



Universidade de Brasília

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

26 junho 2023

Lista 7 - Normal Multivariada

Prof. Dr. George von Borries

Análise Multivariada 1

Aluno: Bruno Gondim Toledo | Matrícula: 15/0167636

Questão 55

```
##           [,1]      [,2]
## [1,] 2.713068 2.2421326
## [2,] 3.168527 1.8305926
## [3,] 3.281616 3.6377464
## [4,] 1.225270 3.8406363
## [5,] 2.788789 1.6138664
## [6,] 2.971249 0.3776516
## [7,] 3.139249 -2.2801139
## [8,] 2.729603 0.9393494
## [9,] 2.447450 2.9861925
## [10,] 3.184863 -0.9861318
## [11,] 1.798995 3.6115228
## [12,] 1.712520 4.5234829
## [13,] 3.756708 -0.3153063
## [14,] 2.796773 1.9171775
## [15,] 3.142316 1.5452393
## [16,] 3.364824 1.9736312
## [17,] 1.625479 4.5668874
## [18,] 3.363095 1.8630202
## [19,] 3.756838 1.1431897
## [20,] 3.831592 -0.5266128
```

Questão 56

$\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_{\mathbf{P}}(\mu, \Sigma)$, Então: $\mathbf{U} = (\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu)$.

Sol:

Seja $Z \sim N_P(0, I)$;

$\sum_{i=1}^P \mathbf{Z}_i^2 = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \sim \chi_{\mathbf{P}}^2$. Mas, $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = (\mathbf{Y} - \mu)^T (\Sigma^{1/2})^{-1} (\Sigma^{1/2})^{-1} (\mathbf{Y} - \mu) = (\mathbf{Y} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \mu) \sim \chi_{\mathbf{P}}^2$.

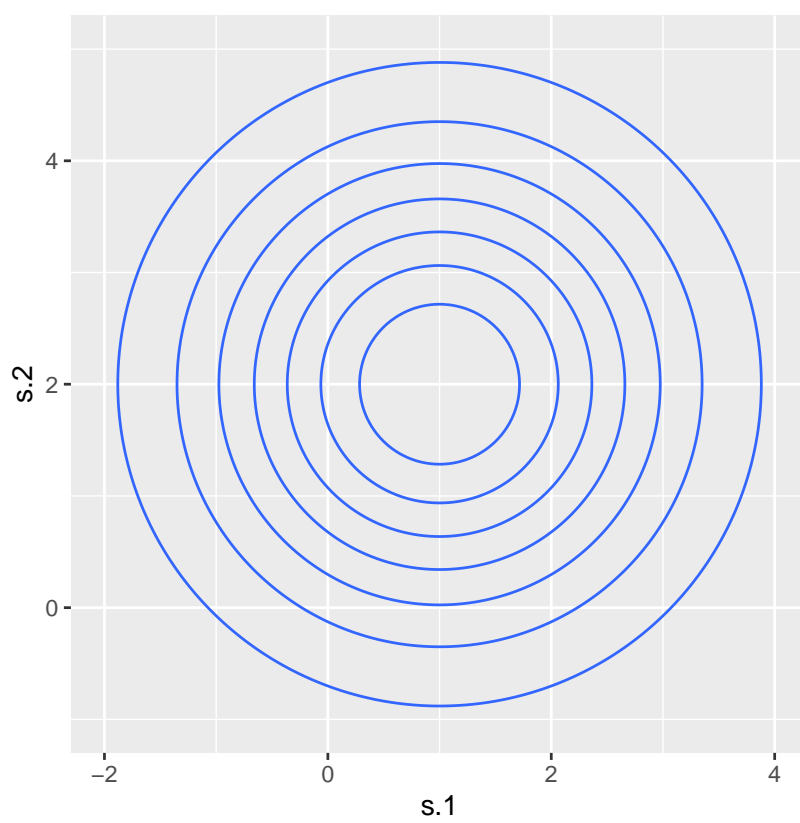
Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Então: $(\mathbf{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu) \sim \chi_{\mathbf{P}}^2$

□

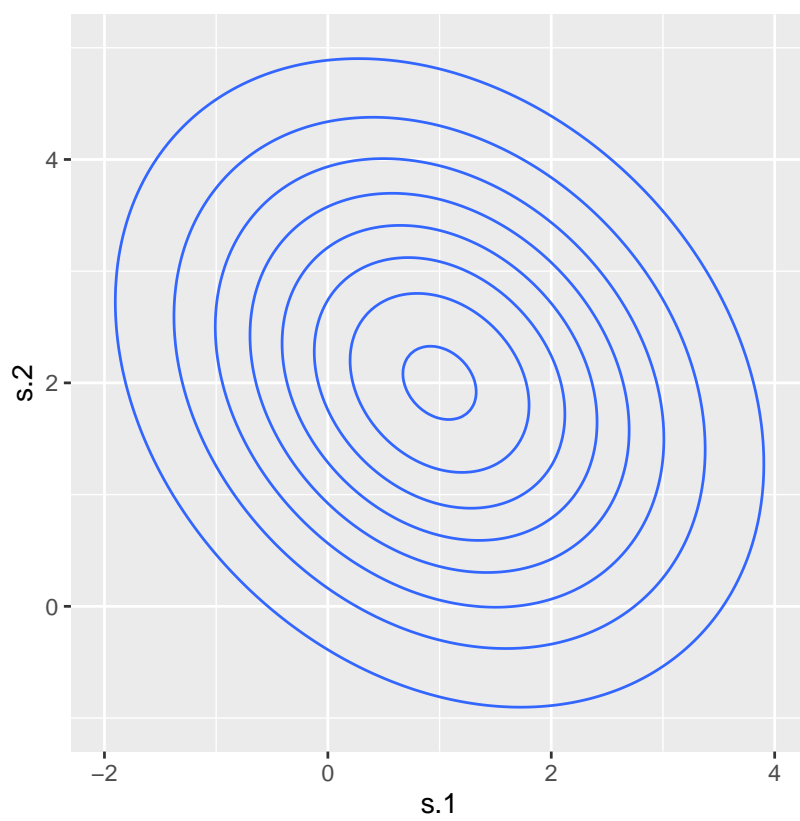
Questão 57

Ao invés das elipses, irei representar os contornos, pois encontrei uma função que faz e traz uma representação mais interessante, na minha opinião, para a normal bivariada.

