Séries
Lista 2

2.1) $E(X) = 2$; $Var(X) = 9$; $E(Y) = 0$; $Var(Y) = 4$; $\rho_{xy} = 0{,}25$

(a) $Var(X+Y)$

Sol: Sabendo que $Var(X+Y)$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y);$$

Temos: $Var(X+Y) = 9 + 4 + 2\,Cov(X,Y)$;

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1}$$

e $$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = 0{,}25.$$ (*)

(*) Se $$0{,}25 = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{9}\,\sqrt{4}}$$

$$6 \cdot 0{,}25 = Cov(X,Y) = 1{,}5.$$

Então: $Var(X+Y) = 13 + 2(1{,}5) = \boxed{16}$

(b) $Cov(X, X+Y)$.

Sol.: Se $Cov(X+Y) = 1{,}5$ e $Cov(X, X+Y)$

$$= Cov(X,X) + Cov(X,Y)$$

Então: $Cov(X, X+Y) = \underbrace{Cov(X,X)}_{Var(X)=9} + \underbrace{Cov(X,Y)}_{1{,}5} = 10{,}5$

(c) $Corr(X+Y, X-Y)$

Sol: $Corr(X+Y, X-Y) = \dfrac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y)}\sqrt{Var(X-Y)}}$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(-Y) + 2Cov(X,-Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$
$$= 9 + 4 - 2(1{,}5)$$
$$= 10$$

$Cov(X+Y, X-Y)$

$= Cov(X, X+Y) - Cov(Y, X+Y)$

$= (\underbrace{Cov(X,X)} + Cov(X,Y)) - (Cov(Y,X) + Cov(Y,Y))$

$= Var(X) + Cov(X,Y) - Cov(Y,X) - Var(Y)$

$= Var(X) - Var(Y) = \boxed{5}$ comutatividade da covariância

Então:

$$\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y) = \frac{5}{\sqrt{16}\ \sqrt{10}} = \frac{5}{4\sqrt{10}} \cong 0{,}395$$

2.2) X e Y dependentes, $Var(X) = Var(Y)$

$Cov(X+Y, X-Y)$?

Sol.: $Cov(X+Y, X-Y)$

$= Cov(X, X+Y) - Cov(Y, X+Y)$

$= \underbrace{Cov(X, X)} + \cancel{Cov(X, Y)} - \cancel{Cov(Y, X)} - \underbrace{Cov(Y, Y)}$

$= Var(X) - Var(Y) = 0$

2.4) $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$, $\theta \begin{cases} 3; \\ 1/3 \end{cases}$; $\{e_t\}$ zero-mean white noise process

(a) Seja $Cov(X_t, X_s) = \gamma(t, s) \equiv \gamma(t, t+h)$

$\equiv \gamma(h)$

a função de autocovariância teórica, então

a função de autocovariância de $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$

$\equiv \gamma(1)\ \forall \theta \in \Theta$

2.4)

b) Não. Como a função autocovariância é invariante em relação a constante θ (dependendo portanto apenas do tempo t), esta não irá fornecer informação sobre o parâmetro θ.

2.5) $Y_t = 5 + 2t + X_t$; X_t zero-mean stationary series with autocovariance function γ_k

a) Se X_t série estacionária de média 0;

então $E[Y_t] = E[5 + 2t + X_t]$

$$= 5 + 2t \; E[X_t]$$

$$= 5 + 2 + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t = 5 + 2t + \mu, \; \forall t \geq 0.$$

b) $\gamma(Y_t)$

Como o processo X_t tem média 0, então $E[Y_t] = 5 + 2t$

5

(b) $\gamma(Y_t)$

$\hookrightarrow$ Def. $Cov(5+2t+X_t, 5+2s+X_s)$

$= Cov(X_t, X_s) = \gamma_k$

Ou seja, a função de autocovariância de Y_t será simplesmente a função de autocovariância de X_t $= \gamma_k$.

(c) Y_t estacionário?

Sol: Não, visto que a média μ_t é constante, e a autocovariância é independente de t.

2