d) Suponha que $Y_i \overset{ind}{\sim}$ Pascal$(r, \pi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sabemos que $\theta_i = \log(1-\pi_i) = \log\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)$, e

$$b(\theta_i) = -\log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = -\log\left(\frac{1/\mu_i}{1-1/\mu_i}\right) = \log(\mu_i - 1).$$

Aqui, $\mu_i = E(Y_i^*) = E\left(\frac{Y_i}{r}\right)$. Daí, $\tilde{\mu}_i = y_i^* = y_i/r$.

Então,

$$\tilde{\theta}_i = \log\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{y_i^*}\right) = \log\left(1 - \frac{r}{y_i}\right).$$

Veja que $\tilde{\theta}_i$ somente estará bem definido se

$1 - \frac{r}{y_i} > 0 \Rightarrow y_i > r$.

também, $\hat{\theta}_i = \log(1-\hat{\pi}_i)$ e $b(\hat{\theta}_i) = -\log\left(\frac{\hat{\pi}_i}{1-\hat{\pi}_i}\right)$.

Para $y_i > r$, o componente da função desvio não escalonado é obtido de

$$
\begin{aligned}
d^2(y_i; \hat{\pi}_i) &= 2\left\{ y_i^*(\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_i) + b(\hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)\right\} \\
&= 2\left\{ \frac{y_i}{r}\left[\log\left(1 - \frac{r}{y_i}\right) - \log(1-\hat{\pi}_i)\right]\right. \\
&\quad \left. + \log\left(\frac{1-\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i}\right) - \log\left(\frac{y_i}{r} - 1\right)\right\} \\
&= 2\left\{ \frac{y_i}{r}\left[\log\left(\frac{y_i - r}{y_i}\right) - \log(1-\hat{\pi}_i)\right]\right. \\
&\quad \left. + \log\left(\frac{1-\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i}\right) - \log\left(\frac{y_i - r}{r}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Daí, o componente da função desvio escalonado é (4)

$$d^{*2}(y_i;\hat{\pi}_i) = \phi\, d^2(y_i;\hat{\pi}_i)$$

$$= 2\left\{ y_i\left[\log\left(\frac{y_i-r}{y_i}\right) - \log(1-\hat{\pi}_i)\right] + r\left[\log\left(\frac{1-\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i}\right) - \log\left(\frac{y_i-r}{r}\right)\right]\right\},\ \underline{y_i > r.}$$

Quando $y_i = r$, temos que
$(y_i^* = 1)$

$$f_{y^*}(1; r, \pi_i) = \binom{r-1}{r-1}\pi_i^{r}(1-\pi_i)^{r-r} = \pi_i^{r}.$$

$$\tilde{\mu}_i = y_i^* = y_i/r$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\pi_i}.$$

$$\Rightarrow f_{y^*}(1; r, \tilde{\pi}_i) = \tilde{\pi}_i^{r} = \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_i}\right)^{r} = \left(\frac{1}{1}\right)^{r} = 1;$$

$$\Rightarrow f_{y^*}(r; r, \hat{\pi}_i) = \hat{\pi}_i^{r} = \left(\frac{1}{\hat{\mu}_i}\right)^{r}.$$

Assim,

$$d^{*2}(r;\hat{\pi}_i) = 2\{\log(1) - r\log(\hat{\pi}_i)\} = -2r\log(\hat{\pi}_i),$$
$$y_i = r.$$

Logo,

$$d^{*2}(y_i;\hat{\pi}_i) = \begin{cases} 2\left\{ y_i\left[\log\left(\frac{y_i-r}{y_i}\right) - \log(1-\hat{\pi}_i)\right] + r\left[\log\left(\frac{1-\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i}\right) - \log\left(\frac{y_i-r}{r}\right)\right.\right., & \text{se } y_i > r, \\ -2r\log(\hat{\pi}_i), & \text{se } y_i = r. \end{cases}$$

