

Regresi Linier, Aplikasinya dan Regresi Polynomial

Bilqis

Pertemuan 6

PERTEMUAN 6

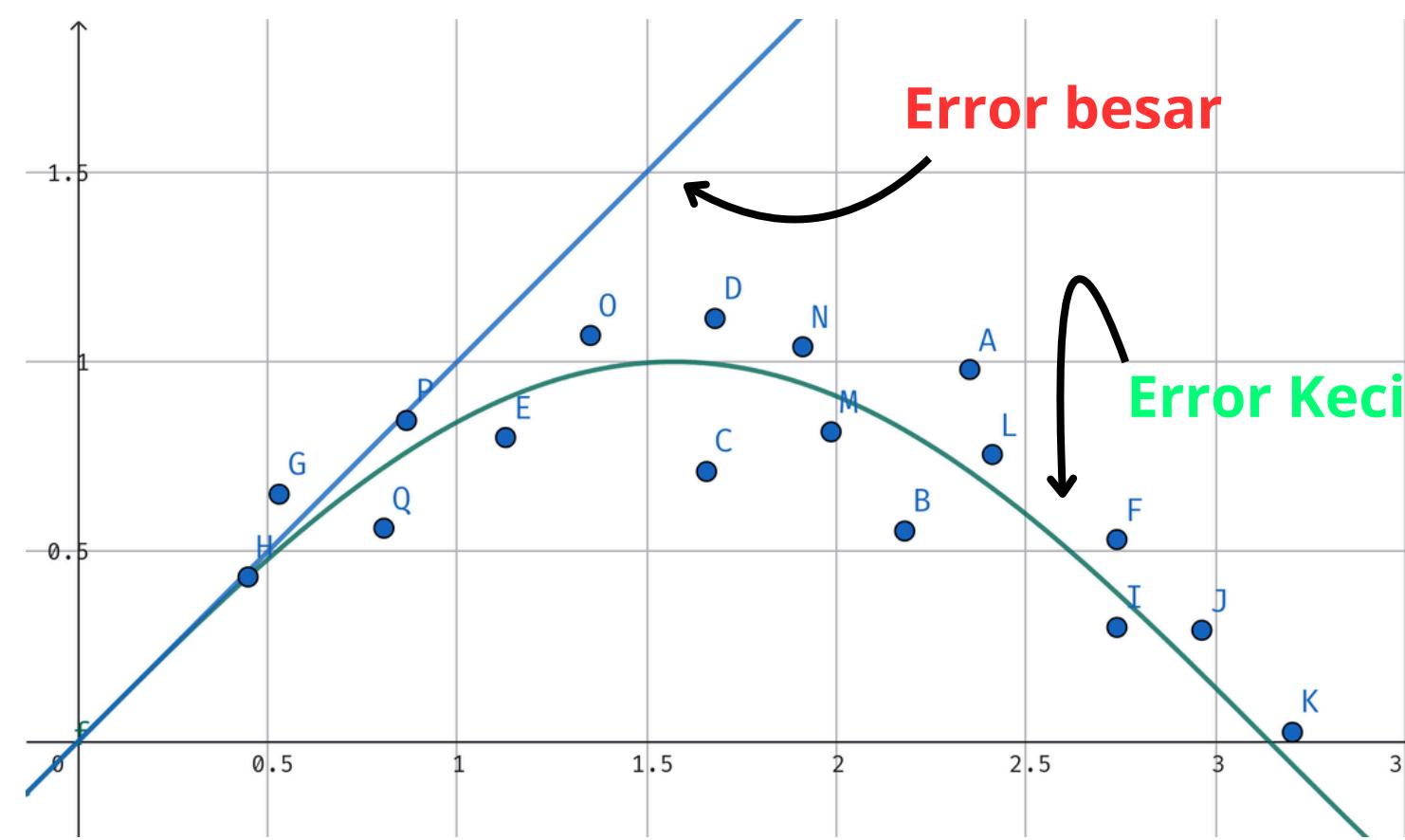
Pencocokan Kurva: Analisa Regresi

MATERI MINGGU INI

- 01 Regresi Linier
- 02 Aplikasi Regresi Linier
- 03 Regresi Polynomial

TUJUAN

- Mencari sebuah persamaan dari data yang diketahui
- Persamaan yang dicari dapat berupa persamaan:
 - Linear
 - Kuadrat
 - pangkat-3
 - ...
 - pangkat-n



PERSAMAAN

- **Pangkat 1**

$$y = a_0 + a_1 x$$

- **Pangkat 2**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

- **Pangkat 3**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

- **Pangkat n**

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

PENCOCOKAN KURVA (1)

