Universidade de Brasília

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

25 junho 2023

Lista 7 - Normal Multivariada

Prof. Dr. George von Borries

Análise Multivariada 1

Aluno: Bruno Gondim Toledo | Matrícula: 15/0167636

Questão 55

```r
mu <- c(3, 2)
sigma <- matrix(c(1, -1.5, -1.5, 4),2)
set.seed(150167636)
mvrnorm(20, mu, sigma)
```

```
##           [,1]       [,2]
##  [1,] 2.713068  2.2421326
##  [2,] 3.168527  1.8305926
##  [3,] 3.281616  3.6377464
##  [4,] 1.225270  3.8406363
##  [5,] 2.788789  1.6138664
##  [6,] 2.971249  0.3776516
##  [7,] 3.139249 -2.2801139
##  [8,] 2.729603  0.9393494
##  [9,] 2.447450  2.9861925
## [10,] 3.184863 -0.9861318
## [11,] 1.798995  3.6115228
## [12,] 1.712520  4.5234829
## [13,] 3.756708 -0.3153063
## [14,] 2.796773  1.9171775
## [15,] 3.142316  1.5452393
## [16,] 3.364824  1.9736312
## [17,] 1.625479  4.5668874
## [18,] 3.363095  1.8630202
## [19,] 3.756838  1.1431897
## [20,] 3.831592 -0.5266128
```

Questão 56

$\mathbf{X} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \mathbf{\Sigma})$, Então: $\mathbf{U} = (\mathbf{X} - \mu)'\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{X} - \mu)$.

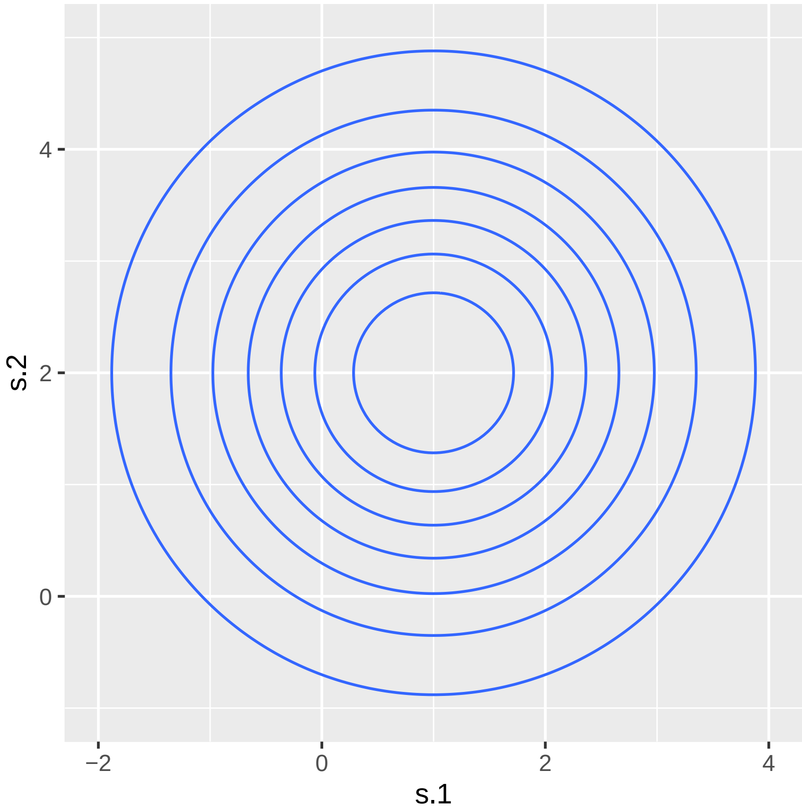
Sol:

Seja $Z \sim N_P(0, I)$;
$\sum_{i=1}^{P} \mathbf{Z_i^2} = \mathbf{Z^T Z} \sim \chi^2_\mathbf{P}$. Mas, $\mathbf{Z^T Z} = (\mathbf{Y} - \mu)^\mathbf{T}(\mathbf{\Sigma^{1/2}})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{\Sigma^{1/2}})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{Y} - \mu) = (\mathbf{Y} - \mu)^\mathbf{T}\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{Y} - \mu) \sim \chi^2_\mathbf{P}$.
Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Então: $(\mathbf{X} - \mu)^\mathbf{T}\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{X} - \mu) \sim \chi^2_\mathbf{P}$
$\square$

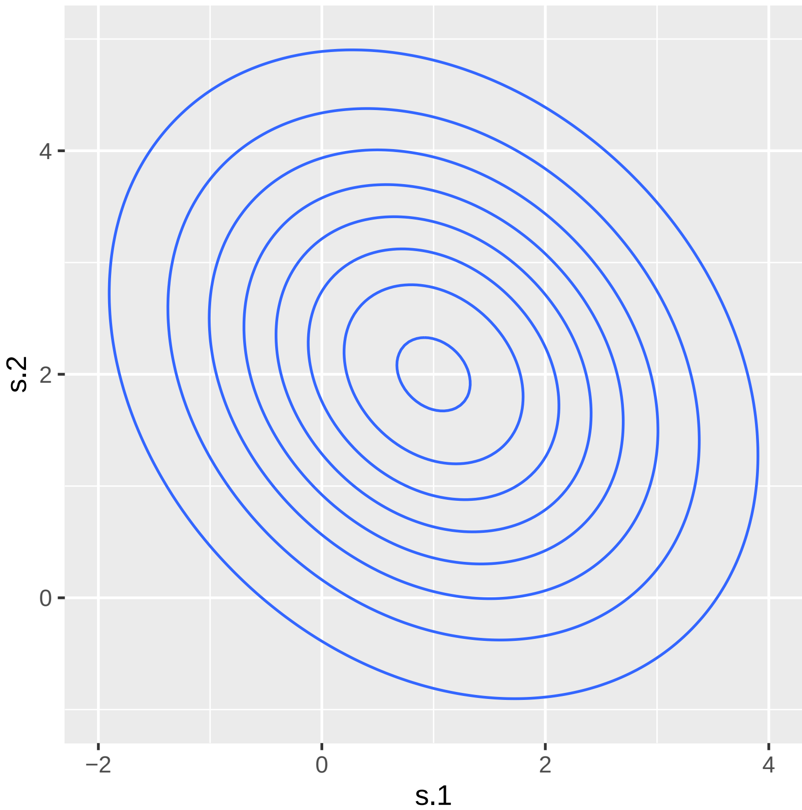
Questão 57

Ao invés das elipses, irei representar os contornos, pois encontrei uma função que faz e traz uma representação mais interessante, na minha opinião, para a normal bivariada.