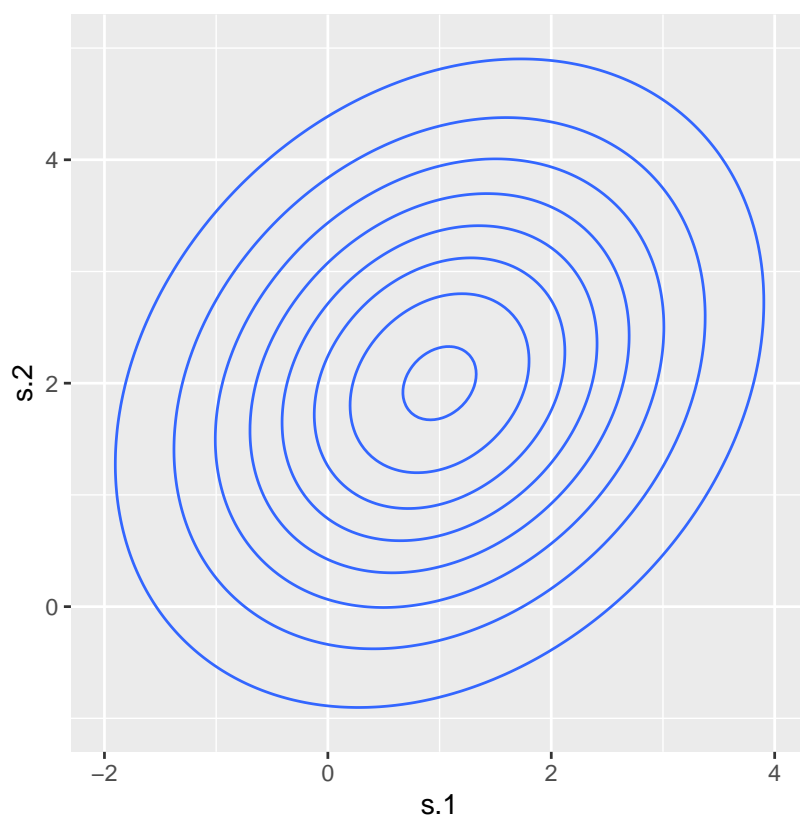
$$a = 0$$



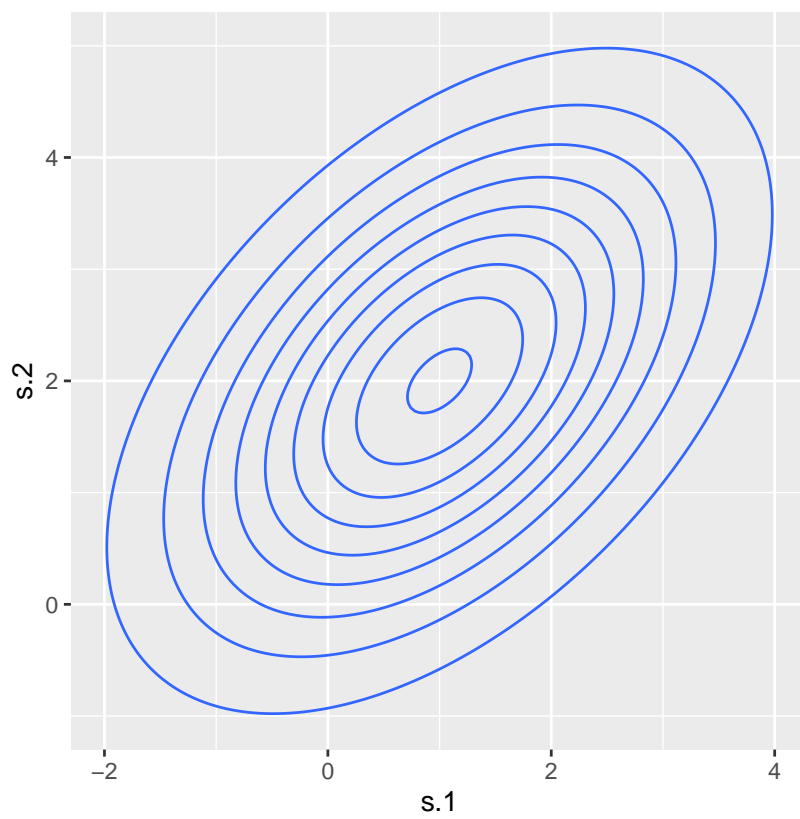
$$a = -1/2$$



$$a = 1/2$$



$$a = 1$$



Questão 58

$\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \Sigma)$ tal que

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. Mostre que \mathbf{AX} é independente de \mathbf{BX}

Solução:

Como $\Sigma_{12} = 0$, temos que os vetores \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 amostras de \mathbf{X} são independentes.

Seja

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X ;$$

e

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{BX} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_2 \end{bmatrix} \neq X .$$

Que são independentes por $\Sigma_{12} = 0$. Logo, $Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = 0$

□

Questão 59

Seja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathbf{N}_{\mathbf{P}}(\mu, \Sigma); \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} ;$$

Provar que $\Sigma_{12} = 0 \iff x_1$ independente de x_2

Prova:

Se as variáveis aleatórias são não correlacionadas, então Σ é diagonal. Neste caso, a forma quadrática $(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)$ é reduzida à uma soma de quadrados, assim como a densidade dos fatores no produto das densidades marginais, o que implica em independência. [4]

Neste caso, $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ representa a totalidade da correlação. Como ela é 0, a prova acima se aplica, definindo portanto a independência de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

□

Questão 60

Ex. 4.26 | Johnson & Wichern

a)

De x_1 e x_2 , obtemos: o o vetor de médias $\mu =$

```
##           [,1]
## [1,]    5.200
## [2,]   12.481
```

A matriz $\mathbf{S} =$

```
##           [,1]      [,2]
## [1,]  10.62222 -17.71022
## [2,] -17.71022  30.85437
```

E a inversa $\mathbf{S}^{-1} =$

```
##           [,1]      [,2]
## [1,]  2.189813  1.2569395
## [2,]  1.256939  0.7538861
```

