



# Modelos Estructurales: Vigas

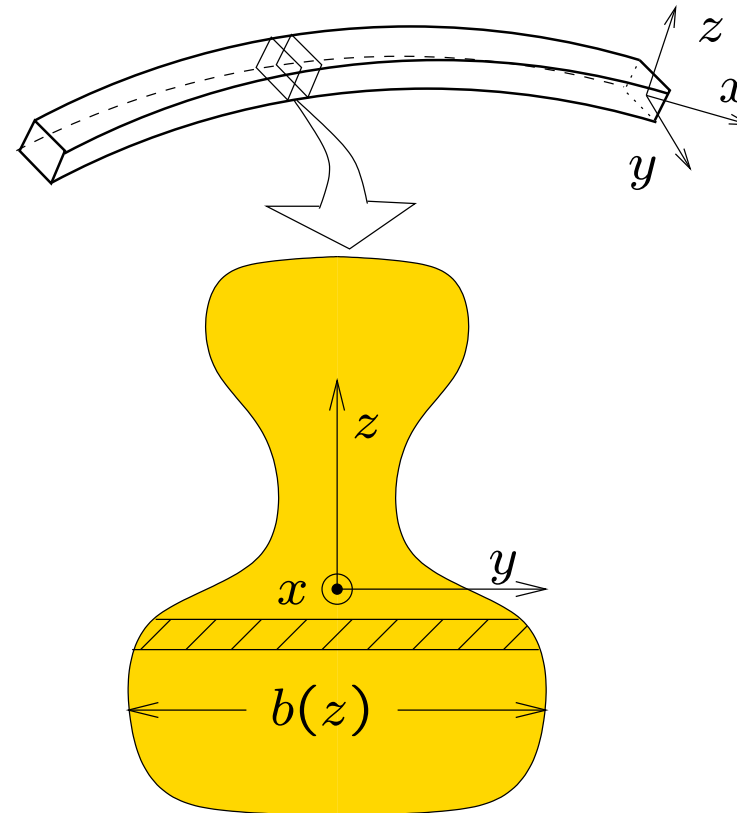
*Felipe Gabaldón*

# VIGAS 2D: Definición de Resultantes

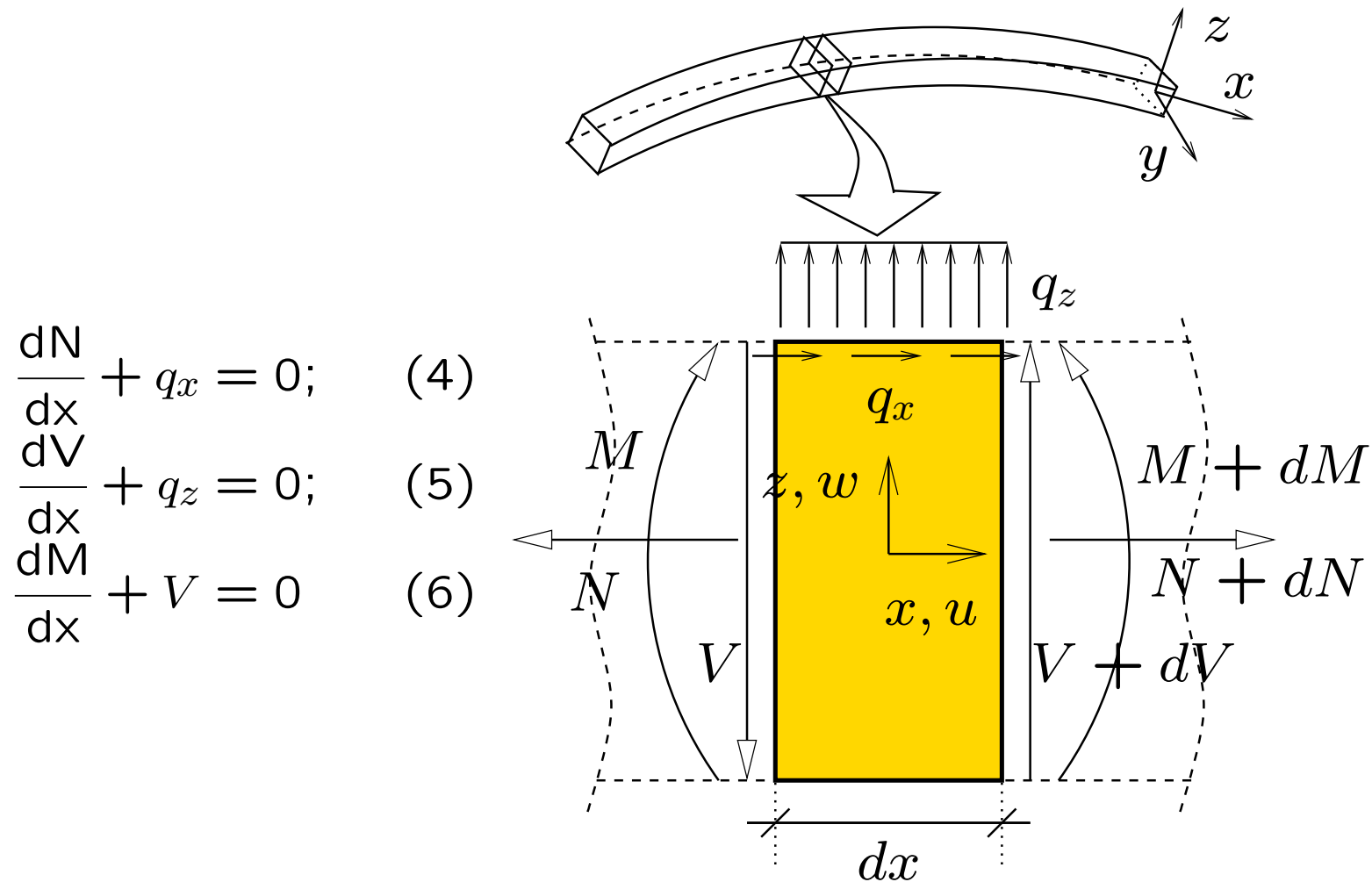
$$N \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} b(z) dz; \quad (1)$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} b(z) dz; \quad (2)$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx} b(z) dz. \quad (3)$$

