O Lema de Neyman-Pearson

Definição do Problema

Considere um teste da hipóteses simples $H_0 : \theta = \theta_0$ contra a alternativa também simples $H_a : \theta = \theta_1$. O Lema de Neyman-Pearson afirma que se a região crítica C é tal que existe um número real k para o qual

- $p(x \mid \theta_1) > k\, p(x \mid \theta_0)$ implica que $x \in C$ e
- $p(x \mid \theta_1) < k\, p(x \mid \theta_0)$ implica que $x \notin C$;

então para qualquer outra região crítica C_* tal que $\mathbb{P}(x \in C_* \mid \theta_0) \leq \mathbb{P}(x \in C \mid \theta_0)$, devemos ter que $\mathbb{P}(x \notin C_* \mid \theta_1) \geq \mathbb{P}(x \notin C \mid \theta_1)$. Em outras palavras, se denotamos por $\alpha = \mathbb{P}(x \in C \mid \theta_0)$ e $\alpha_* = \mathbb{P}(x \in C_* \mid \theta_0)$ e por $\beta = \mathbb{P}(x \notin C \mid \theta_1)$ e $\beta_* = \mathbb{P}(x \notin C_* \mid \theta_1)$ as respectivos probabilidades dos *erros tipo I* e *tipo II*, para qualquer região crítica C_* cujo probabilidade do erro tipo I é menor ou igual do que a da RC C, devemos ter que a probabilidade do erro tipo II para C_* é maior ou igual que para C.

Definição de \alpha e \beta

- O Lema de NP não especifica como escolher \alpha e \beta.
- Tipicamente fixamos \alpha, o que leva a um valor implícito de \beta.
- Quando um analista pensa sobre o poder de um teste está levando em conta \beta também.
- Normalmente existe uma relação um-a-um entre \alpha, \beta e k (o limite da região crítica).

Exemplo da Relação entre \alpha, \beta e k

Exemplo 7. Suponha uma amostra $X_1, \ldots, X_n \,|\, \mu \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2 = 1)$ e o teste de $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$. Um teste de N-P rejeita H_0 quando a razão de verossimilhança

$$\frac{p(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mu = 1)}{p(x_1, \ldots, x_n \,|\, \mu = 0)} = \frac{\exp\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2/2\}}{\exp\{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2/2\}} = \exp\{n\,(\bar{x} - 1/2)\} > k$$

ou, equivalentemente, quando $\bar{x} > k'$ onde $k' = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log k$.

Dado k (ou k') podemos calcular

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{X} > k' \,|\, \mu = 0) = \mathbb{P}(\sqrt{n}\,\bar{X} > \sqrt{n}\,k' \,|\, \mu = 0) = 1 - \Phi(\sqrt{n}\,k')\,,$$

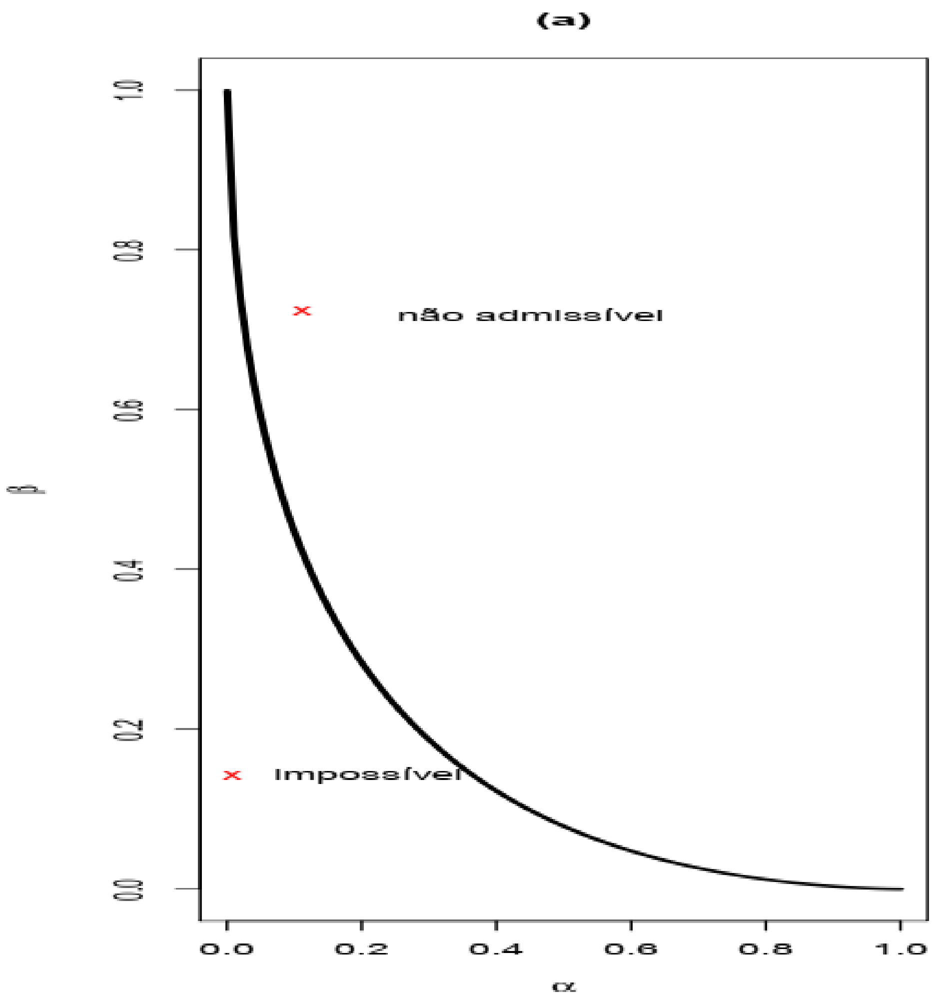
$$\beta = \mathbb{P}(\bar{X} \leq k' \,|\, \mu = 1) = \mathbb{P}(\sqrt{n}\,[\bar{X} - 1] \leq \sqrt{n}\,[k' - 1] \,|\, \mu = 1) = \Phi(\sqrt{n}\,[k' - 1])\,.$$