Se $r = 1$, temos que

$$d^{*2}(y_i; \hat{\pi}_i) = \begin{cases} 2\Big\{ y_i\Big[\log\Big(\frac{y_i - 1}{y_i}\Big) - \log(1 - \hat{\pi}_i)\Big] \\ + \log\Big(\frac{1-\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i}\Big) - \log(y_i - 1), & y_i > 1, \\ -2\log(\hat{\pi}_i), & y_i = 1. \end{cases}$$

c) Suponha que $y_i \overset{ind}{\sim} ES(\mu_i, \phi)$. ⑥

Sabemos que $\theta_i = e^{\mu_i}$ e $b(\theta_i) = -\theta_i[1 - \log(\theta_i)]$
$= -e^{\mu_i}[1 - \log(e^{\mu_i})] = e^{\mu_i}(\mu_i - 1)$.

Assim,
$\tilde{\theta}_i = e^{\tilde{\mu}_i} = e^{y_i}$ e $b(\tilde{\theta}_i) = e^{y_i}(y_i - 1)$. Também,
$\hat{\theta}_i = e^{\hat{\mu}_i}$ e $b(\hat{\theta}_i) = e^{\hat{\mu}_i}(\hat{\mu}_i - 1)$.

Assim, o componente da função desvio escalonado é

$$
\begin{aligned}
d^{*2}(y_i; \hat{\mu}_i) &= \phi\, d^2(y_i; \hat{\mu}_i) \\
&= 2\phi\{ y_i(\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i) + b(\hat{\theta}_i) - b(\tilde{\theta}_i)\} \\
&= 2\phi\{ y_i[e^{y_i} - e^{\hat{\mu}_i}] + e^{\hat{\mu}_i}(\hat{\mu}_i - 1) \\
&\quad - e^{y_i}(y_i - 1)\} \\
&= 2\phi\{ e^{\hat{\mu}_i}(\hat{\mu}_i - y_i - 1) + e^{y_i}\}.
\end{aligned}
$$

b) Queremos testar $H_0: \alpha = 0$ contra $H_1: \alpha \neq 0$ via razão de verossimilhanças. Vimos que a estatística da RV é

$\hookrightarrow \phi$ conhecido

$$\xi_{RV} = 2\{\ell(\hat{\alpha}) - \ell(\alpha^0)\}$$

$$= 2\{\ell(\hat{\alpha}) - \ell(0)\}$$

$$= 2\Big\{nr\hat{\alpha} - n\bar{y}\log(1+e^{\hat{\alpha}}) + \sum_{i=1}^{n}\log\binom{y_i-1}{r-1}$$

$$- nr\cdot 0 + n\bar{y}\log(1+e^{0}) - \sum_{i=1}^{n}\log\binom{y_i-1}{r-1}\Big\}$$

$$= 2\{nr\hat{\alpha} - n\bar{y}\log(1+e^{\hat{\alpha}}) + n\bar{y}\log(2)\}.$$

$$= 2\Big\{nr\hat{\alpha} + n\bar{y}\log\Big(\frac{2}{1+e^{\hat{\alpha}}}\Big)\Big\}.$$

Substituindo $\hat{\alpha} = \log(r/(\bar{y}-r))$ ficamos com

$$\xi_{RV} = 2n\Big\{r\log\Big(\frac{r}{\bar{y}-r}\Big) + \bar{y}\log\Big(\frac{2}{1+r/(\bar{y}-r)}\Big)\Big\}.$$

c) Sob $H_0: \alpha = 0$, sabemos que $\xi_{RV} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_{1}$.

$\downarrow$
$q$: dimensão de $\beta$.

Regra de decisão: Rejeitamos $H_0: \alpha = 0$ ao nível de significância $\alpha \cdot 100\%$ se $\xi_{RV} \geq \chi^2_{1,\alpha}$ em que $\chi^2_{1,\alpha}$ é o quantil da distribuição $\chi^2_1$ tal que $\mathbb{P}(\chi^2_1 \geq \chi^2_{1,\alpha}) = \alpha$.

a) Vimos que a estatística de Wald p/ testar $H_0: \beta = \beta^{(0)}$ contra $H_1: \beta \neq \beta^{(0)} \in \mathbb{R}^p$ é dada por

$$\xi_W = (\hat{\beta} - \beta^0)^T \left[ \widehat{Var}(\hat{\beta}) \right]^{-1} (\hat{\beta} - \beta^0) \overset{H_0}{\underset{n \to \infty}{\sim}} \chi^2_p$$

