

Московский государственный институт электронной техники  
(технический университет)

---

Кафедра высшей математики №1  
Специальность «Прикладная математика»

Дипломный проект на тему:

## Расчет джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой

Дипломант \_\_\_\_\_ Пемпель Евгений Алексеевич

Научный руководитель \_\_\_\_\_ Алфимов Георгий Леонидович

Консультант с кафедры \_\_\_\_\_ Алфимов Георгий Леонидович

2010

# Содержание

<b>1</b>	<b>Общие положения</b>	<b>5</b>
1.1	Джозефсоновский контакт . . . . .	5
1.2	Различные типы и геометрии джозефсоновского контакта .	6
1.3	Локальная джозефсоновская электродинамика . . . . .	7
1.4	Нелокальная джозефсоновская электродинамика . . . . .	8
1.5	Различные ядра нелокальности . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>11</b>
2.1	Исходное уравнение . . . . .	11
2.2	Типы интересующих нас решений . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Алгоритм решения</b>	<b>12</b>
3.1	Сведение исходного уравнения к системе нелинейных алгебраических уравнений . . . . .	13
3.1.1	В случае периодических решений . . . . .	13
3.1.2	В случае вращательных решений . . . . .	15
3.2	Итерационный процесс . . . . .	16
3.3	Модификация итерационного процесса . . . . .	18

3.4	Быстрый алгоритм вычисления частных производных коэффициентов Фурье $b_m$ . . . . .	20
3.4.1	В случае периодических решений . . . . .	20
3.4.2	В случае вращательных решений . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Начальные приближения</b>	<b>22</b>
4.1	Получение начальных приближений в пределе сильной нелокальности . . . . .	22
4.2	Получение начальных приближений в пределе малой амплитуды . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Мера близости периодических и вращательных решений к решению типа кинка</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Результаты</b>	<b>27</b>
6.1	Графики периодических решений . . . . .	27
6.1.1	Приближение к $2\pi$ -кинку . . . . .	27
6.1.2	Приближение к $4\pi$ -кинку . . . . .	30
6.2	Графики вращательных решений . . . . .	33
6.2.1	Приближение к $2\pi$ -кинку . . . . .	33
6.2.2	Приближение к $4\pi$ -кинку . . . . .	36

6.3	Замечание о скорости распространения кинка . . . . .	37
7	Заключение	38
	Приложения	40
A	Программное приложение для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой	40
	Список литературы	42

# 1 Общие положения

## 1.1 Джозефсоновский контакт

Джозефсоновский контакт — это структура, состоящая из двух сверхпроводящих электродов, разделенных тонким слоем диэлектрика.

Эффект Джозефсона заключается в протекании сверхпроводящего тока через джозефсоновский контакт. Отметим, что данному эффекту посвящена обширная литература (см. классические работы [1], [2]).

Если через джозефсоновский контакт пропустить ток, не превышающий некоторого определенного значения (так называемого критического тока контакта), то падение напряжения на контакте будет равно нулю. Это явление называется стационарным эффектом Джозефсона.

Если же через джозефсоновский контакт пропустить ток, больший критического, то на контакте возникнет падение напряжения и контакт будет излучать высокочастотные электромагнитные волны, что указывает на присутствие там переменного тока. Это явление называется нестационарным эффектом Джозефсона.

Возникновение в джозефсоновском контакте электромагнитного излучения связано с тем, что объединенные в пары электроны (куперовские пары), создающие сверхпроводящий ток, при переходе через контакт приобретают избыточную по отношению к основному состоянию сверхпроводника энергию. Единственная возможность для пары электронов вернуться в основное состояние — это излучить квант электромагнитной энергии.

Оба эффекта Джозефсона являются следствием особой природы сверхпроводящего состояния. Они были предсказаны в 1962 году английским

физиком Брайаном Джозефсоном на основе теории сверхпроводимости. Позднее в 1963 году оба эти эффекта были обнаружены экспериментально.

Отметим, что оба эффекта Джозефсона имеют квантовую природу.

## 1.2 Различные типы и геометрии джозефсоновского контакта

Рассмотрим два типа джозефсоновского контакта: длинный и кольцеобразный.

Для джозефсоновского контакта длинного типа обычно рассматривают следующие четыре геометрии:

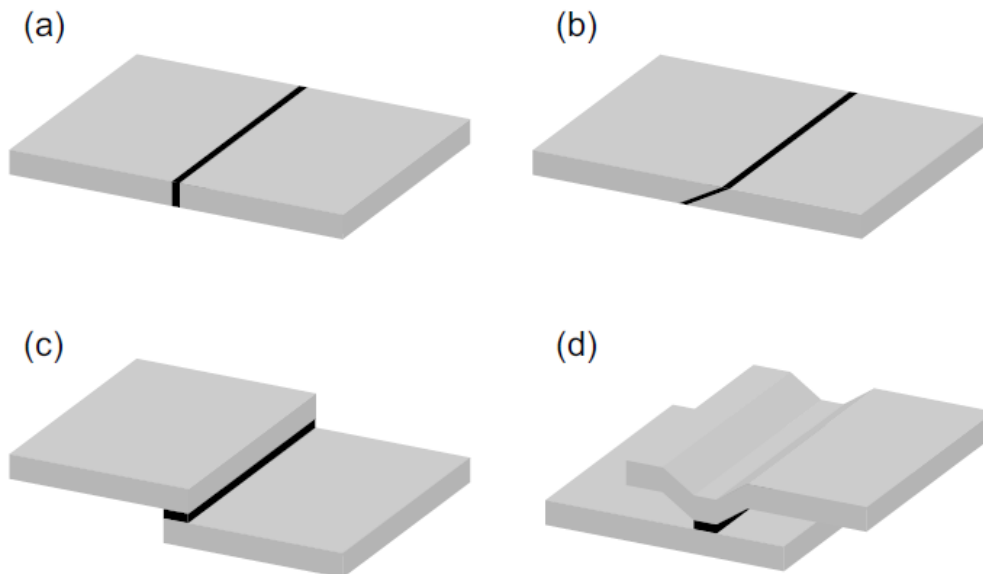


Рис. 1: Различные геометрии длинного джозефсоновского контакта: (а) краевая, (b) наклонная, (c) частично перекрывающаяся, (d) оконная.

Первые две геометрии (а), (b) являются простейшими с точки зрения

теоретического рассмотрения. Чуть более сложной с этой точки зрения является частично перекрывающаяся геометрия (с). Однако, в связи с некоторыми технологическими ограничениями вместо контактов с четко определенной частично перекрывающейся геометрией часто рассматривают контакты с оконной геометрией (d). В таких контактах верхний и нижний электроды продолжают в обе стороны на большее расстояние.

Для джозефсоновского контакта кольцеобразного типа обычно рассматривают следующие две геометрии:

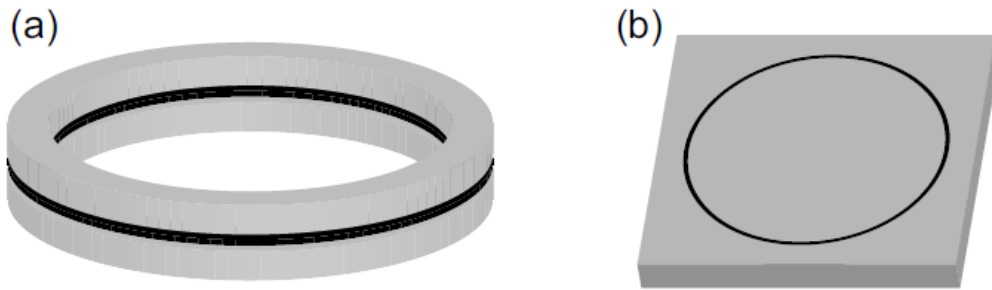


Рис. 2: Различные геометрии кольцеобразного джозефсоновского контакта: (a) частично перекрывающаяся, (b) цилиндрическая.

В дальнейшем будет рассматриваться одномерная модель длинного джозефсоновского контакта, обладающего краевой геометрией (a).

### 1.3 Локальная джозефсоновская электродинамика

Не вдаваясь в детальное физическое описание одномерной модели длинного джозефсоновского контакта, обладающего краевой геометрией, отметим лишь следующее.

Есть некоторая величина  $\lambda_L$ , которая называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля в электроды, и некоторая величина  $\lambda_J$ , представляющая собой характеристический размер структур,

возникающих в джозефсоновском контакте, обладающего толщиной  $D$  и шириной  $w$ .