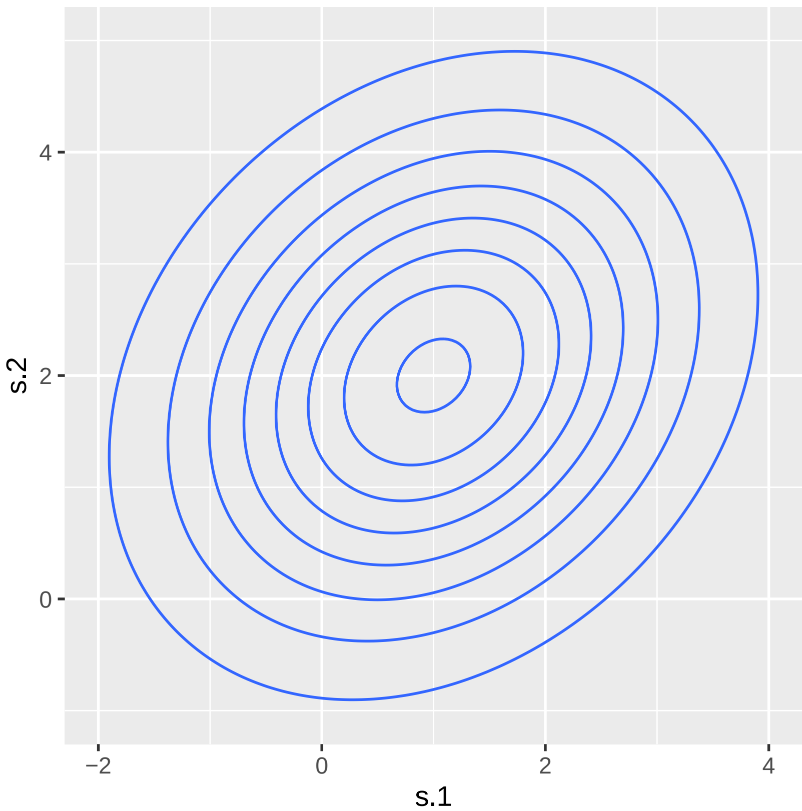
a = 0



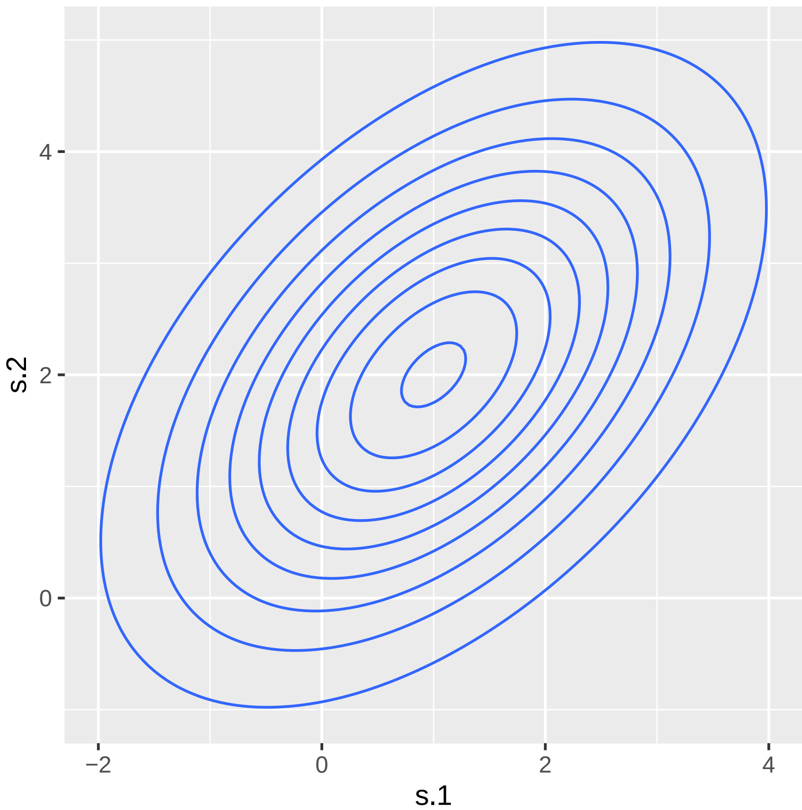
a = -1/2



$\mathbf{a = 1/2}$



$\mathbf{a = 1}$



Questão 58

$\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \mathbf{\Sigma})$ tal que

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E $\mathbf{A} = [1 \quad 1]; \mathbf{B} = [1 \quad -1]$. Mostre que $\mathbf{AX}$ é independente de $\mathbf{BX}$
Solução:
Como $\mathbf{\Sigma_{12}} = 0$, temos que os vetores $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_2}$ amostras de $\mathbf{X}$ sao independentes.