Com isso, podemos calcular as distâncias estatísticas quadradas

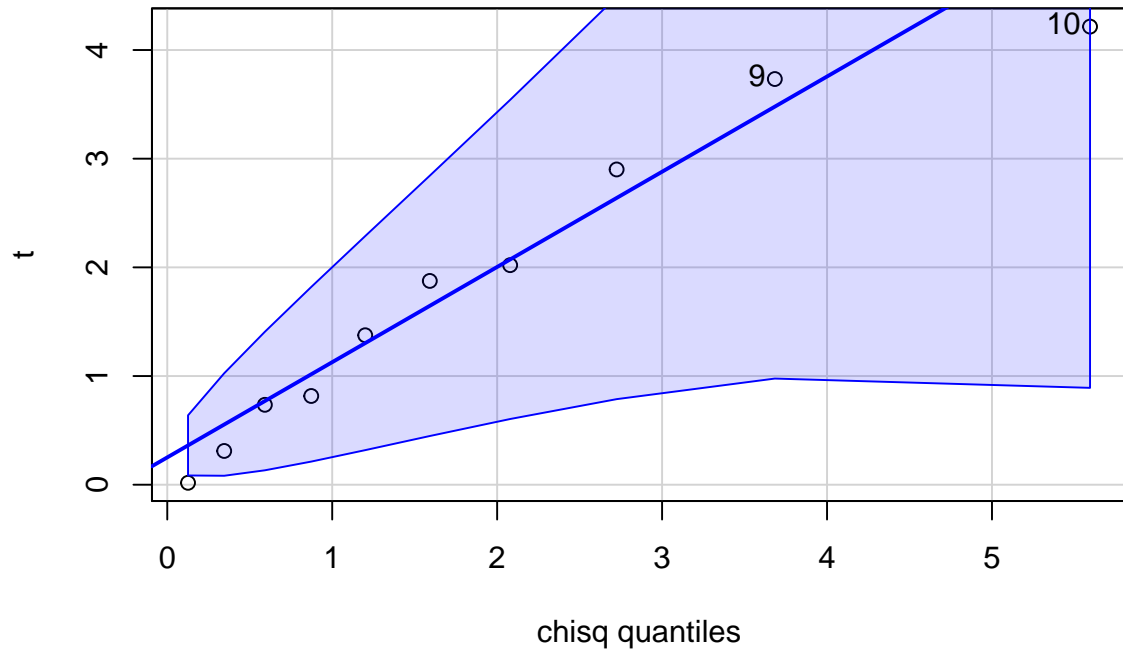
$$d_j^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) = [1.8753045, 2.0203262, 2.9009088, 0.7352659, 0.3105192, 0.0176162, 3.7329012, 0.8165401, 1.3753379, 4.2152799]$$

b)

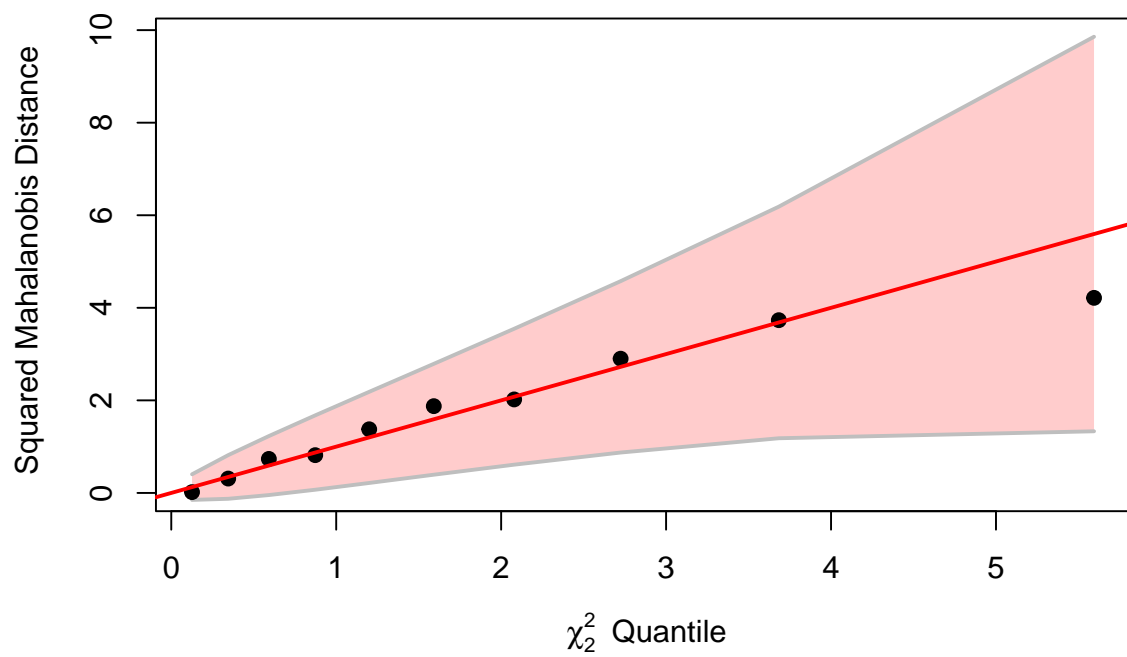
Neste caso, iremos comparar os valores d_j^2 com o quantil $\chi_2^2(0,5) = 1.3862944$ e avaliar a proporção de observações na margem de aceitação, que para este caso é 50%

c)

Duas representações gráficas análogas:



Chi-Square Q-Q Plot of data.frame(x1, x2)



d)

