

Capítulo 2

La ecuación de Poisson

2.1. Introducción

El interés del problema de contorno que se estudia en este capítulo radica en que permite modelar numerosos problemas de física en régimen estacionario. Entre ellos se pueden destacar los de transmisión de calor, flujo en medios porosos, torsión de Saint-Venant, electrostática, magnetostática, flujo irrotacional de fluidos ideales, lubricación, distribución de presiones hidrodinámicas sobre superficies en movimiento, etc.

En este problema la incógnita es la función escalar $u = u(\mathbf{x})$, siendo \mathbf{x} un punto del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ en el que se formula el problema. En el caso más general la ecuación de Poisson se expresa:

$$-\text{div}(\mathbf{k}\nabla u) = f \quad (2.1)$$

siendo $\text{div}(\cdot)$ el operador divergencia, $\nabla(\cdot)$ el operador gradiente, f una función escalar “fuente” y \mathbf{k} un tensor asociado a la ecuación constitutiva. Esta ecuación se completa con las correspondientes condiciones de contorno, que serán analizadas en los subapartados 2.1.1 y siguientes.

Si el material es homogéneo e isotrópico, la ecuación (2.1) da lugar a la ecuación “estándar” de Poisson:

$$k\nabla^2 u = f \quad (2.2)$$

siendo k el parámetro de la ecuación constitutiva y $\nabla^2(\cdot)$ el operador laplaciano. En el caso particular en que la función f es nula, se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.3)$$

Las soluciones de la ecuación (2.3) se denominan *funciones armónicas* [7]. De acuerdo con la interpretación que se haga de la variable primaria u , se obtendrán los modelos matemáticos correspondientes a problemas de naturaleza diversa, tal y como se detalla a continuación.

2.1.1. Ecuación de calor

Sea un cuerpo conductor de calor que ocupa un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, siendo n_{dim} la dimensión espacial del problema. Sea $\partial\Omega$ la frontera de Ω , con normal exterior \mathbf{n} , que consideraremos que se puede descomponer en una parte $\partial_u\Omega$ con temperaturas impuestas, y una parte $\partial_t\Omega$ con flujo de calor impuesto de modo que se verifica $\overline{\partial_u\Omega} \cup \overline{\partial_t\Omega} = \partial\Omega$ y $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$.

La notación $\overline{\Omega}$ hace referencia al conjunto cerrado que resulta de la unión del conjunto interior con su frontera:

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad (2.4)$$

En cuanto al contorno de Ω la expresión $\partial\Omega = \overline{\partial_u\Omega} \cup \overline{\partial_t\Omega}$ indica que en la definición de $\partial\Omega$ intervienen los conjuntos abiertos $\partial_u\Omega$ y $\partial_t\Omega$ y sus fronteras.

La variable primaria de este problema es el campo de temperaturas T . Suponiendo que el cuerpo está en equilibrio térmico en régimen estacionario, el balance del flujo de calor por unidad de superficie \mathbf{q} y del calor suministrado por unidad de volumen por las fuentes internas f se expresa:

$$\text{div } \mathbf{q} = f \text{ en } \Omega \quad (2.5)$$

Considerando como ecuación constitutiva del material la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T; \quad q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

sustituyendo (2.6) en la ecuación (2.5) resulta:

$$-\text{div}(\mathbf{k} \nabla T) = f \text{ en } \Omega \quad (2.7)$$

Observación. El tensor de segundo orden \mathbf{k} que interviene en la ecuación constitutiva es simétrico y definido positivo. En el caso en el que el material sea homogéneo e isótropo dicho tensor queda definido mediante un único escalar k , pudiéndose escribir la ecuación (2.7) en la forma:

$$k \nabla^2 T = f \quad (2.8)$$

Las condiciones de contorno que consideraremos serán de dos tipos:

1. Temperatura prescrita:

$$T = \bar{T} \text{ en } \partial_u\Omega \quad (2.9)$$

2. Flujo de calor prescrito:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \text{ en } \partial_t\Omega \quad (2.10)$$

