasi 1 sampai 2

Rumus

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

Jawaban Contoh 1

$x_{i+1} =$	x_i	-	$\frac{f(x_i) \cdot f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \cdot f''(x_i)}$
$f(x) =$	$2x^3 - 2x^2 - 42x + 90$		
$f'(x) =$	$6x^2 - 4x - 42$		
$f''(x) =$	$12x - 4$		

iterasi 1 sebenarnya **3**

$x_0 =$	2
$f(x_0) =$	$2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 90 = 14$
$f'(x_0) =$	$6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 42 = -26$
$f''(x_0) =$	$12 \cdot 2 - 4 = 20$

$$x_1 = 2 - \frac{14 \cdot -26}{(-26)^2 - 14 \cdot 20} = 2.92$$

$x_1 =$ **2.92**

$E_t =$	$\frac{3 - 2.92}{3} \cdot 100 = 2.69$
$E_a =$	$\frac{2.92 - 2.00}{2.92} \cdot 100 = 31.49$

Jawaban Contoh 1

iterasi 2

$$x_1 = 2.92$$

$$f(x_0) = 2 \cdot 2.92^3 - 2 \cdot 2.92^2 - 42 \cdot 2.92 + 90$$

$$f'(x_0) = 6 \cdot 2.92 - 4 \cdot 2.92 - 42$$

$$f''(x_0) = 12 - 4$$

$$f(x_1) = 0.103$$

$$f'(x_1) = -2.547$$

$$f''(x_1) = 31.030$$

$$x_2 = 2.92 - \frac{0.10 \cdot -2.55}{-2.55 - 2 \cdot 0.1 \cdot 31}$$

$$x_2 = 3.00$$

$$E_t = \frac{3 - 3.00}{3} \cdot 100$$

$$E_t = 0.01$$

$$E_a = \frac{3.00 - 2.92}{3.00} \cdot 100$$

$$E_a = 2.68$$

Newton-Raphson yang dimodifikasi

Contoh Soal 2

Diketahui:

$$f(x) = 12x^3 - 30x^2 - 84x + 48$$

$$x_0 = -1$$

nilai x sebenarnya = -2

Ditanya:

- Cari akar x
- Tiap iterasi cari Et dan Ea
- Ketelitian 2 angka di belakang koma
- Cari iterasi 1 sampai 3

Rumus

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \times f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \times f''(x_i)}$$

Jawaban Contoh 2

$X_{i+1} =$	X_i	-	$f(X_i)$		$f'(X_i)$									
			$[f'(X_i)]^2$		-	$f(X_i) \cdot f''(X_i)$								
$f(x) =$	12	x	^	3	+	-30	x	^	2	+	-84	x	+	48
$f'(x) =$	36	x	^	2	+	-60	x	+	-84					
$f''(x) =$	72	x	+	-60										
iterasi 1			sebenarnya			-2								
$x_0 =$	-1													
$f(X_0) =$	12	-1	^	3	+	-30	-1	^	2	+	-84	-1	+	48
$f'(X_0) =$	36	-1	^	2	+	-60	-1	+	-84					
$f''(X_0) =$	72	-1	+	-60										
$f(X_0) =$	90													
$f'(X_0) =$	12													
$f''(X_0) =$	-132													
$X_1 =$	-1	-	90	12										
			12	^	2	-	90	-132						
$X_1 =$	-1,09													

$E_t =$	-2	-	-1,09	*	100
		-2			
$E_t =$	45,51				
$E_a =$	-1,09	-	-1,00	*	100
		-1,09			
$E_a =$	8,24				

Jawaban Contoh 2

[illegible][illegible]

Jawaban Contoh 3

Diketahui:

- $f(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 84$
- $x_0 = 1$
- Nilai x sebenarnya = 4

Ditanya:

- Cari akar X menggunakan **Metoda Newton-Raphson Termodifikasi**
- Tiap iterasi cari E_t dan E_a
- Ketelitian 2 angka di belakang
- Cari iterasi 1 sampai 3