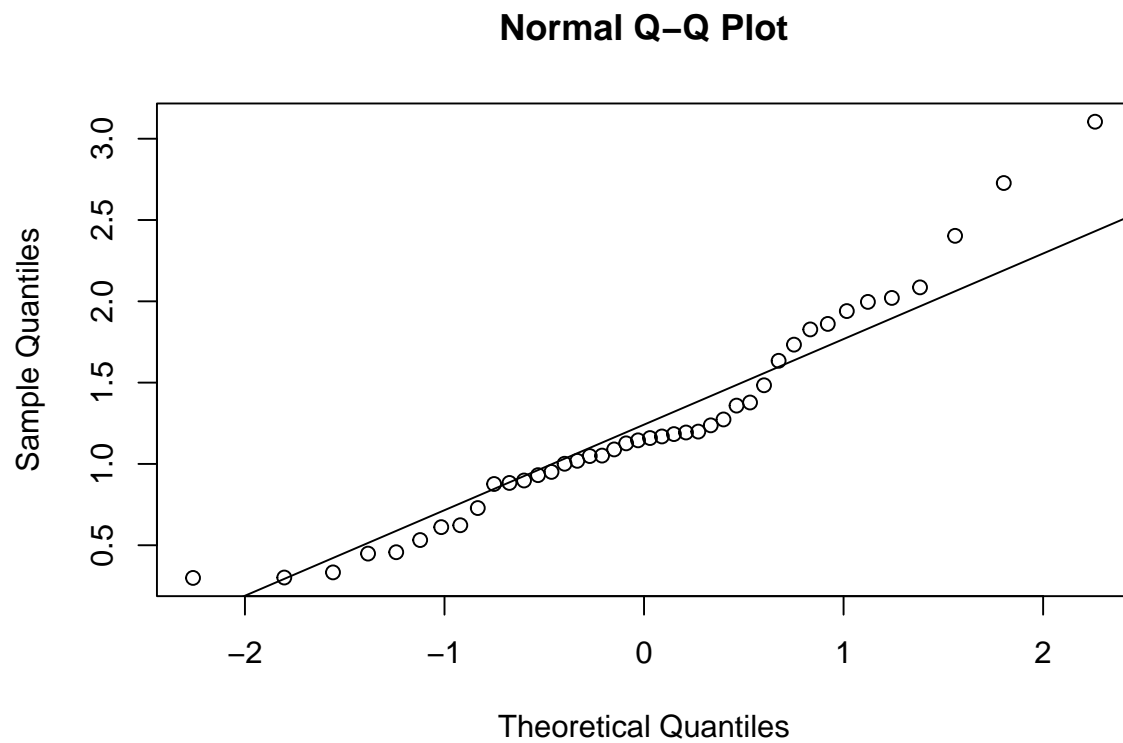
Pelo resultado da proporção de distâncias não rejeitadas pelo quantil qui-quadrado, pelo baixo número de dados e pelos gráficos acima, creio não haver evidências suficientes para rejeitar a normalidade bivariada destes dados

