Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

Experimentos Fatorias de dois níveis

- Vários casos especiais do exeprimento fatorial geral são importantes porque são amplamente utilizados em trabalhos de pesquisa;

- O caso mais importante é o de k fatores, cada um com apenas dois níveis;

- Esses níveis podem ser quantitativos, como dois valores de temperatura, pressão ou tempo; ou eles podem ser qualitativos, como duas máquinas, dois operadores, níveis "alto" e "baixo" de um fator, ou talvez a presença e ausência de um fator;

- Uma réplica completa desse experimento é composta por $2 \times 2 \times \ldots 2 \times = 2^k$ observações e é chamado de planejamento fatorial 2^k.

- Os experimentos fatoriais 2^k são, particularmente, úteis nos estágios iniciais do trabalho experimental. Quando existem muitos fatores a serem investigados;
- Então, esses experimentos são amplamente utilizados em triagem de fator.
- Como existem apenas dois níveis para cada fator, assumimos que a resposta é aproximadamente linear ao longo do intervalo dos níveis de fator escolhidos.

Experimento 2^k

EXPERIMENTO 2^k

- Porém, outro caso especial dentre os experimentos fatoriais 2^k, é o experimento 2^3;
- Nesses experimentos têm-se oito tratamentos que são combinações dos fatores A, B, e C e podem ser representados geometricamente como um cubo (Figura 1);
- Em que $" + "$ representa o nível alto e $" - "$ o nível baixo do fator.

Experimento 2^3

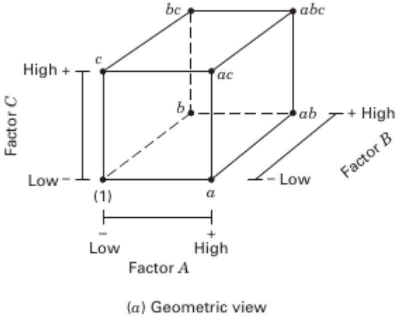

Figure: 1 Livro Douglas C. Montgomery (2009)

Experimento 2^3

- Os símbolos (1), a, b, ab, ac, bc e abc representam o total de resposta em todas as n réplicas tomadas na combinação de tratamento.
    - o alto nível de qualquer fator na combinação de tratamento é indicado pela letra minúscula correspondente;
    - o baixo nível de um fator na combinação de tratamento é denotado pela ausência da letra correspondente.
- O efeito médio de um fator é definido como a mudança na resposta produzida por uma mudança no nível desse fator em média sobre os níveis do outro fator.

Experimento 2^3

- Existem três diferentes notações para representar o experimento 2^3, como mostra o quadro abaixo:

Run	A	B	C	Labels	A	B	C
1	$-$	$-$	$-$	(1)	0	0	0
2	$+$	$-$	$-$	a	1	0	0
3	$-$	$+$	$-$	b	0	1	0
4	$+$	$+$	$-$	ab	1	1	0
5	$-$	$-$	$+$	c	0	0	1
6	$+$	$-$	$+$	ac	1	0	1
7	$-$	$+$	$+$	bc	0	1	1
8	$+$	$+$	$+$	abc	1	1	1

EXPERIMENTO 2^3

- Agora, vamos construir as estimativas dos efeitos principais;
- Considere o efeito principal do fator A:
  - O efeito do fator A quando B e C estão no nível baixo é $[a - (1)]/n$;
  - O efeito do fator A quando B está no nível alto e C no nível baixo é $[ab - b]/n$;
  - O efeito do fator A quando C está no nível alto e B no nível baixo é $[ac - c]/n$;
  - O efeito do fator A quando B e C estão no nível alto é $[abc - bc]/n$;
- A média dessas quantidades produz o efeito principal do fator A:

$$A = \frac{1}{4n}[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc] \tag{1}$$

Experimento 2^3

- Alternativamente, o efeito principal do fator A poderia ser obtido por:

$$
\begin{aligned}
A &= \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} \qquad (2)\\
&= \frac{a + ab + ac + abc}{4n} - \frac{(1) + b + c + bc}{4n}\\
&= \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]
\end{aligned}
$$

Experimento 2^3

- A equação (4) também pode ser desenvolvida como um contraste entre as quatro combinações de tratamento;

- Uma forma alternativa geral, no caso de experimentos fatorias 2^k, para determinar contrastes para os efeitos $AB...K$, é dada por:

$$Contraste_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1) \tag{3}$$

EXPERIMENTO 2^3

- O *Constrate*$_A$, para experimento 2^3, pode ser construido por:

$$
\begin{aligned}
Contraste_A &= (a-1)(b+1)(c+1) \\
&= a-(1)+ab-b+ac-c+abc-bc
\end{aligned}
$$

Experimento 2^3

1. Considere o experimento 2^3 e encontre:

   a. Os $Constrate_B$ e $Constrate_C$;

   b. Os $Constrate_{AB}$, $Constrate_{AC}$ e $Constrate_{BC}$;

   c. O $Constrate_{ABC}$;