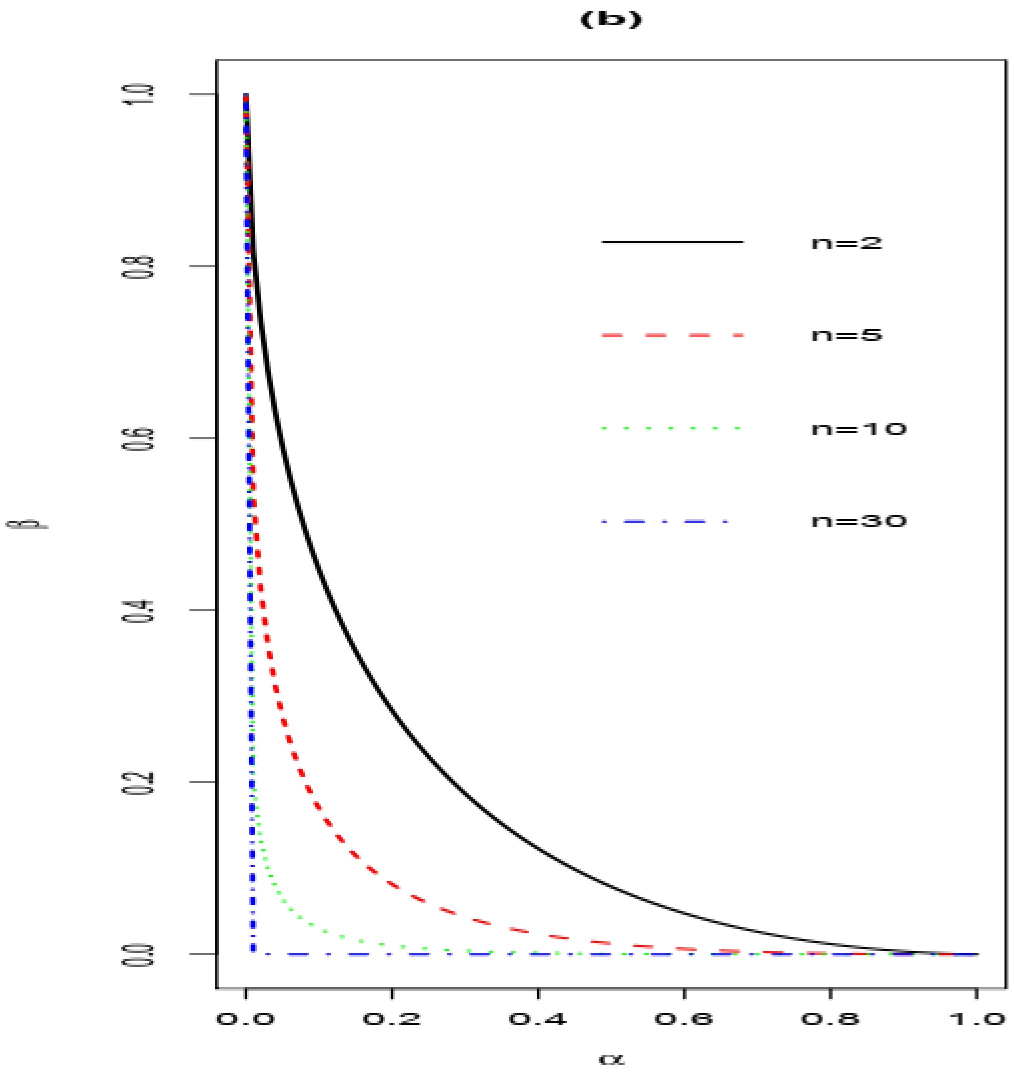
Também, saber \alpha leva aos valores de \beta e k.

