Lista de Exercícios 3.1

Gustavo L. Gilardoni

Os exercícios numerados em verde são optativos.

1. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra da distribuição de Poisson com média θ, e considere a priori que θ tem uma distribuição Gama com parâmetros α e β (isto é com média $\alpha\beta^{-1}$ e variância $\alpha\beta^{-2}$). **(i)** Ache a distribuição a posteriori de θ e a sua média e variância. **(ii)** Mostre que é possível expressar a esperança a posteriori de θ da forma $w\bar{x} + (1-w)\alpha\beta^{-1}$, e interprete este resultado. **(iii)** O que acontece na parte **(ii)** quando β e grande com $\alpha\beta^{-1}$ fixo? Interprete! **(iv)** Mostre que existe um número c tal que a variância a posteriori é maior do que a variância a priori sempre que $\bar{x} > c$, ache c e interprete este resultado.

2. Considere a seguinte generalização do Exercício 1. Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ observações independentes com $y_i|\theta \sim \text{Poisson}(\theta x_i)$, onde as exposições x_i são fixas (não aleatórias). A taxa θ segue a priori uma distribuição Gama(α,β). **(i)** Ache a distribuição a posteriori de θ e a sua média e variância. **(ii)** Mostre que é possível expressar a esperança a posteriori de θ da forma $(1-w)E(\theta)+w\hat{\theta}$, onde $E(\theta)$ e $\hat{\theta}$ são respectivamente a esperança a priori e a estimativa máximo verossímil de θ, e interprete este resultado. **(iii)** O que acontece na parte **(ii)** quando β e grande com $\alpha\beta^{-1}$ fixo? Interprete!

3. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra da distribuição de Poisson com média θ, e considere a priori que θ tem uma distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Ache:
(a) a estimativa bayesiana de θ no caso de perda quadrática **(b)** o limite do estimativa bayesiana sob perda zero-um quando $\epsilon \to 0$.
Para o caso $n = 10$ e $\bar{x} = 1.55$, ache:
(c) a estimativa bayesiana sob perda absoluta e **(d)** o intervalo HPD para θ com nível 95%.

4. No Exercício 3, calcule o estimador bayesiano para $\eta = P(x_1 = 0 \,|\, \theta) = e^{-\theta}$. Compare esse estimador com o *estimador não-viesado de variância mínima* $\tilde{\eta} = (1-1/n)^{n\bar{x}}$.

5. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra da distribuição Normal com média μ e variância ϕ^{-1} conhecida, e considere a distribuição a priori $\mu \sim \text{N}(\mu_0,\tau^{-1})$. **(i)** Ache a distribuição a posteriori de μ. **(ii)** Mostre que é possível expressar a esperança a posteriori de μ da forma $w\bar{x} + (1-w)\mu_0$, e interprete este resultado. **(iii)** Se $\bar{x}_m$ é a média de m observações futuras $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, condicionalmente independentes de $x_1, \ldots, x_n$, ache a distribuição preditiva $p(\bar{x}_m|x_1, \ldots, x_n)$. **(iv)** Discuta o que acontece com os resultados anteriores quando a distribuição a priori $p(\mu) \propto 1$ (i.é. o caso limite quando $\tau \to 0$).

6. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra da distribuição Normal com média μ e variância ϕ^{-1} conhecida, e considere a distribuição a priori $\mu \sim \text{N}(\mu_0, \tau^{-1})$.
(a): Ache o estimador bayesiano de μ no caso de (i) perda quadrática ($L(\hat{\mu}, \mu) = (\hat{\mu} - \mu)^2$), (ii) perda absoluta ($L(\hat{\mu}, \mu) = |\hat{\mu} - \mu|$) e (iii) perda zero-um ($L(\hat{\mu}, \mu) = I(|\hat{\mu} - \mu| \geq \epsilon)$.
(b): Ache o intervalo HPD para μ com nível $100(1-\alpha)$%.