Questão 61

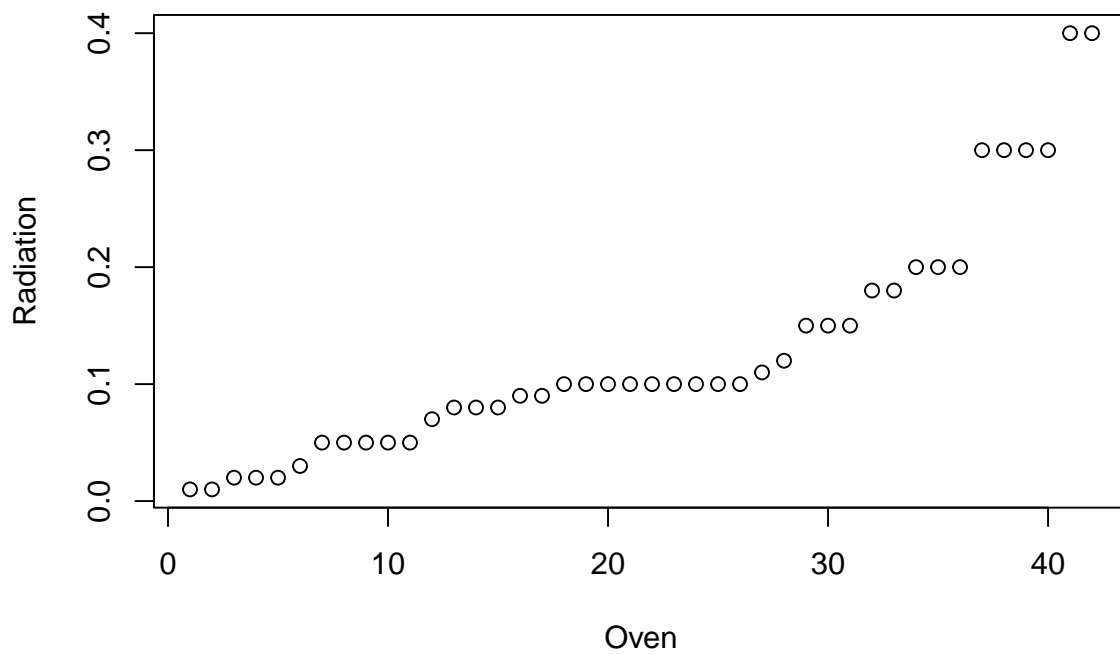
Ex. 4.27 | Johnson & Wichern

Algumas opções de teste de normalidade multivariada

Caso 1: Variáveis sem transformação

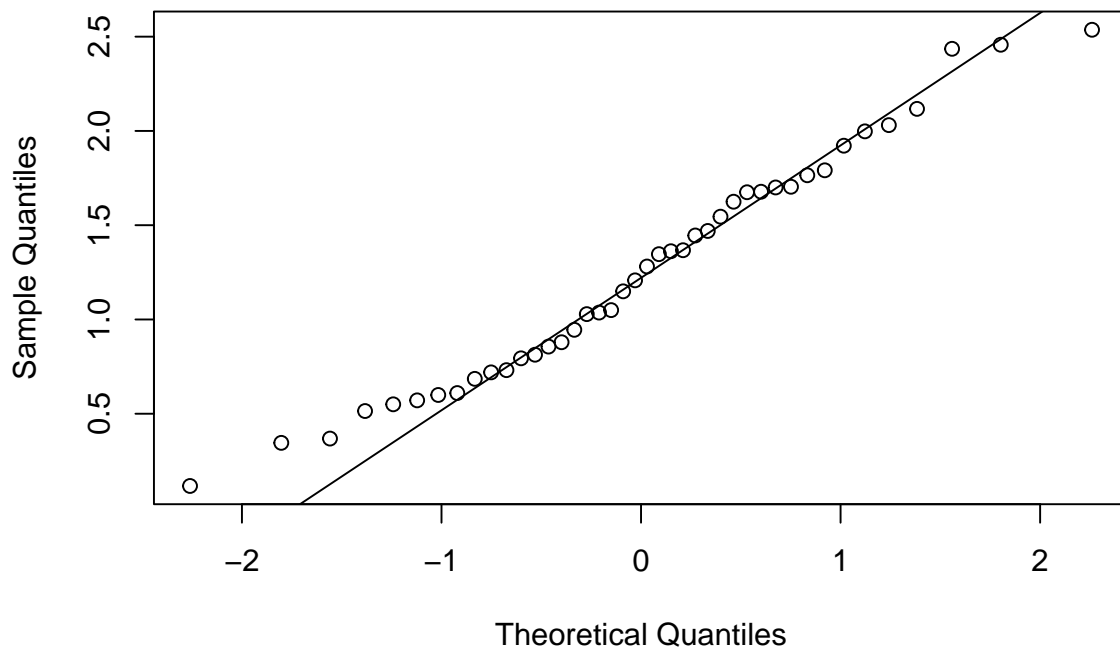


Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.520541	0.0007484	NO

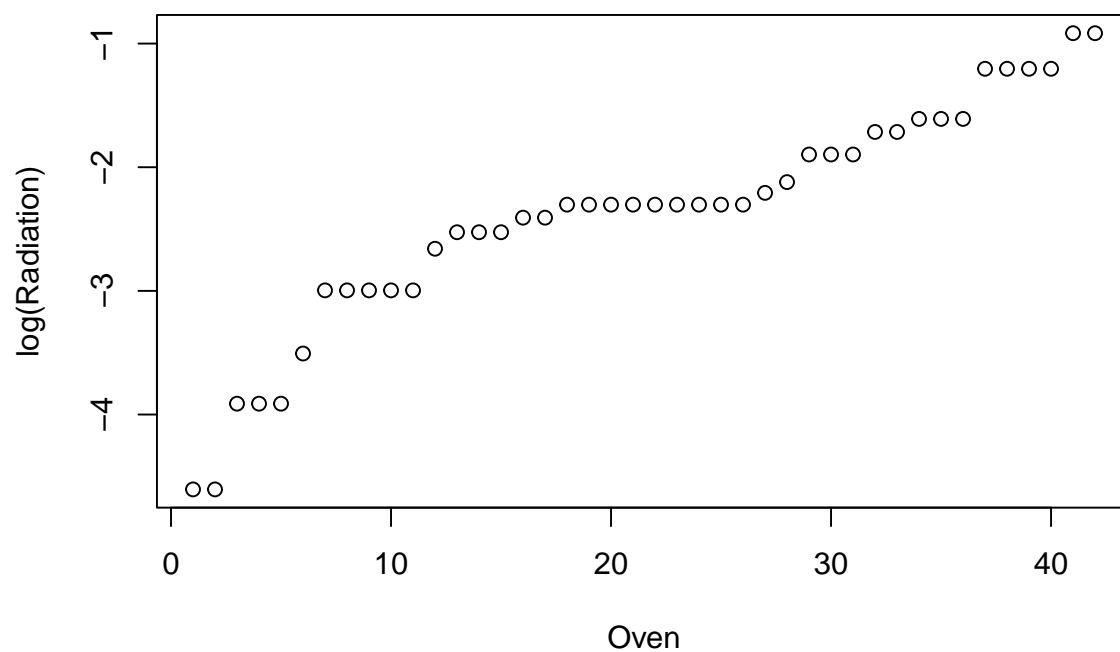


Caso 2: Variáveis com transformação $\lambda = 0$ (ln)