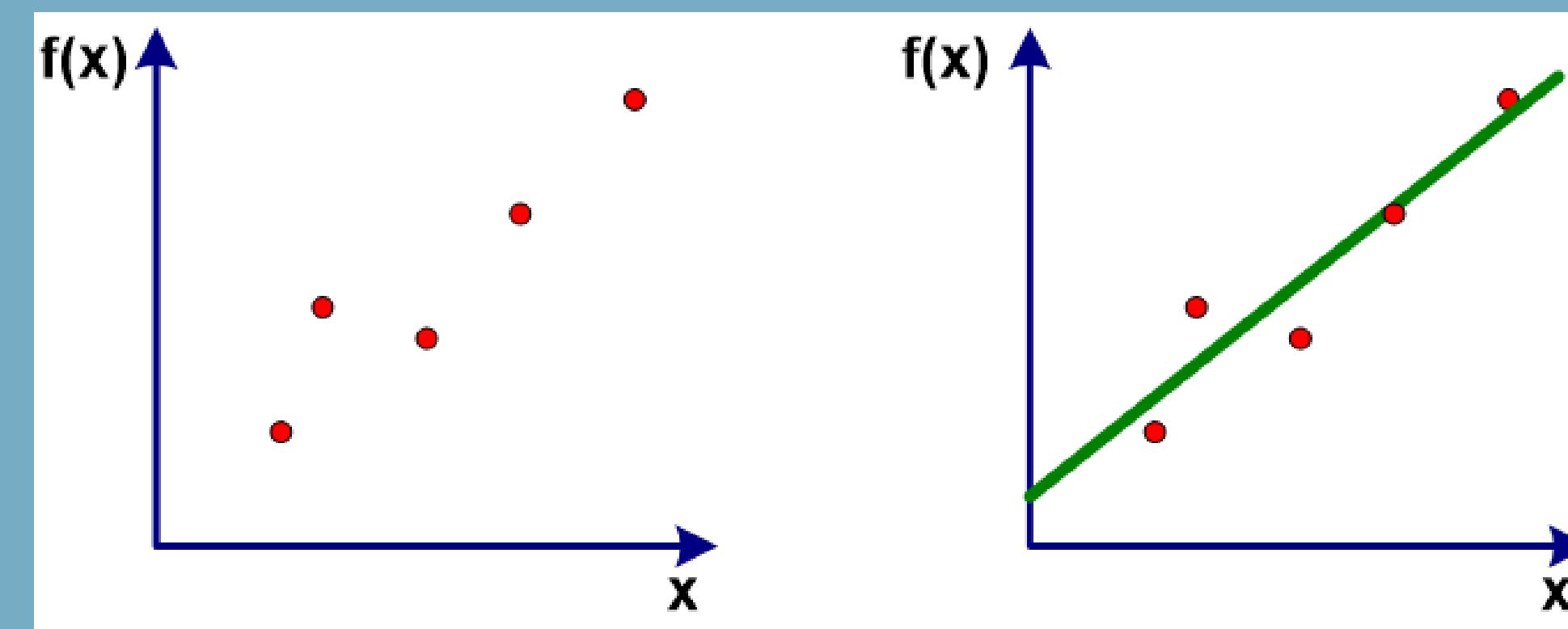
Seringkali data tersajikan dalam bentuk rangkaian nilai diskrit (deretan angka2 dalam urutan yang kontinu), tanpa disertai bentuk fungsi yang menghasilkan data tersebut.

Dalam kasus sebelumnya, kita dapat men-"*generate*" fungsi sederhana untuk mengaproksimasi bentuk fungsi sebenarnya dengan memanfaatkan rangkaian data yang ada.

PENCOCOKAN KURVA (2)