7. Seja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uma amostra da distribuição Exponencial com risco λ e densidade

$p(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ $(y > 0)$ e considere uma distribuição a priori Gama para λ. **(i)** Ache a distribuição a posteriori de λ e a sua média e variância. **(ii)** Considere $\eta = E(y|\lambda) = \lambda^{-1}$. Ache a média e a variância a posteriori de η. **(iii)** Discuta se é possível expressar a esperança a posteriori de λ da forma $(1 - w)E(\lambda) + w\hat{\lambda}$, onde $E(\lambda)$ e $\hat{\lambda}$ são respectivamente a esperança a priori e a estimativa máximo verossímil de λ, e os pesos w e $1 - w$ são independentes da amostra. Repita esse estudo para η. **(iv)** Se y_{n+1} é uma observação futura condicionalmente independente de $y_1, \dots, y_n$, ache a distribuição preditiva $p(y_{n+1}|y_1, \dots y_n)$

8. Repita o Exercício 7 mas supondo agora que. além das n observações sem censura, existem m observações que foram censuradas nos momentos c_i. Isto é, foram observados os tempos de sobrevivência $y_1, \dots, y_n$ sem censura e, para $i = n+1, \dots, n+m$ foi somente observado que $Y_i > c_i$. (Pode ser útil revisar o Exercício 2 da lista 1).

9. Suponha uma amostra $x_1, \dots, x_n$ da distribuição Normal com média zero e variância $\sigma^2 = 1/\tau$. Considere que a priori a precisão τ segue uma distribuição Gama com media α/β e variância α/β^2. **(i)** Ache a distribuição a posteriori de τ. **(ii)** Mostre que a esperança a posteriori de $\sigma^2 = 1/\tau$ pode ser escrita da forma $wE(\sigma^2) + (1 - w)\hat{\sigma}^2$, onde $E(\sigma^2)$ e o valor esperado a priori e $\hat{\sigma}^2$ é o estimador de máxima verossimilhança. Ache w e interprete. **(iii)** Se x_{n+1} é uma observação futura da mesma distribuição normal, condicionalmente independente da amostra original, ache a densidade preditiva $p(x_{n+1}|x_1, \dots, x_n)$.

10. Seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ uma amostra da distribuição Exponencial com risco λ e densidade $p(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ $(y > 0)$ e considere uma distribuição a priori Gama($\alpha = 0.1$,$\beta = 0.1$). para λ. Ache
(a): a estimativa bayesiana para λ sob perda quadrática; **(b)** o limite da estimativa bayesiana sob perda zero-um quando $\epsilon \to 0$.
No caso $n = 10$, $\bar{y} = 2.4$, ache:
(c) a estimativa bayesiana de λ sob perda absoluta e **(d)** o intervalo HPD para λ com nível 95%.

11. Repita os cálculos do Exercício 10 mas agora para o estimando $\mu = \mathrm{E}(y_1 \mid \lambda) = \lambda^{-1}$.

Algumas Soluções

1. Denote $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $s = x_1 + \cdots + x_n$. **(i)** $\theta|D \sim$ Gama(α_*,β_*) com $\alpha_* = \alpha + s$ e $\beta_* = \beta + n$; $E(\theta|D) = \alpha_*/\beta_*$ e $\mathrm{Var}(\theta|D) = \alpha_*/\beta_*^2$; **(ii)** $w = n/(\beta + n)$; **(iv)** $c = (\alpha/\beta)\,(2 + n/\beta) = (2 + n/\beta)\,E(\theta)$.

2. Denote $D = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $s_x = x_1+\cdots+x_n$ e $s_y = y_1+\cdots+y_n$. Logo a verossimilhança é $p(D|\theta) \propto e^{-\theta\, s_x}\,\theta^{s_y}$ e portanto $\theta|D \sim$ Gama(α_*,β_*) com $\alpha_* = \alpha + s_y$ e $\beta_* = \beta + s_x$. O resto é semelhante ao exercício 1.