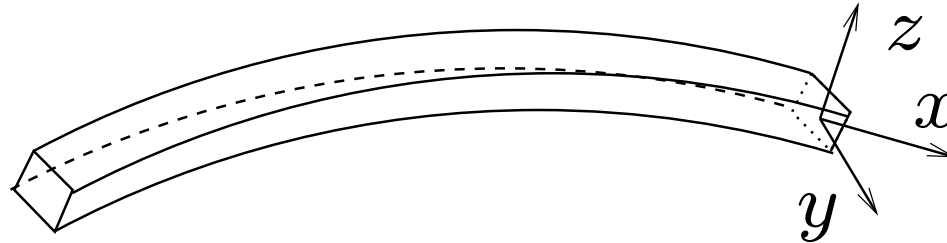


# VIGAS: Condiciones de Equilibrio



♣ Leyes válidas en cualquier instancia (incluso no lineal).

# Hipótesis de Bernoulli-Euler



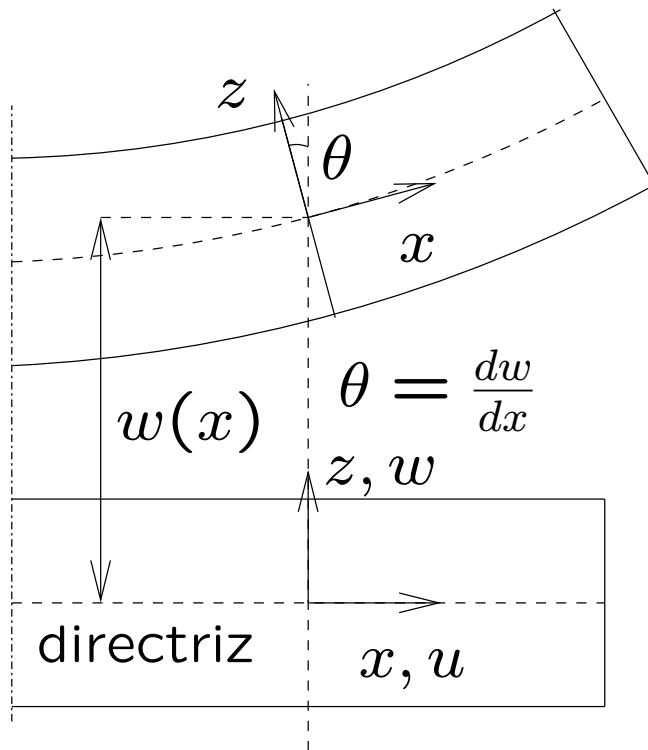
1. Pieza prismática, directriz
2. Secciones planas normales a directriz permanecen planas y **normales a la directriz**
3. Desplazamientos normales a la viga son uniformes sobre la sección, e iguales a los de la directriz:

$$w(x, z) = w(x). \quad (7)$$

4. Tensión plana:

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (8)$$

# Desplazamientos



- ◇ Giro de sección:  $\theta$
- ◇ Giro de directriz:  $\frac{dw}{dx} = w'$
- ◇ Sección normal a directriz:

$$\theta = \frac{dw}{dx}; \quad (9)$$

- ◇ Desplazamiento longitudinal:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z\theta \\ &= u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \end{aligned} \quad (10)$$

# Deformaciones

$$\text{de (9):} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad (11)$$

$$\text{de (7):} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (12)$$

$$\text{de (10):} \quad \gamma_{xz} \stackrel{\text{def}}{=} 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (13)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0 \quad (14)$$

♥ No hay deformación por cortante

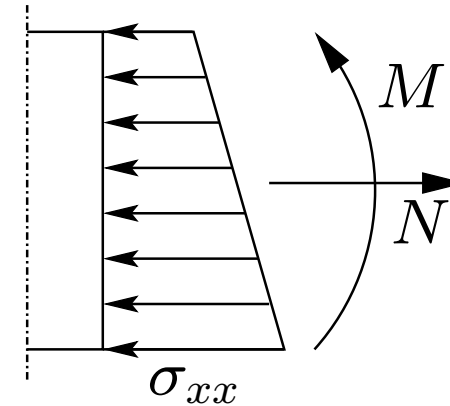
♥ Hipótesis válida para vigas esbeltas:  $\lambda = \frac{l}{t} > 20$ .