Jawaban Contoh 3

$$1. x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \cdot f''(x_i)}$$

$$2. f'(x) = 3x^2 + 12x - 19$$

$$3. f''(x) = 6x + 12$$

$$4. \text{ Pada iterasi 1, } x_1 = 1 - \frac{-96 \times -4}{16 - (-96) \times 18} = 0,78$$

$$5. Et = \frac{4 - 0,78}{4} \times 100\% = 80,5$$

$$6. Ea = \frac{0,78 - 1}{0,78} \times 100\% = 28,24$$

Jawaban Contoh 3

1. Pada iterasi 3, $x_3 = 0,33$ –

$$\frac{-89,58 \times -14,71}{216,38 - (-89,58) \times 13,98} = -0,57$$

2. $Et = \frac{4+0,57}{4} \times 100\% = 114,25$

3. $Ea = \frac{0,57+0,33}{0,57} \times 100\% = 157,89$

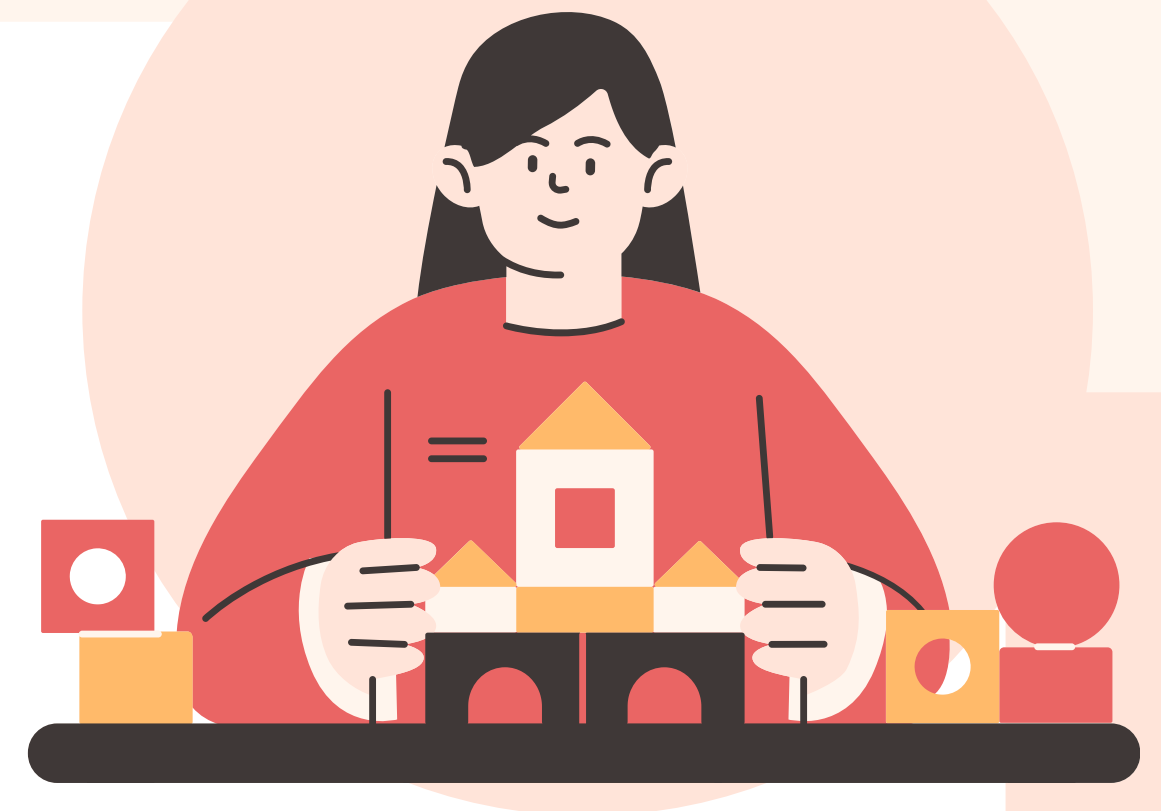
Faktorisasi

Metode Faktorisasi hanya memberikan rumusan untuk **polynomial** berderajat 3, 4 dan 5

$$P_3 = (1, 2)$$

$$P_4 = (2, 2)$$

$$P_5 = (1, 2, 2)$$



1. Derajat 3



$$P_3 = (1, 2)$$

Syarat:

- A0, A1 dan A2 harus **ada nilainya**
- Konstanta X3 harus bernilai 1

misal $P_3(x) = x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$

maka $b_0 = A_0 / a_0$; $a_1 = A_2 - b_0$; $a_0 = A_1 - a_1b_0$;

sebagai inisialisasi $b_0 = 0$;

proses iterasinya dapat ditabelkan seperti berikut :

<u>Iterasi</u>	B_0	a_1	a_0

2. Derajat 4

$$P_4 = (2, 2)$$

Syarat:

- A0, A1, A2, dan A3 harus ada nilainya
- Konstanta X4 harus bernilai 1



misal $P_4(x) = x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$

maka $b_0 = A_0 / a_0;$

$$b_1 = (A_1 - a_1b_0) / a_0;$$

$$a_1 = A_3 - b_1;$$

$$a_0 = A_2 - b_0 - a_1b_1$$

sebagai inisialisasi $b_0 = b_1 = 0;$

proses iterasinya dapat ditabelkan seperti berikut :

Iterasi	b_0	b_1	a_1	a_0



- A0, A1, A2, A3, A4 dan A5 harus ada nilainya
- Konstanta X5 harus bernilai 1

maka $b_0 = (A_1 - a_0 A_2 + a_0^2 A_3 - a_0^3 A_4 + a_0^4) / a_0$
 $b_1 = (A_2 - a_0 A_3 + a_0^2 A_4 - a_0^3 + c_1 b_0) / a_0$
 $a_0 = A_0 / b_0 c_c$
 $c_1 = A_4 - a_0 - b_1$
 $c_0 = A_3 - a_0 A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1 b_1$

[illegible]

➤ Derajat 3 ⚡

Contoh Soal 1

Diketahui

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 59x - 126$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, a0 dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Lakukan iterasi 1 sampai 3
- Hasil akhir b0, a0 dan a1 dibulatkan (hilangkan desimalnya)

Rumus

$$b_0 = A_0 / a_0; \quad a_1 = A_2 - b_0; \quad a_0 = A_1 - a_1 b_0;$$

Jawaban Contoh 1

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 59x - 126$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 59x - 126$$

$$A_2 = 4$$

$$A_1 = -59$$

$$A_0 = -126$$

$$b_0 = A_0 / a_0$$

$$a_1 = A_2 - b_0$$

$$a_0 = A_1 - a_1 b_0$$

iterasi 1

$$b_0 = 0$$

$$a_1 = 4 - 0$$

$$a_1 = 4$$

$$a_0 = -59 - 4 \cdot 0$$

$$a_0 = -59$$

iterasi 2

$$b_0 = -126 / -59$$

$$b_0 = 2,136$$

$$a_1 = 4 - 2,136$$

$$a_1 = 1,864$$

$$a_0 = -59 - 1,864 \cdot 2,136$$

$$a_0 = -63$$

Karena dengan diketahui b0, maka nilai x akan langsung diketahui. dengan mengetahui nilai a1 dan a0, maka nilai x akan dapat dicari dengan menggunakan rumus ABC

Jawaban Contoh 1

iterasi 3			
bo =	-126	/	-63
	2,00		
a1 =	4	-	2,00
	1,999		
ao =	-59	-	1,999 2,00
	-63		

[illegible]

➤ Derajat 3 ➤

Contoh Soal 2

Diketahui:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 51x + 90$$

Ditanya:

- Carilah nilai b_0 , a_0 dan a_1 dengan metode faktorisasi
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Lakukan iterasi 1 sampai 3