Seja

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X \ ;$$

e

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{BX} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_2 \end{bmatrix} \neq X \ .$$

Que são independentes por $\Sigma_{12} = 0$. Logo, $Cov(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}) = 0$
□

Questão 59

Seja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathbf{N_P} \ (\mu, \mathbf{\Sigma}); \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} ;$$

Provar que $\Sigma_{12} = 0 \iff x_1$ *independente de* x_2
Prova:
Se as variávels aleatórias são não correlacionadas, então $\mathbf{\Sigma}$ é diagonal. Neste caso, a forma quadrática $(\mathbf{x} - \mu)'\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{x} - \mu)$ é reduzida à uma soma de quadrados, assim como a densidade dos fatores no produto das densidades marginais, o que implica em independência. [4]

Neste caso, $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ representa a totalidade da correlação. Como ela é 0, a prova acima se aplica, definindo portanto a independência de $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$
□

Questão 60

Ex. 4.26 | Johnson & Wichern

a)

De x_1 e x_2, obtemos: o o vetor de médias $\mu =$

```
##         [,1]
## [1,]  5.200
## [2,] 12.481
```

A matriz $\mathbf{S} =$

```
##           [,1]      [,2]
## [1,]  10.62222 -17.71022
## [2,] -17.71022  30.85437
```

E a inversa $\mathbf{S^{-1}} =$

```
##          [,1]      [,2]
## [1,] 2.189813 1.2569395
## [2,] 1.256939 0.7538861
```

Com isso, podemos calcular as distâncias estatísticas quadradas

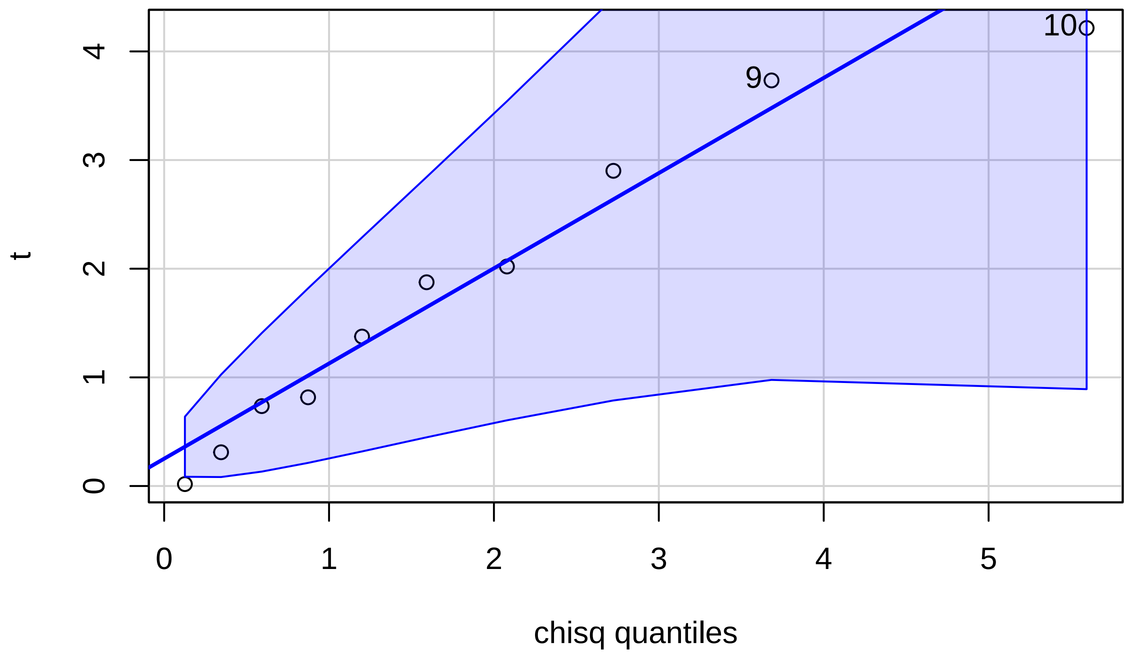
$d_j^2 = (\mathbf{x_j} - \bar{\mathbf{x}})^{\mathbf{T}} \mathbf{S^{-1}} (\mathbf{x_j} - \bar{\mathbf{x}}) = [1.8753045,\ 2.0203262,\ 2.9009088,\ 0.7352659,\ 0.3105192,\ 0.0176162,$ $3.7329012,\ 0.8165401,\ 1.3753379,\ 4.2152799]$

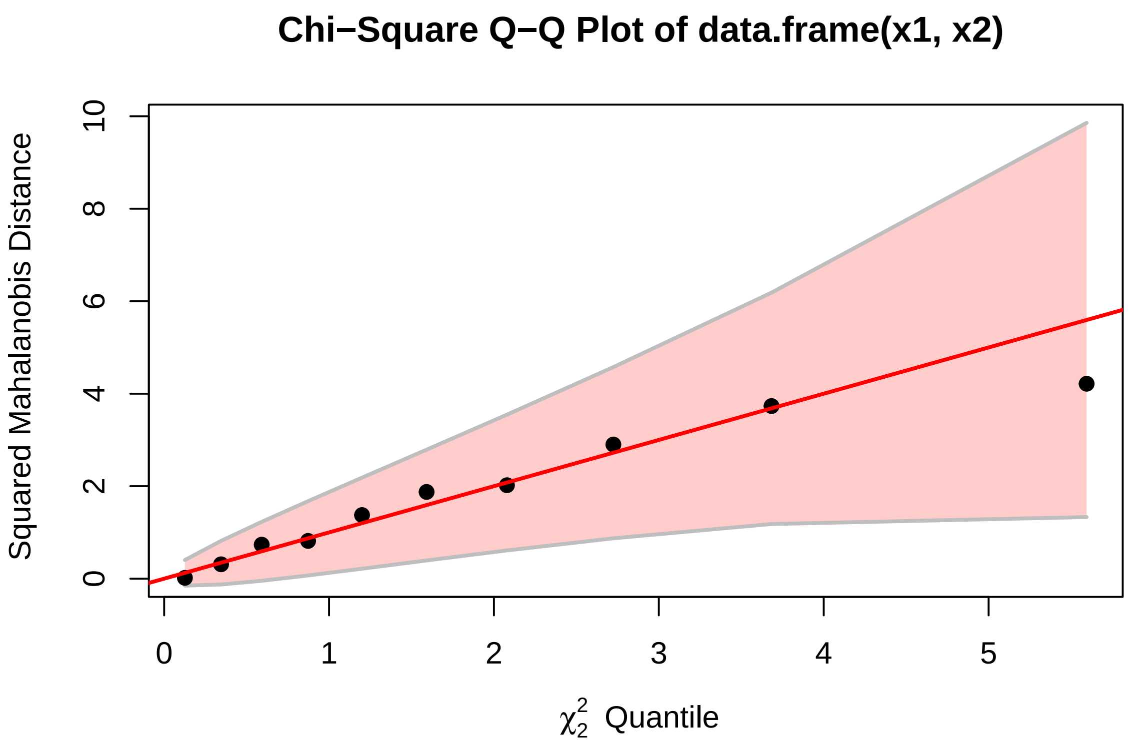
b)

