Delineamento e Análise de Experimentos

Professora Juliana Betini Fachini Gomes
e-mail: jfachini@unb.br

Brasília - 2023

Modelo

O modelo do delineamento em blocos casualizados completo para a tratamentos e b blocos é definido por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., a; \quad j = 1, 2, ..., b \qquad (1)$$

em que μ é a média geral, τ_i é a média ou efeito dos tratamentos, β_j é o efeito de blocos e ε_{ij} componente de erro aleatório com distribuição $N(0, \sigma^2)$.

Modelo

- Usualmente, pensamos nos efeitos de tratamento e bloco como desvios da média geral, de modo que

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

- Também podemos escrever o modelo (1) como modelo de médias:

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., a; \quad j = 1, 2, ..., b$$

em que $\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j$.

Modelo

- As hipóteses de interesse para o modelo (1) são definidas por:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0, & \text{(O efeito de tratamento é nulo)} \\ H_1 : \exists \tau_i \neq 0 \end{cases}$$

- Ou de forma equivalente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a \\ H_1 : \exists \mu_i \neq \mu_j,\ i \neq j, \end{cases}$$

em que $\mu_i = (1/b) \sum_{j=1}^{b} (\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu + \tau_i$.

Modelo

A análise de variância pode ser estendida para o modelo (1). Seja:

- $y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij}$ o total de todas as observações do i tratamento;
- $y_{.j} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij}$ o total de todas as observações no j bloco;
- $y_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}$ o total geral de todas as observações e $N = ab$ o número total de observações.

Modelo

Similarmente, tem-se as médias:

- $\bar{y}_{i.} = y_{i.}/b$ é a média das observações do i tratamento;
- $\bar{y}_{.j} = y_{.j}/a$ é a média das observações no j bloco;
- $\bar{y}_{..} = y_{..}/N$ é a média geral de todas as observações.

Modelo

- A SS_T pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 &= b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{..})^2 \qquad (2)\\
&= SQ_{Trat} + SQ_{Bloco} + SQ_{Res}
\end{aligned}
$$

ANOVA

- Relembrando o Teorema de Cochran temos:
  - Seja $Z_i \sim N(0,1)$ para $i = 1, 2, \ldots, \nu$ e

$$\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_s$$

em que $s \leq \nu$, e Q_i tem ν graus de liberdade $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Então, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado com $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ graus de liberdade, respectivamente, se e somente se

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s$$

ANOVA

- Ao analisar a equação (2) é possível verificar que a soma dos graus de liberdade do lado direito da equação é igual ao grau de liberdade da SQ_{Total};
- E ao fazer as suposições de normalidade dos erros, tem-se que

$$\frac{SQ_{Trat}}{\sigma^2}, \quad \frac{SQ_{Bloco}}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \frac{SQ_{Res}}{\sigma^2}$$

  são variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado;
- Cada soma de quadrados dividida por seus graus de liberdade é um quadrado médio.

ANOVA

- Então, a esperança dos quadrados médios, se tratamentos e blocos forem fixos, podem ser definidos por:

$$E(QM_{Trat}) = \sigma^2 + \frac{b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

$$E(QM_{Bloco}) = \sigma^2 + \frac{a\sum_{j=1}^{a}\beta_j^2}{b-1}$$

$$E(QM_{Res}) = \sigma^2$$

ANOVA

- Sendo assim, para testar a igualdade das médias de tratamento, a estatística de teste é definida por:

$$F_0 = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}},$$

  com distribuição $F_{a-1,(a-1)(b-1)}$ se a hipótese nula for verdadeira.

- A região crítica é a cauda superior da distribuição F, e rejeitamos H_0 se $F_0 > F_{\alpha,a-1,(a-1)(b-1)}$.

ANOVA

- É possível testar efeito de bloco ($H_0 : \beta_j = 0$)?
- Qual a estatística do teste?
- É possível seguir a mesma ideia da estatística de teste para efeitro de tratamento. Então, tem-se que:

$$F_0 = \frac{QM_{Bloco}}{QM_{Res}}$$

- No entanto, lembre-se de que a aleatorização foi aplicada apenas para tratamentos em cada blocos; ou seja, os blocos representam uma restrição à aleatorização;
- Que efeito isso tem na estatística do teste?

ANOVA

Tabela 1: Tabela de Análise de Variância

Fonte de Variação	SQ	g.l.	QM	F
Tratamentos	SQ_{Trat}	a - 1	QM_{Trat}	QM_{Trat}/QM_{Res}
Bloco	SQ_{Bloco}	b - 1	QM_{Bloco}	
Resíduo	SQ_{Res}	(a-1)(b-1)	QM_{Res}	
Total	SQ_T	N - 1		

Exemplo

- Um fabricante de dispositivos médicos produz enxertos vasculares (veias artificiais). Esses enxertos são produzidos por extrusão tarugos de resina de politetrafluoretileno (PTFE) combinados com um lubrificante em tubos. Freqüentemente, alguns dos tubos contém saliências pequenas e duras na superfície externa. Esses defeitos são conhecidos como flicks. o defeito é motivo de rejeição da unidade.

Exemplo

- O fabricante do produto suspeita que a pressão de extrusão afeta a ocorrência de flicks e por isso pretende realizar um experimento para investigar essa hipótese.
- No entanto, a resina é fabricada por um fornecedor externo e é entregue ao fabricante de dispositivos médicos em lotes.
- O fabricante também suspeita que pode haver variação significativa de lote para lote, devido à variação de fabricação no fornecedor da resina e variação natural do material.

Exemplo

O experimento é composto por:

- quatro níveis diferentes de pressão de extrusão em flicks: 8500, 8700, 8900 e 9100;
- seis lotes de resina - 6 blocos;
- a ordem em que a extrusão as pressão de fusão são testadas dentro de cada bloco é aleatória;
- a variável resposta é o rendimento, ou a porcentagem de tubos na tiragem de produção que não continha nenhum filme.

Comparações de médias

- Caso seja verificado pela ANOVA a diferença entre as médias de tratamentos;
- Pode-se utilizar todas as técnicas de comparaçoes múltiplas aprendidas em Delineamento Inteiramente Casualizados;
- Porém, deve-se substituir o número de repetições (n) por número de blocos (b);
- E o número de graus de liberdade do resíduo de $(a(n-1))$ por $((a-1)(b-1)$.