# Relaciones Constitutivas: Momento

$$M = - \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx} b(z) dz \quad (15)$$

de (11):

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \left( \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (16)$$



$$M = -E \int_{-t/2}^{t/2} z \frac{du_0}{dx} b(z) dz + E \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{d^2 w}{dx^2} b(z) dz = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (17)$$

♠ Curvatura ( $w$  pequeña):

$$\kappa = \frac{d^2 w / dx^2}{\left[ 1 + (dw/dx)^2 \right]^{3/2}} \approx \frac{d^2 w}{dx^2} \Rightarrow \boxed{M = EI \kappa} \quad (18)$$

# Relaciones Constitutivas: Axil, Cortante

♠ Por integración de las tensiones:

$$N = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} b(z) dz = EA \frac{du_0}{dx} \quad (19)$$

$$V = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} b(z) dz; \quad (20)$$

♠ Contradicción: de (13),

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xz} = G\gamma_{xz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 0 !} \quad (21)$$

♠ En la práctica, el cortante  $V$  se calcula a partir de ecuaciones de equilibrio (6)



## Formulación fuerte

♣ De (6):

$$\left. \begin{array}{l} (6) : \frac{dM}{dx} + V = 0 \\ (5) : \frac{dV}{dx} + q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

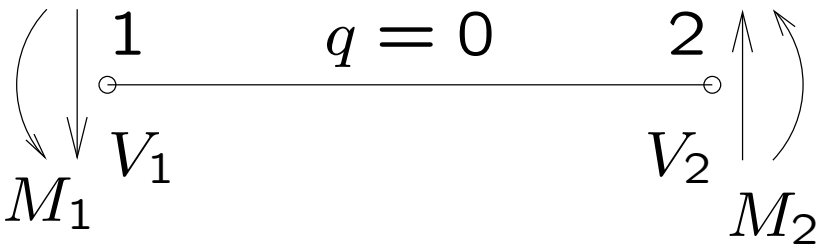
$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Rightarrow \boxed{EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q} \quad (22)$$

(suponiendo  $EI$  constante)

♣ Ecuación diferencial (4.º orden) de la *elástica*, para obtener  $w(x)$

# Formulación matricial

♣ Solución general en tramo 1–2 sin cargas intermedias ( $q = 0$ ):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$


♣ Condiciones de contorno:  $w_1, \frac{dw}{dx}\bigg|_1, w_2, \frac{dw}{dx}\bigg|_2$

$$w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (23)$$

4 condiciones  $\Rightarrow$  4 parámetros ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ )

♣ *Planteamiento directo* de ecuaciones matriciales: programas de «barras»

◇ Ojo: cargas repartidas ( $q \neq 0$ ) precisa corrección (m. emp.)

## Formulación débil

- ♣ Funciones de peso (desplazamientos virtuales)  $\bar{w}$ , en principio arbitrarias. De (22):

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \bar{w} \frac{d^2 M}{dx^2} dx = \int_a^b \bar{w} q dx \quad \forall \bar{w} \quad (24)$$

- ♣ Integrando por partes, dos veces:

$$-\int_a^b \frac{d\bar{w}}{dx} \frac{dM}{dx} dx + \left[ \bar{w} \frac{dM}{dx} \right]_a^b = \int_a^b \bar{w} q dx$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_a^b \bar{w} q dx + \left[ \frac{d\bar{w}}{dx} M \right]_a^b - [\bar{w} V]_a^b} \quad (25)$$

- ♣  $M_a, V_a, M_b, V_b$ : condiciones de contorno «naturales».

# Aproximación elementos finitos

♣ Funciones de interpolación de desplazamientos,  $N_i(x)$

$$\begin{aligned} w(x) &\approx \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{a}\} \\ &= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & \dots & N_n(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

♣ Interpolación de «deformaciones»:  $[\mathbf{B}]$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \approx [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}\}; \quad (26)$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{d^2}{dx^2} \{\mathbf{N}\}^T = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2 N_n}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

# Método de Galerkin

♣ Misma interpolación para  $\bar{w}$  que para  $w$

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \approx [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{a}}\} = \{\bar{\mathbf{a}}\}^\top [\mathbf{B}]^\top \quad (28)$$

$$\int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} EI \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} dx \approx \int_a^b \{\bar{\mathbf{a}}\}^\top \left( [\mathbf{B}]^\top EI [\mathbf{B}] \right) \{\mathbf{a}\} dx \quad (29)$$

$$\int_a^b \bar{w} q dx \approx \int_a^b \{\bar{\mathbf{a}}\}^\top \{\mathbf{N}\} q dx = \{\bar{\mathbf{a}}\}^\top \{\mathbf{f}_{\text{int}}\} \quad (30)$$

$$\{\bar{\mathbf{a}}\}^\top \underbrace{\left[ \left( \int_a^b \underbrace{[\mathbf{B}]^\top}_{(n \times 1)} EI \underbrace{[\mathbf{B}]}_{(1 \times n)} dx \right) \{\mathbf{a}\} \right]}_{[\mathbf{K}] \ (n \times n)} = \{\bar{\mathbf{a}}\}^\top \left[ \{\mathbf{f}_{\text{int}}\} + \{\mathbf{f}_{\text{ext}}\} \right] \quad (31)$$

# Formulación Matricial

♣  $\{\mathbf{a}\}^T$  arbitrarios;  $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_{\text{int}}\} + \{\mathbf{f}_{\text{ext}}\}$ :

$$\boxed{[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{f}\}}$$

- $w, \frac{dw}{dx}$ : cond. contorno cinemáticas o esenciales
- $M, V$ : cond. contorno estáticas o naturales ( $\rightarrow \{\mathbf{f}\}$ )

