Pertemuan 14 Metnum

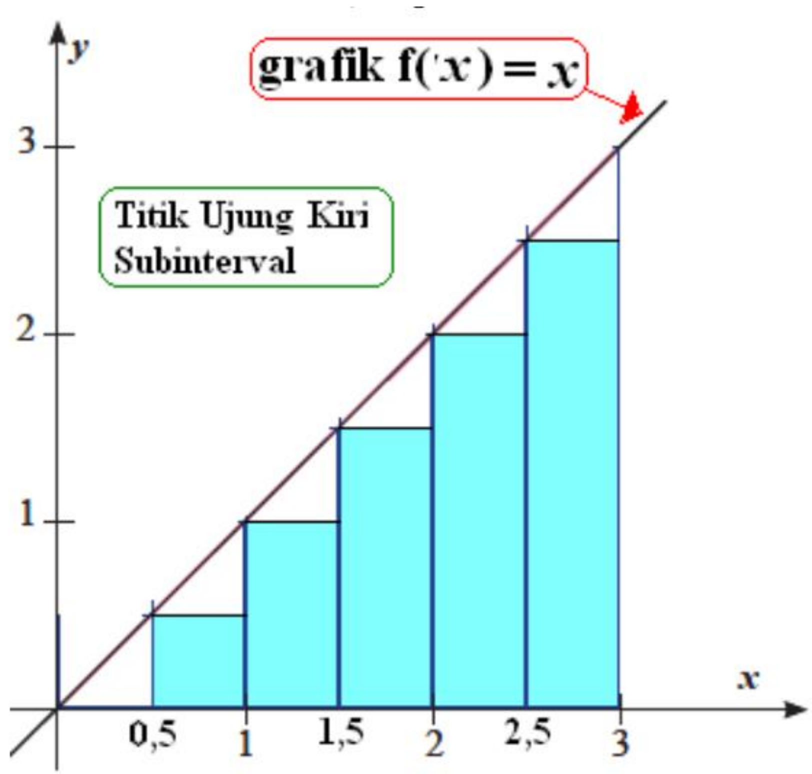
Integrasi Reimann
Integrasi Gauss

Bilqis

Integrasi

- Trapesium
- Trapesium segmen berganda
- Simpson 1/3
- Simpson 1/3 segmen berganda
- Simpson 3/8
- **Integral Riemann**
- **Integrasi Gauss**

Metode Integral Riemann



Algoritma Metode Integral Riemann:

- Membagi menjadi beberapa persegi panjang
- Lebar segmen sama ➔ h
- Menghitung luas persegi panjang pada setiap segmen
- Hitung h=(b-a)/N
- Hitung

$$L = h.\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$$

Metode Integral Reimann

- Luas keseluruhan adalah jumlah Li dan dituliskan :

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + .. + L_n$$
$$= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_3$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