Aqui, temos que $\beta = \alpha$ (apenas o intercepto), $\beta^0 = 0$ (pois $H_0: \alpha = 0$). Além disso, vimos na lista 1 que o EMV de $\alpha$, e a respectiva variância assintótica são dados por

$$\hat{\alpha} = \log\left(\frac{r}{\bar{y} - r}\right), \quad \bar{y} > r, \quad e \quad Var(\hat{\alpha}) = \frac{1 + e^{\alpha}}{nr}.$$

Daí,

$$\widehat{Var}(\hat{\alpha}) = \frac{1 + e^{\hat{\alpha}}}{nr} = \frac{1 + e^{\log\left(\frac{r}{\bar{y} - r}\right)}}{nr}$$

$$= \frac{1 + \frac{r}{\bar{y} - r}}{nr} = \frac{\bar{y}}{nr(\bar{y} - r)}, \quad \bar{y} > r.$$

Daí, a estatística de Wald p/ testar (2)
$H_0: \alpha = 0$ contra $H_1: \alpha \neq 0$ é

$$\xi_W = \frac{\hat{\alpha}^2}{\widehat{Var}(\hat{\alpha})} = \frac{\left[\log\left(\frac{r}{\bar{y}-r}\right)\right]^2}{\frac{\bar{y}}{nr(\bar{y}-r)}} = \frac{nr(\bar{y}-r)\log\left(\frac{r}{\bar{y}-r}\right)^2}{\bar{y}}$$

Sob $H_0: \alpha = 0$, $\xi_W \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_1$ pois $p = 1$ (dimensão de $\beta$).
↳ distribuição nula assintótica de $\xi_W$

Sendo assim, fixado nível $\alpha$ de significância, $0 < \alpha < 1$, rejeita-se $H_0: \alpha = 0$ quando $\xi_W \geq \chi^2_{1,\alpha}$ em que $\chi^2_{1,\alpha}$ é o quantil da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade tal que $P(\chi^2_1 \geq \chi^2_{1,\alpha}) = \alpha$.

b) Para testar $H_0: \beta = \beta^0$ contra $H_1: \beta \neq \beta^0$, a estatística do teste escore é

$$\xi_{SR} = U_\beta(\beta^0)^T \, \widehat{Var_0}(\hat{\beta}) \, U_\beta(\beta^0) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_p.$$

Aqui, ficamos com $\xi_{SR} = U_\alpha(0)^2 \, \widehat{Var_0}(\hat{\alpha})$. Vimos
↳ avaliado em $\alpha = 0$
na lista 1 que

$$U_\alpha = nr - \frac{n\bar{y}e^\alpha}{1+e^\alpha} \Rightarrow U_\alpha(0) = nr - \frac{n\bar{y}e^0}{1+e^0}$$

$$\Rightarrow U_\alpha(0) = nr - \frac{n\bar{y}}{2} = \frac{2nr - n\bar{y}}{2} = \frac{n(2r-\bar{y})}{2}.$$

Como $Var(\hat{\alpha}) = \frac{1 + e^{\alpha}}{nr} \Rightarrow \widehat{Var}_0(\hat{\alpha}) = \frac{1+e^0}{nr}$ 3

$\Rightarrow \widehat{Var}_0(\hat{\alpha}) = \frac{2}{nr}$.

Assim, a estatística do teste escore p/ testar $H_0: \alpha = 0$ contra $H_1: \alpha \neq 0$ é

$$\xi_{SR} = \frac{n^2(2r - \bar{y})^2}{4} \cdot \frac{2}{nr} = \frac{n(2r-\bar{y})^2}{2r}.$$

Sob $H_0: \alpha = 0$, $\xi_{SR} \underset{n\uparrow\infty}{\sim} \chi^2_1$. Daí, rejeita-se $H_0$, ao nível de significância $0 < \alpha < 1$, se $\xi_{SR} \geq \chi^2_{1,\alpha}$ em que $\chi^2_{1,\alpha}$ é tal que $P(\chi^2_1 \geq \chi^2_{1,\alpha}) = \alpha$.

