Modelos Lineares Generalizados - Profa. Terezinha Ribeiro
Lista de Exercícios 1

Exercício 1

Seja Y a variável aleatória que representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do r-ésimo sucesso, em que π denota a probabilidade de sucesso em cada ensaio. Dizemos que Y segue uma distribuição de Pascal, $Y \sim \text{Pascal}(\text{r}, \pi)$, e sua função de probabilidades é dada por

$$f(y; r, \pi) = \binom{y-1}{r-1} \pi^r (1-\pi)^{y-r},$$

com $y = r, r+1, \ldots$ e $0 < \pi < 1$.

(a) Mostre que $Y^* = Y/r$ pertence a família exponencial uniparamétrica canônica.

(b) Obtenha $\mu = \text{E}(\text{Y}^*)$, a função de variância $\text{V}(\mu)$, e $\text{Var}(\text{Y}^*)$.

(c) Particularize os resultados para $r = 1$ (distribuição geométrica).

Exercício 2

Considere $Y \sim \text{ES}(\mu, \phi)$ (distribuição estável) cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y; \theta, \phi) = a(y, \phi) \exp\{\phi[\theta(y+1) - \theta \log(\theta)]\},$$

com $\theta > 0$, $y \in \mathbb{R}$, $\phi > 0$, e $a(\cdot, \cdot)$ é uma função normalizadora.

(a) Mostre que Y pertence a família exponencial uniparamétrica canônica.

(b) Obtenha $\mu = \text{E}(\text{Y})$, a função de variância $\text{V}(\mu)$, e $\text{Var}(\text{Y})$.

Exercício 3

Suponha que $Y_i \overset{\text{ind}}{\sim} \text{NI}(\mu_i, \phi)$, em que $\mu_i = g^{-1}(\eta_i)$ com $i = 1, 2, \ldots, n$. Obtenha a estimativa de máxima verossimilhança de ϕ e mostre que o critério de Akaike equivale a mimimizar

$$n \log\left(\frac{D(\boldsymbol{y}; \widehat{\boldsymbol{\mu}})}{n}\right) + 2p,$$

em que $D(\boldsymbol{y}; \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{\mu}_i)^2 / (y_i \widehat{\mu}_i^2)$. Lembre-se que $\text{AIC} = -2\ell(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + 2p$.

Exercício 4

Suponha que $Y_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{Pascal}(\text{r}, \pi_\text{i})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, com componente sistemático dado por

$$\log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \alpha.$$

Obtenha a estimativa de máxima verossimilhança de α e a variância assintótica $\text{Var}(\widehat{\alpha})$.

Exercício 5

Suponha que $Y_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{Poisson}(\mu_\text{i})$, em que $\sqrt{\mu_i} = \eta_i$ com $\eta_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Queremos testar H_0: $\beta = 0$ contra H_1: $\beta \neq 0$.

(a) Expresse a matriz do modelo X.

(b) Obtenha a matriz de covariâncias assintótica $\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \beta)^\top$.