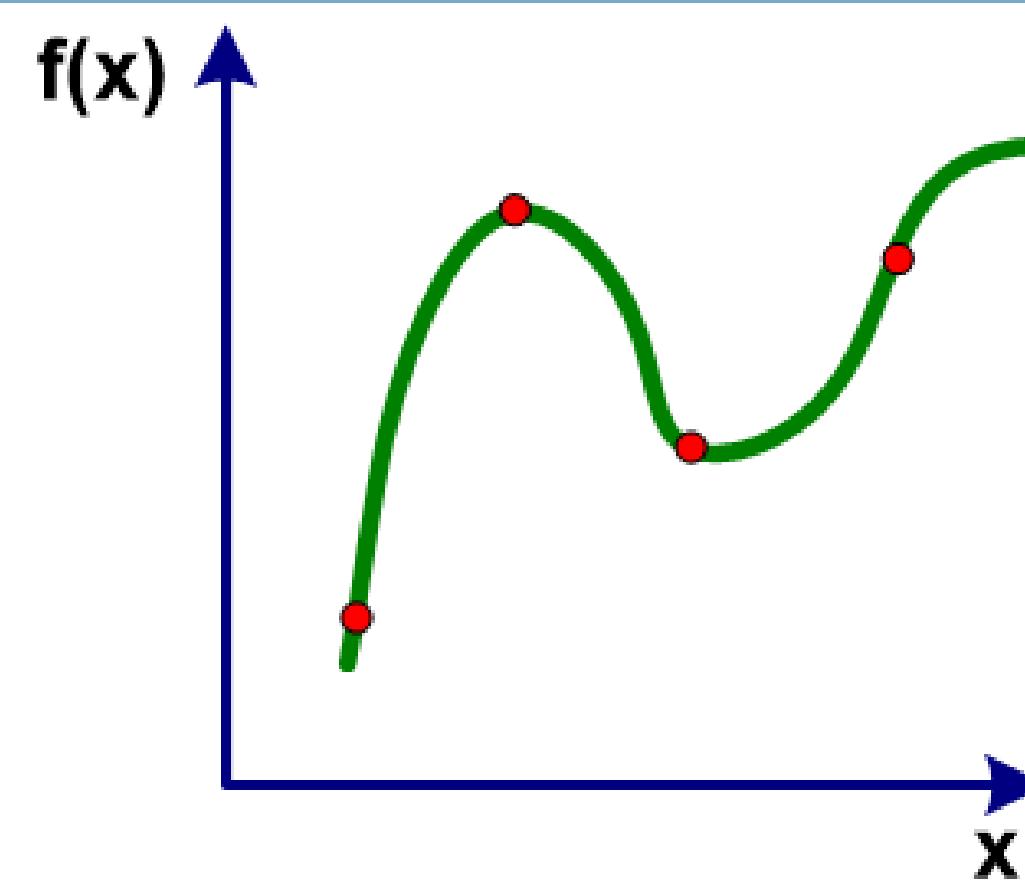
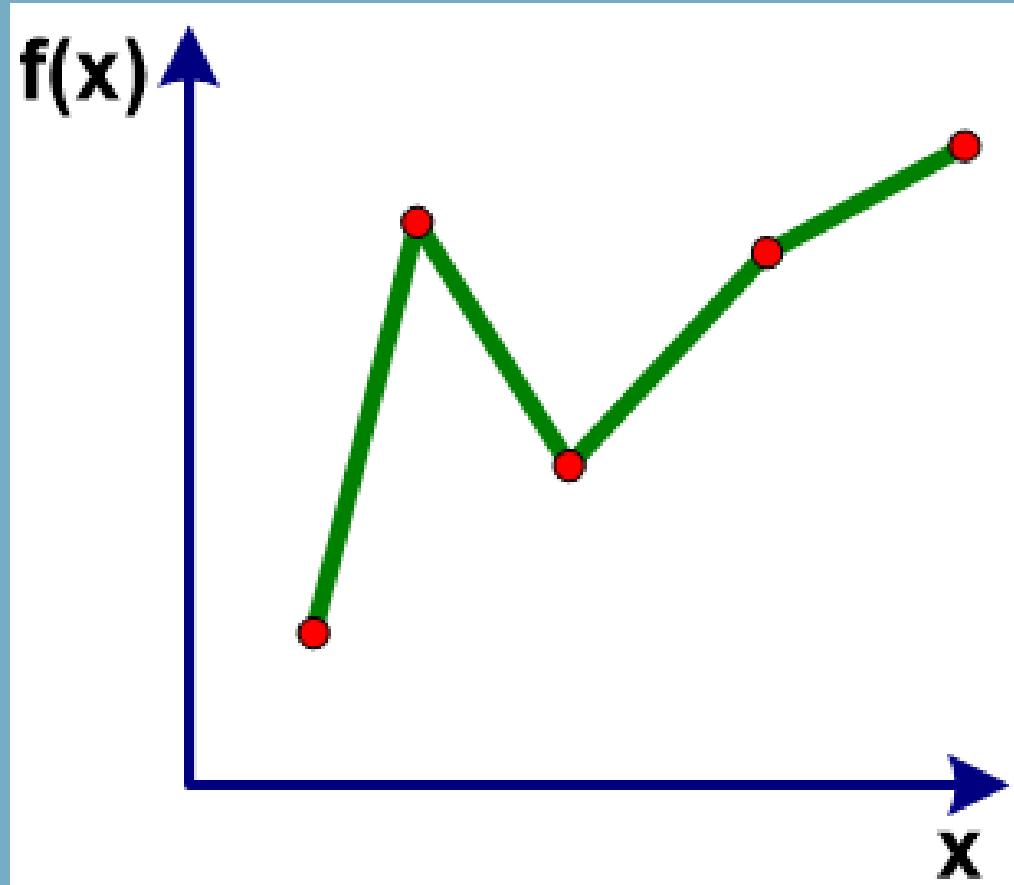
Pendekatan-pendekatan yang lazim digunakan untuk melakukan Pencocokan Kurva antara lain adalah :