c) Note que ao testar $H_0: \beta = 0$ contra $H_1: \beta \neq 0$ estamos testando se um subvetor de $\underset{\sim}{\beta} = (\alpha, \beta)^\top$ é diferente de zero. Vimos que p/ testar $H_0: \underset{\sim}{\beta_1} = \underset{\sim}{\beta_1}^{(0)}$ contra $H_1: \underset{\sim}{\beta_1} \neq \underset{\sim}{\beta_1}^{(0)}$, $\underset{\sim}{\beta_1} \in \mathbb{R}^q$, $\underset{\sim}{\beta} = (\underset{\sim}{\beta_1}^\top, \underset{\sim}{\beta_2}^\top)^\top \in \mathbb{R}^p$, a estatística do teste de Wald é

$$\xi_W = (\hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 - \underset{\sim}{\beta}_1^0)^\top \widehat{\mathrm{Var}}^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}_1)(\hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 - \underset{\sim}{\beta}_1^{(0)}) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_q .$$

Aqui, ficamos com $\xi_W = \dfrac{\hat{\beta}^2}{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_1 .$

Temos que $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \dfrac{1}{4\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

Já $\hat{\beta}$ é obtido de $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^\top$ tal que

$U_\beta(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{0}_{2\times1}$, em que $U_\beta = 2X^\top V^{-1/2}(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu})$,

em que $V^{-1/2} = \mathrm{diag}\{1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \dots, 1/\sqrt{\mu_n}\}$,

pois $V_i = V(\mu_i) = \mu_i$ (Poisson).

De fato, veja que 

$$U_\beta = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1-\bar{x} & x_2-\bar{x} & \cdots & x_n-\bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{\mu_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1-\mu_1 \\ y_2-\mu_2 \\ \vdots \\ y_n-\mu_n \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1-\bar{x} & x_2-\bar{x} & \cdots & x_n-\bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1-\mu_1)/\sqrt{\mu_1} \\ (y_2-\mu_2)/\sqrt{\mu_2} \\ \vdots \\ (y_n-\mu_n)/\sqrt{\mu_n} \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\mu_i)}{\sqrt{\mu_i}} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})(y_i-\mu_i)}{\sqrt{\mu_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{bmatrix}, \quad (\star)$$

em que $\mu_i$ é tal que $\sqrt{\mu_i} = \eta_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x})$.

→ Verifique!

Assim, como não há forma fechada p/ $\hat{\beta}$, a estatística do teste de Wald ficará em termos de $\hat{\beta}$:

$$\xi_W = 4\hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_1 .$$

dist. nula assintótica de $\xi_W$

obs: $\hat{\beta}$ é obtido de forma iterativa via o método escore de Fisher.

d) Sob $H_0: \beta = 0$, a estatística do teste escore fica dada por

$$\xi_{SR} = U_\beta(\hat{\beta}^0)^\top \, \widehat{Var_0}(\hat{\beta}) \, U_\beta(\hat{\beta}^0)$$

$$= [U_\beta(\hat{\beta}^0)]^2 \, \widehat{Var_0}(\hat{\beta}).$$

De (A) sabemos que

$$U_\beta = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \mu_i)}{\sqrt{\mu_i}} \Rightarrow$$

$$U_\beta(\hat{\beta}^0) = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \hat{\mu}_i^0)}{\sqrt{\hat{\mu}_i^0}}, \quad \hat{\beta}^0 = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\sqrt{\hat{\mu}_i^0} = \hat{\eta}_i^0 = \hat{\alpha}^0 + 0 \cdot (x_i - \bar{x}) = \hat{\alpha}^0$, em que $\hat{\alpha}^0$ é o EMV de $\alpha$ sob $H_0: \beta = 0$.