При выполнении следующих двух условий:

$$\lambda_J \gg \lambda_L, \quad (1)$$

$$w, D \gg \lambda_L, \quad (2)$$

динамика джозефсоновского контакта описывается локальным одномерным уравнением синус-Гордона, которое в безразмерных величинах может быть записано в виде:

$$\sin \phi + \phi_{tt} + \alpha \phi_t - \gamma = \phi_{xx}, \quad (3)$$

где функция  $\phi(x, t)$  — разность фаз волновых функций двух электродов, называемая также джозефсоновской фазой; коэффициент  $\alpha$  отвечает за диссипативные свойства контакта; член  $\gamma$  соответствует току, приложенному к контакту.

Теорию, основанную на локальном уравнении синус-Гордона (3), называют локальной джозефсоновской электродинамикой. Данная теория получила свое развитие в 60-х годах XX-го века.

Следует отметить, что джозефсоновский контакт считается длинным, если выполнено условие:

$$L \gg \lambda_J,$$

где  $L$  — длина контакта.

## 1.4 Нелокальная джозефсоновская электродинамика

Если условия (1), (2) не выполняются, локальное уравнение синус-Гордона (3) должно быть заменено уравнением, в котором вторая производная,



стоящая в правой части уравнения (3), заменена интегралом типа свертки.

Такое нелокальное уравнение, описывающее динамику джозефсоновской фазы, в безразмерных величинах может быть записано в следующем виде:

$$\sin \phi + \phi_{tt} + \alpha \phi_t - \gamma = \frac{\partial}{\partial x} \int G(x - x') \phi_{x'}(x', t) dx', \quad (4)$$

где функция  $G(\xi)$  — так называемое ядро нелокальности.

Теорию, основанную на нелокальном уравнении синус-Гордона (4), называют нелокальной джозефсоновской электродинамикой. Данная теория получила свое развитие в 90-х годах XX-го века ([3], [4], [5], [6], [7]).

Следует отметить, что нелокальное уравнение синус-Гордона (4) представляет большой интерес своей универсальностью. Для разных геометрий джозефсоновского контакта уравнение остается неизменным, меняются только ядра нелокальности.

## 1.5 Различные ядра нелокальности

Ниже рассматриваются различные ядра нелокальности, а также ситуации, которым эти ядра соответствуют.

— Переход к локальному уравнению синус-Гордона (3):

$$G(\xi) = \delta(\xi)$$

— Джозефсоновский контакт между массивными сверхпроводящими электродами ( $\omega \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow \infty$ ):

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi \lambda} K_0 \left( \frac{|\xi|}{\lambda} \right) \quad (5)$$

Параметр  $\lambda = \lambda_L/\lambda_J$ , входящий в это ядро, называется параметром нелокальности, а функция  $K_0$  — это модифицированная функция Бесселя.

Отметим, что параметр нелокальности  $\lambda$  может принимать любое положительное значение.

- Джозефсоновский контакт между сверхпроводящими электродами конечных размеров ( $\omega < \infty$ ,  $D < \infty$ ):

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \operatorname{th} \left( \frac{D\sqrt{1+\zeta^2}}{\lambda_L} \right) \exp \left( \frac{i|\xi|\zeta}{\lambda} \right) \quad (6)$$

Так же как и в случае предыдущего ядра (5), параметр нелокальности  $\lambda$  может принимать любое положительное значение.

- Джозефсоновский контакт между тонкими сверхпроводящими пленками, ширина которых  $\omega < 2\lambda_L$ :

$$G(\xi) = \frac{\lambda_J}{2\lambda_P} \left[ H_0 \left( \frac{\lambda_J|\xi|}{\lambda_P} \right) - Y_0 \left( \frac{\lambda_J|\xi|}{\lambda_P} \right) \right] \quad (7)$$

Величина  $\lambda_P = 2\lambda_L^2/\omega$  — некоторая физическая величина, называемая перловской глубиной проникновения магнитного поля в пленки, а функции  $H_0$  и  $Y_0$  — функции Струве и Бесселя второго рода.

- Джозефсоновский контакт между тонкими сверхпроводящими пленками, ширина которых  $\omega > 2\lambda_L$ :

$$G(\xi) = \delta(\xi) + \frac{\lambda_J}{\omega} \left[ H_0 \left( \frac{|\xi|}{\lambda} \right) - Y_0 \left( \frac{|\xi|}{\lambda} \right) \right]$$

Параметр  $\lambda = \lambda_L/\lambda_J$  — параметр нелокальности.

Более подробный обзор различных ядер нелокальности можно найти в статье [8].

## 2 Постановка задачи

В разделах 2.1, 2.2 формулируется задача численного исследования.

### 2.1 Исходное уравнение

В качестве исходного уравнения будет рассматриваться нелокальное уравнение синус-Гордона (4) в бездиссипативном пределе:

$$\alpha = \gamma = 0$$

с ядром нелокальности (5).

Тип решений — бегущие волны:

$$\begin{aligned}\eta &= x - vt, \\ \phi(\eta) &= \phi(x - vt).\end{aligned}$$

В силу изложенного нелокальное уравнение синус-Гордона (4) может быть записано в следующем виде:

$$\sin \phi + v^2 \phi_{\eta\eta} = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{d}{d\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 \left( \frac{|\eta - \eta'|}{\lambda} \right) \phi_{\eta'}(\eta') d\eta'. \quad (8)$$

### 2.2 Типы интересующих нас решений

Если говорить о типах решений исходного уравнения (8) более подробно, то нас интересуют периодические решения:

$$\phi(\eta + L) = \phi(\eta),$$

вращательные решения:

$$\phi(\eta + L) = \phi(\eta) + 2\pi k, \quad k \neq 0,$$

и решения, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi(\eta) &= 0, \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi(\eta) &= 2\pi n.\end{aligned}$$

Такие решения называются  $2\pi n$ -кинками. Целое положительное число  $n$  называется топологическим зарядом кинка.

### 3 Алгоритм решения

В 90-х годах в научно-исследовательском институте физических проблем им. Ф. В. Лукина в группе В. М. Елеонского был разработан алгоритм численного решения уравнения (8). Этот алгоритм был реализован в консольном приложении для расчета джозефсоновского контакта, образованного массивными сверхпроводниками.

Отметим, что моделирование динамики  $2\pi$ -кинков для уравнения (8) в случае джозефсоновского контакта кольцевой геометрии проводилось также в работах группы Устинова (Эрланген) [9]. Это было связано с экспериментальным изучением подобных джозефсоновских контактов с нелокальной электродинамикой.

### 3.1 Сведение исходного уравнения к системе нелинейных алгебраических уравнений

#### 3.1.1 В случае периодических решений

Будем искать периодические решения исходного уравнения (8) в виде ряда Фурье по нечетным косинусам:

$$\phi(\eta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos \omega_n \eta, \quad (9)$$

где

$$\omega_n = (2n + 1)\omega, \quad (10)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{L}.$$

Синус, стоящий в левой части исходного уравнения (8), также запишем в виде соответствующего ряда Фурье по нечетным косинусам:

$$\sin \phi = \sum_{n=0}^N b_n \cos \omega_n \eta. \quad (11)$$

Отметим, что коэффициенты Фурье  $b_n$  могут быть выражены через коэффициенты  $a_n$  следующим образом:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \left( \sum_{n=0}^N a_n \cos \omega_n \eta \right) \cos \omega_n \eta d\eta. \quad (12)$$

Подставляя ряды Фурье (9), (11) в левую часть исходного уравнения (8), перепишем ее в виде:

$$\sum_{n=0}^N b_n \cos \omega_n \eta + \sum_{n=0}^N (-v^2 \omega_n^2 a_n) \cos \omega_n \eta. \quad (13)$$

Используя правило дифференцирования свертки двух функций, преобразуем правую часть исходного уравнения (8):

$$\frac{1}{\pi\lambda} \frac{d^2}{d\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0\left(\frac{|\eta - \eta'|}{\lambda}\right) \phi(\eta') d\eta'.$$

Подставляя вместо функции  $\phi(\eta)$  ее ряд Фурье (9), получим:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \sum_{n=0}^N a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda} K_0\left(\frac{|\eta - \eta'|}{\lambda}\right) \cos \omega_n \eta' d\eta'. \quad (14)$$

Используя табличный интеграл от модифицированной функции Бесселя  $K_0$  (см. [10]):

$$\int_0^{\infty} \cos bt K_0(t) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{1+b^2}} \quad \text{при } |\Im b| < 1,$$

перепишем ряд (14) в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^N \frac{-\omega_n^2 a_n}{\sqrt{1+\lambda^2 \omega_n^2}} \cos \omega_n \eta. \quad (15)$$

Заменяя левую и правую части исходного уравнения (8) выражениями (13), (15), получим:

$$\sum_{n=0}^N b_n \cos \omega_n \eta + \sum_{n=0}^N (-v^2 \omega_n^2 a_n) \cos \omega_n \eta = \sum_{n=0}^N \frac{-\omega_n^2 a_n}{\sqrt{1+\lambda^2 \omega_n^2}} \cos \omega_n \eta. \quad (16)$$