Observación. Otro tipo de condición de contorno es la convección/radiación, en la que el flujo de calor está definido por la expresión:

$$q_n = q_0 + H(T^n - T_0^n) \quad (2.11)$$

siendo q_0 un flujo constante prescrito, H es el coeficiente de película, n es un exponente entero y T_0 es la temperatura del medio que rodea a la superficie del contorno. Para $n = 1$ se obtiene la condición de convección lineal, y para $n = 4$ se obtiene la condición de radiación de Stefan-Boltzman.

2.1.2. Flujo en medios porosos

Se considera un medio poroso que ocupa un volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, cuya normal exterior es \mathbf{n} . Se denomina $\partial\Omega$ al contorno de Ω . Llamando $\partial_u\Omega$ a la parte del contorno con presiones impuestas y $\partial_t\Omega$ a la parte del contorno con flujo impuesto, supondremos que se verifica $\overline{\partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega} = \partial\Omega$ y $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$ (ver los requisitos descritos en el apartado 2.1.1) La variable primaria del problema es la altura piezométrica h . En el contexto de la mecánica de suelos h suele denominarse *potencial hidráulico*, y se puede expresar mediante la suma de la altura geométrica z y de la altura de presión $p/\rho g$ (siendo p la presión intersticial y ρg el peso específico).

El movimiento del fluido en Ω queda definido por el campo vectorial de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, que será independiente del tiempo en el caso estacionario. Por otra parte, las velocidades están relacionadas con el gradiente de la altura piezométrica h mediante la ley de Darcy:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k}\nabla h, \quad v_i = -k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

Observación. En un medio homogéneo e isótropo la ley de Darcy queda definida mediante un único parámetro de permeabilidad k . En el caso anisótropo la ley constitutiva queda caracterizada por un tensor de permeabilidades \mathbf{k} , simétrico y definido positivo.

Considerando flujo incompresible y que el medio poroso no varía su volumen (si no es así el problema debería abordarse mediante la teoría de la consolidación), la ecuación de continuidad se expresa:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.13), para un medio homogéneo e isótropo resulta:

$$\nabla^2 h = 0 \quad (2.14)$$

que es la ecuación diferencial que rige el problema de flujo estacionario en dichos medios porosos. Los dos tipos de condiciones de contorno que se consideran son:

1. Altura piezométrica impuesta:

$$h = \bar{h} \text{ en } \partial_u\Omega \quad (2.15)$$

2. Componente de la velocidad normal al contorno impuesta:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \bar{v} \text{ en } \partial_t\Omega \quad (2.16)$$

Observación. La condición de contorno correspondiente a una superficie libre establece que la presión en la misma es la atmosférica. Da lugar a un problema no lineal ya que la geometría de la superficie libre es desconocida a priori.

2.1.3. Torsión de Saint-Venant

Una pieza prismática está sometida a torsión de Saint-Venant (o torsión uniforme) cuando el momento torsor que actúa en ella es constante a lo largo de la misma y además los alabeos que se producen en las secciones rectas no tienen ninguna coacción que impida su libre movimiento. Los estados de torsión de perfiles cerrados de pared delgada y de piezas de sección maciza pueden aproximarse razonablemente bien con las hipótesis de la torsión uniforme.

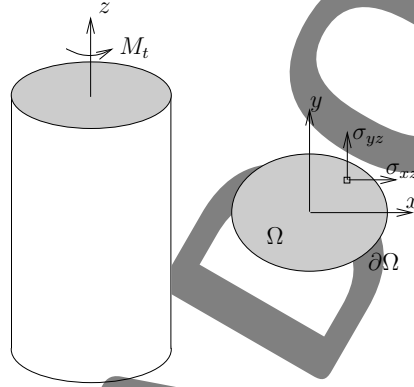


Figura 2.1: *Torsión de Saint-Venant*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la sección recta de la pieza prismática, siendo $\partial\Omega$ el contorno de Ω . Llamando $\psi = \psi(x, y)$ a la función de tensiones, que es la variable primaria del problema de torsión de Saint-Venant, se verifica:

$$\nabla^2 \psi = -2G\theta \text{ en } \Omega \quad (2.17)$$

siendo G el módulo de corte del material de la pieza prismática, que se supone elástico isótropo, y θ el giro de torsión (alrededor del eje longitudinal de la pieza) por unidad de longitud.

