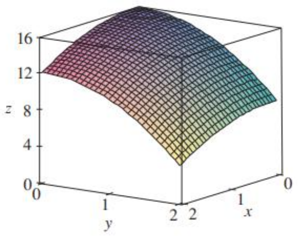
TRABAJO PRÁCTICO IV

INTEGRALES MÚLTIPLES

PARTE A: INTEGRALES DOBLES

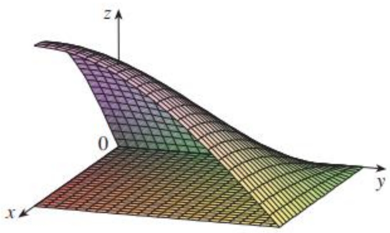
1. Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico

$x^2 + 2y^2 + z = 16,$ los planos x = 2 e y = 2 y los tres planos coordenados.



2. Considerando que cuando f(x, y) se puede factorizar como el producto de una función de x y una función de y, la integral doble de f se puede escribir como el producto de dos integrales simples:

$$\boxed{\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]}$$



Encontrar el volumen del sólido que se encuentra sobre:

$R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Y debajo de:

$f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$

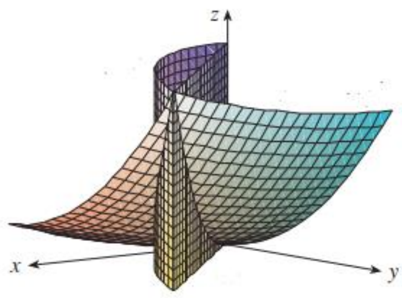
3. Encuentre el volumen del sólido que está debajo del paraboloide elíptico

$x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

4. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

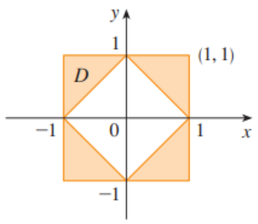
y arriba de la región D en el plano xy acotado por la recta y = 2x y la parábola y = x^2



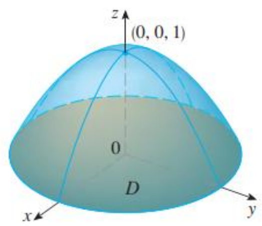
5. Encuentre el volumen del sólido dado.
   Bajo de la superficie z = xy y arriba del triángulo con vértices (1,1), (4,1), (1,2)

6. Exprese a D como una unión de regiones tipo I o tipo II y evalúe la integral.

$$\iint_D x^2\, dA$$



7. Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano z = 0 y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.



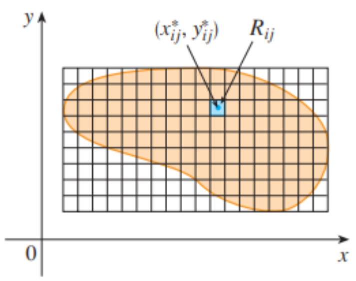
8. Problema de aplicación de integrales dobles.

Masa y Densidad

Supongamos que la lámina ocupa una región D del plano xy y su densidad (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por ρ(x, y), donde ρ es una función continua sobre D. Esto significa que:

$$\rho(x, y) = \text{lím} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

Δm y ΔA son la masa y el área de un rectángulo pequeño que contiene a (x, y) el límite se toma cuando las dimensiones del rectángulo se aproximan a 0 .



Para hallar la masa total m de la lámina, se divide un rectángulo R que contiene a D en subrectángulos R_{ij} del mismo tamaño (como en la figura 2) y se considera que $\rho(x, y)$ es 0 fuera de D. Si se elige un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}, entonces la masa de la parte de la lámina que ocupa R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, donde ΔA es el área de R_{ij}. Si se suman todas las masas, se obtiene una aproximación de la masa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Si ahora se incrementa el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor límite de las aproximaciones:

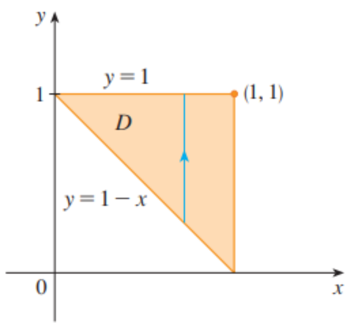
$$\boxed{m = \lim_{k,\,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA}$$

Los físicos consideran también otros tipos de densidad que se pueden tratar de la misma manera. Por ejemplo, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por área unitaria) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, entonces la carga total Q está dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

Ejercicio:

La carga está distribuida sobre la región triangular D en la figura de modo que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Determine la carga total.

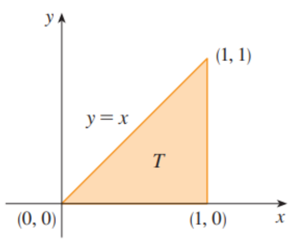


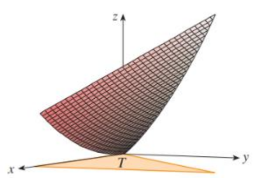
9. Recordando que:

El área de la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde f_x y f_y son continuas, es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

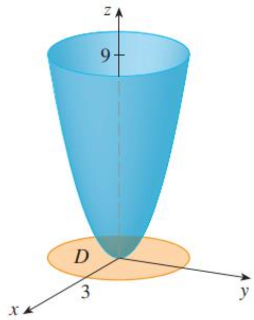
Encuentre el área de la superficie de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que está sobre la región triangular T en el plano xy con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1).





(Esta es la porción de la superficie cuya área se va a calcular)

10.



Encuentre el área de la parte del paraboloide z = $x^2 + y^2$ que está bajo el plano z = 9.

PARTE B: INTEGRALES TRIPLES

11. Evalúe la integral triple $\iiint_E \operatorname{sen} y \, dV$ donde E está por debajo del plano z = x y por encima de la región triangular con vértices (0, 0, 0), (π, 0, 0) y (0, π, 0)

12. Evalúe la integral triple $\iiint_E 6xy \, dV$ donde E yace bajo el plano z = 1 + x + y y arriba de la región en el plano xy acotado por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 1$

13. Evalúe la integral triple $\iiint_E xy \, dV$ donde E está acotada por los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$

14. Use una integral triple para hallar el volumen del tetraedro T acotado por los planos x + 2 y + z = 2, x = 2y , x = 0 y z = 0.

15. Problema de aplicación de integrales triples.

    Masa y Densidad

    Análogamente a lo que vimos en el problema 8 para integrales dobles, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es $\rho(x, y, z)$ en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto dado (x, y, z), entonces su masa es:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$$

Centro de masa

El cálculo del centro de masa facilita resolver problemas de mecánica en donde tenemos que describir el movimiento de objetos con formas raras y de sistemas complicados.

Es una simplificación que consiste en tratar un objeto de forma rara como si toda su masa estuviera concentrada en un objeto pequeñito ubicado en el centro de masa.

Siguiendo el cálculo de la masa total del sólido, podemos calcular los momentos respecto de los 3 planos coordenados y, luego, el centro de masa del cuerpo.

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\,dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\,dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\,dV$$

El centro de masa se localizará en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde las coordenadas quedan determinadas por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama centroide de E.

Ejercicio: Encuentre el centro de masa de un sólido de densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.