Уравнение (16) запишем в виде системы нелинейных уравнений:

$$c_n(a_0, a_1, \dots, a_N) = 0, \quad n = 0 \dots N, \quad (17)$$

где

$$c_n = b_n(a_0, a_1, \dots, a_N) - v^2 \omega_n^2 a_n + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1+\lambda^2 \omega_n^2}} a_n.$$

### 3.1.2 В случае вращательных решений

Будем искать вращательные решения исходного уравнения (8) в следующем виде:

$$\phi(\eta) = \frac{2\pi n\eta}{L} + \sum_{n=1}^N a_n \sin \omega_n \eta, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_n &= n\omega, \\ \omega &= \frac{2\pi}{L}. \end{aligned} \quad (19)$$

Синус, стоящий в левой части исходного уравнения (8), запишем в виде ряда Фурье:

$$\sin \phi = \sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n \eta. \quad (20)$$

Отметим, что коэффициенты Фурье  $b_n$  могут быть выражены через коэффициенты  $a_n$  следующим образом:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \left( \frac{2\pi n\eta}{L} + \sum_{n=1}^N a_n \sin \omega_n \eta \right) \sin \omega_n \eta d\eta. \quad (21)$$

Подставляя выражения (18), (20) в левую часть исходного уравнения (8), перепишем ее в виде:

$$\sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n \eta + \sum_{n=1}^N (-v^2 \omega_n^2 a_n) \sin \omega_n \eta. \quad (22)$$

Вновь используя табличный интеграл от модифицированной функции Бесселя  $K_0$  (см. [10]):

$$\int_0^\infty \cos bt K_0(t) dt = \frac{\pi}{2\sqrt{1+b^2}} \quad \text{при } |\Im b| < 1,$$

перепишем правую часть исходного уравнения (8) в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^N \frac{-\omega_n^2 a_n}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_n^2}} \sin \omega_n \eta. \quad (23)$$

Заменяя левую и правую части исходного уравнения (8) выражениями (22), (23), получим:

$$\sum_{n=1}^N b_n \sin \omega_n \eta + \sum_{n=1}^N (-v^2 \omega_n^2 a_n) \sin \omega_n \eta = \sum_{n=1}^N \frac{-\omega_n^2 a_n}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_n^2}} \sin \omega_n \eta. \quad (24)$$

Уравнение (24) запишем в виде системы нелинейных уравнений:

$$c_n(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0, \quad n = 1 \dots N, \quad (25)$$

где

$$c_n = b_n(a_1, a_2, \dots, a_N) - v^2 \omega_n^2 a_n + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_n^2}} a_n.$$

Отметим, что система уравнений (25) подобна полученной ранее системе (17).

### 3.2 Итерационный процесс

Для системы уравнений (17) сформируем матрицу Ньютона:

$$\mathbf{M}^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_0^{(i)}}{\partial a_0} & \frac{\partial c_0^{(i)}}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial c_0^{(i)}}{\partial a_N} \\ \frac{\partial c_1^{(i)}}{\partial a_0} & \frac{\partial c_1^{(i)}}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial c_1^{(i)}}{\partial a_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial c_N^{(i)}}{\partial a_0} & \frac{\partial c_N^{(i)}}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial c_N^{(i)}}{\partial a_N} \end{pmatrix},$$



где

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_m^{(i)}}{\partial a_n} &= \frac{\partial c_m(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_N^{(i)})}{\partial a_n}, \\ \frac{\partial c_m^{(i)}}{\partial a_n} &= \frac{\partial b_m^{(i)}}{\partial a_n} \quad \text{при } m \neq n, \\ \frac{\partial c_m^{(i)}}{\partial a_n} &= \frac{\partial b_m^{(i)}}{\partial a_n} - v^2 \omega_n^2 + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_n^2}} \quad \text{при } m = n,\end{aligned}$$

Подробнее об алгоритме быстрого вычисления частных производных коэффициентов Фурье  $b_m$  будет рассказано в разделе 3.4.

Запишем вектор-столбец приращений коэффициентов Фурье  $a_n$ :

$$\Delta \mathbf{a}^{(i)} = \begin{pmatrix} \Delta a_0^{(i)} \\ \Delta a_1^{(i)} \\ \vdots \\ \Delta a_N^{(i)} \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta a_n^{(i)} = a_n^{(i)} - a_n^{(i-1)},$$

и составим вектор-столбец свободных членов:

$$\mathbf{c}^i = \begin{pmatrix} c_0^{(i)} \\ c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_N^{(i)} \end{pmatrix},$$

где

$$c_n^{(i)} = c_n(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_N^{(i)}).$$

Теперь в векторном виде запишем полученный итерационный процесс ньютоновского типа:

$$\mathbf{M}^{(i)} \Delta \mathbf{a}^{(i)} = -\mathbf{c}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Подробнее о выборе значений  $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_N^{(0)}$  будет рассказано в разделе 4.

### 3.3 Модификация итерационного процесса

Итерационный процесс (26) схематически представим в следующем виде:

$$\left( \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{M}^{(i)} \\ \\ \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \\ \\ \Delta \mathbf{a}^{(i)} \\ \\ \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{c}^{(i)} \\ \\ \end{array} \right).$$

Выделим некоторое количество диагоналей, параллельных главной, а все остальные элементы обнулим:

$$\left( \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \\ \\ \Delta \mathbf{a}^{(i)} \\ \\ \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{c}^{(i)} \\ \\ \end{array} \right).$$

Кроме того, будем пересчитывать получившуюся неполную матрицу Ньютона не на каждой итерации, а через каждые  $k$  итераций:

$$\begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \Delta \mathbf{a}_k^{(i)} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} - \mathbf{c}_k^{(i)}.$$

При этом итераций станет больше, но каждая итерация будет стоить меньше.

Разумеется, в этом случае на квадратичную скорость сходимости, присущую итерационному процессу ньютоновского типа, рассчитывать уже не приходится, но это не принципиально.

### 3.4 Быстрый алгоритм вычисления частных производных коэффициентов Фурье $b_m$

#### 3.4.1 В случае периодических решений

Используя выражения (9), (10), (12), вычислим частные производные коэффициентов Фурье  $b_m$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b_m}{\partial a_k} &= \frac{2}{L} \int_0^L \cos \left( \sum_{n=0}^N a_n \cos \omega_n \eta \right) \cos \omega_k \eta \cos \omega_m \eta d\eta = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \cos \left( \sum_{n=0}^N a_n \cos \omega_n \eta \right) \cos(\omega_k - \omega_m) \eta d\eta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{L} \int_0^L \cos \left( \sum_{n=0}^N a_n \cos \omega_n \eta \right) \cos(\omega_k + \omega_m) \eta d\eta \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos 2(k-m)\omega \eta d\eta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos 2(k+m+1)\omega \eta d\eta \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [d_{2(k-m)} + d_{2(k+m+1)}],
 \end{aligned}$$

где  $d_{2(k-m)}$ ,  $d_{2(k+m+1)}$  — соответствующие коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $\cos \phi$ .

Сначала по имеющемуся набору значений функции  $\phi$ :  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N)$  — непосредственно определяется набор значений функции  $\cos \phi$ :  $(\cos \phi_0, \cos \phi_1, \dots, \cos \phi_N)$ . Затем с помощью дискретного косинус-преобразования Фурье определяется набор коэффициентов  $d_n$ .

Процедура вычисления частных производных коэффициентов Фурье  $b_m$ ,

основанная на том, чтобы в начале каждой итерации процесса (26) вычислять набор коэффициентов Фурье  $d_n$ , является более эффективной по сравнению с процедурой, основанной на непосредственном применении выражения (12).

Подробнее о первоначальном выборе набора значений функции  $\phi$ :  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N)$  — будет рассказано в разделе 4.

### 3.4.2 В случае вращательных решений

Используя выражения (18), (19), (21), вычислим частные производные коэффициентов Фурье  $b_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_m}{\partial a_k} &= \frac{2}{L} \int_0^L \cos \left( \frac{2\pi n \eta}{L} + \sum_{n=1}^N a_n \sin \omega_n \eta \right) \sin \omega_k \eta \sin \omega_m \eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos(\omega_k - \omega_m) \eta d\eta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos(\omega_k + \omega_m) \eta d\eta \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos(k - m) \omega \eta d\eta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{L} \int_0^L \cos \phi \cos(k + m) \omega \eta d\eta \right] = \\ &= \frac{1}{2} [d_{(k-m)} - d_{(k+m)}], \end{aligned}$$

где  $d_{(k-m)}$ ,  $d_{(k+m)}$  — соответствующие коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $\cos \phi$ .