♣ A nivel elemental, integrales en subdominio  $\Omega^e$ :

$$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{a}^e\} = \{\mathbf{f}^e\}; \quad (32)$$

$$[\mathbf{K}] = \overset{numel}{\mathbf{A}} [\mathbf{K}^e]; \quad \{\mathbf{f}\} = \overset{numel}{\mathbf{A}} \{\mathbf{f}^e\}. \quad (33)$$

# Requisitos de complitud y compatibilidad

♠  $w(x)$  debe poder representar un movimiento rígido arbitrario  
 $\left(w^0, \theta^0 = \left(\frac{dw}{dx}\right)^0\right)$

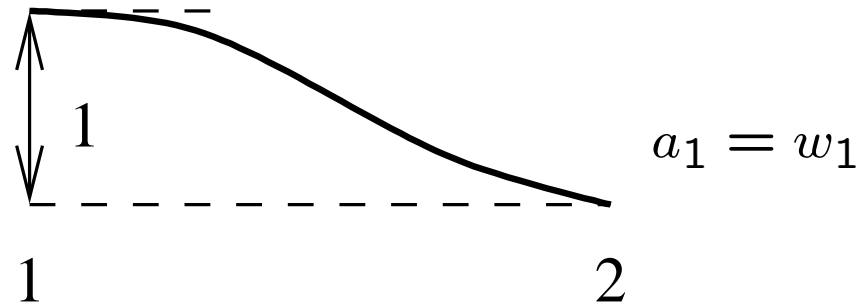
♠  $w(x)$  debe poder representar deformaciones con curvatura constante arbitraria,  $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^0 = \kappa^0$ .  
 $\rightarrow w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$

♠ Debe tener continuidad al menos un orden menor que las derivadas que aparecen en la formulación débil  $\left(\frac{dw}{dx}\right)$ ,  
 $\rightarrow w(x) \in C^1 \rightarrow 4 \text{ condiciones: } w_a, \left(\frac{dw}{dx}\right)_a, w_b, \left(\frac{dw}{dx}\right)_b$ .

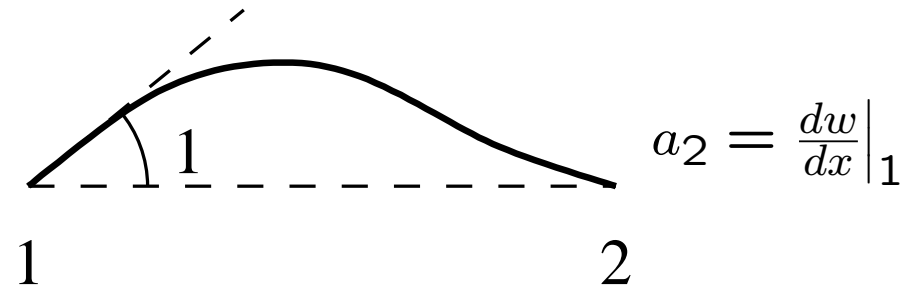
$$\boxed{w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3} \quad (34)$$

# Elemento con interpolación cúbica (hermítico)

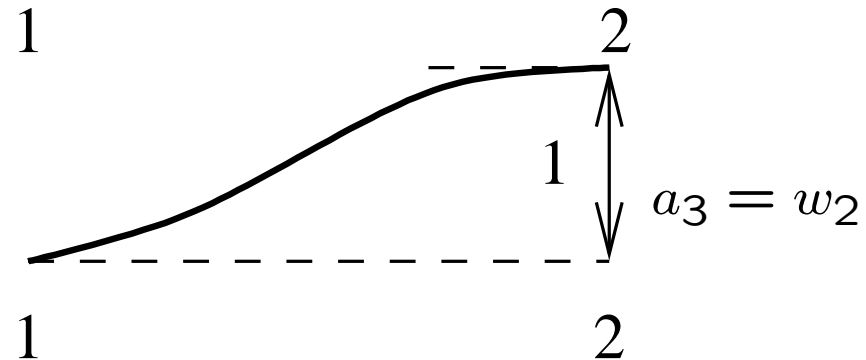
$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$$



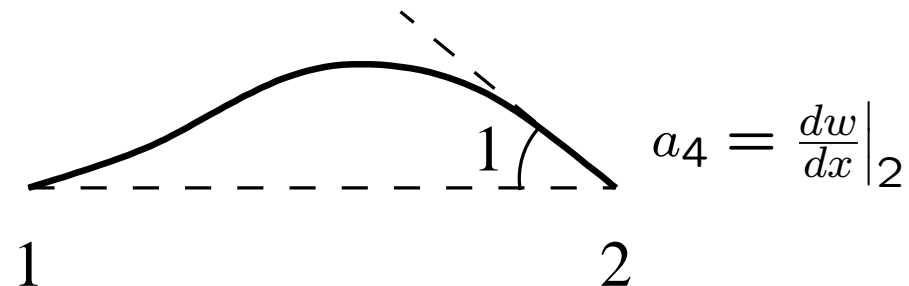
$$N_2(x) = x \left( 1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right)$$



$$N_3(x) = \frac{x^2}{l^2} \left( 3 - 2\frac{x}{l} \right)$$



$$N_4(x) = \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$





## Matriz de rigidez

Integrando términos de (31):

$$K_{11}^e = EI \int_0^l B_1^2 dx; \quad B_1 = \frac{d^2}{dx^2} N_1(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}; \quad (35)$$

$$K_{11}^e = \frac{12EI}{l^3}; \quad (36)$$

$$K_{12}^e = \frac{6EI}{l^2}; \quad K_{13}^e = -\frac{12EI}{l^3}; \dots \quad (37)$$