Sob $H_0: \beta = 0$, o valor $\hat{\alpha}^0$ é obtido de $U_{\alpha^0} = 0$

$\sqrt{\hat{\mu}_i^0} = \hat{\alpha}^0$ e $\hat{\mu}_i^0 = (\hat{\alpha}^0)^2$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i^0)}{\sqrt{\hat{\mu}_i^0}} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - (\hat{\alpha}^0)^2]}{\hat{\alpha}^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\hat{\alpha}^0} [n\bar{y} - n(\hat{\alpha}^0)^2] = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = (\hat{\alpha}^0)^2 \Leftrightarrow \hat{\alpha}^0 = \bar{y}^{1/2}$$

$$\boxed{\hat{\mu}_i^0 = \bar{y}}$$

Este resultado vale p/ todo MLG com componente sist. apenas com intercepto

Assim, o vetor $U_\beta(\hat{\beta}^0)$ fica expresso por

$$U_\beta(\hat{\beta}^0) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\bar{y}^{1/2}}.$$

Também, como $Var(\hat{\beta}) = \dfrac{1}{4\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \widehat{Var_0}(\hat{\beta})$.

Logo, a estatística do teste escore é dada por

$$\xi_{SR} = \frac{\cancel{4}}{\bar{y}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right)^2}{\cancel{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi_1^2.$$

$\llcorner_0$ dist. nula assintótica

e) A estatística do teste da razão de verossimilhanças é dada por

$$\xi_{RV} = 2\{\ell(\hat{\beta}) - \ell(\hat{\beta}^0)\} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi_q^2.$$

Sabemos que o logaritmo da função de verossimilhanças é

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{n}\{-\mu_i + y_i\log(\mu_i) - \log(y_i!)\} \Rightarrow$$

$$\ell(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\{-\hat{\mu}_i + y_i\log(\hat{\mu}_i) - \log(y_i!)\},$$

com $\sqrt{\hat{\mu}_i} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i-\bar{x})$. Sabemos que

$\hat{\beta}^0 = (\hat{\alpha}^0\ \ 0)^\top = (\bar{y}^{1/2}\ \ 0)^\top$ e $\hat{\mu}_i^0 = (\hat{\alpha}^0)^2$.

Então,

$$\ell(\underset{\sim}{\beta}^0) = \sum_{i=1}^{n} \{ -\hat{\mu}_i^0 + y_i \log(\hat{\mu}_i^0) - \log(y_i!) \}.$$

$\hat{\mu}_i^0 = \bar{y}$

Assim, a estatística do TRV fica dada por

$$\xi_{RV} = 2\sum_{i=1}^{n} \{ -\hat{\mu}_i + \hat{\mu}_i^0 + y_i \log(\hat{\mu}_i) - y_i \log(\hat{\mu}_i^0) - \log(y_i!) + \log(y_i!) \}$$

$\hat{\mu}_i^0 = \bar{y}$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \bar{y} - \hat{\mu}_i + y_i \log\left(\frac{\hat{\mu}_i}{\bar{y}}\right) \right\}.$$

Sob $H_0: \beta = 0$, a distribuição nula assintótica de $\xi_{RV}$ é $\chi^2_1$.

Poderíamos ter expressado $\xi_{RV}$ usando o resultado p/ os MLGs que

$$\xi_{RV} = \phi\{ D(\underset{\sim}{y}; \hat{\underset{\sim}{\mu}}^0) - D(\underset{\sim}{y}; \hat{\underset{\sim}{\mu}}) ],$$ em que

$$D(\underset{\sim}{y}; \hat{\underset{\sim}{\mu}}) = \sum_{i=1}^{n} d^2(y_i; \hat{\mu}_i),$$ com

$$d^2(y_i, \hat{\mu}_i) = \begin{cases} 2\left[ y_i \log\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right) + (\hat{\mu}_i - y_i), \right. & y_i > 0 \\ 2\hat{\mu}_i, & y_i = 0. \end{cases}$$

3) Suponha que $Y_{ij} \overset{ind}{\sim} NI(\mu_i, \phi)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, m$, em que $\log(\mu_1) = \alpha - \beta$ e $\log(\mu_2) = \alpha + \beta$. Queremos testar $H_0: \beta = 0$

contra $H_1: \beta \neq 0$.

a) Queremos escrever a matriz $X$ do modelo tal que $X\beta = \underset{\sim}{\eta}$, $\beta = (\alpha, \beta)^{\top}$ e

$$\log(\mu_1) = \eta_{1j} = \alpha - \beta$$

$$\log(\mu_2) = \eta_{2j} = \alpha + \beta,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

$$X_{2m \times 2} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ linhas} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ linhas} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x_2 & x_1 \end{array} \qquad X = [x_2 \; x_1]$$

$\boxed{n = 2m}$

b) Suponha que $\phi$ seja conhecido. Queremos expressar a estatística do teste escore p/ testar $H_0: \beta = 0$ contra $H_1: \beta \neq 0$.