Normal Q-Q Plot

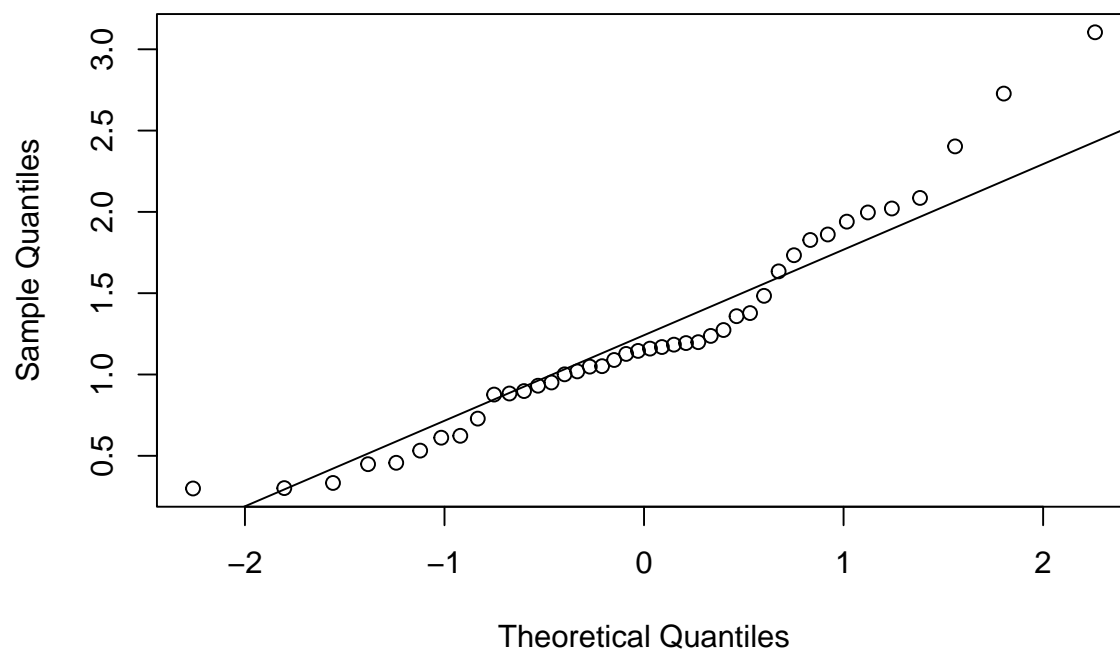


Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.22835	0.0045145	NO

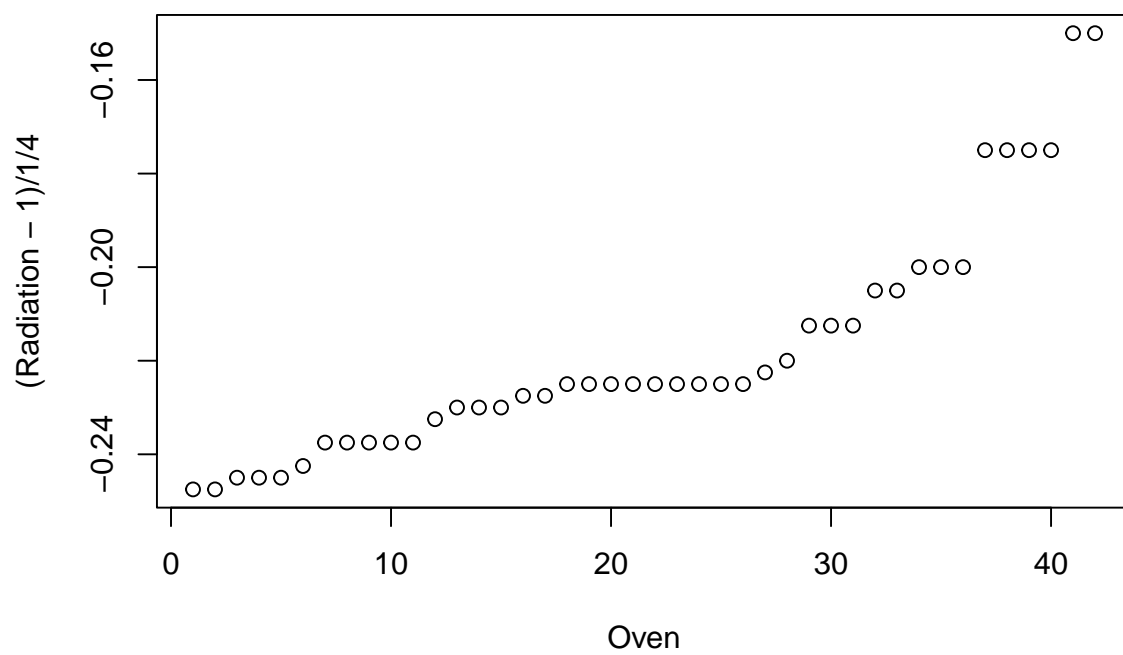


Caso 3: Variáveis com transformação $\lambda = 1/4 \left(\frac{x^{(\lambda)} - 1}{\lambda} \right)$

Normal Q-Q Plot



Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.520541	0.0007484	NO

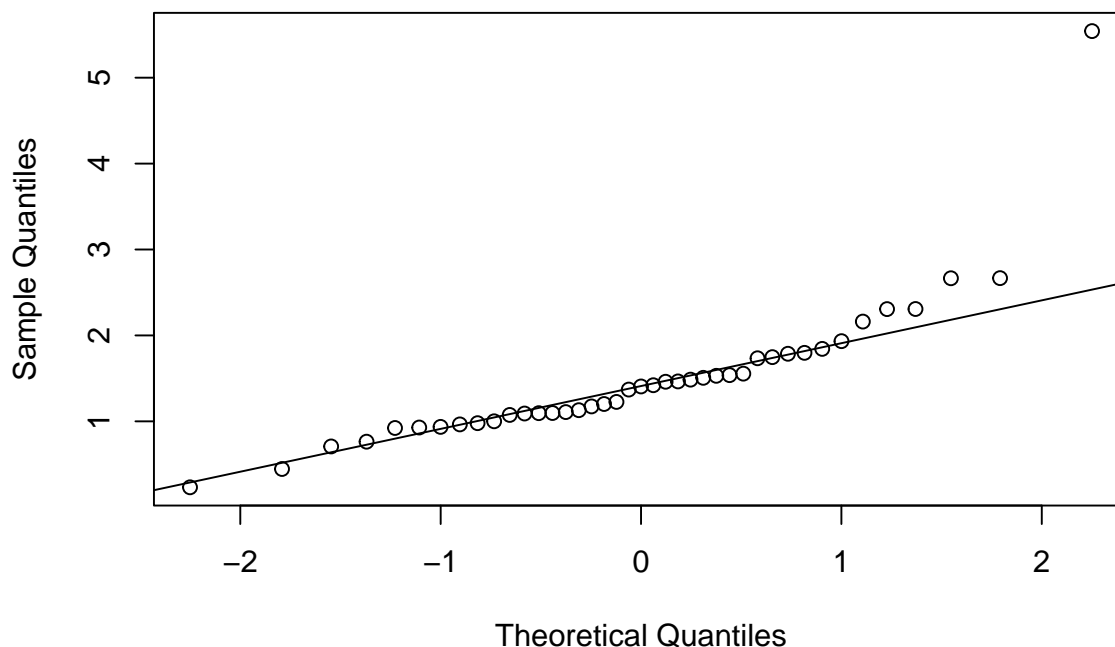


Portanto, apesar de ser bem difícil de inferir uma conclusão, a transformação $\lambda = 0$ aparenta ter trazido o melhor resultado de normalidade multivariada

Questão 62

Ex. 4.35 | Johnson & Wichern

Normal Q-Q Plot



Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.89379	4e-07	NO

Test	Variable	Statistic	p value	Normality
Anderson-Darling	Density	1.1852	0.0038	NO
Anderson-Darling	Strength_MachineDirection	0.3001	0.5661	YES
Anderson-Darling	Strength_CrossDirection	2.7420	<0.001	NO

	Beta-hat	kappa	p-val
Skewness	17.28145	118.089941	0
Kurtosis	30.62636	9.133963	0

```
##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data: Z
## W = 0.56907, p-value = 8.969e-10
```

Diversos testes de normalidade multivariada e marginal univariada foram testados, e à exceção de um teste de normalidade marginal da variável *Machine Direction*, todos os demais rejeitaram a hipótese nula de normalidade multivariada. Portanto, há evidências para descartar a hipótese nula de normalidade multivariada desses dados. Entretanto, é possível que transformadas dessas variáveis não rejeitem a hipótese nula de normalidade multivariada.

Questão 63

Ex. 4.1 | Rencher & Christensen

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que $|\Sigma_1| = 1; |\Sigma_2| = 4; \text{tr}(\Sigma_1) = 20$ e $\text{tr}(\Sigma_2) = 15$. Portanto; $|\Sigma_2| > |\Sigma_1|$ e $\text{tr}(\Sigma_2) < \text{tr}(\Sigma_1)$. O aumento das correlações leva à um decréscimo do determinante. Neste caso, a diminuição das correlações superou o aumento da variância, por isso observamos estes resultados.

Questão 64

Ex. 4.2 | Rencher & Christensen

$\mathbf{Z} = (\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{y} - \mu)$. Mostrar que $E(\mathbf{Z}) = 0$ e $\text{cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$.

