Universidade de Brasília

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

27 junho 2023

Lista 8 - Correlação Canônica

Prof. Dr. George von Borries

Análise Multivariada 1

Aluno: Bruno Gondim Toledo | Matrícula: 15/0167636

Questão 71

Ex. 10.1 | Johnson & Wichern

Considerar a matriz de covariâncias

$$\mathbf{Cov} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ -- \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & | & \Sigma_{12} \\ -- & -|- & -- \\ \Sigma_{21} & | & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0,95 & 0 \\ -- & -- & -|- & -- & -- \\ 0 & 0,95 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Verificar que o primeiro par de variáveis canônicas são $U_1 = X_2^{(1)}, V_1 = X_1^{(2)}$ com correlação canônica $\rho_1^* = 0,95$.
sol.:

$\mathbf{\Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{11}^{-1/2}} =$

```
##      [,1]   [,2]
## [1,]    0 0.0000
## [2,]    0 0.9025
```

Com autovalores:

```
## [1] 0.9025 0.0000
```

e autovetores normalizados:

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    1
## [2,]    1    0
```

Ou seja,

$$U_1 = e_1'\Sigma_{11}^{1/2}x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = x_2^{(1)}$$

E ainda

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    1
```

$$V_1 = f_1'\Sigma_{22}^{-1/2}x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$$

Então, o par canônico $(U_1, V_1) = (X_2^{(1)}, X_1^{(2)})$, e $\rho_1^* = 0,95$.
□

Questão 72

Ex. 10.2 | Johnson & Wichern

Os vetores aleatórios $\mathbf{X^{(1)}}, \mathbf{X^{(2)}}$ $(\mathbf{2} \times \mathbf{1})$ têm vetor de médias e variâncias conjuntas

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ -- \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -- \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & | & \Sigma_{12} \\ -- & -|- & -- \\ \Sigma_{21} & | & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & | & 3 & 1 \\ 2 & 5 & | & -1 & 3 \\ -- & -- & -|- & -- & -- \\ 3 & -1 & | & 6 & -2 \\ 1 & 3 & | & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

a)

Calcular as correlações canônicas ρ_1^*, ρ_2^*.

```
## [1] 0.3046268 0.2399638
```

Logo, as correlações canônicas serão $\rho_1 = \sqrt{0,3046268} \approx 0.552$ e $\rho_2 = \sqrt{0,2399638} \approx 0.489$

b)

Determinar os pares de variáveis canônicas (U_1, V_1) e (U_2, V_2).

```
##              [,1]      [,2]
## [1,] -0.3168206 0.3622269
```

```
##              [,1]       [,2]
## [1,] -0.3647058 0.09506271
```

Portanto, $U_1 = -0,316X_1^{(1)} + 0,362X_2^{(1)}$,$V_1 = -0,364X_1^{(2)} + 0,095X_2^{(2)} = (U_1, V_1)$.

```
##             [,1]      [,2]
## [1,] 0.1962489 0.3016851
```

```
##             [,1]     [,2]
## [1,] 0.2262746 0.385821
```

Enquanto que (U_2, V_2) será: $U_2 = 0,196x_1^{(1)} + 0,301X_2^{(2)}$,$V_2 = 0,226X_1^{(2)} + 0,385X_2^{(2)}$.
□

c)

Seja $\mathbf{U} = [U_1, U_2]'$ e $\mathbf{V} = [V_1, V_2]'$. Avalie:

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix} U \\ -- \\ V \end{bmatrix} \ \mathbf{e} \ \ \mathbf{Cov}\begin{bmatrix} U \\ -- \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{UU} & | & \Sigma_{UV} \\ -- & -|- & -- \\ \Sigma_{VU} & | & \Sigma_{VV} \end{bmatrix}$$

.

```
##          [,1]
## [1,] 1.674915
```

```
##            [,1]
## [1,] 0.01462369
```

```
##            [,1]
## [1,] 0.09506271
```

```
##          [,1]
## [1,] 0.385821
```

Portanto,

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix} U \\ -- \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,674 \\ 0,014 \\ -- \\ 0,095 \\ 0,385 \end{bmatrix}$$

Enquanto que

$$\mathbf{Cov}\begin{bmatrix} U \\ -- \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{UU} & | & \Sigma_{UV} \\ -- & -|- & -- \\ \Sigma_{VU} & | & \Sigma_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \rho_1^* & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & \rho_2^* \\ -- & -- & -|- & -- & -- \\ \rho_1^* & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & \rho_2^* & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

será um resultado trivial.

Comparar os resultados com as propriedades do resultado 10.1.

Neste caso, da definição 10.1 do livro [1], e definição 10.5; $E(X^{(1)}) = \mu^{(1)}$, temos que $E(U) = E(a'X)$. Pela lineariedade da esperança, temos que $a'E(X) = E(U) = a'E(\mu)$, que foi justamente o resultado utilizado para as contas. Já para a covariância, existe a definição em 10.1, porém o resultado é trivial visto que Σ_{ij} irá retornar sempre uma matriz diagonal; se $i = j$, o valor da diagonal será 1 (a variável por ela mesma); e para $i \neq j$, o resultado será as correlações canônicas calculadas para i e j.
□

Questão 73

Ex. 10.9 | Johnson & Wichern (itens (a) e (c))

Foram aplicados para $n = 140$ alunos da sétima série quatro testes, tais que $\mathbf{X_1^{(1)}}$ = velocidade de leitura; $\mathbf{X_2^{(1)}}$ = habilidade de leitura; $\mathbf{X_1^{(2)}}$ = velocidade em aritmética; $\mathbf{X_2^{(2)}}$ = habilidade em aritmética. A correlação da performance medida foi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & | & R12 \\ -- & -|- & -- \\ R21 & | & R22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0,6328 & | & 0,2412 & 0,0586 \\ 0,6328 & 1 & | & -0,0553 & 0,0655 \\ --- & --- & -|- & --- & --- \\ 0,2412 & -0,0553 & | & 1 & 0,4248 \\ 0,0586 & 0,0655 & | & 0,4248 & 1 \end{bmatrix}$$