Neste caso, iremos comparar os valores d_j^2 com o quantil $\chi_2^2(0,5) = 1.3862944$ e avaliar a proporção de observações na margem de aceitação, que para este caso é 50%

c)

Duas representações gráficas análogas:





d)

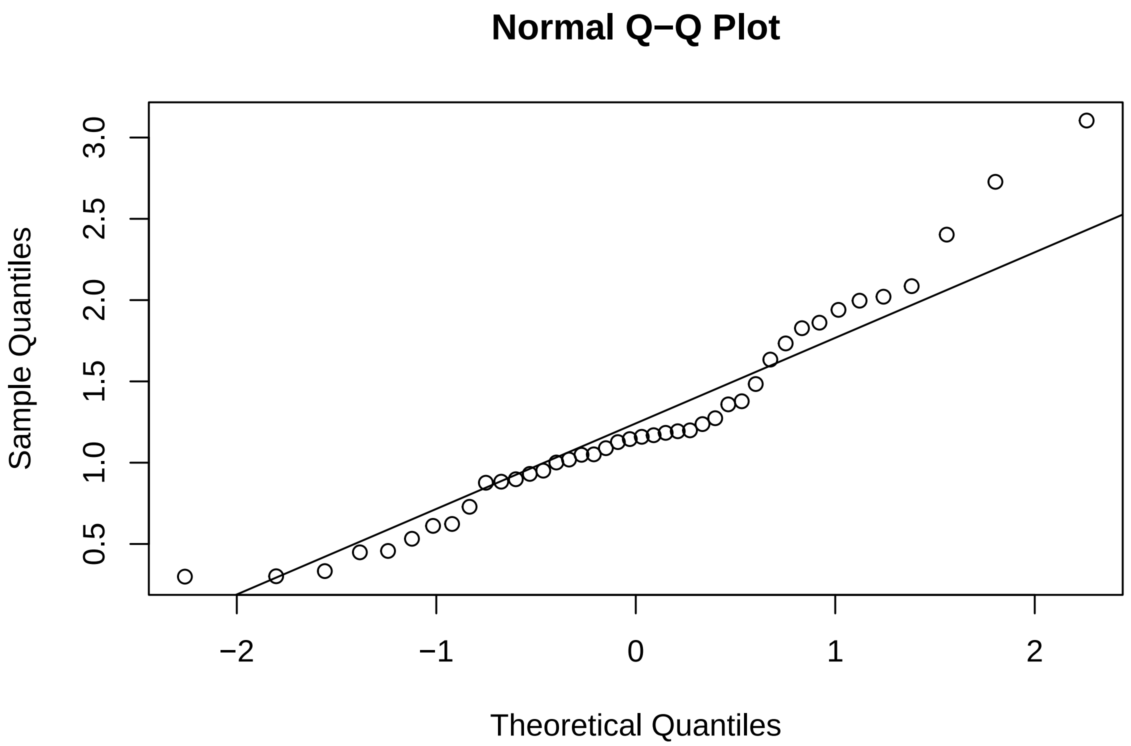
Pelo resultado da proporção de distâncias não rejeitadas pelo quantil qui-quadrado, pelo baixo número de dados e pelos gráficos acima, creio não haver evidências suficientes para rejeitar a normalidade bivariada destes dados

