Universidade de Brasília	Bacharelado em Estatística
Instituto de Ciências Exatas	Inferência Bayesiana
Departamento de Estatística	Prof. Gustavo L. Gilardoni

Lista de Exercícios 3.2

Gustavo L. Gilardoni

Os exercícios numerados em verde são optativos.

1. Considere o modelo $X \sim$ Uniforme $(\theta,\theta+1)$ $(-\infty<\theta<\infty)$.
(a) Mostre que θ é um parâmetro de locação.
(b) Dada a priori não informativa usual para o modelo de locação, $p(\theta) \propto 1$ e uma amostra aleatória $X_1,\ldots,X_n$ do modelo acima, discuta a propriedade da distribuição a posteriori.
(c) Na situação da parte **(b)**, ache: **(i)** os estimadores bayesianos sob Perda Quadrática e sob Perda Absoluta; **(ii)** O intervalo HPD para θ com credibilidade $100(1-\alpha)$ e **(iii)** A probabilidade a posteriori do evento $\theta>\theta_0$.

2. Considere o modelo $X \sim$ Uniforme $(0,\theta)$ $(0<\theta<\infty)$.
(a) Mostre que $\sigma=\theta^{-1}$ é um parâmetro de escala.
(b) Dada a priori não informativa usual para o modelo de escala, $p(\sigma) \propto \sigma^{-1}$ e uma amostra aleatória $X_1,\ldots,X_n$ do modelo acima, discuta a propriedade da distribuição a posteriori.
(c) Na situação da parte **(b)**, ache: **(i)** os estimadores bayesianos sob Perda Quadrática e sob Perda Absoluta; **(ii)** O intervalo HPD para θ com credibilidade $100(1-\alpha)$ e **(iii)** A probabilidade a posteriori do evento $\theta>\theta_0$.

3. Considere o modelo $x_1,\ldots,x_n|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$.
(a) Calcule a priori de Jeffreys e mostre que ela é própria.
(b) Considere uma amostra aleatória $X_1,\ldots,X_n$ do modelo acima e a priori de Jeffreys. Ache o estimador bayesiano de θ sob Perda Quadrática e explique como achar um intervalo HPD para θ com credibilidade $100(1-\alpha)$.

4. Suponha o modelo $y \sim \text{NegBin}(k,\theta)$.
(a) Ache a distribuição a priori de Jeffreys e discuta a sua propriedade e da correspondente distribuição a posteriori.
(b) Compare os resultados acima com os obtidos no Exercício 3 e discuta a seguinte afirmação: *A distribuição a priori de Jeffreys viola o princípio de verossimilhança.*

5. Suponha amostras aleatórias dos seguintes modelos. Em cada caso, calcule a distribuição a priori de Jeffreys e discuta se as distribuições a priori e a posteriori são próprias.
(a) Poisson(θ);
(b) Exponêncial com risco λ;
(c) Multinomial com $k=3$ e parâmetro $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$;
(d) Normal com média μ e precisão τ, as duas desconhecidas.

6. Considere o modelo $x_i\,|\,\mu_i,\mu_0,\tau \overset{indep}{\sim} \text{N}(\mu_i,1)$ $(i=1,\ldots,n)$ com a priori (imprópria) $p(\mu_1,\ldots,\mu_n;\mu_0,\tau) \propto \tau^{-1}\prod_{i=1}^n n(\mu_i\,|\,\mu_0,\tau^2)$, onde $n(x|\mu,\sigma^2)$ e a densidade da distribuicão Normal com média μ e variância σ^2. Mostre que a distribuição a posteriori é imprópria quaisquer que sejam as observações $x_1,\ldots,x_n$.

Algumas Soluções

1. **(a)** Para uma única observação temos que $p(x \,|\, \theta) = I(\theta < x < \theta + 1) = I(0 < x - \theta < 1)$, isto é, na notação das notas de aula, $f(x) = I(0 < x < 1)$ é a densidade da Uniforme(0,1) [alternativamente, observe que $X \sim$ Uniforme(θ,$\theta + 1$) se, e somente se, $U = X - \theta \sim$ Uniforme(0,1)]. **(b)** Denote por $x_{(1)}$ e $x_{(n)}$ respectivamente o mínimo e o máximo das n observações. A verossimilhança é $p(x_1, \ldots, x_n \,|\, \theta) = \prod_{i=1}^{n} I(\theta < x_i < \theta + 1) = I(x_{(n)} - 1 < \theta < x_{(1)})$. Assim, usando a priori $p(\theta) \propto 1$ temos que $p(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_n) \propto I(x_{(n)} - 1 < \theta < x_{(1)})$ e portanto a posteriori θ segue uma distribuição Uniforme($x_{(n)} - 1$,$x_{(1)}$) (sempre própria). **(c)** **(i)** $\hat{\theta}_{PQ} = \hat{\theta}_{PA} = (x_{(1)} + x_{(n)} - 1)/2$; **(ii)** Na verdade qualquer intervalo com probabilidade a posteriori $(1 - \alpha)$ será HPD, por exemplo o intervalo central com límites $x_{(n)} - 1 + (\alpha/2)\,(1 - x_{(n)} + x_{(1)})$ e $x_{(1)} - (\alpha/2)\,(1 - x_{(n)} + x_{(1)})$; **(iii)** Se $x_{(n)} - 1 < \theta_0 < x_{(1)}$ a probabilidade desejada é $(x_{(1)} - \theta_0)/(1 - x_{(n)} + x_{(1)})$.