Regresi Kuadrat Terkecil (*least-square regression*)



PENCOCOKAN KURVA (3)

Interpolasi



Analisis menggunakan notasi dan perhitungan statistik. Artinya, ada sedikit yang perlu anda ingat kembali 😊

regresi
sedikit

1. REGRESI LINIER

REGRESI LINIER

mencocokkan sebuah garis lurus terhadap sekumpulan pasangan pengamatan (data)

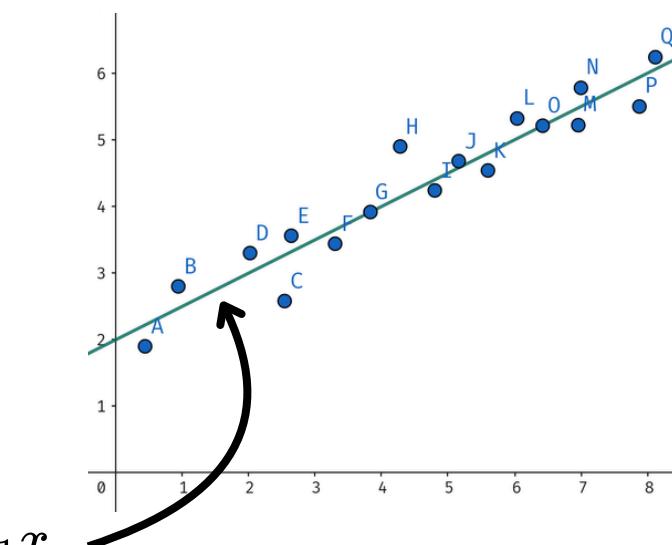
data $\rightarrow (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

Persamaan garis lurus : $y = a_0 + a_1 x$

a_0 = perpotongan garis terhadap sumbu y

a_1 = kemiringan garis

$$y = a_0 + a_1 x$$



REGRESI LINIER

- Untuk mencari a_0 & a_1
→ Biasa :

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

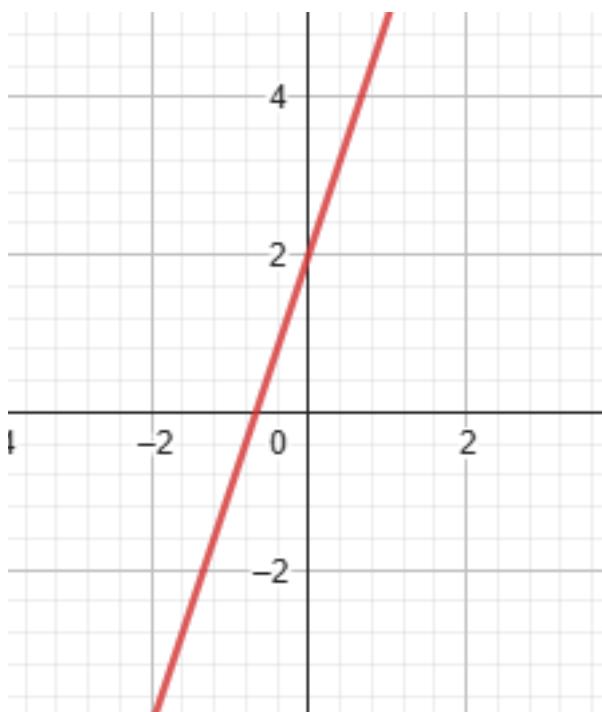
$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

REGRESI LINIER

Contoh:

Cari sebuah persamaan garis lurus yang datanya sebagai berikut

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8



Jawab: $y = 2 + 3x$

REGRESI LINIER

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
-2	-4	8	4
-1	-1	1	1
0	2	0	0
1	5	5	1
2	8	16	4
$\sum = 0$	$\sum = 10$	$\sum = 30$	$\sum = 10$

$$n = 5$$

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 10$$

$$\sum x_i y_i = 30$$

$$\sum (x_i)^2 = 10$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = 2$$

$$a_1 = \frac{5 \times 30 - 0 \times 10}{5 \times 10 - (0)^2}$$

$$= 3$$

$$a_0 = 2 - 3 \times 0$$

$$= 2$$

sehingga menghasilkan persamaan garis lurus:

$$y = 2 + 3x$$

REGRESI LINIER

Dapat digunakan untuk meramal titik berikutnya:

- $x = 3 \rightarrow y = 2 + 3(3) = 11$
- $x = 4 \rightarrow y = 2 + 3(4) = 14$

REGRESI LINIER

Contoh:

Cocokkan sebuah garis lurus terhadap harga x & y pada kolom berikut:

$$\bar{y} = 3.43$$

$$\bar{x} = 4$$

$$n = 7$$

$$\sum x_i y_i = 119.5$$

$$\sum x_i = 28$$

$$\sum y_i = 24$$

$$\sum (x_i)^2 = 140$$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0.5	0.5	1
2	2.5	5	4
3	2	6	9
4	4	16	16
5	3.5	17.5	25
6	6	36	36
7	5.5	38.5	49
$\Sigma = 28$		$\Sigma = 24$	$\Sigma = 119.5$
			$\Sigma = 140$

REGRESI LINIER

$$a_1 = \frac{(7)(119.5) - (28)(24)}{(7)(140) - (28)^2}$$
$$= 0.84$$

$$a_0 = 3.43 - (0.84)(4)$$
$$= 0.07$$

Error:

$x = 2 \rightarrow$ Nilai sebenarnya adalah $y = 2.5$

$$y = 0.07 + (0.84)(2) = 1.75$$

$$E_r = \left| \frac{2.5 - 1.75}{2.5} \right| \times 100\% = 30\%$$

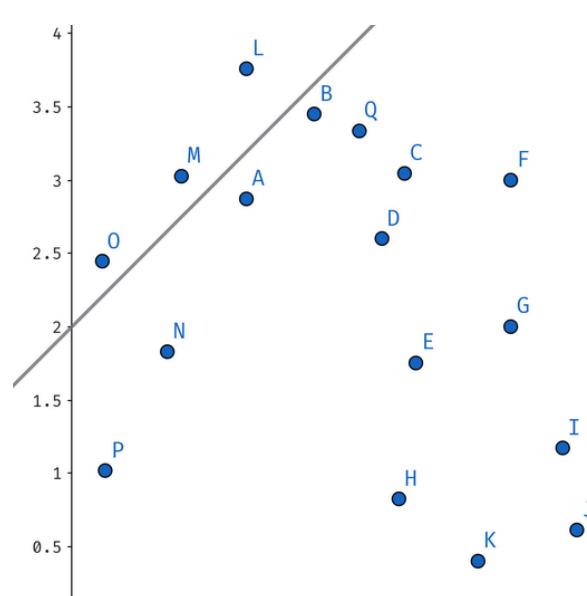
Persamaan pencocokan kuadrat terkecil:
 $y = 0.07 + 0.84x$

2. APLIKASI REGRESI LINIER

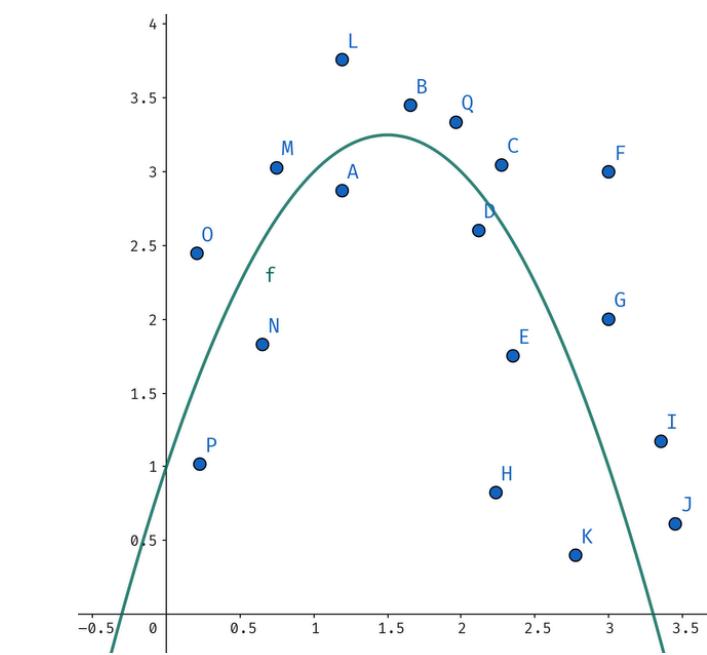
APLIKASI REGRESI LINIER

Aplikasi Linear → **Linearisasi** hubungan **tak Linear**

Bagaimana cara kita untuk mencari sebuah persamaan dengan menggunakan **persamaan garis lurus**? Kita bisa menggunakan **transformasi**