Questão 61

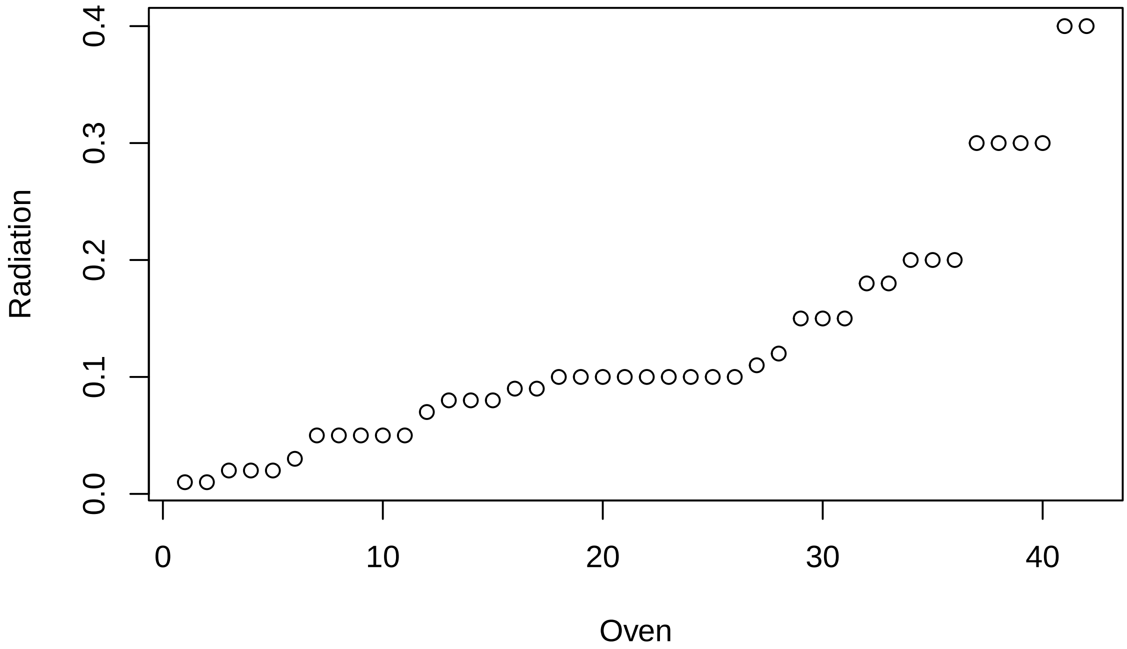
Ex. 4.27 | Johnson & Wichern

Algumas opções de teste de normalidade multivariada

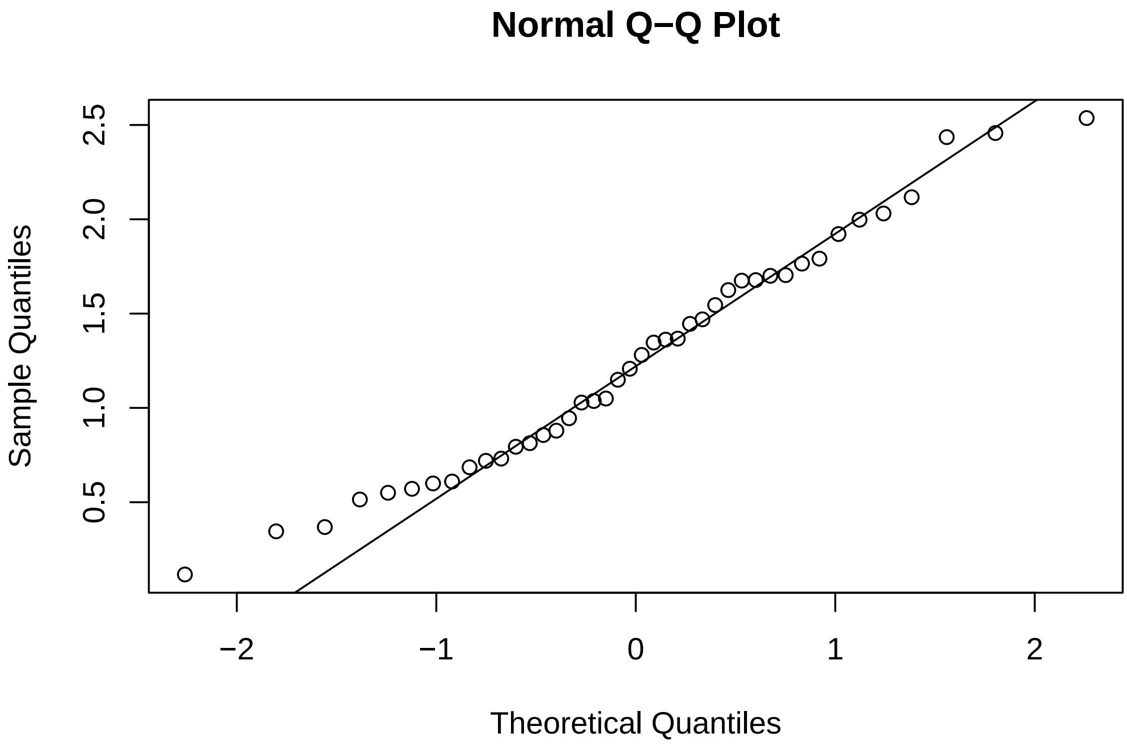
Caso 1: Variáveis sem transformação



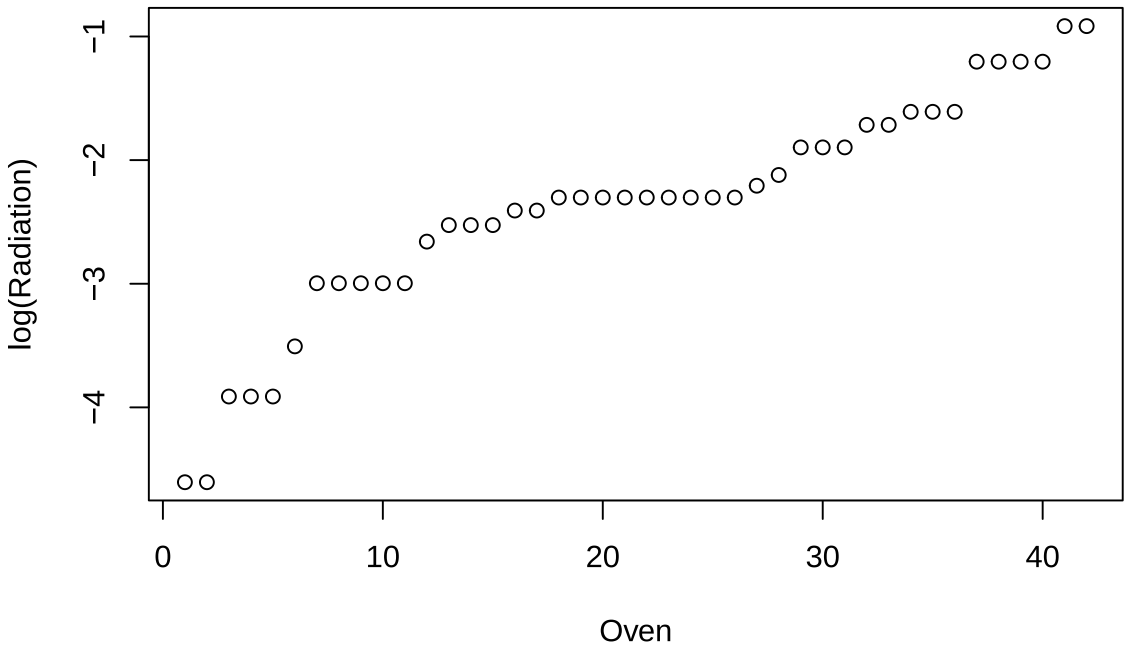
Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.520541	0.0007484	NO