Sabemos que $Y_{1j} \overset{ind}{\sim} NI(\mu_1, \phi)$ com $\mu_1 = e^{\alpha - \beta}$ e $Y_{2j} \overset{ind}{\sim} NI(\mu_2, \phi)$ com $\mu_2 = e^{\alpha + \beta}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Note que sob $H_0: \beta = 0$, tem-se $\mu_1 = \mu_2 = e^{\alpha}$, i.e., Queremos testar $H_0: \mu_1 = \mu_2$ contra $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

Vimos que a estatística do teste escore pode ser escrita através de

$$\xi_{SR} = \hat{\underset{\sim}{r}}_{P0}^{\top} \hat{W}_0^{1/2} X_1 (\hat{R}_0^{\top} \hat{W}_0 \hat{R}_0)^{-1} X_1^{\top} \hat{W}_0^{1/2} \hat{\underset{\sim}{r}}_{P0},$$

$$R = X_1 - X_2 C, \quad C = (X_2^{\top} W X_2)^{-1} X_2^{\top} W X_1,$$

$$r_P = \phi^{1/2} V^{-1/2} (\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu}).$$

Como queremos testar $H_0: \beta = 0$ (subvetor de $\beta$), (11)
particionaremos $X = [X_2 \; X_1]$.

Veja que a matriz de pesos $W$ é dada por

$W = \text{diag}\{w_1, \ldots, w_1, w_2, \ldots, w_2\}$, $w_i = (d\mu_i/d\eta_i)^2/V_i$.

$$\Rightarrow X_2^{+} W X_2 = [1 \ldots 1 \; 1 \ldots 1] \begin{bmatrix} w_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & w_1 & & & \\ & & & w_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & w_2 \end{bmatrix} X_2$$

$$= [w_1 \ldots w_1 \; w_2 \ldots w_2] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= m(w_1 + w_2);$$

$$\Rightarrow X_2^{+} W X_1 = [w_1 \ldots w_1 \; w_2 \ldots w_2] \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = m(w_2 - w_1);$$

$$\Rightarrow C = (X_2^{+} W X_2)^{-1} X_2^{+} W X_1 = \frac{m(w_2 - w_1)}{m(w_1 + w_2)} = \frac{w_2 - w_1}{w_1 + w_2};$$

$$\Rightarrow R = X_1 - X_2 C = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{(w_2 - w_1)}{w_1 + w_2} = \begin{bmatrix} -2w_2/(w_1+w_2) \\ \vdots \\ -2w_2/(w_1+w_2) \\ 2w_1/(w_1+w_2) \\ \vdots \\ 2w_1/(w_1+w_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R^\top W R = \begin{bmatrix} \frac{-2w_2}{w_1+w_2} & \cdots & \frac{-2w_2}{w_1+w_2} & \frac{2w_1}{w_1+w_2} & \cdots & \frac{2w_1}{w_1+w_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & w_1 & & & \\ & & & w_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & w_2 \end{bmatrix} R$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2w_1w_2}{w_1+w_2} & \cdots & -\frac{2w_1w_2}{w_1+w_2} & \frac{2w_1w_2}{w_1+w_2} & \cdots & \frac{2w_1w_2}{w_1+w_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2w_2/(w_1+w_2) \\ \vdots \\ -2w_2/(w_1+w_2) \\ 2w_1/(w_1+w_2) \\ \vdots \\ 2w_1/(w_1+w_2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4m w_1 w_2^2}{(w_1+w_2)^2} + \frac{4m w_1^2 w_2}{(w_1+w_2)^2}$$

