generalizando: Seja $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, e a matriz I identidade em $\mathbb{R}^{r \times r}$, para $A \cdot v = \lambda v \; \forall \; v \neq 0$, e $\rho = \sigma_{ik} = \sigma$ teremos:

$$A_{r \times r} = \sigma \cdot u \cdot u' + (1 - \sigma) I$$

$$\lambda v = A \cdot v = \sigma \langle u, v \rangle u + (1 - \sigma) v$$

↳ produto interno em $\mathbb{R}^n$; implicando em:

$(\lambda - 1 + \sigma) v = \sigma \langle u, v \rangle u$, ou seja:

$\langle u, v \rangle = 0 \longrightarrow$ ocorre para $r - 1$ vetores L.I (todos os possíveis vetores associados a u) sendo nesse caso:
$\lambda = 1 - \sigma$, onde o autovalor $\lambda = 1 - \sigma$ tem multiplicidade de $r - 1$.

caso contrário:
$\langle u, v \rangle \neq 0$ sendo assim L.D implicando no fato de v ser escrito em função de u sendo assim, múltiplo do mesmo, levando à conclusão imediata de que o autovalor será $v = u$:

$$(\lambda - 1 + \sigma) u = \sigma \langle u, u \rangle u$$

$$\lambda = \sigma \langle u, u \rangle + 1 - \sigma = \underline{\sigma (r - 1) + 1}$$

Logo, os autovalores são $1 - \sigma$ e $1 + (r - 1)\sigma$ com multiplicidade $r - 1$