Relação entre \alpha, \beta e k (continuação)

	$\alpha = 0.05$ fixo			$k = 2$ fixo		
n	β	k	k'	k'	α	β
5	0.277	3.2	0.736	0.638	0.077	0.210
10	0.065	1.2	0.520	0.569	0.036	0.087
20	0.002	0.07	0.368	0.535	0.008	0.019
30	6×10^{-05}	2×10^{-03}	0.300	0.523	0.002	0.0044
50	2×10^{-08}	2×10^{-06}	0.233	0.514	1×10^{-04}	3×10^{-04}
100	3×10^{-17}	3×10^{-15}	0.164	0.507	2×10^{-07}	4×10^{-07}

Relação entre \alpha, \beta e k (continuação)





Versão Bayesiano do Lema de NP

Defina as probabilidades a priori $p_0 = \mathbb{P}(\theta = \theta_0)$ e $p_1 = \mathbb{P}(\theta = \theta_1)$. Logo as probabilidades a posteriori são

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_i \,|\, x) \propto \mathbb{P}(\theta = \theta_i)\, p(x \,|\, \theta = \theta_i) \propto p_i\, p(x \,|\, \theta = \theta_i)\,,$$

isto é,

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_i \,|\, x) = \frac{p_i\, p(x \,|\, \theta = \theta_i)}{p_0\, p(x \,|\, \theta = \theta_0) + p_1\, p(x \,|\, \theta = \theta_1)}$$

para $i = 0, 1$.

A função de perda e as perdas esperadas posteriori

- $L(d = 1, \theta = \theta_0) = a_0;$
- $L(d = 0, \theta = \theta_1) = a_1$ e
- $L(d = 1, \theta = \theta_1) = L(d = 0, \theta = \theta_0) = 0.$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L(d = 1, \theta) \mid x] &= \mathbb{P}(\theta = \theta_0 \mid x)\, L(d = 1, \theta = \theta_0) + \mathbb{P}(\theta = \theta_1 \mid x)\, L(d = 1, \theta = \theta_1) \\
&= \frac{p_0\, p(x \mid \theta = \theta_0)}{p_0\, p(x \mid \theta = \theta_0) + p_1\, p(x \mid \theta = \theta_1)}\, a_0 \qquad (13) \\
\mathbb{E}[L(d = 0, \theta) \mid x] &= \mathbb{P}(\theta = \theta_0 \mid x)\, L(d = 0, \theta = \theta_0) + \mathbb{P}(\theta = \theta_1 \mid x)\, L(d = 0, \theta = \theta_1) \\
&= \frac{p_1\, p(x \mid \theta = \theta_1)}{p_0\, p(x \mid \theta = \theta_0) + p_1\, p(x \mid \theta = \theta_1)}\, a_1\,. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

A decisão Bayesiana

Finalmente, a decisão $d = 1$ (rejeitar H_0) será preferida quando a sua perda esperada [equação (13)] for menor do que a da decisão $d = 0$ [equação (14)], ou equivalentemente, quando

$$\frac{p(x \,|\, \theta = \theta_1)}{p(x \,|\, \theta = \theta_0)} > \frac{p_0\, a_0}{p_1\, a_1}\,.$$

O resultado então é efetivamente um teste de N-P com $k = (p_0/p_1)\,(a_0/a_1)$, isto é, o produto das chances relativas de H_0 a priori vezes a razão dos custos de cometer um Erro Tipo I e um Erro Tipo II.

Testando Peso com a Balança imprecisa

- H_0: \mu = 170
- H_1: \mu != 170
- Priori: P(\mu = 170) = 0.5 e \mu ~ N(170, \tau) com peso 0.5
- Em geral testamos H_0: \mu = \mu_0 contra H_1: \mu != \mu_0 com \sigma conhecido.

$$BF = \frac{\frac{n^{1/2}}{\sigma} \exp\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \mu_0)^2\}}{(\sigma^2/n + \tau^2)^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2(\sigma^2/n+\tau^2)}(\bar{y} - \mu_0)^2\}}.$$

$$p_0 = \frac{\pi_0 BF}{\pi_0 BF + 1 - \pi_0}.$$

Cálculo de \tau

- O autor acha que seu peso pode ter aumentado ou diminuido em 5 libras. Então ele igualou 10 = 4\tau (para ter 95% da densidade da normal entre mais ou menos 5 libras do peso dele do ano passado) ou seja, \tau = 2,5 libras.
- A função mnormt.twosided calcula o fator de Bayes e a probabilidade posteriori da Hipótese Nula.
- As entradas da função são: \mu_0, \pi_0 (priori), \tau (priori) e características dos dados (n, \sigma e a média amostral).

Execução do Teste (vários valores de \tau)

```
> weights=c(182, 172, 173, 176, 176, 180, 173, 174, 179, 175)
> data=c(mean(weights),length(weights),3)
> t=c(.5,1,2,4,8)
> mnormt.twosided(170,.5,t,data)

$bf
[1] 1.462146e-02 3.897038e-05 1.894326e-07 2.591162e-08
[5] 2.309739e-08
$post
[1] 1.441076e-02 3.896887e-05 1.894325e-07 2.591162e-08
[5] 2.309739e-08
```

Para \tau = 2 o BF = 0.0000002 e P(H_0 | x) = 0.0000002. O peso do autor mudou.