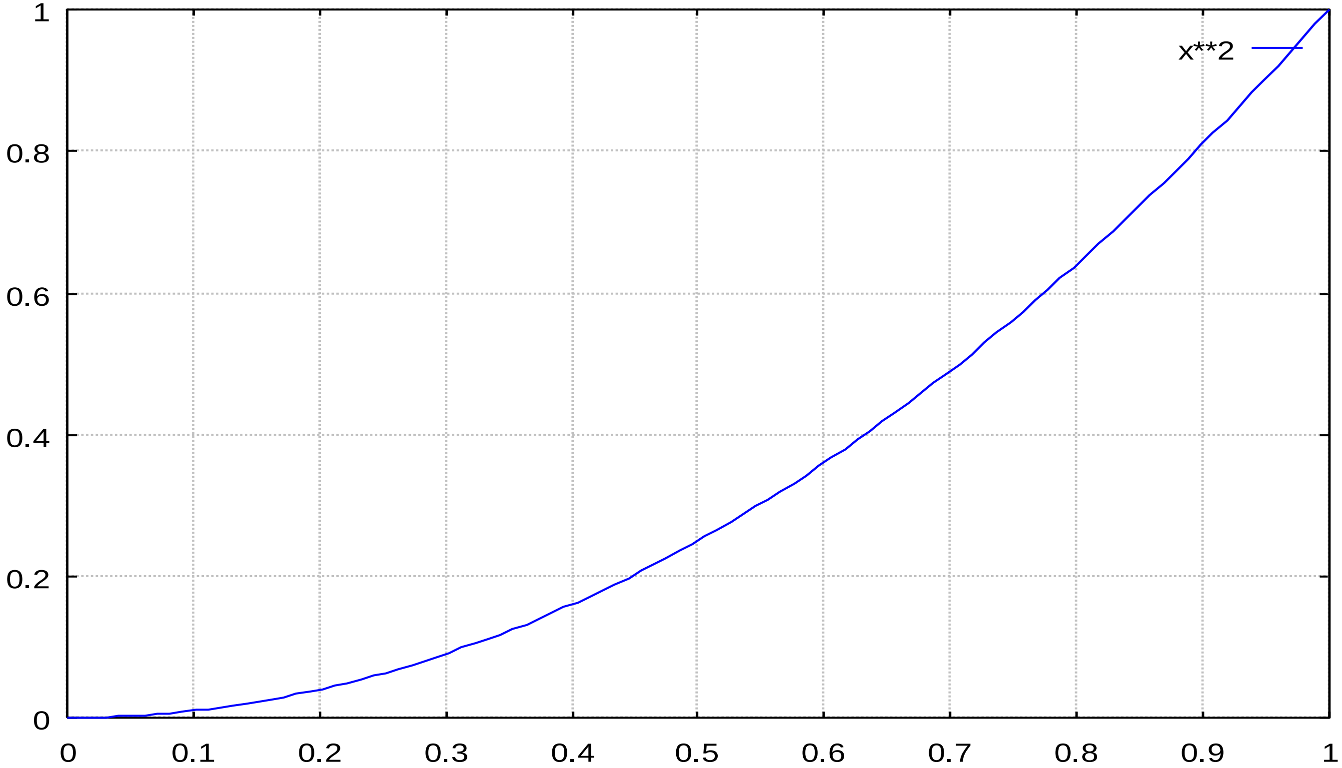
- Dimana $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = h$
- Didapat

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$$

Contoh

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

- Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x untuk range x = [0,1]



Contoh

- Dengan mengambil h=0.1 maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81

$$L = h.\sum_{i=0}^{9} f(x_i)$$

$$= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81)$$

$$= (0.1)(2,85) = 0,285$$

- Secara kalkulus : $L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = 0,3333.....$

- Terdapat kesalahan **Et** = |0,333-0,285|/0,333 x 100%

  = 14,41 %

Soal 1

Diketahui:

- $f(x) = 3x^5 - 8x^4$
- Batas atas = 16
- Batas bawah = 4

Ditanya:

- Cari luas sebenarnya dengan **Integral**!

Jawaban Soal 1

$\Rightarrow$ Selesaikan persamaan dengan **Integral**!

$$\int_{4}^{16} f(x) \;=\int_{4}^{16} 3x^5 - 8x^4 = \left\{\frac{3}{6}x^6 - \frac{8}{5}x^5\right\}_4^{16}$$

$$= \left(\frac{3}{6}(16)^6 - \frac{8}{5}(16)^5\right) - \left(\frac{3}{6}(4)^6 - \frac{8}{5}(4)^5\right)$$

$$= 6.710.476{,}8$$

Soal 3

Diketahui:

- $f(x) = 3x^5 - 8x^4$
- Batas atas = 16
- Batas bawah = 4

Ditanya:

- Cari hasil dari fungsi berikut!
  - f(4)
  - f(7)
  - f(10)
  - f(13)
  - f(16)
- Cari luas persamaan dengan **Reiman** dan error dari hasilnya!

Jawaban Soal 3a

$\Rightarrow$ Cari besar h

- $h = \frac{b-a}{n} = \frac{16-4}{4} = 3$

$\Rightarrow$ Masukan x_i ke dalam fungsi!

