Testes de hipóteses Bayesianos e Fator de Bayes

Teste de Hipóteses

$\theta \in \Theta_0$ Hipótese Nula

$\theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$ Hipótese Alternativa

$$\mathbb{P}(\theta \in \Theta_0 \,|\, x) \text{ e } \mathbb{P}(\theta \in \Theta_1 \,|\, x) = 1 - \mathbb{P}(\theta \in \Theta_0 \,|\, x).$$

Chance Relativa (Razão de Chances)

- *Chance relativa* ("odds" no inglês) de um evento A:

$$\mathcal{O}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)}$$

- É claro que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathcal{O}(A)}{1 + \mathcal{O}(A)}\,.$$

Por exemplo, se a chance relativa de um evento A é $7/9$, segue que a probabilidade de A é $7/16$.

Chance Relativa Condicional

- Sejam A e B dois eventos. Segue imediatamente do Teorema de Bayes que

$$\mathcal{O}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(A^c \mid B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} \frac{\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B \mid A^c)}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(A \mid B)}{\mathcal{O}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B \mid A^c)}$$

- Agora, voltando ao problema de teste de hipóteses, se associarmos na relação acima A com Θ_0, A^c com Θ_1 e B com uma observação x, temos que

$$B^p_{0,1}(x) = \frac{\mathcal{O}(\Theta_0 \mid x)}{\mathcal{O}(\Theta_0)} = \frac{p(x \mid \theta \in \Theta_0)}{p(x \mid \theta \in \Theta_1)}.$$

Chamamos Fator de Bayes

O Fator de Bayes depende da Priori

$$B^p_{0,1}(x) = \frac{\mathbb{P}(\theta \in \Theta_1)}{\mathbb{P}(\theta \in \Theta_0)} \, \frac{\int_{\Theta_0} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta)\, d\theta}{\int_{\Theta_1} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_{\Theta_0} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta) / \, \mathbb{P}(\theta \in \Theta_0)\, d\theta}{\int_{\Theta_1} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta) / \, \mathbb{P}(\theta \in \Theta_1)\, d\theta} = \frac{\int_{\Theta_0} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta\,|\,\theta \in \Theta_0)\, d\theta}{\int_{\Theta_1} p(x\,|\,\theta)\, p(\theta\,|\,\theta \in \Theta_1)\, d\theta}$$

Compare com a Razão de Verossimilhanças (Clássica)

$$\lambda_{0,1}(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} p(x\,|\,\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} p(x\,|\,\theta)} = \frac{p(x\,|\,\hat{\theta}_0)}{p(x\,|\,\hat{\theta}_1)}\,,$$

Um Exemplo

Exemplo 1 (Continuação) Suponha que $X \,|\, \theta \sim$ Binomial$(n = 12{,}\theta)$ e que a priori $\theta \sim$ Uniforme(0,1). Para testar $H_0 : \theta \leq 1/2$ contra $H_a : \theta > 1/2$, suponha que foi observado $x = 9$. Então a priori $\mathbb{P}(\theta \leq 1/2) = \mathbb{P}(\theta > 1/2) = 1/2$, de forma que $\mathcal{O}(\theta \leq 1/2) = 1$. A posteriori $\theta \,|\, x = 9 \sim$ Beta$(\alpha = 10{,}\beta = 4)$ e $\mathbb{P}(\theta \leq 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 0.046$ e $\mathbb{P}(\theta > 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 1 - 0.046 = 0.954$. Logo

$\mathcal{O}(\theta \leq 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 0.048$, ou alternativamente $\mathcal{O}(\theta > 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 20.67$, indicando que a H_a é aproximadamente 20 vezes mais provável a posteriori do que a H_0. Neste caso o fator de Bayes é também $B^p_{0,1} \doteq 0.048$ (pois $\mathcal{O}(\theta \leq 1/2) = 1$).

Um Exemplo (continuação)

Porém, suponha que ao invés da priori Uniforme(0,1) usamos uma Beta($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$), denominada neste caso de priori de Jeffreys e que alguns autores preferem como priori "não-informativa". Como essa priori também é simétrica, teremos ainda que $\mathcal{O}(\theta \leq 1/2) = 1$, mas agora a posteriori $\theta \,|\, x = 9 \sim$ Beta($\alpha = 9.5, \beta = 3.5$), $\mathbb{P}(\theta \leq 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 0.039$, $\mathbb{P}(\theta > 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 1 - 0.039 = 0.961$ e Logo $\mathcal{O}(\theta \leq 1/2 \,|\, x = 9) \doteq 0.041$. Neste caso o fator de Bayes é também $B^p_{0,1} \doteq 0.041$ (pois $\mathcal{O}(\theta \leq 1/2) = 1$).

O Fator de Bayes não é Objetivo, pois depende da Priori.

Pode ser visto como Problema de Decisão

$$L(d,\theta) = \begin{cases} 0 \text{ se } d = 0,\, \theta \in \Theta_0 \\ 0 \text{ se } d = 1,\, \theta \in \Theta_1 \\ a_0 \text{ se } d = 1,\, \theta \in \Theta_0 \\ a_1 \text{ se } d = 0,\, \theta \in \Theta_1 \end{cases}.$$

Decisão ótima é rejeitar H0 (d=1) se:

$$\mathbb{P}(\theta \in \Theta_1 | x) > \frac{a_0}{a_0 + a_1}$$

Precisa ter muito cuidado quando queremos testar hipóteses "precisas" ("*sharp*"), como $H_0 : \theta = \theta_0$ ou $H_0 : \mu_y - \mu_x = d_0$. Em geral, se a probabilidade a priori de uma hipótese é nula, também será nula a probabilidade a posteriori. Assim, para testar hipóteses precisas é necessário especificar prioris com massa positiva nessa hipótese. Em particular, se a distribuição a priori de θ for continua, qualquer hipótese precisa terá probabilidade a posteriori nula.