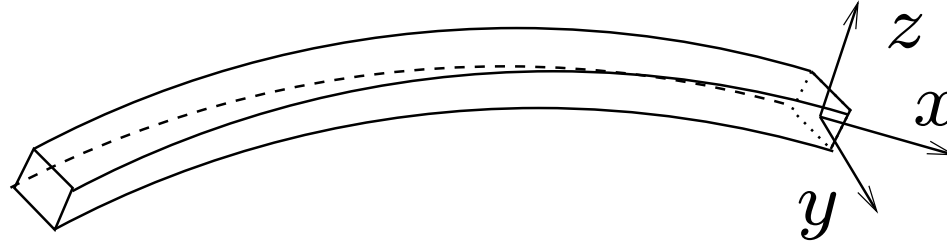
$$[\mathbf{K}^e] = \frac{12EI}{l^3} \begin{pmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l/2 & l^2/3 & -l/2 & l^2/6 \\ -1 & -l/2 & 1 & -l/2 \\ l/2 & l^2/6 & -l/2 & l^2/3 \end{pmatrix} \quad (38)$$

## Matrices de cargas

Integrando términos de (31):

$$\{\mathbf{f}^e\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{f}_{\text{int}}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -V_1 \\ -M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{f}_{\text{ext}}\}} \quad (39)$$

# Hipótesis de vigas de Timoshenko



1. Pieza prismática, directriz
2. Secciones planas normales a directriz permanecen planas, pero *no necesariamente normales a la directriz.*
3. Desplazamientos normales a la viga son uniformes sobre la sección, e iguales a los de la directriz:

$$w(x, z) = w(x). \quad (40)$$

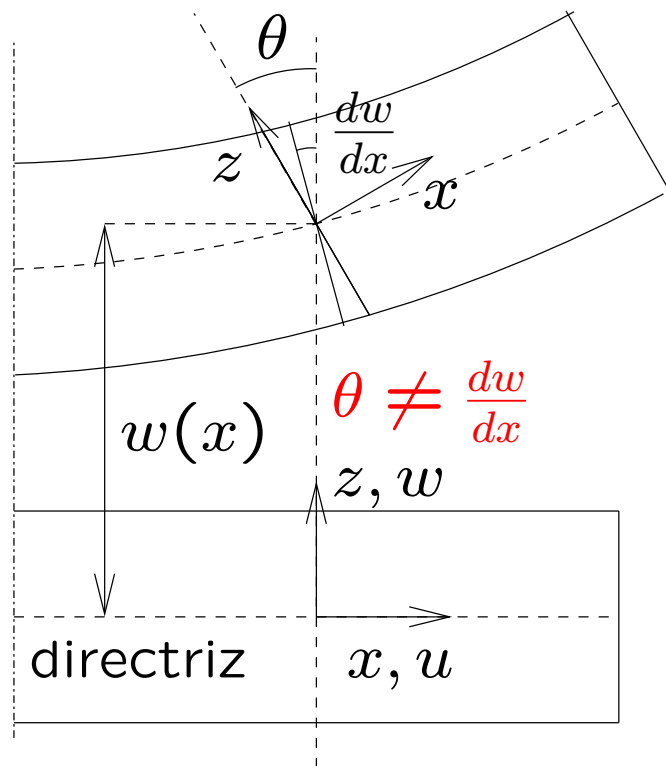
4. Tensión plana:

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (41)$$

# Hipótesis de vigas de Timoshenko

## Desplazamientos

- $\theta$ : giro sección;
- $dw/dx$ : giro directriz (1.er orden)



$$v(x, y, z) = 0 \quad (42)$$

$$u(x, z) = u_0(x) - z\theta(x) \quad (43)$$

# Deformaciones

$$\text{de (43):} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \quad (44)$$

$$\text{de (40):} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (45)$$

$$\text{de (43):} \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta + \frac{dw}{dx} \neq 0 \quad (46)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0 \quad (47)$$

- *Sí existe* deformación por cortante  $\gamma_{xz}$
- Deformación cortante es constante en sección (hip. Navier)
- Hipótesis válida para vigas moderadamente gruesas:  $\lambda = \frac{l}{t} > 8$ .

# Relaciones Constitutivas

## ♠ Tensiones

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{du_0}{dx} - Ez \frac{d\theta}{dx} \quad (48)$$

$$\sigma_{xz} = \tau = G\gamma_{xz} = G \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) \quad (49)$$

## ♠ Resultantes

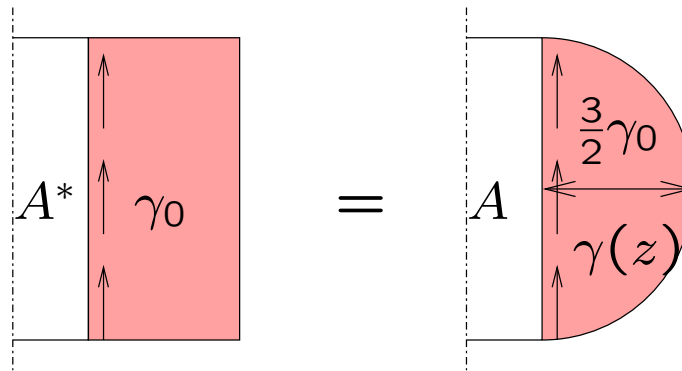
$$M = \int_{-t/2}^{+t/2} -Ez^2 \frac{d\theta}{dx} b(z) dz = EI \frac{d\theta}{dx} = EI\kappa \quad (50)$$

$$V = \int_{-t/2}^{+t/2} G \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) b(z) dz = GA \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) = GA\gamma_{xz} \quad (51)$$

$$N = \int_{-t/2}^{+t/2} E \left( \frac{du_0}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \right) b(z) dz = EA \frac{du_0}{dx} \quad (52)$$