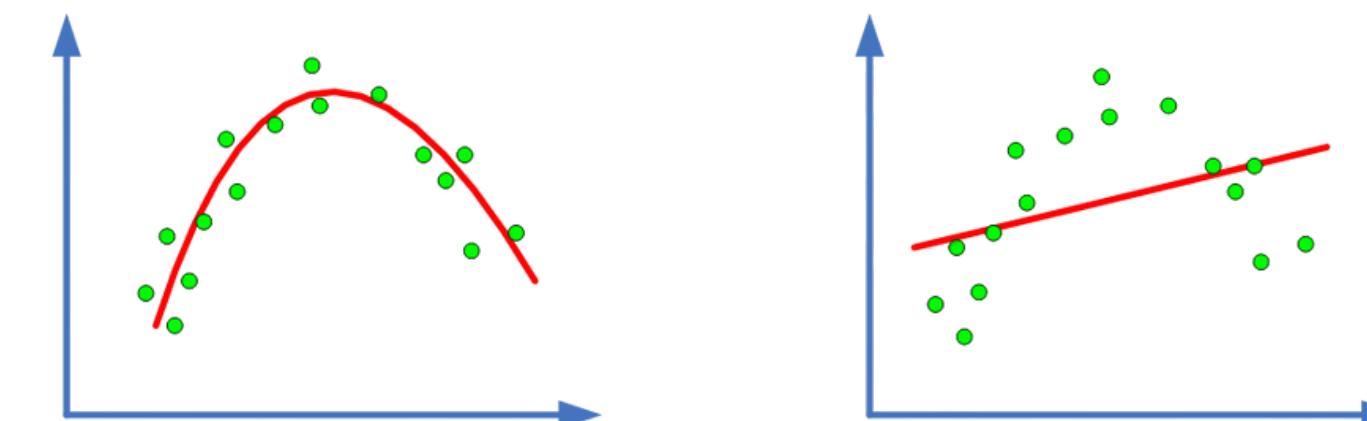
Tidak cocok untuk regresi linear



Fungsi seperti parabola
lebih baik

RKT UNTUK KURVA NON-LINIER

Di dalam praktik akan sering kita jumpai kasus dimana *plotting* titik-titik data memiliki tren berupa kurva lengkung. Sehingga persamaan yang sudah dikenalkan sebelumnya (RKT untuk Kurva Linier) tidak dapat langsung digunakan.



kurva lengkung yang
didekati dengan
sebarang garis lurus
akan menimbulkan
kesalahan yang berarti.

RKT UNTUK KURVA NON-LINIER

Persamaan kurva yang akan kita pelajari:

- Persamaan eksponensial: $y = ax^b$
- Persamaan pangkat sederhana: $y = ae^{bx}$

Transformasi persamaan di atas menjadi persamaan garis lurus:

$$y = a_0 + a_1 x$$

RKT UNTUK KURVA NON-LINIER

Persamaan pangkat sederhana: $y = ax^b$

$$y = ax^b$$

$$\log y = \log ax^b$$

$$\log y = \log a + \log x^b$$

$$\log y = \log a + b \log x$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

Identik dengan
persamaan garis

CONTOH LAIN

Carilah persamaan pangkat sederhana $y = ax^b$ terhadap data berikut

x	y
2	0.99
3	1.21
4	1.40
5	1.57
6	1.71

JAWAB

$x = \log x$	$y = \log y$	$x \cdot y$	x^2
0.30	0.00	0.00	0.09
0.48	0.08	0.04	0.23
0.60	0.15	0.09	0.36
0.70	0.20	0.14	0.49
0.78	0.23	0.18	0.61
$\sum = 2.86$	$\sum = 0.66$	$\sum = 0.45$	$\sum = 1.78$