Сначала по имеющемуся набору значений функции  $\phi$ :  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  — непосредственно определяется набор значений функции  $\cos \phi$ :  $(\cos \phi_1,$

$\cos \phi_2, \dots, \cos \phi_N$ ). Затем с помощью дискретного косинус-преобразования Фурье определяется набор коэффициентов  $d_n$ .

Процедура вычисления частных производных коэффициентов Фурье  $b_m$ , основанная на том, чтобы в начале каждой итерации процесса (26) вычислять набор коэффициентов Фурье  $d_n$ , является более эффективной по сравнению с процедурой, основанной на непосредственном применении выражения (21).

Подробнее о первоначальном выборе набора значений функции  $\phi$ :  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  — будет рассказано в разделе 4.

## 4 Начальные приближения

Одной из проблем для итерационного процесса ньютоновского типа (пусть даже модифицированного) является поиск хороших начальных приближений.

В разделах 4.1, 4.2 рассматриваются способы получения таких приближений.

### 4.1 Получение начальных приближений в пределе сильной нелокальности

В пределе сильной нелокальности, т.е. когда параметр нелокальности  $\lambda \gg 1$ , правая часть (15) исходного уравнения (8) принимает вид:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N (-\omega_n a_n) \cos \omega_n \eta.$$

Используя представление функции  $\phi(\eta)$  в виде ряда Фурье по нечетным косинусам (9), а также преобразование Гильберта от функции  $\sin \omega x$  (см. [11]):

$$H[\sin \omega x] = \cos \omega x, \quad \text{при } \omega > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} H[\phi_\eta(\eta)] &= \frac{1}{\lambda} H \left[ \sum_{n=0}^N (-\omega_n a_n) \sin \omega_n \eta \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N (-\omega_n a_n) H[\sin \omega_n \eta] = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N (-\omega_n a_n) \cos \omega_n \eta, \end{aligned}$$

где

$$H[\phi(\eta)] = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\eta') d\eta'}{\eta' - \eta}.$$

Таким образом, исходное уравнение (8) в пределе сильной нелокальности может быть аппроксимировано следующим образом:

$$\sin \phi + v^2 \phi_{\eta\eta} = \frac{1}{\pi\lambda} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_{\eta'}(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta'. \quad (27)$$

В случае вращательных решений уравнение (27) может быть получено следующим образом.

В пределе сильной нелокальности правая часть (23) исходного уравнения (8) принимает вид:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N (-\omega_n a_n) \sin \omega_n \eta.$$

Используя представление функции  $\phi(\eta)$  в виде (18), а также преобразование Гильберта от константной функции и функции  $\cos \omega x$  (см. [11]):

$$\begin{aligned} H[C] &= 0, \\ H[\cos \omega x] &= -\sin \omega x, \quad \text{при } \omega > 0, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}H[\phi_\eta(\eta)] &= \frac{1}{\lambda}H\left[\sum_{n=1}^N(\omega_n a_n)\cos\omega_n\eta\right] = \\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^N(\omega_n a_n)H[\cos\omega_n\eta] = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^N(-\omega_n a_n)\sin\omega_n\eta.\end{aligned}$$

Для уравнения (27) можно выписать точное стационарное периодическое решение (см. [12]):

$$\phi(\eta) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\lambda^2 L^2 - 1} \sin \frac{\eta}{L} \right] \quad (28)$$

и точное стационарное вращательное решение (см. [12]):

$$\phi(\eta) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[ (\sqrt{\lambda^2 L^2 + 1} + \lambda L) \operatorname{tg} \frac{\eta}{2L} \right]. \quad (29)$$

Решения (28), (29) можно рассматривать в качестве искомым начальных приближений. В пределе  $L \rightarrow \infty$  они приближаются к  $2\pi$ -кинку:

$$\phi(\eta) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \lambda \eta.$$

Кроме того, для уравнения (27) можно выписать пару точных решений, каждое из которых в пределе  $L \rightarrow \infty$  приближается к  $4\pi$ -кинку:

$$\phi(\eta) = 4 \operatorname{arctg} \lambda \eta, \quad v = \frac{1}{\lambda}.$$

Одно из таких решений является периодическим:

$$\phi(\eta) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin \frac{\eta}{L}}{\sqrt{\lambda v - 1}} \right], \quad L = \frac{v\sqrt{\lambda v}}{\sqrt{\lambda v - 1}}, \quad (30)$$

другое — вращательным:

$$\phi(\eta) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{1 + \lambda v}{1 - \lambda v}} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2L} \right], \quad L = \frac{\lambda v^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 v^2}}. \quad (31)$$

Указанные решения (30), (31) также можно рассматривать в качестве искомым начальных приближений.



## 4.2 Получение начальных приближений в пределе малой амплитуды

Разложим периодическое решение исходного уравнения (8) в асимптотический ряд вблизи нуля при малом параметре  $\varepsilon$ :

$$\phi(\eta) = \pi n + \varepsilon \cos(\omega\eta) + A\varepsilon^3 \cos(3\omega\eta) + o(\varepsilon^3). \quad (32)$$

В силу инвариантности исходного уравнения (8) относительно сдвига  $\phi(\eta) \rightarrow \phi(\eta) + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  достаточно рассмотреть два случая:  $n = 0, 1$ .

Частота  $\omega$  вычисляется по формуле:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2 + o(\varepsilon^2),$$

в которой значение  $\omega_0$  является решением трансцендентного уравнения:

$$\omega_0^2 v^2 - (-1)^n = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_0^2}},$$

а значение  $\omega_2$  определяется непосредственно:

$$\omega_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{8} : \left[ 2\omega_0 v^2 - \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 \omega_0^2}} + \frac{\lambda^2 \omega_0^3}{(1 + \lambda^2 \omega_0^2)^{3/2}} \right],$$

так же, как и значение множителя  $A$ :

$$A = \frac{(-1)^{n+1}}{24} : \left[ 9\omega_0^2 v^2 - (-1)^n - \frac{9\omega_0^2}{\sqrt{1 + 9\lambda^2 \omega_0^2}} \right].$$

Указанное разложение (32) можно рассматривать в качестве еще одного начального приближения.

## 5 Мера близости периодических и вращательных решений к решению типа кинка

Исходное уравнение (8) может быть записано в виде следующей системы уравнений (см. [13]):

$$\begin{cases} \sin \phi + v^2 \phi_{\eta\eta} = \int_0^{\pi/2} q_\eta(\eta, \alpha) d\alpha \\ q(\eta, \alpha) - \lambda^2 \cos^2(\alpha) q_{\eta\eta}(\eta, \alpha) = \phi_\eta, \end{cases} \quad (33)$$

где

$$q(\eta, \alpha) = \frac{1}{2\lambda \cos \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|\eta - \eta'|}{\lambda}\right) \phi_{\eta'}(\eta') d\eta'. \quad (34)$$

Умножим первое уравнение системы (33) на  $\phi_\eta$ , второе — на  $q_\eta$ . Проинтегрируем второе уравнение по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi/2$  и вычтем его из первого уравнения:

$$\begin{aligned} & \phi_\eta(\eta) \sin \phi + v^2 \phi_\eta(\eta) \phi_{\eta\eta}(\eta) - \\ & - \int_0^{\pi/2} q_\eta(\eta, \alpha) q(\eta, \alpha) d\alpha + \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\alpha) q_\eta(\eta, \alpha) q_{\eta\eta}(\eta, \alpha) d\alpha = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрируя уравнение (35) по  $\eta$ , найдем первый интеграл системы (33):

$$I(\eta) = C,$$

где

$$\begin{aligned} I(\eta) = & 1 - \cos \phi + \frac{1}{2} v^2 \phi_\eta^2 - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} q^2(\eta, \alpha) d\alpha + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\alpha) q_\eta^2(\eta, \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

$C$  — константа интегрирования, которая в случае решения типа кинка равна нулю. Это объясняется тем, что  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi(\eta) = 0$ , а значит,  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} q(\eta) = 0$ .

Функция  $I(\eta)$  является мерой близости искомых периодических и вращательных решений  $\phi(\eta)$  к решению типа кинка.