## Área Reducida

- Según (46),  $\gamma_{xz} = \gamma_0$  (cte.) en sección
- Exacto: distribución parabólica, sección alabeada. Igualando cortante ( $V = \int_{-t/2}^{+t/2} b(z)\gamma(z) dz$ ):



- Igualando energía de deformación entre ambos,

$$\frac{1}{2}GA^*(\gamma_0)^2 = \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{1}{2}Gb(z)\gamma(z)^2 dz \quad \Rightarrow \quad A^* = \alpha A.$$

- Sección rectangular:  $\alpha = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad A^* = \frac{5}{6}A$

## Formulación Fuerte

♣ A partir de ecuaciones de equilibrio.

$$\text{de (6): } \frac{dM}{dx} + V = 0 \quad \Rightarrow \quad EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + V = 0 \quad (53)$$

$$\text{de (5): } \frac{dV}{dx} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad GA^* \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) + q = 0 \quad (54)$$

♣ Intervienen derivadas segundas de  $w, \theta$ .



## Formulación débil (momentos)

Tomando en primer lugar la ecuación del momento (53):

$$\int_1^2 \bar{\theta} \left( EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) dx + \int_1^2 \bar{\theta} \underbrace{GA^* \gamma_{xz}}_V dx = 0 \quad \forall \bar{\theta} \quad (55)$$

integrando por partes,

$$- \int_1^2 \frac{d\bar{\theta}}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} dx + \left[ \bar{\theta} EI \frac{d\theta}{dx} \right]_1^2 + \int_1^2 \bar{\theta} GA^* \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) dx = 0 \quad \forall \bar{\theta} \quad (56)$$

## Formulación débil (cortantes)

Haciendo ahora lo mismo con la del cortante (54):

$$\int_1^2 \bar{w} GA^* \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) dx + \int_1^2 q \bar{w} dx = 0 \quad \forall \bar{w} \quad (57)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_1^2 \frac{d\bar{w}}{dx} GA^* \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) dx + \left[ \bar{w} GA^* \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) \right]_1^2 \\ + \int_1^2 \bar{w} q dx = 0 \quad \forall \bar{w} \quad (58) \end{aligned}$$

## Formulación débil (conjunta)

Sumando (56) y (58):

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 \underbrace{\left( \frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\theta} \right)}_{\bar{\gamma}} GA^* \underbrace{\left( \frac{dw}{dx} - \theta \right)}_{\gamma} dx + \int_1^2 \underbrace{\frac{d\bar{\theta}}{dx}}_{\bar{\kappa}} EI \underbrace{\frac{d\theta}{dx}}_{\kappa} dx \\
 &= \left[ \bar{w} \underbrace{GA^* \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right)}_{V_i} \right]_1^2 + \left[ \bar{\theta} \underbrace{EI \frac{d\theta}{dx}}_{M_i} \right]_1^2 + \int_1^2 \bar{w} q dx \quad \forall (\bar{w}, \bar{\theta}) \quad (59)
 \end{aligned}$$

♣ Intervienen derivadas primeras de  $w, \bar{w}, \theta, \bar{\theta} \Rightarrow$  requiere tan solo aproximación  $C^0$

# Aproximación Elementos Finitos (Galerkin)

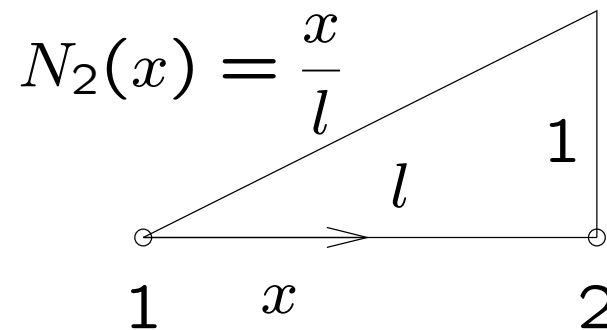
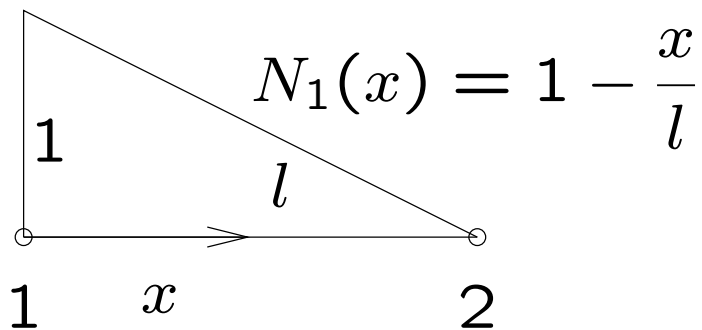
♣ La formulación débil (59) puede escribirse:

$$\delta W = \int_1^2 \bar{\gamma} G A^* \gamma dx + \int_1^2 \bar{\kappa} E I \kappa dx - \int_1^2 \bar{w} q dx - [\bar{w} V]_1^2 - [\bar{\theta} M]_1^2 = 0 \quad \forall(\bar{\gamma}, \bar{\kappa})$$