3. Seja $s = \sum_{i=1}^n x_i$. Temos a posteriori que $\theta|D \sim$ Gama($\alpha_* = \alpha+s = 1+s$, $\beta_* = \beta+n = 1 + n$). Logo **(a)** a estimativa sob PQ é $E(\theta|D) = \alpha_*/\beta_* = (s + 1)/(n + 1)$, enquanto **(b)** o limite da estimativa sob perda zero-um é a moda da distribuição a posteriori, que nesse caso é $(\alpha_* - 1)/\beta_* = s/(n + 1)$. Agora, quando $n = 10$ e $\bar{x} = 1.55$ temos que $\alpha_* = 16.50$ e $\beta_* = 11$, de forma que a estimativa sob PA é a mediana $\mathrm{med}(\theta|D) \doteq 1.470$; **(d)** O intervalo HPD de nível 95% é $0.816 \doteq \theta_I < \theta < \theta_S \doteq 2.237$ e precisa ser calculado numericamente. Seguem dois códigos **R**, o primeiro minimiza diretamente o comprimento do intervalo HPD, enquanto o segundo procura que os extremos do intervalo tenham a mesma densidade a posteriori.

```
conf<-0.95
alfa<-16.5
beta<-11

# Minimizando o comprimento do intervalo

comp<-function(a){qgamma(conf+a,alfa,beta)-qgamma(a,alfa,beta)}
ainf<-optimize(f=comp,lower=0,upper=1-conf)$minimum
ainf
theta.i<-qgamma(ainf,alfa,beta)
theta.s<-qgamma(conf+ainf,alfa,beta)

# igualando a densidade nos dois extremos

dif<-function(a){dgamma(qgamma(conf+a,alfa,beta),alfa,beta)-
    dgamma(qgamma(a,alfa,beta),alfa,beta)}
ainf<-uniroot(f=dif,lower=0,upper=1-conf)$root
theta.i<-qgamma(ainf,alfa,beta)
theta.s<-qgamma(conf+ainf,alfa,beta)
```

4. $E(e^{-\theta}|D) = [1 - 1/(\beta + n + 1)]^{\alpha+n\,\bar{x}}$.

5. Veja a Seção correspondente das notas de aula.

6. Como a distribuição a posteriori $\theta|D \sim$ Normal($\mu_* = (\lambda\,\mu_0 + n\tau\bar{y})/(\lambda+n\tau)$, $(\lambda_*)^{-1} = (\lambda + n\tau)^{-1}$) é simétrica com respeito a μ_*, segue que **(a)** o estimador bayesiano com respeito às perdas quadrática, absoluta e zero-um (para qualquer $\epsilon > 0$) é μ_* e que **(b)** o intervalo HPD de nível $100(1 - \alpha)\%$ é $\mu_* \pm z_{\alpha/2}\,(\lambda_*)^{-1/2}$.

7. Denote $D = \{y_1, \ldots, y_n\}$ e $s = \sum_{i=1}^n y_i$. **(i)** $\lambda|D \sim$ Gama$(\alpha_* = \alpha + n, \beta_* = \beta + s)$ de forma que $E(\lambda|D) = \alpha_*/\beta_*$ e $\text{Var}(\lambda|D) = \alpha_*/\beta_*^2$; **(ii)** mostre primeiro que, se $U \sim$ Gama$((\alpha,\beta)$, então $E(U^r) = \Gamma(\alpha + r)\, \beta^{-r}/\Gamma(\alpha)$ para $\alpha + r > 0$. Com isso, $E(\eta|D) = \beta^*/(\alpha_* - 1)$ para $n > 1 - \alpha$ e $\text{Var}(\eta|D) = \beta_*^2/[(\alpha_* - 1)^2\,(\alpha_* - 2)]$ para $n > 2 - \alpha$; **(iii)** só é possível na parametrização $\eta = \lambda^{-1}$ e nesse caso $w = n/(\alpha + n - 1)$; **(iv)** $p(y_{n+1}|y_1, \ldots, y_n) = \alpha_*\, \beta_*^{\alpha_*}\, (\beta_* + y_{n+1})^{-\alpha_* - 1}$ para $y_{n+1} > 0$ (i.é. $(\beta_* + y_{n+1})|D$ segue uma distribuição de Pareto com parâmetros β_* e α_*).

8. Defina nesse caso $\alpha_* = \alpha + n$ (somente considera as observações não censuradas) e $\beta_* = \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i$ (considera todas as observações). Então $\lambda|D \sim$ Gama$(\alpha_* = \alpha + n, \beta_* = \beta + s)$. O resto é semelhante ao exercício 8.

9. Defina $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. **(i)** $\tau|D \sim$ Gama$(\alpha_* = \alpha + n/2,\ \beta_* = \beta + s^2/2)$; **(ii)** semelhante aos exercícios 7 e 8; **(iii)** Defina $Y_{n+1} = (\alpha_*/\beta_*)^{1/2} X_{n+1}$. Então $Y_{n+1}|D$ segue uma distribuição t de Student com $(2\alpha_*)$ graus de liberdade.

10. Semelhante ao exercício 3.