29/03/23

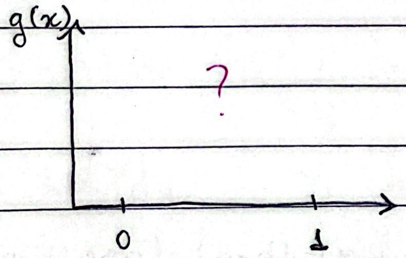
29 de março de 2023
ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL
Professor Donald

10 de Abril de 2023

A primeira aplicação de números aleatórios é para entender fenomenos aleatórios.
Logo, para integrar usa-se números aleatórios.

$U \sim [0,1]$ $\int_0^1 g(x)\,dx$

Temos um gerador de números aleatórios $U \sim [0,1]$. Como calcularíamos a integral? (Integração numérica)



Densidade da U

$$f_U = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]} = 1$$

$$\theta = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 g(x) f_U(x)\,dx \equiv E_U[g(x)]$$

E para a Amostra?

U_i, $i = 1, \dots, K$

$$\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g(U_i)$$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g(U_i) = \theta$$

A ideia foi olhar a integral e imaginá-la como a Esperança e então adicionar os fatores e relacionar a integral com os números aleatórios.
↳ densidade

tilibra

Scanned with CamScanner

10/04/23

```
soma g=0
for i=1 ; k {
  Ui = rand()
  soma g += g(Ui)
  }
return soma g/K
```

Inquietação → Qual o erro desses cálculos? Próx. Aula.

$\theta = \int_a^b g(x)\,dx$ (*)

Substituição de variáveis, onde Y varia de 0 a 1.

$y = \frac{(x-a)}{(b-a)}$, $dy = \frac{dx}{b-a}$

• Aqui teria que evidenciar a densidade para podermos chegar no exemplo 1.

$x = a + y(b-a)$ $dx = (b-a)\,dy$

Substituindo,

(*) $\int_0^1 g(a+y(b-a))(b-a)\,dy$, definindo $h(y) = (b-a)\,g(a+y(b-a))$

$= \int_0^1 h(y)\,dy$ e portanto chegamos no exemplo 1.

Concluímos que podemos calcular através dessas manipulações as integrações definidas.

E as não definidas?

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} g(x)\,dx$$

Quebrando, podemos então focar em uma parte.

$$\theta = \int_0^{\infty} g(x)\,dx$$

• Qual transformação podemos usar para resolver?

10/04/23

$x = \infty \rightarrow y = 0$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

Sugestão do colega
$y = \exp(-x)$ (possível questão)

Sugestão do professor

$$y = \frac{1}{1+x}$$

$$dy = \frac{-dx}{(1+x)^2} = -y^2 dx$$

- Mais na frente pode ser que tenhamos que escolher transformações mais complexas por conta das propriedades, mas agora podemos seguir o simples.

$$x = \frac{1}{y} - 1 \quad dx = \frac{-dy}{y^2}$$, aplicando

$$\theta = \int_0^\infty g(x)\,dx = \int_1^0 g\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{-dy}{y^2}\right) = \int_0^1 g\left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$= \int_0^1 h(y)\,dy \quad \text{onde } h(y) = \frac{1}{y^2}\, g\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

Logo, dá para integrar qualquer integral, quebrando-a em vários pedaços e pegando seus valores. (Ver Monte Carlo)

Integrações Univariável não são tão difíceis

Integrais Multivariáveis são bem mais complexas, aplicaremos mais Monte Carlo mas as vezes nem isso resolve!!

$$\Theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1 \ldots x_n)\,dx_1, \ldots, dx_n$$

Será necessário v.a's!

10/04/23

$i = 1, \dots, K$ | $U_1^i \sim U[0,1]$ | independentes | • Só estão como argumentos da função.

$\downarrow$ | $U_2^i \sim U[0,1]$ | identicamente

Querer avaliar | $\vdots$ | distribuídas

a função K vezes. | $U_n^i \sim U[0,1]$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_n^i)$$

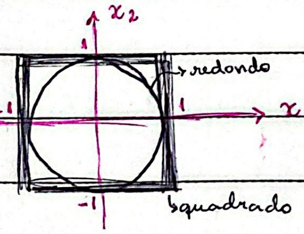
$\rightsquigarrow$ vai avaliando esses pontos aleatórios e tirando a média.

Isso é muito grande! E Funciona!

Logo, pode avaliar qualquer função.

Se estiver concentrado em um ponto, então a estimativa não vai ser tão eficiente.

Usando uma simulação Monte Carlo, calculemos π.



$A_q = 2 \times 2 = 4$

$A_c = \pi r^2 = \pi$

$\frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi}{4}$ = prob. de Uniforme cair no círculo. (razão de áreas)

Sabemos que um ponto(a) está dentro do círculo se
$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

$$g(x_1, x_2) = I_{[x_1^2 + x_2^2 \leq 1]}$$

Gerando vários pares (x_1, x_2), vai somar 1 se dentro do círculo e 0 fora e depois dividir por K.

10/04/23

Problema das Agulhas - Buffon (possível exercício).