2. Considere os constrastes obtidos no item 1 e obtenha os efeitos principais dos fatores B, C, AB, AC, BC e ABC.

Experimento 2^3

- O efeito do fator A é dado por:

$$A = \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$

- O efeito do fator B é dado por:

$$B = \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] \tag{4}$$

- O efeito do fator C é dado por:

$$C = \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] \tag{5}$$

Experimento 2^3

- O efeito do fator AB é dado por:

$$AB = \frac{1}{4n}[(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc] \qquad (6)$$

- O efeito do fator AC é dado por:

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] \qquad (7)$$

- O efeito do fator BC é dado por:

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] \qquad (8)$$

Experimento 2^3

- Em experimentos 2^3 é sempre importante examinar a magnitude e a direção dos efeitos dos fatores para determinar quais variáveis provavelmente serão importantes;
- A análise de variância geralmente pode ser usada para confirmar essa interpretação (testes t podem ser usados também);
- A magnitude e a direção do efeito devem sempre ser consideradas junto com a ANOVA, porque a ANOVA sozinha não transmite essa informação.

Relembrando

- Um contraste de interesse pode ser escrito em termos das médias de tratamentos:

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.},$$

- E a soma de quadrados do contraste é definida por:

$$SQ_C = \frac{(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.})^2}{n \sum_{i=1}^{a} c_i^2},$$

- Ou seja, a soma dos quadrados para qualquer contraste é igual ao quadrado do contraste dividido pelo número de observações em cada total no contraste vezes a soma dos quadrados dos coeficientes do contraste.

Experimento 2^3

- Em experimentos 2^3 a soma de quadrados para qualquer efeito é definida por:

$$SQ = \frac{(Constrate)^2}{8n}. \tag{9}$$

Experimento 2^k

- A soma de quadrado total é definida por:

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{8n},$$

em geral, a SQ_T em $8n-1$ graus de liberdade.

- E por subtração, a soma de quadrado do resíduo é dada por:

$$SQ_{Res} = SQ_T - (SQ_A + SQ_B + SQ_C + SQ_{AB} + SQ_{AC} + SQ_{BC} + SQ_{ABC}),$$

com $8(n-1)$ graus de liberdade.

Exercício

- Um experimento fatorial 2^3 foi realizado para desenvolver um processo de ataque de nitreto em uma ferramenta de gravação de plasma.
- Os fatores são o espaço entre os eletrodos, o fluxo de gás (C_2F_6 é usado como gás reagente), e a potência de RF aplicado ao cátodo.
- Cada fator é executado em dois níveis, e o experimento é repetido duas vezes.
- A variável de resposta é o taxa de corrosão para nitreto de silício ($\AA/m$). Os dados da taxa de gravação estão no quadro abaixo:

Exercício

	Coded Factors			Etch Rate			Factor Levels		
Run	A	B	C	Replicate 1	Replicate 2	Total		Low (-1)	High ($+1$)
1	-1	-1	-1	550	604	$(1) = 1154$	A (Gap, cm)	0.80	1.20
2	1	-1	-1	669	650	$a = 1319$	B (C_2F_6 flow, SCCM)	125	200
3	-1	1	-1	633	601	$b = 1234$	C (Power, W)	275	325
4	1	1	-1	642	635	$ab = 1277$			
5	-1	-1	1	1037	1052	$c = 2089$			
6	1	-1	1	749	868	$ac = 1617$			
7	-1	1	1	1075	1063	$bc = 2138$			
8	1	1	1	729	860	$abc = 1589$			

Exercício

1. Considere os dados do experimentos e calcule:

   a) Os efeitos principais dos fatores A, B, C, AB, AC, BC e ABC.

   b) SQ_A, SQ_B, SQ_C, SQ_{AB}, SQ_{AC}, SQ_{BC}, SQ_{ABC}, SQ_T e SQ_{Res}.

   c) Os respectivos graus de liberdade.

   d) Construa a Tabela ANOVA.

   e) Interprete os resultados encontrados nos itens anteriores.

Experimento 2^k geral

- Os métodos de análise estudados podem ser generalizados para os experimentos fatoriais 2^k, com k fatores e cada um com dois níveis;
- Os contrastes para os efeitos $AB...K$ são encontrados por:

$$Contraste_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1) \tag{10}$$

- Os efeitos principais podem ser estimados por:

$$AB...K = \frac{2}{n2^k}(Contraste_{AB...K}) \tag{11}$$

- E as somas de quadrados são calculadas por:

$$SS_{AB...K} = \frac{1}{n2^k}(Contraste_{AB...K})^2 \tag{12}$$

Experimento 2^k geral

- A análise estatística para os experimentos fatoriais 2^k pode ser resumida nas seguintes etapas:

1. Estimação dos efeitos principais de cada fator;
2. Ajuste do modelo completo;
3. Realização dos testes estatísticos;
4. Refinamento do modelo;
5. Análise dos resíduos;
6. Interpretação dos resultados.