$$= \frac{4 m w_1 + w_2 (w_2 + w_1)}{(w_1+w_2)^2}$$

$$= \frac{4 m w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

$$\Rightarrow (R^\top W R)^{-1} = \frac{w_1 + w_2}{4 m w_1 w_2}.$$

Agora, precisamos avaliar todas as quantidades sob $H_0: B = 0 \ (\mu_1 = \mu_2)$. Note que, sob $H_0$, $w_1 = w_2 = w_0$. Então,

$$(\hat{R}_0^{+}\hat{W}_0\hat{R}_0)^{-1} = \frac{2\hat{w}_0}{4m\hat{w}_0^2} = \frac{1}{2m\hat{w}_0}.$$

Também,

$$\hat{W}_0^{1/2}X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{w}_0} & & & & \\ & \ddots \sqrt{\hat{w}_0} & & & \\ & & \sqrt{\hat{w}_0} & & \\ & & & \ddots & \sqrt{\hat{w}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\hat{w}_0} \\ \vdots \\ -\sqrt{\hat{w}_0} \\ \sqrt{\hat{w}_0} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{w}_0} \end{bmatrix}.$$

Agora, precisamos de $\hat{\underset{\sim}{r}}_{p0}$. As entradas do vetor $\underset{\sim}{r}_p$ são dadas por

$$r_{pj} = \frac{\sqrt{\phi}\,(y_{ij} - \mu_i)}{\sqrt{v_i}} \overset{\phi \text{ conhecido}}{\Rightarrow} \hat{r}_{pj}^{0} = \frac{\sqrt{\phi}\,(y_{ij} - \hat{\mu}_i^0)}{\sqrt{\hat{v}_i^0}},$$

em que $\hat{\mu}_i^0 = \bar{y}$ (este resultado vale p/ todo MLG apenas com intercepto), $i = 1,2$, $\hat{v}_i^0 = V(\hat{\mu}_i^0) = V(\bar{y}) = \bar{y}^3$ pois $V(\mu) = \mu^3$ p/ a NI. Então, temos as entradas do vetor $\hat{\underset{\sim}{r}}_{p0}$ dadas por

$$\hat{r}_{pj}^{0} = \frac{\sqrt{\phi}\,(y_{ij} - \bar{y})}{\sqrt{\bar{y}^3}}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2m.$$

$$\Rightarrow \hat{\underset{\sim}{r}}_{p0}^{+}\hat{W}_0^{1/2}X_1 = [\hat{r}_{p1}^{0} \ldots \hat{r}_{pm}^{0}\ \hat{r}_{p(m+1)}^{0} \ldots \hat{r}_{p2m}^{0}] \begin{bmatrix} -\sqrt{\hat{w}_0} \\ \vdots \\ -\sqrt{\hat{w}_0} \\ \sqrt{\hat{w}_0} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{w}_0} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\hat{\omega}_0}\left\{-\sum_{j=1}^{m}\frac{\sqrt{\phi}(y_{1j}-\bar{y})}{\sqrt{\bar{y}^3}} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\sqrt{\phi}(y_{2j}-\bar{y})}{\sqrt{\bar{y}^3}}\right\}$$ (14)

$$= -\sqrt{\frac{\hat{\omega}_0\phi}{\bar{y}^3}}\sum_{j=1}^{m}(y_{1j}-y_{2j})$$

resultado visto em aula qdo $g(\cdot)=\log(\cdot)$.

$$= \sqrt{\frac{\hat{\omega}_0\phi}{\bar{y}^3}}\, m(\bar{y}_2-\bar{y}_1), \text{ com } \hat{\omega}_0 = \frac{1}{\hat{\mu}_1^0} = \frac{1}{\bar{y}}.$$

Finalmente, a estatística do teste escore fica dada por

(∗∗)

$$\xi_{SR} = \frac{\hat{\omega}_0\phi}{\bar{y}^3}\, m^{\cancel{2}}(\bar{y}_2-\bar{y}_1)^2 \cdot \frac{1}{2\cancel{m}\cancel{\hat{\omega}_0}} = \frac{\phi\, m(\bar{y}_2-\bar{y}_1)^2}{2\bar{y}^3}.$$

Sob $H_0: \beta=0$, temos que $\xi_{SR} \overset{H_0}{\underset{m\uparrow\infty}{\sim}} \chi^2_1$.

c) Se $\phi$ for desconhecido, a estatística do teste escore fica dada pela expressão (∗∗) substituindo $\phi$ pela sua estimativa de máxima verossimilhança sob $H_0: \beta=0$.