$$\bar{x} = 0.57$$

$$\bar{y} = 0.13$$

$$a_0 = \frac{(5)(0.45) - (2.86)(0.66)}{(5)(1.78) - (2.86)^2}$$

$$= -0.15$$

$$a_1 = 0.57 - (-0.15)(0.13)$$

$$= 0.5$$

$$a_0 = \log a$$

$$a = 10^{a_0}$$

$$a = 10^{-0.15} = 0.71$$

$$y = 0.71x^{0.5}$$

CONTOH LAIN

Carilah persamaan pangkat sederhana $y = ax^b$ terhadap data berikut

x	y
4	1.06
5	1.13
6	1.20
7	1.25
8	1.31

JAWAB

$x = \log x$	$y = \log y$	$x \cdot y$	x^2
0.30	0.00	0.00	0.09
0.48	0.08	0.04	0.23
0.60	0.15	0.09	0.36
0.70	0.20	0.14	0.49
0.78	0.23	0.18	0.61
$\sum = 2.86$	$\sum = 0.66$	$\sum = 0.45$	$\sum = 1.78$

$$\bar{x} = 0.77$$

$$\bar{y} = 0.08$$

$$a_0 = \frac{(5)(0.31) - (3.83)(0.38)}{(5)(2.99) - (3.83)^2}$$

$$= -0.18$$

$$a_1 = 0.57 - (-0.15)(0.13)$$

$$= 0.34$$

$$a_0 = \log a$$

$$a = 10^{a_0}$$

$$a = 10^{-0.18} = 0.66$$

$$y = 0.66x^{0.34}$$

RKT UNTUK KURVA NON-LINIER

Persamaan eksponensial: $y = ae^{bx}$

$$y = ae^{bx}$$

$$\ln y = \ln ae^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx \ln e$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

Identik dengan
persamaan garis

CONTOH LAIN

Carilah persamaan pangkat sederhana $y = ae^{bx}$ terhadap data berikut

x	y
2	2.03
3	4.08
4	8.22
5	16.56
6	33.34

JAWAB

x	y = ln y	x · y	x ²
2	0.71	1.42	4.0
3	1.41	4.23	9.0
4	2.11	8.44	16.0
5	2.81	14.05	25.0
6	3.51	21.06	36.0
$\Sigma = 20.0$	$\Sigma = 10.55$	$\Sigma = 49.20$	$\Sigma = 90.0$

$$\bar{x} = 4$$

$$\bar{y} = 2.11$$

$$a_0 = \frac{(5)(49.2) - (20)(10.55)}{(5)(90) - (20)^2}$$

$$= -0.69$$

$$a_1 = 2.11 - (-0.69)(4)$$

$$= 0.7$$

$$a_0 = \ln a$$

$$-0.69 = \ln a$$

$$a = e^{-0.69} = 0.5$$

$$y = 0.5e^{0.7x}$$

CONTOH LAIN

Carilah persamaan pangkat sederhana $y = ae^{bx}$ terhadap data berikut

x	y
4	1.99
5	2.69
6	3.63
7	4.90
8	6.61

JAWAB

x	$y = \ln y$	$x \cdot y$	x^2
4	0.69	2.76	16.0
5	0.99	4.95	25.0
6	1.29	7.74	36.0
7	1.59	9.54	36.0
8	1.89	11.34	36.0
$\Sigma = 30.0$	$\Sigma = 6.45$	$\Sigma = 36.33$	$\Sigma = 149.0$

$$\bar{x} = 6$$

$$\bar{y} = 1.29$$

$$a_0 = \frac{(5)(41.7) - (30)(6.45)}{(5)(190) - (30)^2}$$

$$= -0.51$$

$$a_1 = 1.29 - (-0.51)(6)$$

$$= 0.3$$

$$a_0 = \ln a$$

$$-0.51 = \ln a$$

$$a = e^{-0.51} = 0.6$$

$$y = 0.6e^{0.3x}$$

3. REGRESI POLINOMIAL

REGRESI POLINOMIAL

Persamaan polinomial berderajat ke-m:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

koefisien-koefisien dari persamaan polinomial berderajat sampai ke-r dapat kita dapatkan dengan matriks di bawah ini:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^r \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{r+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^r & \sum x_i^{r+1} & \sum x_i^{r+2} & \cdots & \sum x_i^{r+r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^r y_i \end{pmatrix}$$

REGRESI POLINOMIAL

Cocokkan polinomial orde ke-2, terhadap tabel di bawah ini:

x_i	y_i
0	2.1
1	7.7
2	13.6
3	27.2
4	40.9
5	61.1

polinomial orde ke-2:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Dapat diselesaikan dengan
matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

