Bruno Gondim Toledo | Regressão
Matrícula 1510167636 | Ativ. 1

1) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \; ; \; i = 1, \dots, n$

· Mostrar que $\hat{\beta}_0$ é uma combinação linear dos Y_i tq

$$\hat{\beta}_0 = \sum_i k_i Y_i$$

Dem: Como provado em sala que

$$\hat{\beta}_1 = \sum_i K_i Y_i \; ; \text{ onde } K_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}.$$

Sabendo disso, e que

$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$; temos

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_i Y_i - \sum_i K_i \bar{x} Y_i$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{n} - \sum_i K_i \bar{x} \right]}_{c_i} \sum_i Y_i \text{. Logo, } \hat{\beta}_0 = \sum_i c_i Y_i \quad \square$$

- Determinar $K: \{c_i\}$ tq seja não tendencioso e de var. mínima

$$E(\hat{\beta}_0) = E\left(\sum_i c_i Y_i\right) = \sum_i c_i \beta_0 + \hat{\beta}_1 \sum_i c_i x_i = \beta_0$$

P/ ser verdade;

$$\begin{cases} \cdot \sum_i c_i = 1 \\ \cdot \sum_i c_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = Var\left(\sum_i c_i Y_i\right) = \sum_i Var(c_i Y_i)$$

$$= \sum_i c_i^2 \, Var(Y_i).$$

Como $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, então $Y_i \sim N(\mu + \beta_0, \sigma^2)$ (Cov. nula)

Então $\sigma^2 \sum_i c_i^2$ será mínima $\Leftrightarrow \sum_i c_i^2$ é mínima

Então;

$Var(\hat{\beta}_0) = Var(\sum_i c_i Y_i)$

Como $Cov(Y_i, Y_j) = 0 \quad \forall i \neq j$;

$Var(\hat{\beta}_0) = \sum_i Var(c_i Y_i) = \sum_i c_i^2 Var(Y_i)$

Como $Var(Y_i) = \sigma^2$; $Var(\hat{\beta}_0) = \sum_i c_i^2 \sigma^2$

Como $c_i = \frac{1}{n} - k_i \bar{x}$, e $k_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}$;

temos que $c_i = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\bar{x}(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} + \dfrac{1}{n}$

Então $\sigma^2 \sum_i c_i^2 = \sigma^2 \sum_i \left(\dfrac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} + \dfrac{1}{n} \right)^2$

$= \sigma^2 \sum_i \left(\dfrac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \right)^2 + 2\sigma^2 \sum_i \left(\dfrac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{n(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2)} \right) + \dfrac{\sigma^2}{n}$

$$= \bar{x}^2 Var(\hat{\beta}_1) + 2\sigma^2 \left(\frac{n\bar{x}^2 - \bar{x}\sum_i x_i}{n(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2)} \right) + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \bar{x}^2 \cdot Var(\hat{\beta}_1) + 2\sigma^2 \left(\frac{\cancelto{0}{n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2}}{n\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \right) + \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \bar{x}^2 Var(\hat{\beta}_1) + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \left(\frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{n} \right)$$

E com isso, temos a variância de $\hat{\beta}_0$ $\square$.

Parte 3

- P/ o est. $\hat{\beta}_0$ de par. β_0, mostre que

$$\sum_i k_i = 1 \text{ e } \sum_i k_i x_i = 0$$

Sol: Como $E(\hat{\beta}_0) = E(\sum_i k_i Y_i) = \sum_i k_i E(Y_i)$

$$= \sum_i k_i E(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i) = \sum_i k_i \beta_0 + \sum_i k_i x_i \beta_1 + \underbrace{\sum_i k_i \varepsilon_i}_{0}$$

$$= \beta_0$$

Logo: $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ $\square$

• Para o estimador $\hat{\beta}_1$ do parâmetro β_1, mostre que

$$\sum_i c_i = 0 \quad e \quad \sum_i c_i x_i = 1$$

Sol. Como $E(\hat{\beta}_1) = E\left(\sum_i c_i Y_i\right) = \sum_i c_i E(Y_i)$

$= \sum_i c_i (\beta_0 + \beta_1 x_i)$; temos que

$$\sum_i c_i \beta_0 + \sum_i c_i x_i \beta_1 = \beta_1 \iff \begin{cases} \bullet \sum_i c_i = 0 \\ \bullet \sum_i c_i x_i = 1 \end{cases}$$

de maneira análoga à demonstração anterior $\square$