♣ Funciones de interpolación lineales (continuidad  $C^0$ ):

$$w^h(x) = w_1 N_1(x) + w_2 N_2(x);$$

$$\theta^h(x) = \theta_1 N_1(x) + \theta_2 N_2(x);$$



# Interpolación de Deformaciones

$$\kappa^h = \theta_1 \frac{dN_1}{dx} + \theta_2 \frac{dN_2}{dx} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/l & 0 & 1/l \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_f^e]} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{cte.})$$

$$\begin{aligned} \gamma^h &= \left( \frac{dw^h}{dx} - \theta^h \right) = w_1 \frac{dN_1}{dx} - \theta_1 N_1 + w_2 \frac{dN_2}{dx} - \theta_2 N_2 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1/l & -1 + x/l & 1/l & -x/l \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_c^e]} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{lineal}) \end{aligned}$$

# Matrices elementales (1)

$$\delta W^{h,e} = \{\bar{\mathbf{a}}^e\}^T \left[ \left( [\mathbf{K}_f^e] + [\mathbf{K}_c^e] \right) \{\mathbf{a}^e\} - \{\mathbf{f}_{\text{int}}^e\} - \{\mathbf{f}_{\text{ext}}^e\} \right]$$

$$[\mathbf{K}_f^e] = \int_1^2 [\mathbf{B}_f^e]^T EI [\mathbf{B}_f^e] dx; \quad [\mathbf{K}_c^e] = \int_1^2 [\mathbf{B}_c^e]^T GA^* [\mathbf{B}_c^e] dx$$

$$\{\mathbf{f}_{\text{int}}^e\} = \int_1^2 \{\mathbf{N}^e\} q(x) dx; \quad \{\mathbf{f}_{\text{ext}}^e\} = \begin{Bmatrix} -V_1 \\ -M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

## Matrices elementales (2)

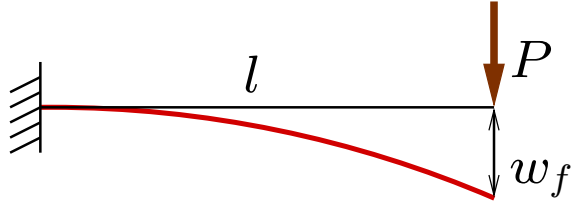
Integrando analíticamente:

$$[\mathbf{K}_f^e] = \left(\frac{EI}{l}\right)^e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(constante: 1 pto.} \\ \text{Gauss)} \end{array}$$

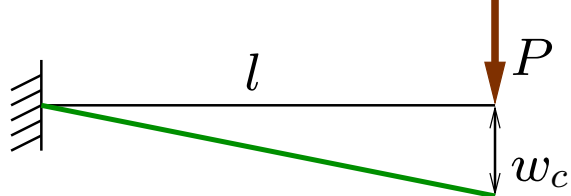
$$[\mathbf{K}_c^e] = \left(\frac{GA^*}{l}\right)^e \begin{pmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l/2 & l^2/3 & -l/2 & l^2/6 \\ -1 & -l/2 & 1 & -l/2 \\ l/2 & l^2/6 & -l/2 & l^2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(cuadrático: 2 ptos.} \\ \text{Gauss)} \end{array}$$

# Deformación de ménsula

♣ Viga Bernouilli ( $EI$ ):  $w_f = P \frac{l^3}{3EI}$

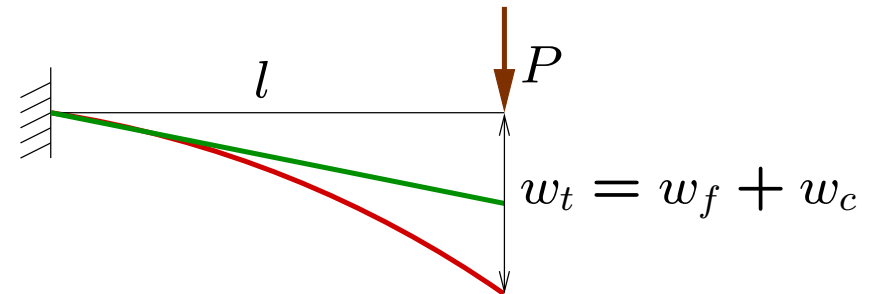


♣ Viga Cortante ( $GA^*$ ):  $w_c = P \frac{l}{GA^*}$



♣ Viga Timoshenko ( $EI, GA^*$ ):

$$w_t = P \left( \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA^*} \right)$$



$w_t = w_f + w_c$

(Más flexible que viga Bernouilli)



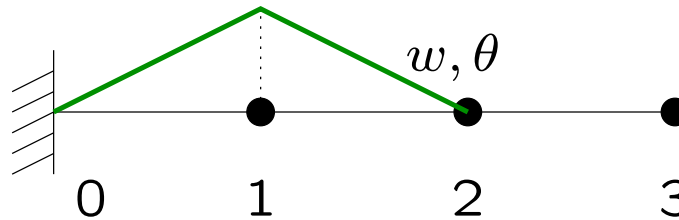
# Bloqueo de viga (Timoshenko) esbelta

♣ Sección rectangular  $b \times t$ :  $I = \frac{1}{12}bt^3$ ;  $GA^* = \frac{5}{6}bt$

$$K_f = \frac{3EI}{l^3}; \quad K_c = \frac{GA^*}{l}$$

$$\frac{K_f}{K_c} = \frac{3}{5}(1 + \nu) \frac{1}{\lambda^2} \quad \left( \lambda = \frac{l}{t} \right)$$

en el límite  $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{K_f}{K_c} \rightarrow 0, \quad \theta = \frac{dw}{dx}$