2. **(a)** Para uma única observação temos que $p(x \,|\, \theta) = \theta^{-1} I(0 < x < \theta) = \theta^{-1} I(0 < x/\theta < 1)$, isto é, na notação das notas de aula, $f(x) = I(0 < x < 1)$ é a densidade da Uniforme(0,1) [alternativamente, observe que $X \sim$ Uniforme(0,θ) se, e somente se, $U = X/\theta \sim$ Uniforme(0,1)]. **(b)** A densidade $p(\sigma) \propto \sigma^{-1}$ é equivalente a assumir que $p(\theta) \propto [1/(1/\theta)]\,| - 1/\theta^2| \propto \theta^{-1}$. Logo, a densidade a posteriori seria $p(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_n) \propto \theta^{-1}\,\theta^{-n}\, I(\theta > x_{(n)}) \propto \theta^{-(n+1)}\, I(\theta > x_{(n)})$. Como $\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta^{-(n+1)}\, d\theta = [n\, x_{(n)}^{n}]^{-1} < \infty$ para todo $x_{(n)}$, a densidade é sempre própria (a distribuição a posteriori de θ é dita de Pareto). **(c)** **(i)** $\hat{\theta}_{PQ} = n\, x_{(n)}/(n-1)$ (para $n > 1$, se $n = 1$ é infinita), $\hat{\theta}_{PA} = x_{(n)}\, 2^{1/n}$; **(ii)** Como a densidade é decrescente, o intervalo HPD é $(x_{(n)}, x_{(n)}\, \alpha^{-1/n})$; **(iii)** $[x_{(n)}/\theta_0]^n$ (para $\theta_0 \geq x_{(n)}$).

3. **(a)** $p_J(\theta) \propto \theta^{-1/2}\,(1 - \theta)^{-1/2}$ [a distribuição Beta($\alpha = 1/2$,$\beta = 1/2$), própria]. **(b)** $\theta \,|\, x_1, \ldots, x_n \sim$ Beta($\alpha = s + 1/2$,$\beta = n - s + 1/2$), onde $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$; $\hat{\theta}_{PQ} = (s + 1/2)/(n + 1)$; para o intervalo HPD, adapte o algoritmo usado no exercício 4 da Lista 2.

4 **(a)** Consideramos $p(y \,|\, \theta) = \binom{y+k-1}{y}\,\theta^y\,(1 - \theta)^k$ para $y = 0, 1, \ldots$; $p_J(\theta) \propto \theta^{-1/2}\,(1 - \theta)^{-1}$ [isto é, a "distribuição" Beta(1/2,0), imprópria]; a distribuição a posteriori seria a Beta($y + 1/2$,k), sempre própria pois obviamente $k > 0$. **(b)** Comparando com o exercício 3, considere o caso $y = s$ e $k = n - s$, de forma que as verossimilhanças são proporcionais; no exercício 3 temos por exemplo $\hat{\theta}_{PQ} = (s + 1/2)/(n + 1)$, enquanto aqui teríamos $\hat{\theta}_{PQ} = (y + 1/2)/(y + k + 1/2) \neq (s + 1/2)/(n + 1)$.

5. **(a)** $p_J(\theta) \propto \theta^{-1/2}$, a "distribuição" Gama(1/2,0), imprópria; a posteriori é Gama($s + 1/2$,n), sempre própria. **(b)** $p_J(\lambda) \propto \lambda^{-1}$, a "distribuição" Gama(0,0), imprópria; a posteriori é Gama(n,s), sempre própria (pois $n, s > 0$ com probabilidade 1). **(c)** $p_J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \propto \theta_1^{-1/2}\,\theta_1^{-1/2}\,\theta_1^{-1/2}$, a distribuição de Dirichlet com parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, própria. **(d)** $p_J(\mu, \tau) \propto \tau^{-1}$, imprópria [parametrizando com o desvio padrão σ, temos $p_J(\mu, \sigma) \propto \sigma^{-1}$]; a posteriori é sempre própria (veja as notas de aula).

6. A forma mais fácil de resolver, assim como a melhor para entender o problema, consiste em integrar os parâmetros $\mu_1, \ldots, \mu_n$ e obter o modelo resultante somente com os parâmetros (μ_0, τ). Mostre primeiro que $x_i \,|\, \mu_0, \tau \overset{indep}{\sim}$ Normal(μ_0,$1 + \tau^2$). Usando

agora a priori $p(\mu_0, \tau) \propto \tau^{-1}$, a densidade a posteriori seria $p(\mu_0, \tau \,|\, x_1, \ldots, x_n) \propto \tau^{-1} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{2\pi\,(1+\tau^2)}}\, \exp\{-(x_i - \mu_0)^2/[2\,(1+\tau^2)\} \propto \tau^{-1}\,[2\pi\,(1+\tau^2)]^{-n/2} \prod_{i=1}^n \exp\{-(x_i - \mu_0)^2/[2\,(1+\tau^2)\}$. Finalmente, mostre que existe uma constante $c > 0$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \exp\{-(x_i - \mu_0)^2/[2\,(1+\tau^2)\}\, d\mu_0 > c$, de forma que $\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1}\,[2\pi\,(1+\tau^2)]^{-n/2} \prod_{i=1}^n \exp\{-(x_i - \mu_0)^2/[2\,(1+\tau^2)\}\, d\mu_0\, d\tau > c \int_0^\infty \tau^{-1}\,[2\pi\,(1+\tau^2)]^{-n/2}\, d\tau = \infty$ (o último integrando é da ordem de τ^{-1} perto de $\tau = 0$, portanto a integral é divergente).