## 6 Результаты

### 6.1 Графики периодических решений

#### 6.1.1 Приближение к $2\pi$ -кинку

Используя процедуру получения начального приближения в пределе сильной нелокальности (см. раздел 4.1), построим начальное приближение для периодического решения:

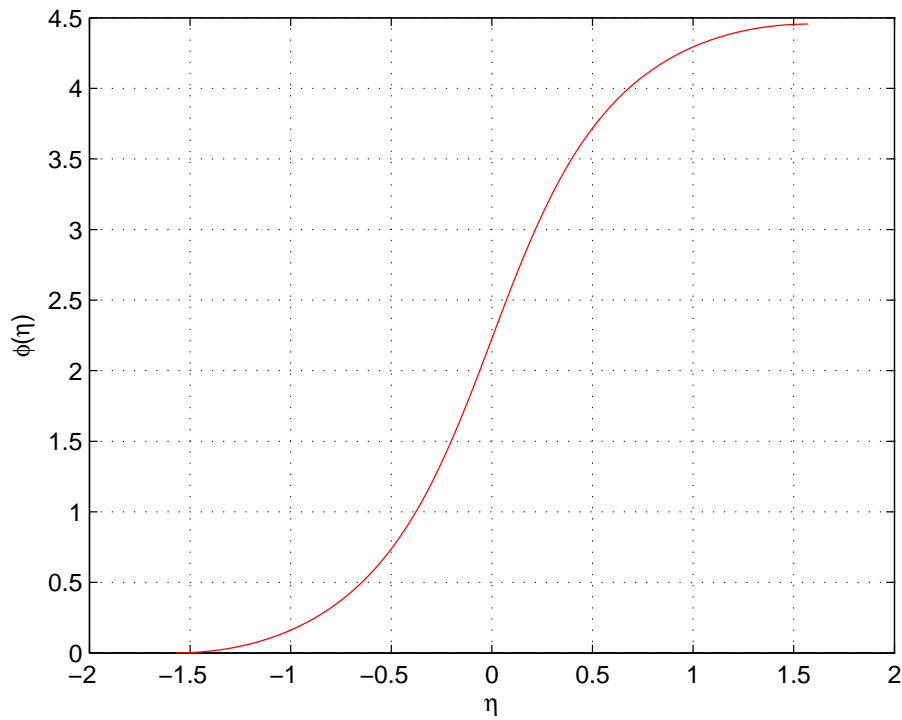


Рис. 3: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$  и  $L = 6,2832$ , представленный на половине периода  $L$ .

Постепенно увеличивая период  $L$ , получим:

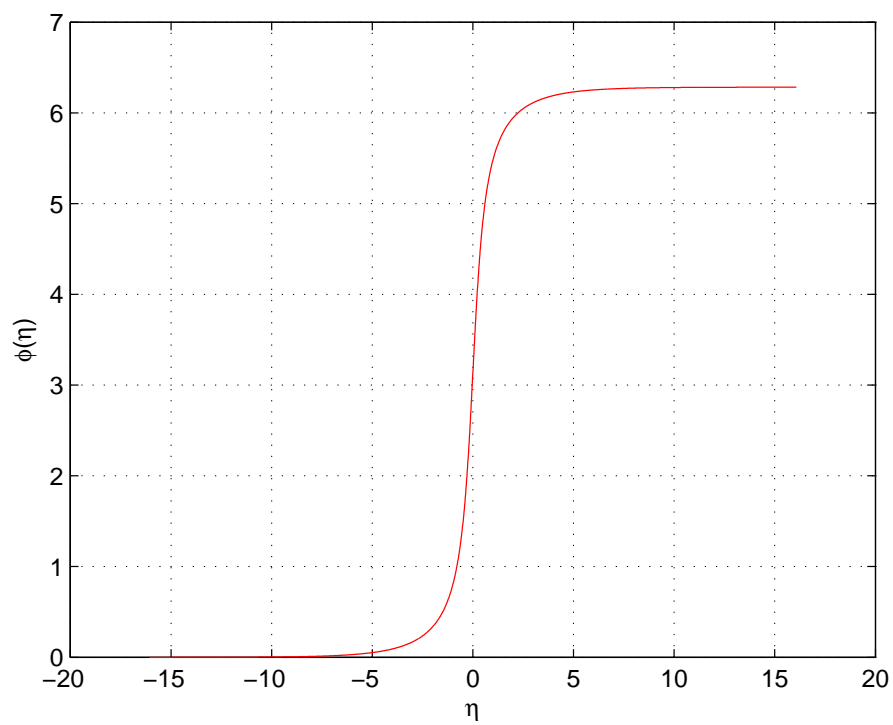


Рис. 4: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$  и  $L = 64, 2832$ , представленный на половине периода  $L$ .

Продолжая увеличивать значение периода  $L$ , приходим к результату, который указывает на существование решения типа  $2\pi$ -кинка:

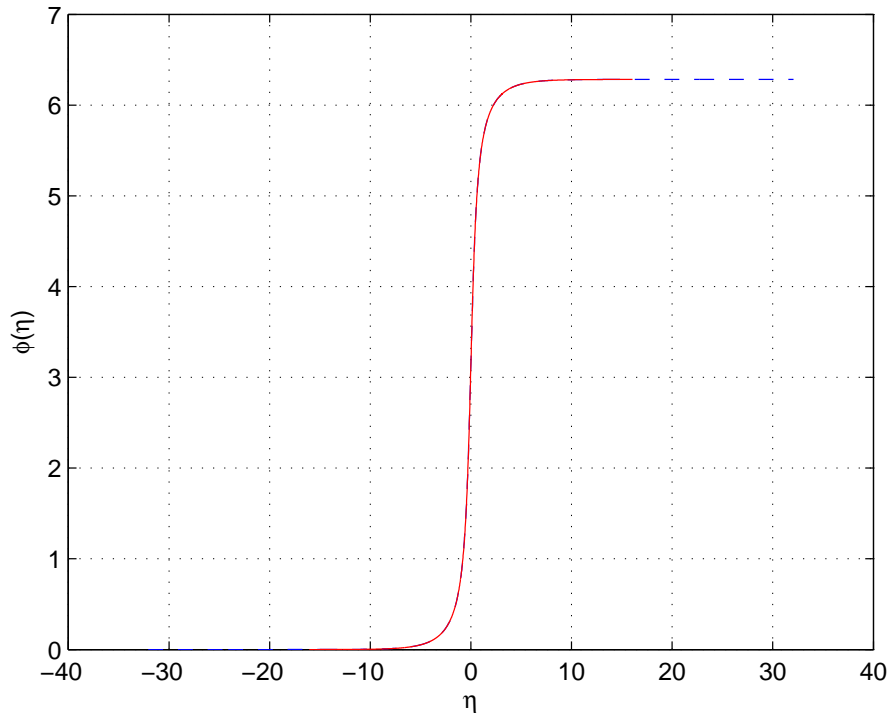


Рис. 5: Графики функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$ ,  $L = 64,2832$  (сплошная линия) и при  $\lambda = 2$ ,  $L = 128,2832$  (пунктирная линия). Графики представлены на половине периода  $L$ .

### 6.1.2 Приближение к $4\pi$ -кинку

Начиная с некоторого начального приближения для периодического решения, с помощью процедуры продолжения по параметрам модели приходим к следующему результату:

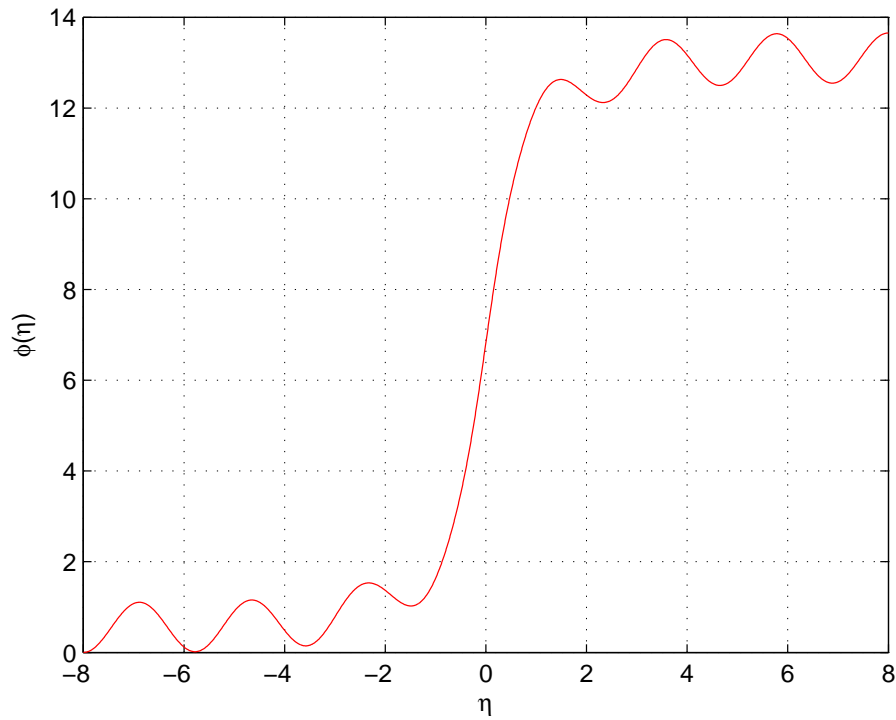


Рис. 6: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,674$ ,  $L = 32$ , представленный на половине периода  $L$ .