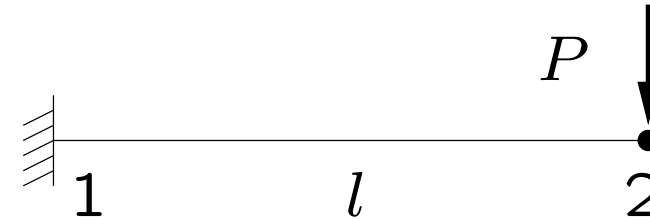


$$\theta_0 = 0 \Rightarrow \left. \frac{dw}{dx} \right|_0 = 0 \Rightarrow (w \text{ lineal en elto.}) \quad w_1 = 0, \quad \theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_1 = 0, \dots \quad \boxed{\text{¡Bloqueo!}}$$

# Ejemplo: ménsula con 1 elemento (1)

1 elemento viga de Timoshenko



$$\begin{pmatrix} \frac{GA^*}{l} & \frac{GA^*}{2} & -\frac{GA^*}{l} & \frac{GA^*}{2} \\ \frac{GA^*}{3}l + \frac{EI}{l} & -\frac{GA^*}{2} & \frac{GA^*}{6}l - \frac{EI}{l} & \frac{GA^*}{2} \\ \frac{GA^*}{l} & -\frac{GA^*}{2} & \frac{GA^*}{3}l + \frac{EI}{l} & -\frac{GA^*}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eliminando las ecuaciones de  $(V_1, M_1)$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{GA^*}{l} & -\frac{GA^*}{2} \\ -\frac{GA^*}{2} & \frac{GA^*}{3}l + \frac{EI}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Ejemplo: ménsula con 1 elemento (2)

Invirtiendo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \frac{\mu}{1 + \mu} \begin{pmatrix} \frac{l}{GA^*} + \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{2EI} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \left( \mu = \frac{12EI}{GA^*l^2} \right) \\ w_2 &= \frac{\mu}{1 + \mu} P \left( \frac{l}{GA^*} + \frac{l^3}{3EI} \right) \end{aligned}$$

♣ Idéntica a solución exacta (con flexión y cortante), salvo el factor

$$\boxed{\frac{\mu}{1 + \mu}}.$$

♣ Valor para sección rectangular ( $b \times t$ ) y  $\nu = 1/4$ :

$$\frac{\mu}{1 + \mu} = \frac{3}{3 + \lambda^2}; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mu}{1 + \mu} = 0$$

**¡Bloqueo!**

# Integración reducida (del cortante)

- Particularizando  $[\mathbf{K}_c]$  en el centro del elemento, e integrando con este único punto de integración:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_c^e] &= \int_1^2 [\mathbf{B}_c^e]_{x=l/2}^T GA^* [\mathbf{B}_c^e]_{x=l/2} dx \\ &= \left( \frac{GA^*}{l} \right)^e \begin{pmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l/2 & l^2/4 & -l/2 & l^2/4 \\ -1 & -l/2 & 1 & -l/2 \\ l/2 & l^2/4 & -l/2 & l^2/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Ménsula, 1 elto. de integración reducida

♣ Ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{GA^*} + \frac{l^3}{4EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{2EI} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

♣ Para  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\frac{w^{\text{EF}}}{w^{\text{exacto}}} \rightarrow \frac{l^3/(4EI)}{l^3/(3EI)} = \frac{3}{4}$$

¡Solución sin bloqueo! (algo más rígido que solución exacta)

♣ El error desaparece para una malla suficientemente fina: con tan sólo 2 elementos,  $w^{\text{EF}}/w^{\text{exacto}} = 0,938$  (para  $\lambda \rightarrow \infty$ ).

# Deformaciones impuestas (1)

- Campo de deformaciones (Timoshenko, interpolación lineal):

$$\gamma = \frac{1}{l}(w_2 - w_1) + \theta_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \theta_2 \left(-\frac{x}{l}\right)$$

$x = 0 \quad x = l/2 \quad x = l$

- En coordenadas isoparamétricas: 
- $\xi = -1 \quad \xi = 0 \quad \xi = +1$

$$\gamma = \underbrace{\frac{1}{l}(w_2 - w_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}_{\alpha_2} \xi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi$$

- Vigas muy esbeltas:  $\alpha_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

♣ Solución: campo independiente («impuesto»),  $\gamma(x) = [\mathbf{N}_\gamma]\{\gamma\}$

## Deformaciones impuestas (2)

- **Método *mixto***: interpolación independiente de flechas ( $w$ ), giros ( $\theta$ ), y deformaciones a cortante ( $\gamma$ )
- Caso más simple: imponer  $\gamma = \text{cte.}$ :

$$\begin{aligned}\gamma(\xi) &= [\hat{\mathbf{B}}_c]\{\mathbf{a}\} = \alpha_1 = \frac{1}{l}(w_2 - w_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

♣ En este caso, igual resultado que integración reducida.