La función ψ debe de ser constante en el contorno:

$$\psi = \bar{\psi} \text{ en } \Omega \quad (2.18)$$

En secciones sin huecos (con un único contorno exterior) el valor de la función de tensiones en el contorno es arbitrario, tomándose generalmente igual a cero.

Las ecuaciones constitutivas son:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.20)$$

Finalmente, el momento torsor aplicado viene dado por:

$$M_t = 2 \int_{\Omega} \psi d\Omega = GJ\theta \quad (2.21)$$

siendo J el módulo de rigidez torsional.

2.1.4. Electrostática

Sea un material dieléctrico que ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$. Sea $\partial\Omega$ la frontera de Ω , con normal exterior \mathbf{n} , que consideraremos que se puede descomponer en una parte $\partial_u\Omega$ con potencial eléctrico impuesto, y una parte $\partial_t\Omega$ con intensidad de campo eléctrico impuesta, de modo que se cumplen los requisitos descritos en el apartado 2.1.1: $\overline{\partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega} = \partial\Omega$ y $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. La variable primaria del problema es el potencial eléctrico ϕ . Suponiendo que el cuerpo está en equilibrio estacionario, el balance de la intensidad de campo eléctrico por unidad de superficie \mathbf{E} y de carga eléctrica ρ suministrada por unidad de volumen por las fuentes internas se expresa:

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho \text{ en } \Omega \quad (2.22)$$

Esta ecuación, que expresa la conservación de la carga eléctrica, se conoce como ley de Gauss y es una de las denominadas ecuaciones de Maxwell.

La ecuación constitutiva del material relaciona la intensidad de campo eléctrico con el gradiente del potencial ϕ , mediante el tensor de permitividades ϵ :

$$\mathbf{E} = -\epsilon \nabla \phi; \quad E_i = -\epsilon_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en la ecuación (2.22) resulta la ecuación escalar:

$$-\text{div}(\epsilon \nabla \phi) = \rho \text{ en } \Omega \quad (2.24)$$

que corresponde, al igual que en los ejemplos anteriores, a la ecuación de Poisson generalizada. Las condiciones de contorno que consideraremos serán de dos tipos:

1. Potencial eléctrico o *voltaje* prescrito:

$$\phi = \bar{\phi} \text{ en } \partial_u\Omega \quad (2.25)$$

2. Flujo eléctrico o *corriente* prescrita:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \bar{E} \text{ en } \partial_t\Omega \quad (2.26)$$

2.2. Formulación fuerte

Sea $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ el dominio en el que se formula la ecuación de Poisson ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ conjunto abierto), cuyo contorno $\partial\Omega$ admite, de acuerdo con lo descrito en el apartado 2.1.1, la descomposición $\partial\Omega = \bar{\partial_u\Omega} \cup \bar{\partial_t\Omega}$, $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. Sea \mathbf{n} el vector normal exterior en un punto de $\partial\Omega$.

Observación. En lo sucesivo se seguirán los siguientes criterios para la notación:

- El producto totalmente contraído de los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} se indica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Por ejemplo, si A y B son tensores de segundo orden:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij} \quad (2.27)$$

y si son de primer orden:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (2.28)$$

suponiendo para las expresiones indiciales que los tensores están referidos a una base ortonormal.