Demonstração:

$E(\mathbf{Z}) = E[(\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{y} - \mu)]$. Pela linearidade da esperança, temos

$$(\mathbf{T}')^{-1}[E(\mathbf{y}) - \mu] = (\mathbf{T}')^{-1}[\mu - \mu] = 0.$$

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \text{Cov}[(\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{y} - \mu)]$$

Como $\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{y} + b) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}'$; temos:

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}) = (\mathbf{T}')^{-1}\Sigma[(\mathbf{T}')^{-1}]'$$

Como $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, e $\mathbf{A} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$; temos:

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}) = (\mathbf{T}')^{-1}\Sigma[(\mathbf{T}')^{-1}]' = (\mathbf{T}')^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$$

□

Questão 65

Ex. 4.10 | Rencher & Christensen

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_3(\mu, \Sigma); \mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)

Distribuição de $\mathbf{z} = 2\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 + 3\mathbf{y}_3$.

Sol.:

$$\mathbf{c}' = [2 \quad -1 \quad 3].$$

Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (a)): Se $\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_P(\mu, \Sigma)$, então $\mathbf{a}'\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{a}'\mu, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$.

Então; $\mathbf{c}'\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{c}'\mu, \mathbf{c}'\Sigma\mathbf{c}) = \mathbf{N}(17, 21)$

□

b)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3$ e $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 + 2\mathbf{y}_3$.

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \text{Conjunta } \mathbf{z}_1 \text{ e } \mathbf{z}_2$$

Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (b)): Seja $\mathbf{y} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \Sigma)$. Então $\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_P}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$
Então:

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}$

□

c)

Distribuição de $\mathbf{y_2}$

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y_2}$$

Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (b)): Seja $\mathbf{y} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \Sigma)$. Então $\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_P}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$
Então:

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{Ay} \sim \mathbf{N}(1, 13)$$

□

d)

Distribuição conjunta de $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_3}$

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Conjunta } \mathbf{y_1} \text{ e } \mathbf{y_3}$$

Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (b)): Seja $\mathbf{y} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \Sigma)$. Então $\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_P}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$
Então:

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}$

□

e)

Distribuição conjunta de y_1, y_3 e $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Será a conjunta.

Pela mesma propriedade do item anterior (b);

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_3}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3,5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3,5 & 1 & 5,25 \end{bmatrix}\right)$$

□

Questão 66

Ex. 4.11 | Rencher & Christensen

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_3(\mu, \Sigma); \mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)

Achar um vetor \mathbf{Z} tal que $\mathbf{Z} = (\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{y} - \mu) \sim \mathbf{N}_3(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Sol.:

Como μ de

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

, então o termo da direita fica

$$\begin{bmatrix} y - 3 \\ y - 1 \\ y - 4 \end{bmatrix}$$

. Por outro lado, para obter $(\mathbf{T}')^{-1}$, devemos fazer a decomposição de Choleski; tal que $\Sigma = \mathbf{T}'\mathbf{T} =$

```
##      [,1]  [,2]  [,3]
## [1,]  0.408  0.000  0.000
## [2,] -0.047  0.279  0.000
## [3,]  0.285 -0.247  0.731
```

Logo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,408 & 0 & 0 \\ -0,047 & 0,279 & 0 \\ 0,285 & -0,247 & 0,731 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - 3 \\ y - 1 \\ y - 4 \end{bmatrix}$$

□

b)

Achar um vetor \mathbf{z} tal que $\mathbf{z} = (\Sigma^{1/2})^{-1}(\mathbf{y} - \mu) \sim \mathbf{N}_3(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Sol.:

Como μ de

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

então o termo da direita fica

$$\begin{bmatrix} y - 3 \\ y - 1 \\ y - 4 \end{bmatrix}$$

análogo ao item a). Já para o termo da direita, iremos aplicar a decomposição espectral SVD, tal que $\Sigma = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}'$. Após, iremos tirar a raiz quadrada dos elementos da matriz \mathbf{D} (autovalores na diagonal principal, zero no restante); E então multiplicá-la novamente, tal que $\mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P} = \Sigma^{1/2}$; e então encontrar a inversa para finalmente obter $(\Sigma^{1/2})^{-1}$.

```
##           [,1]           [,2]           [,3]
## [1,]  0.46496849 -0.06966936  0.1701484
## [2,] -0.06966936  0.32645938 -0.1657086
## [3,]  0.17014841 -0.16570861  0.6916013
```

Logo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,464 & -0,069 & 0,170 \\ -0,069 & 0,326 & -0,165 \\ 0,170 & -0,165 & 0,691 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y-3 \\ y-1 \\ y-4 \end{bmatrix}$$

□

c)

Qual a distribuição de $(\mathbf{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu)$?

Propriedade: Se $\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_{\mathbf{p}}(\mu, \Sigma)$, então $(\mathbf{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \sim \chi_{\mathbf{p}}^2$ [Rencher & Christensen; 4.6]

Como $p = 3$, temos que $(\mathbf{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \sim \chi_3^2$

□

Questão 67

Ex. 4.12 | Rencher & Christensen

$\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_4(\mu, \Sigma)$, em que

$$\mu = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 & 9 \\ -1 & 9 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

a)

Distribuição de $\mathbf{z} = 4\mathbf{y}_1 - 2\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 - 3\mathbf{y}_4$.

Sol.:

$$\mathbf{c}' = [4 \quad -2 \quad 1 \quad -3].$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 65) a);

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{c}'\mu, \mathbf{c}'\Sigma \mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{N}(-30, 153)$$

□

b)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4$ e $\mathbf{z}_2 = -2\mathbf{y}_1 + 3\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 - 2\mathbf{y}_4$.

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \text{Conjunta } \mathbf{z}_1 \text{ e } \mathbf{z}_2$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 65) b);

Então:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_2(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_2\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 & -79 \\ -79 & 361 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$

□

c)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z}_1 = 3\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 - 4\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_4$, $\mathbf{z}_2 = -\mathbf{y}_1 - 3\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 - 2\mathbf{y}_4$ e $\mathbf{z}_3 = 2\mathbf{y}_1 + 2\mathbf{y}_2 + 4\mathbf{y}_3 - 5\mathbf{y}_4$.

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \text{Conjunta } \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 65) b);

Então:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_3(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_3\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 35 & -18 & -6 \\ -18 & 46 & 14 \\ -6 & 14 & 93 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$

□

d)

Distribuição de \mathbf{y}_3 ?

