Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Bacherelado em Estatística
Inferência Bayesiana
Prof. Donald M. Pianto

Lista de Exercícios 1

1) Vamos investigar o princípio de Verossimilhança e o princípio de Condicionalidade no contexto dos modelos Binomial e Binomial Negativo.
   a) Faça uma simulação (1000 simulações para cada conjunto de parâmetros é razoável) de um binomial com *n*=12 e *p*={0.5, 0.7, 0.9}. Calcule um intervalo de confiança frequentisita ao nível de confiança de 95% e um intervalo de credibilidade de um modelo bayesiano a 95% para cada amostra. Calcule a taxa de cobertura de cada intervalo e a porcentagem de vezes que o intervalo frequentista foi menor que o intervalo de credibilidade.
   b) Faça uma simulação (1000 simulações para cada conjunto de parâmetros é razoável) de um binomial negativo com *k*=3 e *p*={0.5, 0.7, 0.9}. Calcule um intervalo de confiança frequentisita ao nível de confiança de 95% e um intervalo de credibilidade de um modelo bayesiano a 95% para cada amostra. Calcule a taxa de cobertura de cada intervalo e a porcentagem de vezes que o intervalo frequentista foi menor que o intervalo de credibilidade.
   c) Faça uma simulação (1000 simulações para cada conjunto de parâmetros é razoável) de Y=Ber(0.5) e, com *p*={0.5, 0.7, 0.9} fixo para cada simulação, gera um binomial com n=12 se Y<0.5 ou um binomial negativo com *k*=3 se Y>=0.5. Calcule um intervalo de confiança frequentisita ao nível de confiança de 95% para o modelo binomial (mesmo se for binomial negativo), um intervalo de confiança frequentisita ao nível de confiança de 95% para o modelo binomial negativo (mesmo se for binomial; nesse caso se o último não for fracasso, não será possível usar esse estimador, então a amostra para esse estimador vai ficar viesada e de tamanho reduzido) e um intervalo de credibilidade de um modelo bayesiano a 95% para cada amostra. Calcule a taxa de cobertura de cada intervalo e pensa numa maneira de comparar o tamanho dos intervalos.

2. (Inferência sob censura) Seja $T_1, \ldots, T_n$ uma amostra aleatória da densidade $f_\theta(t)$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória da densidade $g(y)$ que não depende de θ. Observam-se os pares (U_i, δ_i) onde $U_i = \min(T_i, Y_i)$ e $\delta_i = 1$ se $U_i = Y_i$ (i.e. se a observação foi censurada). Mostre que, de acordo ao PV, a inferência sobre θ não depende da densidade $g(y)$.

3)

Considere o modelo Binomial do Exemplo 1 das notas de aula parametrizado em termos da probabilidade de dois sucessos (caras) consecutivos, $\eta = \theta^2$, isto é $X \sim$ Binomial$(n = 12, \theta = \sqrt{\eta})$. Observou-se $x = 9$, de forma que a verossimilhança é $P_\eta(X = 9) = 220\,(\sqrt{\eta})^9\,(1 - \sqrt{\eta})^3$ $(0 < \eta < 1)$. (i) Ache a distribuição de η de acordo ao método da probabilidade inversa (na parametrização η!). (ii) Calcule a probabilidade de η ser maior do que 0.25. (iii) Use a distribuição da parte (i) para mostrar que $\theta = \sqrt{\eta}$ segue uma distribuição Beta com $\alpha = 11$ e $\beta = 4$. Use esse resultado para calcular a probabilidade de θ ser maior do que 0.5. (iv) Veja que a distribuição da parte (iii) é diferente da obtida na aula quando o método da probabilidade inversa era aplicado na parametrização θ. Explique a diferença.