- La aplicación natural de un tensor de segundo orden \mathbf{A} sobre uno de primer orden \mathbf{B} para obtener un tensor de primer orden \mathbf{D} , se expresa con \mathbf{AB} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB}, \quad D_i = A_{ij}B_j \quad (2.29)$$

- Cuando se considere necesario por motivos de claridad se empleará la notación indicial, siguiendo el convenio de Einstein (suma de índices repetidos).

La formulación fuerte del problema se establece a continuación.

Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{u} : \partial_u\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{q} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar el campo $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

$$\text{div } \mathbf{q} = f \text{ en } \Omega \quad (2.30)$$

$$u = \bar{u} \text{ en } \partial_u\Omega \quad (2.31)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \text{ en } \partial_t\Omega \quad (2.32)$$

verificándose la ecuación constitutiva:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla u \quad (2.33)$$

Observación. Las expresiones (2.31) y (2.32) se denominan condición de contorno de tipo Dirichlet y condición de contorno de tipo Neumann, respectivamente. En estas expresiones \bar{u} y \bar{q} corresponden al campo primario y al campo de flujo impuestos en los respectivos contornos.

2.3. Formulación débil

La formulación débil del problema de contorno de Poisson se establece en los siguientes términos:

Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $\bar{u} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{q} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar el campo $u \in \mathcal{U}$ tal que $\forall \delta u \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla \delta u + f \delta u) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{q} \delta u d\Gamma = 0 \quad (2.34)$$

siendo:

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \mid u(\mathbf{x}) = \bar{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega\} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \mid \delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega\} \quad (2.36)$$

y $H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ el espacio de Sobolev de grado 1 y orden 2:

$$H^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mid \quad \int_{\Omega} \|u\|_{2,1} d\Omega < \infty \right\} \quad (2.37)$$

donde $\|u\|_{2,1}$ es la norma de la energía.

Observación. Las funciones $u \in \mathcal{U}$ se denominan funciones de prueba, y las funciones arbitrarias $\delta u \in \mathcal{V}$ funciones de peso o variaciones.

Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (2.33), la expresión (2.34) se puede re-escribir como:

$$- \int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \mathbf{k} \nabla u d\Omega + \int_{\Omega} f \delta u d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{q} \delta u d\Gamma = 0 \quad (2.38)$$

2.4. Equivalencia de las formulaciones fuerte y débil

Es razonable suponer que las soluciones de las formulaciones fuerte y débil son la misma ya que no tendría sentido introducir dos formulaciones de un mismo problema de contorno cuyas soluciones sean distintas. Antes de demostrar la equivalencia de ambas formulaciones¹ se hace un recordatorio de los teoremas de la divergencia y de integración por partes.

Teorema 2.4.1 (Teorema de la divergencia). Sea $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ una función vectorial continua con derivada continua (de clase \mathcal{C}^1). Se verifica:

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{f} d\Omega = \int_{\partial \Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.39)$$

¹En lo sucesivo supondremos funciones lo suficientemente suaves para verificar los requisitos necesarios de derivabilidad e integrabilidad

que en notación indicial se expresa como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} f_i n_i d\Gamma \quad (2.40)$$

La demostración de este teorema se pueden consultar en la mayoría de los textos de Análisis Matemático.

Teorema 2.4.2 (Integración por partes). Sean dos funciones $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ y $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, ambas continuas de clase \mathcal{C}^1 . Se verifica:

$$\int_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{f} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla g d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.41)$$

y en notación indicial:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} g d\Omega = - \int_{\Omega} f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} g f_i n_i d\Gamma \quad (2.42)$$

Este teorema se demuestra de manera inmediata a partir de la expresión de la derivada de un producto y del teorema de la divergencia.

La demostración de la equivalencia entre las formulaciones fuerte y débil se establece con las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1. Si u es solución de la formulación fuerte, entonces lo es también de la formulación débil.

