



DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

26 junho 2023

Lista 8 - Correlação Canônica

Prof. Dr. George von Borries

Análise Multivariada 1

Aluno: Bruno Gondim Toledo | Matrícula: 15/0167636

Questão 71

Ex. 10.1 | Johnson & Wichern

Considerar a matriz de covariâncias

$$\mathbf{Cov} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \text{---} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & | & \Sigma_{12} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \Sigma_{21} & | & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0,95 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0,95 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Verificar que o primeiro par de variáveis canônicas são $U_1 = X_2^{(1)}, V_1 = X_1^{(2)}$ com correlação canônica $\rho_1^* = 0,95$.

sol.:

$$\Sigma_{11}^{-1/2} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{11}^{-1/2} =$$

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0 0.0000
## [2,]    0 0.9025
```

Com autovalores:

```
## [1] 0.9025 0.0000
```

e autovetores normalizados:

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    1
## [2,]    1    0
```

Ou seja,

$$U_1 = e_1' \Sigma_{11}^{-1/2} x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = x_2^{(1)}$$

E ainda

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    1
```

$$V_1 = f_1' \Sigma_{22}^{-1/2} x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$$

Então, o par canônico $(U_1, V_1) = (X_2^{(1)}, X_1^{(2)})$, e $\rho_1^* = 0,95$.

□

Questão 72

Ex. 10.2 | Johnson & Wichern

Os vetores aleatórios $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ (2×1) têm vetor de médias e variâncias conjuntas

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \text{---} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ \text{---} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & | & \Sigma_{12} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \Sigma_{21} & | & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & | & 3 & 1 \\ 2 & 5 & | & -1 & 3 \\ \text{---} & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} \\ 3 & -1 & | & 6 & -2 \\ 1 & 3 & | & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

a)

Calcular as correlações canônicas ρ_1^*, ρ_2^* .

b)

Determinar os pares de variáveis canônicas (U_1, V_1) e (U_2, V_2) .

c)

Seja $\mathbf{U} = [U_1, U_2]'$ e $\mathbf{V} = [V_1, V_2]'$. Avalie:

$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} U \\ - \\ V \end{bmatrix} \mathbf{e} \mathbf{Cov} \begin{bmatrix} U \\ - \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{UU} & | & \Sigma_{UV} \\ - & - & - \\ \Sigma_{VU} & | & \Sigma_{VV} \end{bmatrix}$$

.

Comparar os resultados com as propriedades do resultado 10.1.

Questão 73

Ex. 10.9 | Johnson & Wichern (itens (a) e (c))

Foram aplicados para $n = 140$ alunos da sétima série quatro testes, tais que $\mathbf{X}_1^{(1)}$ = velocidade de leitura; $\mathbf{X}_2^{(1)}$ = habilidade de leitura; $\mathbf{X}_1^{(2)}$ = velocidade em aritmética; $\mathbf{X}_2^{(2)}$ = habilidade em aritmética. A correlação da performance medida foi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & | & R_{12} \\ - & - & - \\ R_{21} & | & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0,6328 & | & 0,2412 & 0,0586 \\ 0,6328 & 1 & | & -0,0553 & 0,0655 \\ - & - & - & - & - \\ 0,2412 & -0,0553 & | & 1 & 0,4248 \\ 0,0586 & 0,0655 & | & 0,4248 & 1 \end{bmatrix}$$

.

a)

Encontrar todas as correlações e variáveis canônicas amostrais

c)

Avaliar as matrizes de erros aproximados para \mathbf{R}_{11} , \mathbf{R}_{22} e \mathbf{R}_{12} determinadas pelo primeiro par de variáveis canônicas \hat{U}_1, \hat{V}_1 .

Questão 74

Ex. 10.10 | Johnson & Wichern

Em um estudo sobre pobreza, criminalidade e detenção, reportou-se um sumário estatístico da criminalidade em vários estados para os anos de 1970 e 1973. Uma parte da matriz de correlação amostral é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & | & R_{12} \\ - & - & - \\ R_{21} & | & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0,615 & | & -0,111 & -0,266 \\ 0,615 & 1 & | & -0,195 & -0,085 \\ - & - & - & - & - \\ -0,111 & -0,195 & | & 1 & -0,269 \\ -0,266 & -0,085 & | & -0,269 & 1 \end{bmatrix}$$

.

As variáveis são: $\mathbf{X}_1^{(1)}$ = Homicídios não primários em 1973; $\mathbf{X}_2^{(1)}$ = Homicídios primários em 1973 (homicídios envolvendo familiares ou conhecidos); $\mathbf{X}_1^{(2)}$ = Severidade da punição em 1970 (mediana de meses encarcerado); $\mathbf{X}_2^{(2)}$ = Convicção de punição em 1970 (Número de encarceramentos dividido pelo número de homicídios).

a)

Encontrar a correlação canônica amostral.

b)

Determinar o primeiro par de variáveis canônicas \hat{U}_1, \hat{V}_1 , e interpretar as quantidades.

Questão 75

Ex. 11.8 | Rencher & Christensen

(a) Encontre as correlações canônicas entre (y_1, y_2) e (x_1, x_2, x_3) .

(b) Encontre os coeficientes padronizados das variáveis canônicas.