- $f(4) = 3(4)^5 - 8(4)^4 = 1024$
- $f(7) = 3(7)^5 - 8(7)^4 = 31213$
- $f(10) = 3(10)^5 - 8(10)^4 = 220000$
- $f(13) = 3(13)^5 - 8(13)^4 = 885391$
- $f(16) = 3(16)^5 - 8(16)^4 = 2621440$

Jawaban Soal 3b

a. $Luas = (b - a)\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}{n}$

b. $Luas = (16 - 4)\frac{[1024+31213+220000+885391]}{4} = 3.412.884$

c. $Error = \frac{6.710.476,8-3.412.884}{6.710.476,8} \times 100\% = 49,14$

Jadi luas dari f(x) dan errornya adalah 3.412.884 dan 49,14

Algoritma Integrasi Gauss dengan 2 titik

- Definisikan fungsi f(x)
- Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Hitung $$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
- Tentukan fungsi g(u) dengan: $$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\,f(x)$$
- Hitung nilai konversi variabel : $$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)\, f\left(x\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(b-a\right)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

Hitung integral $L = \int_0^1 x^2 \, dx$

$a = 0$

$b = 1$

$f(x) = x^2$

nilai konversi variabel

$x = \frac{1}{2}(b-a) \cdot u + \frac{1}{2}(b+a)$

$$x = \frac{1}{2}(1-0)\cdot u + \frac{1}{2}(1+0)$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot u + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{u+1}{2}$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f(x)$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) \cdot x^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (u+1)^2$$

$$= \frac{1}{8}(u+1)^2$$

Hitung Luas : $\rightarrow$ dgn 2 titik

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0,022 + 0,311$$

$$= 0,333$$

Contoh Soal

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah menghitung u, dengan:

$$u = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)} = \frac{2x-1}{1} = 2x-1$$

$$\text{atau} \quad x = \frac{1}{2}(u+1)$$

Dengan demikian diperoleh fungsi g(u):

$$g(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2 = \frac{1}{8}(u+1)^2$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

$$= 0.311004 + 0.022329$$

$$= 0.33333$$

Soal 5

Diketahui:

- $f(x) = 3x^5 - 8x^4$
- Batas atas $= 16$
- Batas bawah $= 4$

Ditanya:

- Cari hasil dari fungsi berikut:
  - x
  - $g(u)$
  - $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$
  - $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$
- Cari luas dan error dari persamaan diatas dengan cara **Integral Gasuss dengan 2 titik**!

Jawaban Soal 5

Metode **Integral Gasuss dengan 2 titik**

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f(x)$$

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

Bagian (a)

⇒ Masukkan variabel ke dalam persamaan!

$$x = \frac{1}{2}(16-4)u + \frac{1}{2}(16+4) = 6u + 10$$

$$g(u) = \frac{1}{2}(16-4)f(6u+10) = 6\left(3(6u+10)^5 - 8(6u+10)^4\right)$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\left(3\left(6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+10\right)^5 - 8\left(6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+10\right)^4\right) = 125342,82$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\left(3\left(6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+10\right)^5 - 8\left(6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+10\right)^4\right) = 6426753,83$$

Jawaban Soal 5

Bagian (b)

Masukkan variabel ke dalam persamaan!

$$L = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 125342{,}82 + 6426753{,}83 = 6552096{,}65$$

$$Et = \frac{6710476{,}8 - 6552096{,}65}{6710476{,}8} \times 100\% = 2{,}36$$

Jadi luas dan error dari persamaan f(x) adalah 655209,65 dan 2,36

Algoritma Integrasi Gauss Dengan 3 Titik

(1) Definisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)

(3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

(4) Tentukan fungsi g(u) dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\tfrac{1}{2}(b-a)u + \tfrac{1}{2}(b+a)\right)$$

(5) Hitung:

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Hitung luas : $\rightarrow$ dgn 3 titik

$$L = \frac{8}{9}\ g(0) + \frac{5}{9}\ g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}\ g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{1}{8}\ (0+1)^2\right) + \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{1}{8}\ \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{5}{9}\ \left(\frac{1}{8}\ \left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^2\right)$$

$$= 0{,}111 + 0{,}003 + 0{,}218$$

$$= 0{,}333$$