Зафиксировав значение параметра нелокальности  $\lambda$  и меняя значение скорости  $v$ , можно добиться исчезновения наблюдаемых на концах графика осцилляций:

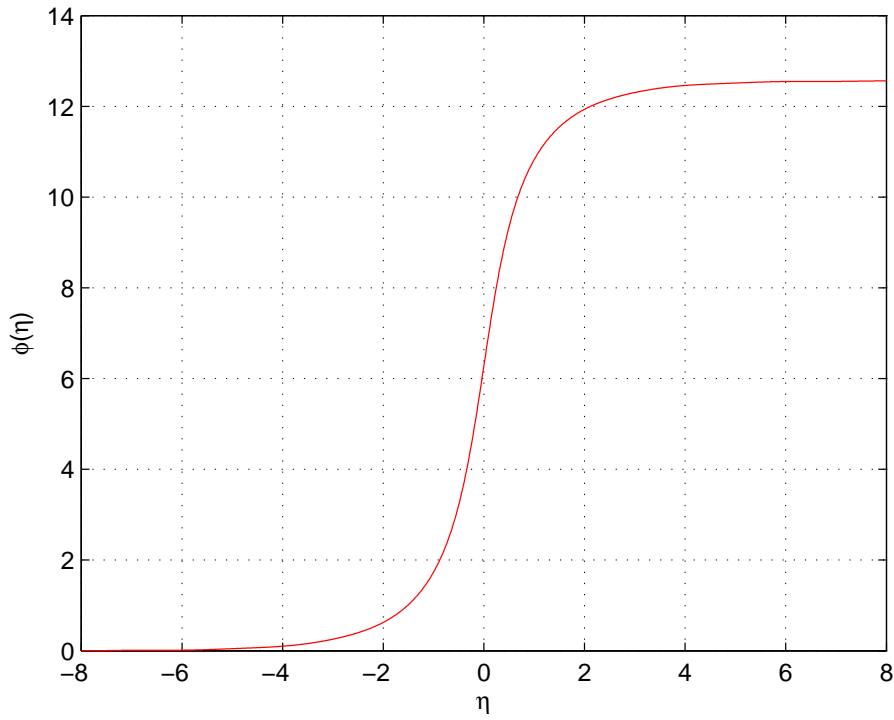


Рис. 7: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,654$ ,  $L = 32$ , представленный на половине периода  $L$ .

Постепенно увеличивая значение периода  $L$ , приходим к результату, который указывает на существование решения типа  $4\pi$ -кинка:

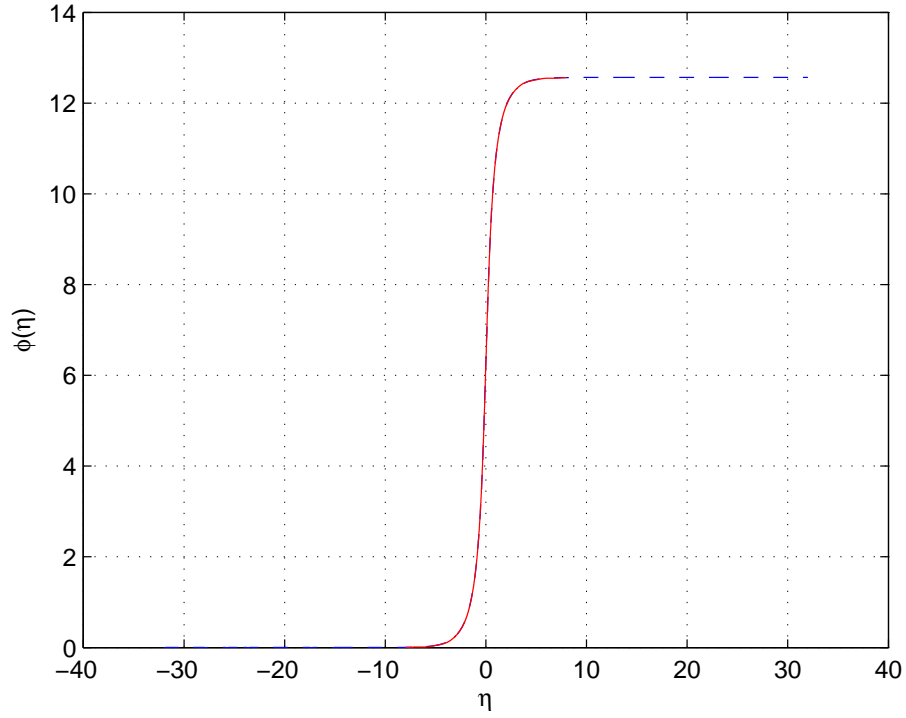


Рис. 8: Графики функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,654$ ,  $L = 32$  (сплошная линия) и при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,6535$ ,  $L = 128$  (пунктирная линия). Графики представлены на половине периода  $L$ .



## 6.2 Графики вращательных решений

### 6.2.1 Приближение к $2\pi$ -кинку

Используя процедуру получения начального приближения в пределе сильной нелокальности (см. раздел 4.1), построим начальное приближение для вращательного решения с теми же значениями параметров  $\lambda, L$ , что и для периодического решения (6.1.1):

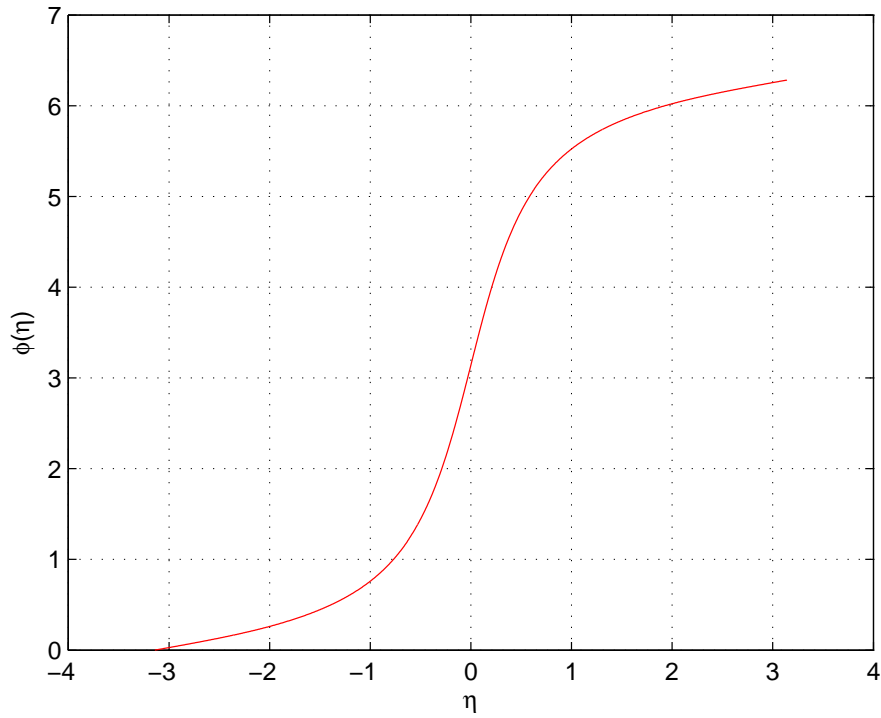


Рис. 9: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$  и  $L = 6,2832$ .

Постепенно увеличивая период  $L$ , получим:

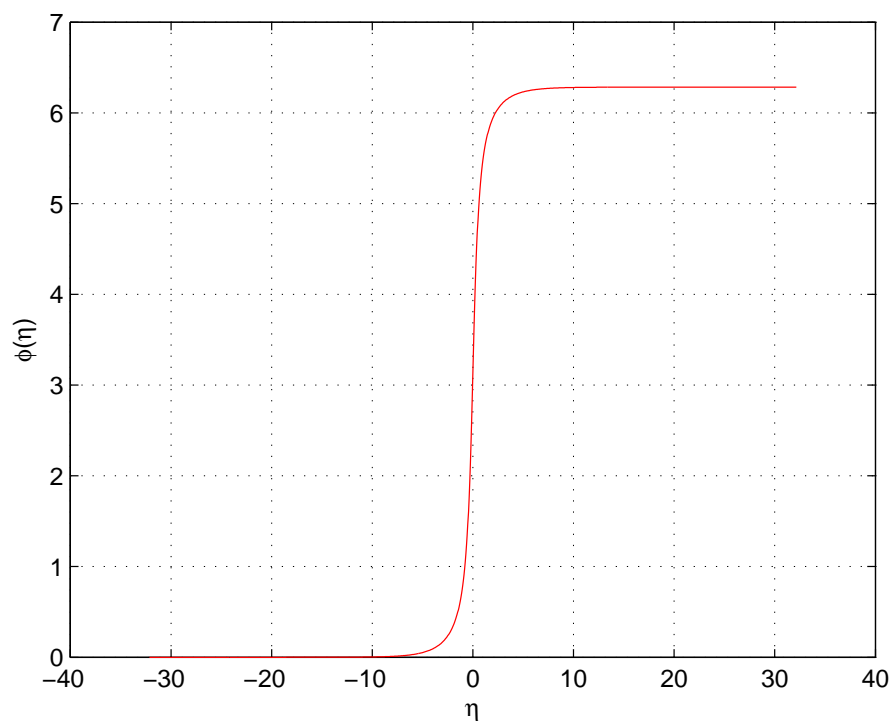


Рис. 10: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$  и  $L = 64, 2832$ .