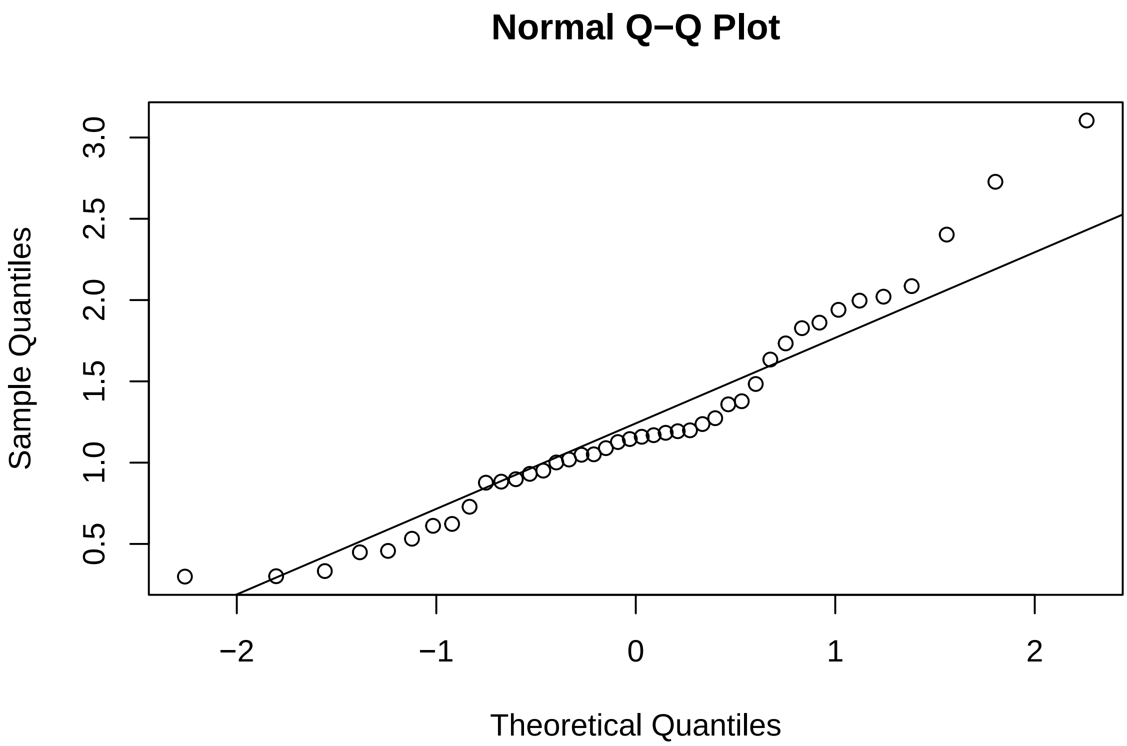
Caso 2: Variáveis com transformação $\lambda = 0$ (ln)



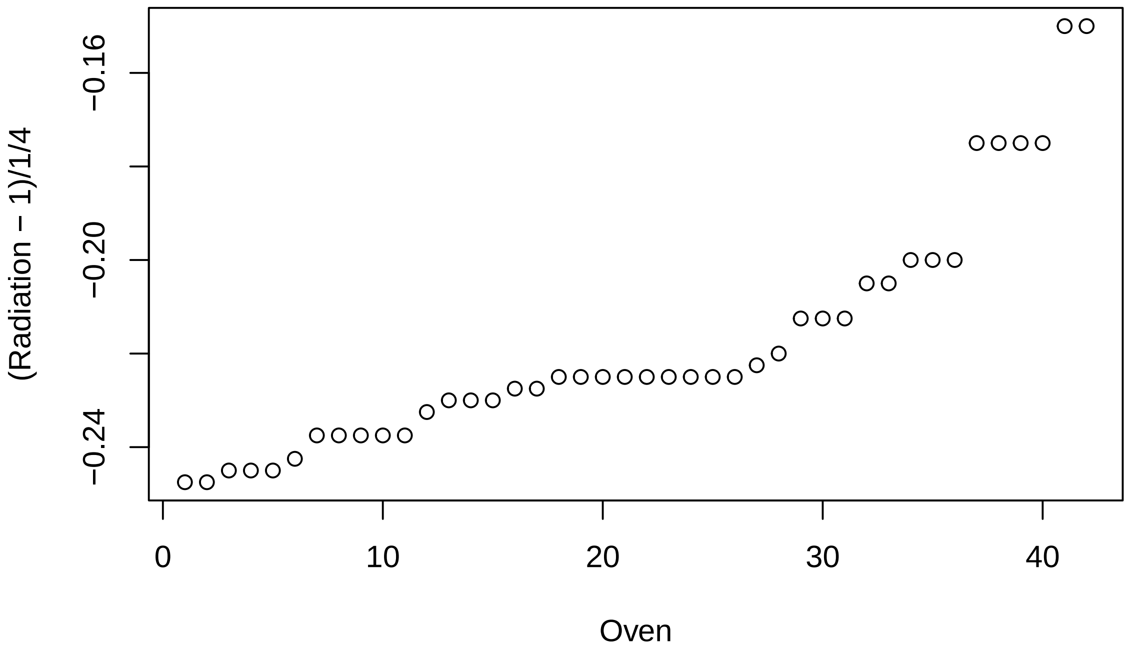
Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.22835	0.0045145	NO