.

a)

Encontrar todas as correlações e variáveis canônicas amostrais

```
## [1] 0.155634923 0.004740029
```

Logo, as correlações canônicas amostrais serão $\hat{\rho}_1 = \sqrt{0,155634923} \approx 0.394$ e $\hat{\rho}_2 = \sqrt{0,004740029} \approx 0.068$.

```
##           [,1]     [,2]
## [1,] -1.256845 1.025317
```

```
##           [,1]      [,2]
## [1,] 0.2970177 0.7852413
```

```
##           [,1]      [,2]
## [1,] -1.104472 0.4527216
```

```
##             [,1]     [,2]
## [1,] -0.01818009 1.007587
```

Enquanto que os pares canônicos amostrais serão: $\hat{U}_1 = -1,256X_1^{(1)} + 1,025X_2^{(1)}; \hat{V}_1 = -1,104X_1^{(2)} + 0,452X_2^{(2)}$ e $\hat{U}_2 = 0,297X_1^{(1)} + 0,785X_2^{(1)}; \hat{V}_2 = -0,018X_1^{(2)} + 1,007X_2^{(2)}$

c)

Avaliar as matrizes de erros aproximados para $\mathbf{R_{11}}, \mathbf{R_{22}}$ e $\mathbf{R_{12}}$ determinadas pelo primeiro par de variáveis canônicas $\hat{U}_1, \hat{V}_1$.

Questão 74

Ex. 10.10 | Johnson & Wichern

Em um estudo sobre pobreza, criminalidade e detenção, reportou-se um sumário estatístico da criminalidade em vários estados para os anos de 1970 e 1973. Uma parte da matriz de correlação amostral é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & | & R12 \\ -- & -|- & -- \\ R21 & | & R22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0,615 & | & -0,111 & -0,266 \\ 0,615 & 1 & | & -0,195 & -0,085 \\ -- & -|- & -- & & \\ -0,111 & -0,195 & | & 1 & -0,269 \\ -0,266 & -0,085 & | & -0,269 & 1 \end{bmatrix}$$

.

As variáveis são: $\mathbf{X_1^{(1)}}$ = Homicídios não primários em 1973; $\mathbf{X_2^{(1)}}$ = Homicídios primários em 1973 (homicídios envolvendo familiares ou conhecidos); $\mathbf{X_1^{(2)}}$ = Severidade da punição em 1970 (mediana de meses encarceirado); $\mathbf{X_2^{(2)}}$ = Convicção de punição em 1970 (Número de encarceiramentos dividido pelo número de homicídios).

a)

Encontrar a correlação canônica amostral.

```
## [1] 0.10668190 0.02926479
```

Logo, as correlações canônicas amostrais serão $\hat{\rho}_1 = \sqrt{0,10668190} \approx 0.326$ e $\hat{\rho}_2 = \sqrt{0,02926479} \approx 0.171$.

b)

Determinar o primeiro par de variáveis canônicas $\hat{U}_1, \hat{V}_1$, e interpretar as quantidades.

```
##            [,1]        [,2]
## [1,] -1.00159 0.002588365
```

```
##             [,1]      [,2]
## [1,] 0.6016105 0.9768515
```

Enquanto que o primeiro par de variáveis canônicas amostrais será: $\hat{U}_1 = -1,001X_1^{(1)} + 0,002X_2^{(1)}; \hat{V}_1 = 0,601X_1^{(2)} + 0,976X_2^{(2)}$. Podemos notar que $X_2^{(1)}$ contribui pouco com a correlação dado o baixo valor associado a este.

Questão 75

Ex. 11.8 | Rencher & Christensen

(a) Encontre as correlações canônicas entre (y1, y2) e (x1, x2, x3).

```
## [1] 0.26440679 0.01574727
```

Logo, as correlações canônicas serão $\rho_1 = \sqrt{0,26440679} \approx 0,514$ e $\rho_2 = \sqrt{0,01574727} \approx 0,125$.

(b) Encontre os coeficientes padronizados das variáveis canônicas.

```
##            [,1]      [,2]
## [1,] -1.01997 0.1594698
```

```
##               [,1]     [,2]
## [1,] -0.04772552 1.008556
```

```
##             [,1]       [,2]     [,3]
## [1,] 0.4129255 -0.6915625 1.091886
```

```
##              [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] -0.8348237 0.4740133 0.3706991
```

Portanto, os coeficientes padronizados das variáveis canônicas serão:
$U_1 = -1,019y_1^{(1)} + 0,159y_2^{(1)}; V_1 = 0,0412x_1^{(1)} - 0,691x_2^{(1)} + 1,091x_3^{(1)}$;
$U_2 = -0,047y_1^{(2)} + 1,008y_2^{(2)}; V_2 = -0,834x_1^{(2)} + 0,474x_2^{(2)} + 0,370x_3^{(2)}$.
□

Referências:

[1] JOHNSON, Richard A; WICHERN, Dean W. APPLIED MULTIVARIATE STATISTICAL ANALYSIS. 6ª Edição. Pearson, 2007.

[2] von Borries, George. Material de aula disponível no Aprender3; Notas de aula e códigos. Análise Multivariada 1. Universidade de Brasília, 2023.

[3] RENCHER, Alvin C; CHRISTENSEN, William F. METHODS OF MULTIVARIATE ANALYSIS. 3ª Edição. WILEY, 2012.