Продолжая увеличивать значение периода  $L$ , приходим к результату, который вновь указывает на существование решения типа  $2\pi$ -кинка:

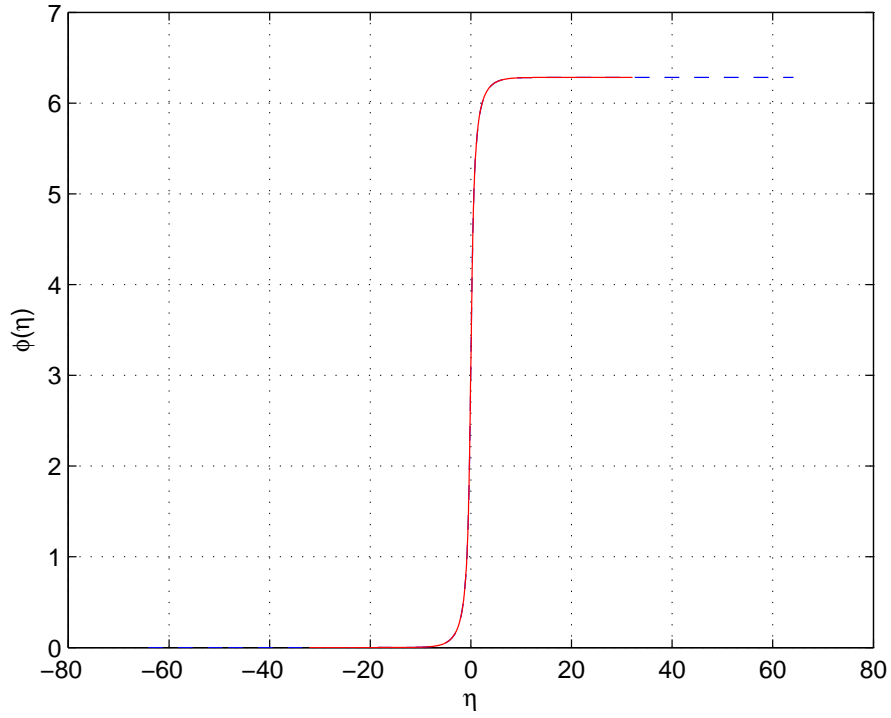


Рис. 11: Графики функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 2$ ,  $L = 64, 2832$  (сплошная линия) и при  $\lambda = 2$ ,  $L = 128, 2832$  (пунктирная линия).

Таким образом, мы подошли к решению типа  $2\pi$ -кинка как со стороны периодических решений (6.1.1), так и со стороны вращательных решений.

### 6.2.2 Приближение к $4\pi$ -кинку

Начиная с некоторого начального приближения для вращательного решения, с помощью процедуры продолжения по параметрам модели приходим к следующему результату:

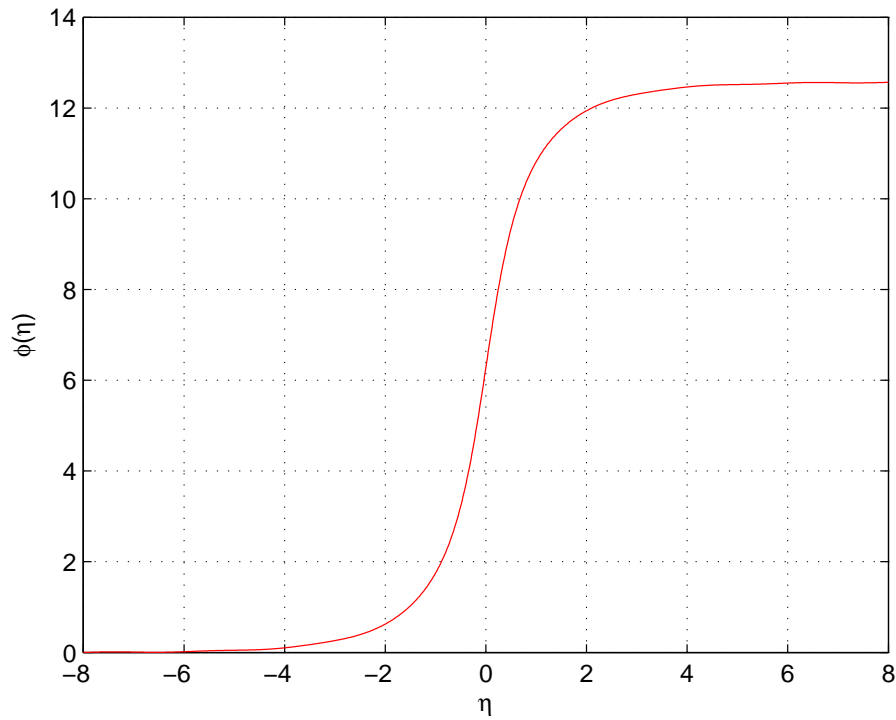


Рис. 12: График функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,654$ ,  $L = 16$ .

Постепенно увеличивая значение периода  $L$  и при необходимости корректируя значение скорости  $v$ , приходим к результату, который указывает на существование решения типа  $4\pi$ -кинка:

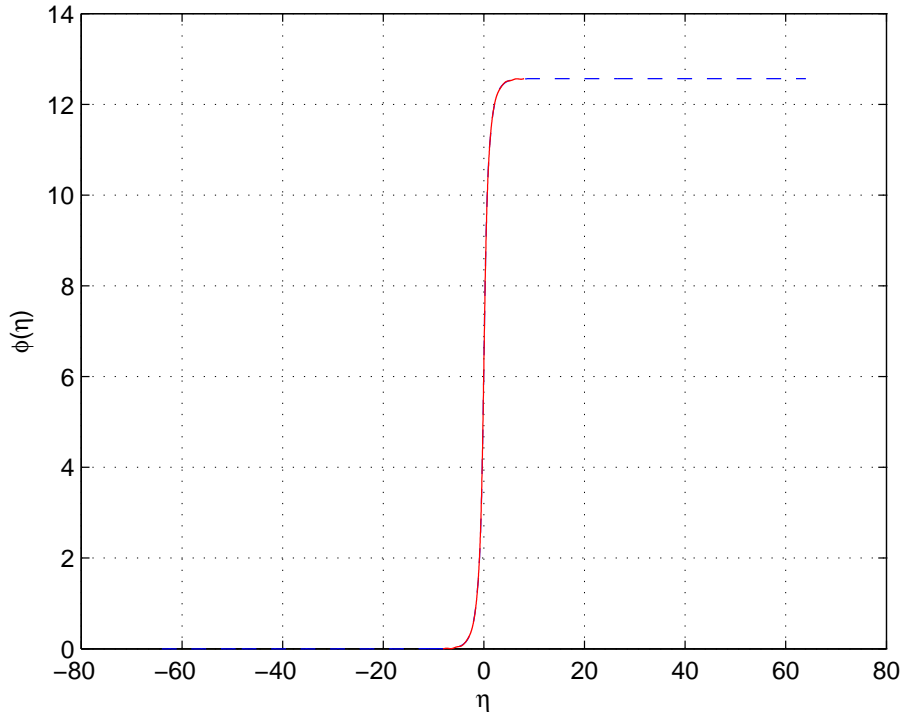


Рис. 13: Графики функции  $\phi(\eta)$  при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,654$ ,  $L = 16$  (сплошная линия) и при  $\lambda = 1$ ,  $v = 0,65354$ ,  $L = 128$  (пунктирная линия).

### 6.3 Замечание о скорости распространения кинка

На основании полученных результатов (см. разделы 6.1, 6.2) можно сделать одно весьма важное замечание, а именно: скорость кинка не может быть произвольной. Она может принимать лишь дискретные значения, набор которых определяется параметрами конкретной нелокальной модели.

Если говорить о кинках, которые являются решениями локального уравнения синус-Гордона (3), то их скорость может быть произвольной, но меньшей единицы.

## 7 Заключение

Разработанное ранее консольное приложение для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой (см. первое упоминание о нем в разделе 3) было значительно усовершенствовано.