Caso 3: Variáveis com transformação $\lambda = 1/4$ $(\frac{x^{(\lambda)}-1}{\lambda})$



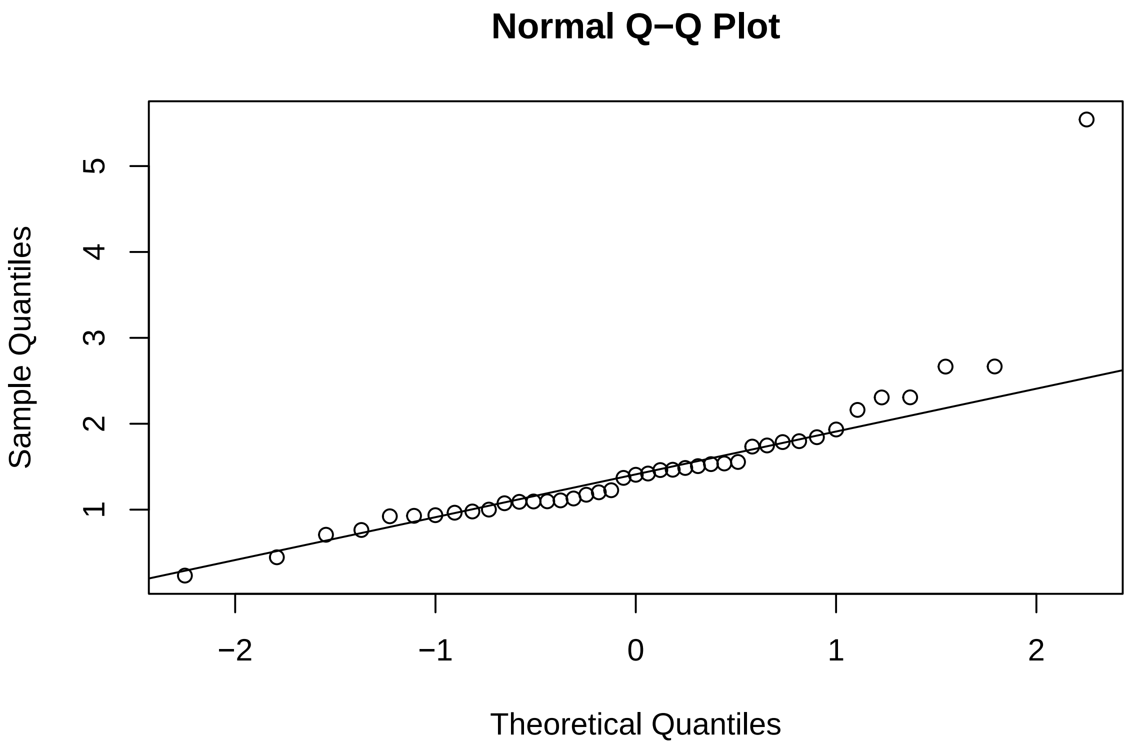
Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.520541	0.0007484	NO



Portanto, apesar de ser bem difícil de inferir uma conclusão, a transformação $\lambda = 0$ aparenta ter trazido o melhor resultado de normalidade multivariada

Questão 62

Ex. 4.35 | Johnson & Wichern



Test	HZ	p value	MVN
Henze-Zirkler	1.89379	4e-07	NO

Test	Variable	Statistic	p value	Normality
Anderson-Darling	Density	1.1852	0.0038	NO
Anderson-Darling	Strength_MachineDirection	0.3001	0.5661	YES
Anderson-Darling	Strength_CrossDirection	2.7420	<0.001	NO

	Beta-hat	kappa	p-val
Skewness	17.28145	118.089941	0
Kurtosis	30.62636	9.133963	0

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  Z
## W = 0.56907, p-value = 8.969e-10
```

Diversos testes de normalidade multivariada e marginal univariada foram testados, e à excessão de um teste de normalidade marginal da variável *Machine Direction*, todos os demais rejeitaram a hipótese nula de normalidade multivariada. Portanto, há evidências para descartar a hipótese nula de normalidade multivariada desses dados. Entretando, é possível que transformadas dessas variáveis não rejeitem a hipótese nula de normalidade multivariada.

Questão 63

Ex. 4.1 | Rencher & Christensen

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
S1 <- matrix(c(14,8,3,
               8,5,2,
               3,2,1),3,3)
det1 <- det(S1)
tr1  <- tr(S1)

S2 <- matrix(c(6,6,1,
               6,8,2,
               1,2,1),3,3)
det2 <- det(S2)
tr2  <- tr(S2)
```

Temos que $|\Sigma_1| = 1$;$|\Sigma_2| = 4$;$tr(\Sigma_1) = 20$ e $tr(\Sigma_2) = 15$. Portanto; $|\Sigma_2| > |\Sigma_1|$ e $tr(\Sigma_2) < tr(\Sigma_1)$.
O aumento das correlações leva à um decréscimo do determinante. Neste caso, a diminuição das correlações superou o aumento da variância, por isso observamos estes resultados.

Questão 64

Ex. 4.2 | Rencher & Christensen

$\mathbf{Z} = (\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}(\mathbf{y} - \mu)$. Mostrar que $E(\mathbf{Z}) = 0$ e $cov(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$.

Demonstração:
$\mathbf{E}(\mathbf{Z}) = \mathbf{E}[(\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}(\mathbf{y} - \mu)]$. Pela lineariedade da esperança, temos
$(\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}[\mathbf{E}(\mathbf{y}) - \mu] = (\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}[\mu - \mu] = 0$.