Já vimos que o EMV de $\phi$ no caso da distribuição NI é

Resultado desta 1

$$\hat{\phi} = \frac{n}{D(\underset{\sim}{y};\hat{\mu})}, \text{ em que } D(\underset{\sim}{y};\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\hat{\mu}_i)^2}{y_i\hat{\mu}_1^2}.$$

Adptando a notação temos $\hat{\phi} = \frac{2m}{D(\underset{\sim}{y};\hat{\underset{\sim}{\mu}})}$, (15)

com

$$D(\underset{\sim}{y};\hat{\underset{\sim}{\mu}}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(y_{1j}-\hat{\mu}_1)^2}{y_{1j}\hat{\mu}_1^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{(y_{2j}-\hat{\mu}_2)^2}{y_{2j}\hat{\mu}_2^2}.$$

Sob $H_0: \beta = 0\ (\mu_1 = \mu_2)$, temos que

$$\hat{\phi}^0 = \frac{2m}{D(\underset{\sim}{y};\hat{\underset{\sim}{\mu}}^0)}, \quad \text{em que}$$

$$D(\underset{\sim}{y};\hat{\underset{\sim}{\mu}}^0) = \frac{1}{\bar{y}^2}\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{(y_{1j}-\bar{y})^2}{y_{1j}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{(y_{2j}-\bar{y})^2}{y_{2j}}\right\}.$$

Logo,

$$\xi_{SR} = \frac{\hat{\phi}^0 m (\bar{y}_2-\bar{y}_1)}{2\bar{y}^3} \underset{m\uparrow\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi_1^2.$$

d) Para expressar a estatística do teste de Wald p/ testar $H_0: \beta = 0$ contra $H_1: \beta \neq 0$, usa-remos a expressão ($\phi$ conhecido)

$$\xi_W = \phi(\hat{\beta}-0)^T(\hat{R}^T\hat{W}\hat{R})(\hat{\beta}-0).$$

$\hat{\beta}$ não possui forma fechada. Assim é obtido de forma iterativa via método escore de Fisher.

Já vimos que $R^{+}WR = \dfrac{4m w_1 w_2}{w_1 + w_2}$. Daí,

$$\hat{R}^{+}\hat{W}\hat{R} = \frac{4m\,\hat{w}_1\hat{w}_2}{\hat{w}_1 + \hat{w}_2},$$ em que

$$\hat{w}_1 = \frac{(d\mu_1/d\eta_1)^2}{V_1} \quad \text{e} \quad \hat{w}_2 = \frac{(d\mu_2/d\eta_2)^2}{V_2}.$$

1º grupo 2º grupo

Vimos que p/ a distribuição NI quando a ligação é a logarítmica, $w_i = \dfrac{1}{\mu_i}$.

Então,

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\hat{\mu}_1}, \quad \hat{\mu}_1 = e^{\hat{\alpha} - \hat{\beta}},$$

$$\hat{w}_2 = \frac{1}{\hat{\mu}_2}, \quad \hat{\mu}_2 = e^{\hat{\alpha} + \hat{\beta}},$$

em que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são os EMVs de $\alpha$ e $\beta$ (irrestritos).

Logo,

$$\xi_W = \phi\,\hat{\beta}^2 \cdot \frac{4m\,\hat{w}_1\hat{w}_2}{\hat{w}_1 + \hat{w}_2} \overset{m\uparrow\infty}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_1. \quad (***)$$

e) Quando $\phi$ é desconhecido, a estatística escore é dada por (***) substituindo $\phi$ por $\hat{\phi}$ já obtido anteriormente. → pág 14. E, $\xi_W \overset{H_0}{\underset{m\uparrow\infty}{\sim}} \chi^2_1$.