Во-первых, появилась возможность создавать начальные приближения для периодических и вращательных решений (см. раздел 4), причем двумя способами.

Во-вторых, появилась возможность работать с большими размерностями матрицы Ньютона.

В-третьих, для данного приложения была разработана оконная оболочка (см. приложение А), значительно повышающая удобство работы с этим приложением и превращающая его в некий рабочий инструмент для расчета джозефсоновского контакта, визуализации и сохранения результатов такого расчета. Именно с помощью данной оболочки были получены графики периодических (см. раздел 6.1) и вращательных (см. раздел 6.2) решений.

В-четвертых, помимо ядра нелокальности (5), были реализованы следующие ядра: (6), (7). Данные ядра нелокальности позволяют рассчитывать джозефсоновский контакт, образованный сверхпроводниками конечных размеров, а также джозефсоновский контакт между тонкими сверхпроводящими пленками.

Отметим, что разработанное программное приложение для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой (см. приложение А) рассчитано на пользователя-нематематика, что делает его особенно полезным для физиков, работающих в этой области.

## А Программное приложение для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой

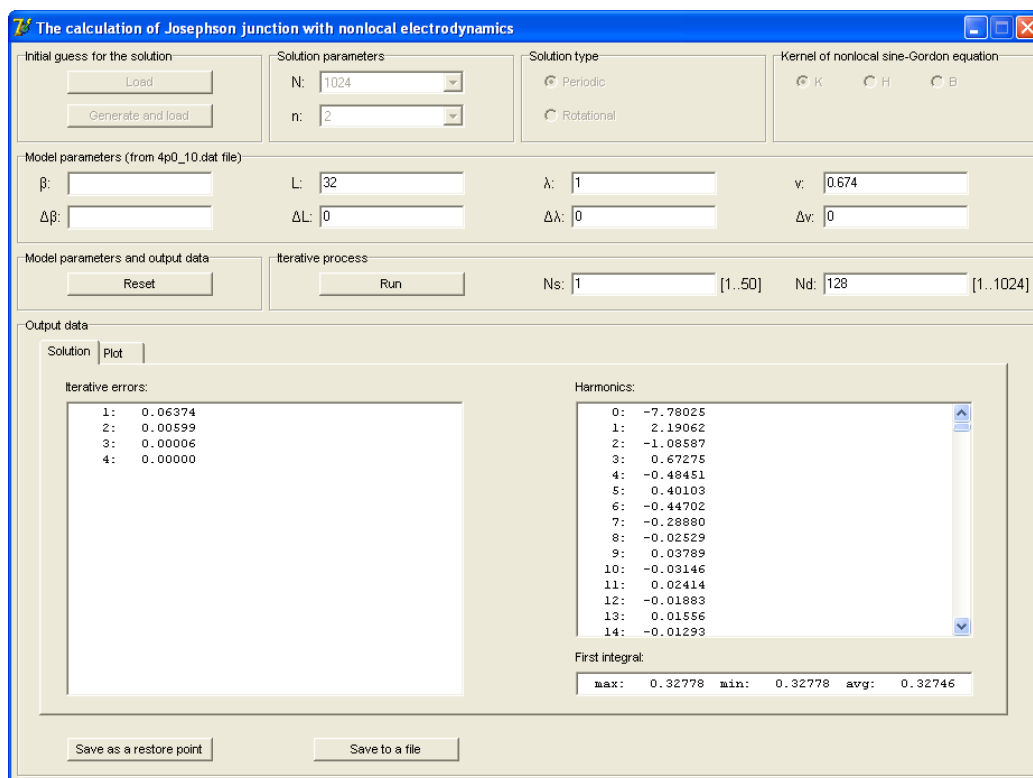


Рис. 14: Снимок главной формы разработанного программного приложения для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой. Активной вкладкой является вкладка «Решение».



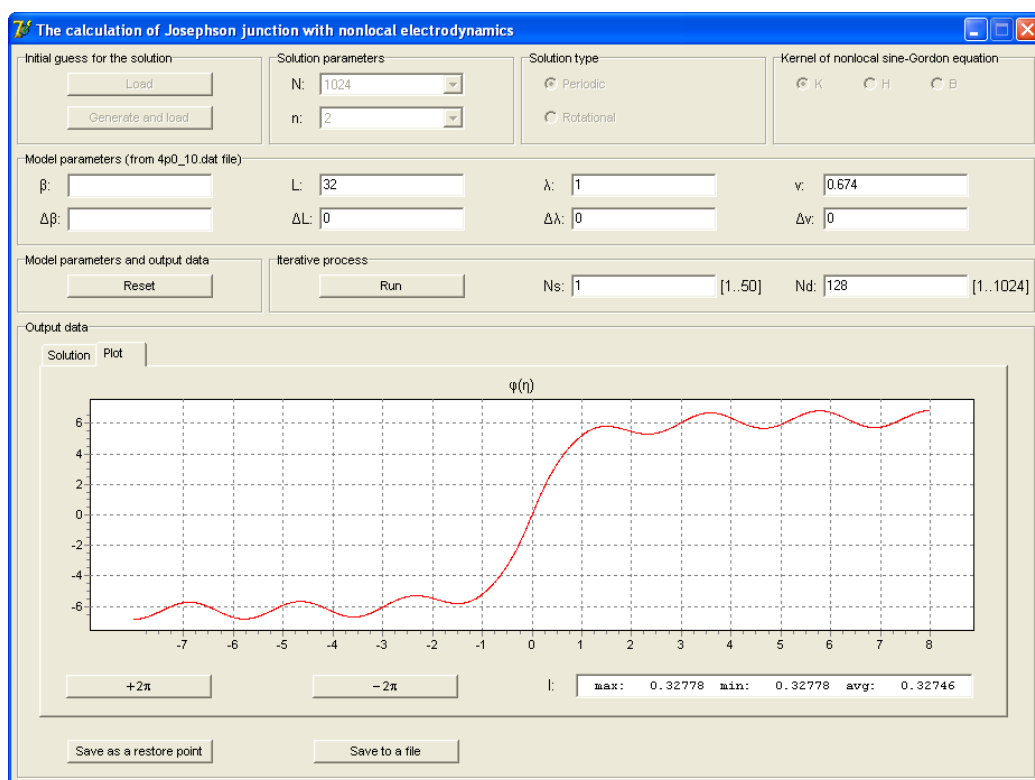


Рис. 15: Снимок главной формы разработанного программного приложения для расчета джозефсоновского контакта с нелокальной электродинамикой. Активной вкладкой является вкладка «График».

## Список литературы

- [1] К. Likharev - Dynamics of Josephson junctions and circuits - 1986  
Gordon and Breach, New York - London - Paris - Montreux - Tokyo
- [2] А. Бароне, Дж. Патерно - Эффект Джозефсона. Физика и  
применения - 1985 М.: Мир
- [3] Ю. М. Иванченко, Т. К. Соболева - Джозефсоновский переход с  
нелокальным взаимодействием - 1990 Письма в ЖЭТФ, т. 51, вып.  
2, стр. 100–102
- [4] Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин - К теории нелинейных  
диспергирующих волн в джозефсоновских контактах - 1992 СФХТ,  
т. 5, н. 2, стр. 228–235
- [5] A. Gurevich - Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in  
superconductors - 1992 Phys. Rev. B., v. 46, n. 5, pp. 3187–3190
- [6] A. Gurevich - Nonlinear viscous motion of vortices in Josephson  
contacts - 1993 Phys. Rev. B., v. 48, n. 17, pp. 12857–12865
- [7] R. G. Mints - Nonlocal Josephson electrodynamics - 1997 J. Low.  
Temp. Phys., v. 106, n. 3/4, pp. 183–192
- [8] A. A. Abdumalikov Jr., G. L. Alfimov and A. S. Malishevskii -  
Nonlocal electrodynamics of Josephson vortices in superconducting  
circuits - 2009 Supercond. Sci. Technol. 22 023001
- [9] A. A. Abdumalikov Jr., M. V. Fistul and A. V. Ustinov - Vortex  
radiation in long narrow Josephson junctions: Theory and experiment -  
2005 Phys. Rev. B., v. 72, 144526
- [10] Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и  
И. Стиган - 1979 М.: Наука
- [11] H. Bateman and A. Erdelyi, eds., Tables of integral transforms v. 2 -  
1954 McGraw-Hill, New York

- [12] Г. Л. Алфимов, В. П. Силин - Мелкомасштабные  
пространственно-периодические джозефсоновские структуры -  
1994 ЖЭТФ, т. 106, вып. 2, стр. 671–685
- [13] G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky and L. M. Lerman - Solitary wave  
solutions of nonlocal sine-Gordon equations - 1998 Chaos v. 8 pp.  
257–271