REGRESI POLINOMIAL

$$n = 6$$

$$\sum x_i = 15$$

$$\sum x_i^2 = 55$$

$$\sum x_i^3 = 225$$

$$\sum x_i^4 = 979$$

$$\sum y_i = 152.6$$

$$\sum x_i y_i = 585.6$$

$$\sum x_i^2 y_i = 2488.8$$

Persamaan simultan
untuk orde ke-2:

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$

Gunakan metode Gauss-Jordan untuk mendapatkan a_0 , a_1 dan a_2 . Kemudian substitusi ke persamaan:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

REGRESI POLINOMIAL

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
0	2.1	0	0	0	0.0	0.0
1	7.7	1	1	1	7.7	7.7
2	13.6	4	8	16	27.2	54.4
3	27.2	9	27	81	81.6	244.8
4	40.9	16	64	256	163.6	654.4
5	61.1	25	125	625	305.5	1527.5
$\Sigma = 15$	$\Sigma = 152.6$	$\Sigma = 55$	$\Sigma = 225$	$\Sigma = 979$	$\Sigma = 585.6$	$\Sigma = 2488.8$

REGRESI POLINOMIAL

Dengan menggunakan data pada tabel, didapatkan sistem persamaan linier:

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152.6$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585.6$$

$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 2488.8$$

$$\begin{aligned}a_0 &= 2.48 \\a_1 &= 2.36 \\a_2 &= 1.86\end{aligned}$$

Sehingga persamaan kurva yang didapatkan adalah:

$$y = 2.48 + 2.36x + 1.86x^2$$

REGRESI POLINOMIAL

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^r \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{r+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^r & \sum x_i^{r+1} & \sum x_i^{r+2} & \cdots & \sum x_i^{r+r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^r y_i \end{pmatrix}$$

Berarti kita bisa menyatakan himpunan persamaan turunan tersebut menjadi persamaan matriks $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Dan selanjutnya kita dapat menggunakan metode eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, dll. untuk mencari nilai a_0, a_1, \dots, a_r .

REGRESI POLINOMIAL

Cari persamaan polinomial berorde 2 terhadap tabel berikut :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
0	0	0	0	0	0	0
1	9	1	1	1	9	9
2	24	4	8	16	48	96
3	49	9	27	81	147	441
4	84	16	64	256	336	1344
5	129	25	125	625	645	3225
$\sum = 15$	$\sum = 295$	$\sum = 55$	$\sum = 225$	$\sum = 979$	$\sum = 1185$	$\sum = 5115$

REGRESI POLINOMIAL

$$\begin{array}{ll} n = 6 & \sum x_i^4 = 979 \\ \sum x_i = 15 & \sum y_i = 295 \\ \sum x_i^2 = 55 & \sum x_i y_i = 1185 \\ \sum x_i^3 = 225 & \sum x_i^2 y_i = 5115 \end{array}$$

Persamaan simultan untuk orde ke-2:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 &= \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 &= \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 y_i \end{aligned}$$

REGRESI POLINOMIAL

menggunakan metode-metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 295$$

$$a_0 = 0.71$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 1185$$

$$a_1 = 2.36$$

$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 5115$$

$$a_2 = 4.64$$

Sehingga persamaan kurva yang didapatkan adalah:

$$y = 0.17 + 2.36x + 4.64x^2$$

REGRESI POLINOMIAL

$$6 \cdot a_0 + 15 \cdot a_1 + 55 \cdot a_2 = 295$$

$$15 \cdot a_0 + 55 \cdot a_1 + 225 \cdot a_2 = 1185$$

$$55 \cdot a_0 + 225 \cdot a_1 + 979 \cdot a_2 = 5115$$

Dgn menggunakan metoda tertentu, mt didapat :

$$a_0 = 0,7 \quad ③$$

$$a_1 = 2,37 \quad ④$$

$$a_2 = 4,64 \quad ⑤$$

∴ persamaan polinomial berorde 2 adalah :

$$y = 0,7 + 2,37x + 4,64x^2 \quad ⑥$$

TUGAS KELOMPOK

Ditanya :

- Tiap iterasi cari E_t dan E_a
- Ketelitian 2 angka dibelakang koma
- Cari dari iterasi 1 sampai iterasi 3
- Tuliskan rumusnya terlebih dahulu

- Buatlah contoh soal sendiri, boleh mengarang atau mengambil dari internet:
 - Regresi linier = 3 kelompok
 - Aplikasi Regresi linier log = 3 kelompok
 - Aplikasi Regresi linier ln = 2 kelompok
 - Regresi polynomial pangkat 2 (jawab dg Gauss-Jordan) = 2 kelompok
- Bentuk file PPT + nama kelompok dan anggota



TERIMAKASIH