Rumus

$$b_0 = A_0 / a_0; \quad a_1 = A_2 - b_0; \quad a_0 = A_1 - a_1 b_0;$$

Jawaban Contoh 2

$$A2 = 4$$

$$A1 = -51$$

$$Ao = 90$$

$$bo = Ao / ao$$

$$a1 = A2 - bo$$

$$ao = A1 - a1.bo$$

iterasi 1

$$bo = 0$$

$$a1 = \begin{array}{ccc} 4 & - & 0 \\ 4 & & \end{array}$$

$$ao = \begin{array}{cccc} -51 & - & 4 & 0 \\ -51 & & & \end{array}$$

iterasi 2

$$bo = \frac{90}{-51} = -1.76$$

$$a1 = \frac{4 - (-1.765)}{5.765}$$

$$ao = \frac{-51 - (5.765 \cdot -1.76)}{-40.8}$$

iterasi 3

$$bo = \frac{90}{-40.83} = -2.20$$

$$a1 = \frac{4 - (-2.20)}{6.204}$$

$$ao = \frac{-51 - (6.204 \cdot -2.20)}{-37.3}$$



Contoh Soal 3



Diketahui:

- $f(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 84$
- $a_0 = -19$
- $a_1 = 6$
- $b_0 = 0$
- Nilai x sebenarnya = 4

Ditanya:

- Carilah akar x dari persamaan diatas dengan menggunakan faktorisasi.
- Carilah nilai a_0 , a_1 dan b_0 dengan menggunakan metoda faktorisasi.
- Ketelitian 2 angka di belakang
- Cari iterasi 2 sampai 4a

➤ Jawaban Contoh 3 ⚡

1. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 84$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$$

$$\Rightarrow A_2 = 6$$

$$\Rightarrow A_1 = -19$$

$$\Rightarrow A_0 = -84$$

1. Iterasi 1, $a_0 = -19$, $a_1 = 6$, $b_0 = 0$

2. $b_0 = A_0 : a_0$; $a_1 = A_2 - b_0$; $a_0 = A_1 - a_1 \times b_0$

3. Pada iterasi 2;

- $b_0 = A_0 : a_0 = -84 : -19 = 4,42$

- $a_1 = A_2 - b_0 = 6 - 4,42 = 1,58$

- $a_0 = A_1 - a_1 \times b_0 = -19 - 1,58 \times 4,42 = -25,98$

➤ Jawaban Contoh 3 ⚡

4. Pada iterasi 3;

$$- b_0 = A_0 : a_0 = -84 : -25,98 = 3,23$$

$$- a_1 = A_2 - b_0 = 6 - 3,23 = 2,77$$

$$- a_0 = A_1 - a_1 \times b_0 = -19 - 2,77 \times 3,23 = -27,95$$

5. Pada iterasi 4;

$$- b_0 = A_0 : a_0 = -84 : -27,95 = 3,01$$

$$- a_1 = A_2 - b_0 = 6 - 3,01 = 2,99$$

$$- a_0 = A_1 - a_1 \times b_0 = -19 - 2,99 \times 3,01 = -28$$

➤ Jawaban Contoh 3 ⚡

$$f(x) = x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x + 3)(x^2 + 3x - 28)$$

$$\Rightarrow (x_3 + 3)(x_2 + 7)(x_1 - 4)$$

$$\Rightarrow x_1 = 4$$

$$\Rightarrow x_2 = -7$$

$$\Rightarrow x_3 = -3$$

Jadi akar x_1, x_2, x_3 dari persamaan adalah
4, -7, dan -3

➤ Derajat 4 ⚡

Contoh Soal 4

Diketahui

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, b1, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0) \end{aligned}$$

Jawaban Contoh 4

$$A0 = 50$$

$$A1 = -62$$

$$A2 = 39$$

$$A3 = -8$$

$$b0 = A0 / a0$$

$$b1 = (A1 - a1.b0) / a0$$

$$a1 = A3 - b1$$

$$a0 = A2 - b0 - a1.b1$$

iterasi	bo	b1	a1	a0
1	0	0	-8	39
2	1.28	-1.59	-6.41	27.53
3	1.82	-1.95	-6.05	25.37
4	1.97	-2.01	-5.99	24.99
5	2.00	-2.01	-5.99	24.96
6	2.00	-2.00	-6.00	24.98
7	2.00	-2.00	-6.00	25.00
8	2.00	-2.00	-6.00	25.00
9	2.00	-2.00	-6.00	25.00