$Cov(\mathbf{Z}) = Cov[(\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}(\mathbf{y} - \mu)])$
Como $Cov(\mathbf{A}y + b) = \mathbf{A\Sigma A}'$; temos:
$Cov(\mathbf{Z}) = (\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{\Sigma}[(\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}]'$.
Como $(\mathbf{A}')^{-\mathbf{1}} = (\mathbf{A}^{-\mathbf{1}})'$, e $\mathbf{A} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$; temos:
$Cov(Z) = (\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{\Sigma}[(\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}]' = (\mathbf{T}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{T}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{I}$
$\square$

Questão 65

Ex. 4.10 | Rencher & Christensen

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N_3}(\mu, \mathbf{\Sigma}); \mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)

Distribuição de $\mathbf{z = 2y_1 - y_2 + 3y_3}$.

Sol.:
$\mathbf{c}' = [\mathbf{2} \quad \mathbf{-1} \quad \mathbf{3}]$.
Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (a)): Se $\mathbf{y} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \mathbf{\Sigma})$, então $\mathbf{a'y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{a'y}, \mathbf{a'\Sigma\ a})$.
Então; $\mathbf{c'y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{c'}\mu, \mathbf{c'\Sigma\ c}) = \mathbf{N(17, 21)}$

$\square$

b)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z_1 = y_1 + y_2 + y_3}$ e $\mathbf{z_2 = y_1 - y_2 + 2y_3}$.

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \textbf{Conjuntos } \mathbf{z_1} \textbf{ e } \mathbf{z_2}$$

Propriedade (Rencher & Christensen; 4.2.1 (b)): Seja $\mathbf{y} \sim \mathbf{N_P}(\mu, \mathbf{\Sigma})$. Então $\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_P}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A\Sigma A'})$
Então:

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A\Sigma A'}) \rightarrow \mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_2}(\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix})$$

Será a conjunta de $\mathbf{z_1, z_2}$
$\square$

c)

d)

e)

Distribuição conjunta de $y_1, y_3 \ e \ \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

Sol.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Será a conjunta.
Pela mesma propriedade do item anterior (b);

$$\mathbf{Ay} \sim \mathbf{N_3}(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3,5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3,5 & 1 & 5,25 \end{bmatrix})$$

$\square$

Questão 66

Ex. 4.11 | Rencher & Christensen

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{N_3}(\mu, \mathbf{\Sigma}); \mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)

Achar um vetor $\mathbf{Z}$ tal que $\mathbf{Z} = (\mathbf{T'})^{-1}(\mathbf{y} - \mu) \sim \mathbf{N_3}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.
Sol.:

Como μ de

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

, então o termo da direita fica

$$\begin{bmatrix} y-3 \\ y-1 \\ y-4 \end{bmatrix}$$

. Por outro lado, para obter $(\mathbf{T'})^{-1}$, devemos fazer a decomposição de Choleski; tal que $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{T'T} =$

```
##        [,1]   [,2]  [,3]
## [1,]  0.408  0.000 0.000
## [2,] -0.047  0.279 0.000
## [3,]  0.285 -0.247 0.731
```

Logo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0,408 & 0 & 0 \\ -0,047 & 0,279 & 0 \\ 0,285 & -0,247 & 0,731 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y-3 \\ y-1 \\ y-4 \end{bmatrix}$$

□

b)

c)

Questão 67

Ex. 4.12 | Rencher & Christensen

$\mathbf{y} \sim \mathbf{N_4}(\mu, \mathbf{\Sigma})$, em que

$$\mu = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 & 9 \\ -1 & 9 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

a)

Distribuição de $\mathbf{z} = \mathbf{4y_1} - \mathbf{2y_2} + \mathbf{y_3} - \mathbf{3y_4}$.

b)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z_1} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} + \mathbf{y_3} + \mathbf{y_4}$ e $\mathbf{z_2} = -\mathbf{2y_1} + \mathbf{3y_2} + \mathbf{y_3} - \mathbf{2y_4}$.

c)

Distribuição conjunta de $\mathbf{z_1} = \mathbf{3y_1} + \mathbf{y_2} - \mathbf{4y_3} - \mathbf{y_4}$, $\mathbf{z_2} = -\mathbf{y_1} - \mathbf{3y_2} + \mathbf{y_3} - \mathbf{2y_4}$ e $\mathbf{z_3} = \mathbf{2y_1} + \mathbf{2y_2} + \mathbf{4y_3} - \mathbf{5y_4}$.

d)

Distribuição de $\mathbf{y_3}$?

d)

Distribuição conjunta de $\mathbf{y_2}$ e $\mathbf{y_4}$?

e)

Distribuição conjunta de $\mathbf{y_1}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2})$, $\frac{1}{3}(\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} + \mathbf{y_3})$ e $\frac{1}{4}(\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} + \mathbf{y_3} + \mathbf{y_4})$.

Questão 68

Ex. 4.13 | Rencher & Christensen

Questão 69

Ex. 4.14 | Rencher & Christensen

Questão 70

Ex. 4.17 | Rencher & Christensen

Referências:

[1] JOHNSON, Richard A; WICHERN, Dean W. APPLIED MULTIVARIATE STATISTICAL ANALYSIS. 6ª Edição. Pearson, 2007.

[2] von Borries, George. Material de aula disponível no Aprender3; Notas de aula e códigos. Análise Multivariada 1. Universidade de Brasília, 2023.

[3] RENCHER, Alvin C; CHRISTENSEN, William F. METHODS OF MULTIVARIATE ANALYSIS. 3ª Edição. WILEY, 2012.

[4] https://healy.econ.ohio-state.edu/kcb/Ma103/Notes/Lecture11.pdf. Prova do Corolário 11.1.8.