Sol.:

$$\mathbf{c}' = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0}].$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 65) a);

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{c}'\mu, \mathbf{c}'\Sigma\mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{N}(-1, 2)$$

□

e)

Distribuição conjunta de \mathbf{y}_2 e \mathbf{y}_4 ?

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Conjunta } \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 65) b);

Então:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_2(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4$

□

f)

Distribuição conjunta de \mathbf{y}_1 , $\frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, $\frac{1}{3}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3)$ e $\frac{1}{4}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4)$.

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Conjunta}$$

Usando a mesma propriedade utilizada na questão **65) b)**;
Então:

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N}_4(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \rightarrow \mathbf{Ay} \sim \mathbf{N}_4\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0,5 \\ 0 \\ 1,25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 1,5 & 2 & 3,75 \\ 1,5 & 1 & 0,666 & 0,875 \\ 2 & 0,666 & 0,666 & 1 \\ 3,75 & 0,875 & 1 & 1,687 \end{bmatrix}\right)$$

Será a conjunta de $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4$
 \square

Questão 68

Ex. 4.13 | Rencher & Christensen

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_4(\mu, \Sigma); \mu = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 & 9 \\ -8 & 9 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

a)

Achar um vetor \mathbf{Z} tal que $\mathbf{Z} = (\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{y} - \mu) \sim \mathbf{N}_4(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Sol.:

Como μ de

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

, então o termo da direita fica

$$\begin{bmatrix} y+2 \\ y-3 \\ y+1 \\ y-5 \end{bmatrix}$$

. Por outro lado, para obter $(\mathbf{T}')^{-1}$, devemos fazer a decomposição de Choleski; tal que $\Sigma = \mathbf{T}'\mathbf{T} =$

```
##      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
## [1,]  0.302  0.000  0.000  0.000
## [2,]  0.408  0.561  0.000  0.000
## [3,] -0.087  0.261  1.015  0.000
## [4,] -0.857 -0.343 -0.686  0.972
```

Logo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,302 & 0 & 0 & 0 \\ 0,408 & 0,561 & 0 & 0 \\ -0,087 & 0,261 & 1,015 & 0 \\ -0,857 & -0,343 & -0,686 & 0,972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+2 \\ y-3 \\ y+1 \\ y-5 \end{bmatrix}$$

\square

b)

Achar um vetor \mathbf{z} tal que $\mathbf{z} = (\Sigma^{1/2})^{-1}(\mathbf{y} - \mu) \sim \mathbf{N}_4(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Sol.:

Como μ de

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

então o termo da direita fica

$$\begin{bmatrix} y + 2 \\ y - 3 \\ y + 1 \\ y - 5 \end{bmatrix}$$

análogo ao item a). Já para o termo da direita, iremos aplicar a decomposição espectral SVD, tal que $\Sigma = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}'$. Após, iremos tirar a raiz quadrada dos elementos da matriz \mathbf{D} (autovalores na diagonal principal, zero no restante); E então multiplicá-la novamente, tal que $\mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P} = \Sigma^{1/2}$; e então encontrar a inversa para finalmente obter $(\Sigma^{1/2})^{-1}$.

```
##          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
## [1,]  0.8103582  0.30518060  0.1433357 -0.47920688
## [2,]  0.3051806  0.58145299  0.2489169 -0.08256882
## [3,]  0.1433357  0.24891687  1.1527722 -0.29767675
## [4,] -0.4792069 -0.08256882 -0.2976767  0.78700454
```

Logo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,810 & 0,305 & 0,143 & -0,479 \\ 0,305 & 0,581 & 0,248 & -0,082 \\ 0,143 & 0,248 & 1,152 & -0,297 \\ -0,479 & -0,082 & -0,297 & 0,787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + 2 \\ y - 3 \\ y + 1 \\ y - 5 \end{bmatrix}$$

□

c)

Qual a distribuição de $(\mathbf{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu)$?

Usando a mesma propriedade utilizada na questão 66) c);

Como $p = 4$, temos que $(\mathbf{y} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \sim \chi_4^2$

□

Questão 69

Ex. 4.14 | Rencher & Christensen

Suponha que

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N}_3(\mu, \Sigma); \mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Qual das variáveis abaixo são independentes?

- (a) y_1 e y_2
- (b) y_1 e y_3
- (c) y_2 e y_3
- (d) (y_1, y_2) e y_3
- (e) (y_1, y_3) e y_2

Sol.:

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4   -3    0
## [2,]   -3    6    0
## [3,]    0    0    0

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    0    0
## [2,]    0    0    0
## [3,]    0    0    5

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    6    0
## [3,]    0    0    5

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    0    0
## [2,]    0   45    0
## [3,]    0    0    0

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    9   -3    0
## [2,]   -3    6    0
## [3,]    0    0    0
```

Analisando em qual dos itens todas as covariâncias (Valores $\Sigma_{ij}, i \neq j$) são nulas, concluímos que são independentes as opções (b),(c) e (d). \square

Questão 70

Ex. 4.17 | Rencher & Christensen

Suponha que y e x são subvetores, tal que y é 2×1 e x é 3×1 , com μ e Σ particionados como:

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ \hline 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 14 & -8 & | & 15 & 0 & 3 \\ -8 & 18 & | & 8 & 6 & -2 \\ \hline 15 & 8 & | & 50 & 8 & 5 \\ 0 & 6 & | & 8 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & | & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assuma que

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \sim N_5(\mu, \Sigma).$$

a)

Encontrar $E(\mathbf{x}|\mathbf{y})$

Propriedade: $E(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_x)$

Sol.:

b)

Encontrar $cov(\mathbf{x}|\mathbf{y})$

Propriedade: $cov(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}$

Sol.:

Referências:

- [1] JOHNSON, Richard A; WICHERN, Dean W. APPLIED MULTIVARIATE STATISTICAL ANALYSIS. 6^a Edição. Pearson, 2007.
- [2] von Borries, George. Material de aula disponível no Aprender3; Notas de aula e códigos. Análise Multivariada 1. Universidade de Brasília, 2023.
- [3] RENCHER, Alvin C; CHRISTENSEN, William F. METHODS OF MULTIVARIATE ANALYSIS. 3^a Edição. WILEY, 2012.
- [4] <https://healy.econ.ohio-state.edu/kcb/Ma103/Notes/Lecture11.pdf>. Prova do Corolário 11.1.8.