Contoh Soal yang tidak dapat diselesaikan dengan Faktorisasi



Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^4 - 8x - 57$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, b1, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0) \end{aligned}$$

A0 =	-57	b0 = A0 / a0
A1 =	-8	b1 = (A1 - a1.b0) / a0
A2 =	0	a1 = A3 - b1
A3 =	0	a0 = A2 - b0 - a1.b1

iterasi	bo	b1	a1	a0
1	0	0	0	0
2	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
3	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!

Contoh soal jika A2, A1 atau A0 tidak memiliki nilai 

Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^3 - 5x + 12$$

Nilai X = -3

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai b0, a0, dan a1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$b_0 = A_0 / a_0; \quad a_1 = A_2 - b_0; \quad a_0 = A_1 - a_1 b_0;$$

A0 12

A1 -5

A2 0

$$b_0 = A_0 / a_0$$

$$a_1 = A_2 - b_0$$

$$a_0 = A_1 - a_1 b_0$$

iterasi	bo	a1	a0
1	0.00	0.00	-5.00
2	-2.40	2.40	0.76
3	15.79	-15.79	244.31
4	0.05	-0.05	-5.00
5	-2.40	2.40	0.77

Derajat 5 (Akar Ganda)

Jawaban

Diketahui

$$f(x) = x^5 - x^4 - 27x^3 + x^2 + 146x - 120$$

Ditanya:

- Carilah akar-akar X menggunakan metode faktorisasi
- Carilah nilai c_0 , b_0 , b_1 , a_0 , dan a_1
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma

Rumus

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \\ &= (x + a_0)(x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + c_1x + c_0) \end{aligned}$$

harga awal diasumsikan $b_1 = b_0 = a_0 = 0$

Iterasi 1:

yang dpt dihitung hanya c_1 dan c_0 yaitu:

$$b_1 = b_0 = a_0 = 0$$

$$c_1 = A_4 - a_0 - b_1 = -1$$

$$c_0 = A_3 - a_0A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1b_1 = -27$$

Iterasi 2:

dicari nilai b_0 , b_1 , a_0 , c_1 dan c_0 yaitu:

$$b_0 = (A_1 - a_0A_2 + a_0^2A_3 - a_0^3A_4 + a_0^4)/c_0 = -5,407$$

$$b_1 = (A_2 - a_0A_3 + a_0^2A_4 - a_0^3 + c_1b_0)/c_0 = 0,163$$

$$a_0 = A_0/(b_0c_0) = 0,822$$

$$c_1 = A_4 - a_0 - b_1 = -1,985$$

$$c_0 = A_3 - a_0A_4 + a_0^2 - b_0 - c_1b_1 = -19,771$$

Iterasi di samping harus terus dilanjutkan sampai diperoleh nilai b_0 , b_1 , a_0 , c_1 dan c_0 yang relatif tetap (tidak berubah).

<https://its.id/m/komnum25>

Komnum Week 5

Tugas Kelompok

1. Buatlah contoh soal sendiri, boleh mengarang atau mengambil dari internet:
 - a. Newton-Raphson Modifikasi = 4 kelompok
 - b. Faktorisasi Derajat 3 = 4 kelompok
 - c. Faktorisasi Derajat 4 = 4 kelompok
2. Bentuk file PPT + nama kelompok dan anggota
3. Berikan contoh implementasi di dunia nyata dari metode yang digunakan

Ditanya :

- Tiap iterasi cari E_t dan E_a
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Cari dari iterasi 1 sampai iterasi 3
- Tuliskan rumusnya terlebih dahulu



Komnum Week 5



TERIMA KASIH

Sampai Bertemu Kembali