Demostración

Si u es solución del problema fuerte, de acuerdo con (2.31) se verifica que $u = \bar{u}$ en $\partial_u \Omega$, y por tanto $u \in \mathcal{U}$

Multiplicando (2.30) por $\delta u \in \mathcal{V}$, integrando por partes, y teniendo en cuenta (2.32) y que $\delta u = 0$ en $\partial_u \Omega$, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{q} - f) \delta u d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \delta u d\Gamma - \int_{\Omega} f \delta u d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla \delta u + f \delta u) d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{q} \delta u d\Gamma \end{aligned} \quad (2.43)$$

expresión que coincide con (2.34). □

Observación. La metodología para obtener la formulación débil de un problema de contorno dado consta de los siguientes pasos:

1. Multiplicar las ecuaciones en derivadas parciales por las funciones de prueba e integrar el resultado en el dominio en el que está definido el problema.
2. Reducir el orden de las derivadas de las funciones de prueba integrando por partes.

3. Imponer en el resultado del paso anterior las condiciones naturales de contorno.

El resultado es una ecuación que deben satisfacer todas las funciones de prueba. Este tipo de ecuaciones se denominan “ecuaciones funcionales”

Proposición 2.2. Si u es solución de la formulación débil, entonces lo es también de la formulación fuerte.

Demostración

Por ser u solución del problema débil, $u \in \mathcal{U}$ y por tanto u verifica la condición de contorno (2.31). Por otra parte, integrando por partes la expresión de la formulación débil, $\forall \delta u \in \mathcal{V}$ resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} f \delta u \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{q} \delta u \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \mathbf{q} + f) \delta u \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q}) \delta u \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.44)$$

con lo que deben demostrarse las dos igualdades siguientes:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + f = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.45)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q} = 0 \text{ en } \partial_t \Omega \quad (2.46)$$

a) Sea $\delta u = (-\operatorname{div} \mathbf{q} + f)\phi$, donde ϕ es una función que verifica:

- 1) $\phi > 0$ en Ω
- 2) $\phi = 0$ en $\partial \Omega$
- 3) ϕ suave

Sustituyendo en (2.44):

$$0 = \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \mathbf{q} + f)^2 \phi \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial_t \Omega} \phi (-\operatorname{div} \mathbf{q} + f) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q}) \, d\Gamma}_{=0} \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow -\operatorname{div} \mathbf{q} + f = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.48)$$

quedando demostrada la igualdad (2.45).

b) Sea ahora $\delta u = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q})\psi$, donde ψ verifica:

- 1) $\psi > 0$ en $\partial_t \Omega$
- 2) $\psi = 0$ en $\partial_u \Omega$
- 3) ψ suave

Sustituyendo en (2.44) y teniendo en cuenta que en el punto anterior ya se ha demostrado que $-\operatorname{div} \mathbf{q} + f = 0$ en Ω , resulta:

$$0 = \int_{\partial_t \Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q})^2 \psi d\Gamma \quad (2.49)$$

para lo que debe verificarse:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \bar{q} = 0 \text{ en } \partial_t \Omega \quad (2.50)$$

y por tanto (2.46) queda demostrada. □

2.5. Formulación de Galerkin

Sean los conjuntos \mathcal{U}^h y \mathcal{V}^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales \mathcal{U} y \mathcal{V} , definidos respectivamente en (2.35) y (2.36). Partiendo de la descomposición (método de Bubnov-Galerkin):

$$u^h = v^h + \bar{u}^h \quad (2.51)$$

donde $v^h \in \mathcal{V}^h$ y $\bar{u}^h = \bar{u}$ en $\partial_u \Omega$ (“aproximadamente”), la formulación de Galerkin se expresa en los siguientes términos:

Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $\bar{u} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{q} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u^h = v^h + \bar{u}^h \in \mathcal{U}^h$ tal que $\forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$ se cumple:

$$\int_{\Omega} \nabla^T \delta u^h \cdot \mathbf{k} \nabla v^h d\Omega = \int_{\Omega} f \delta u^h d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{q} \delta u^h d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla^T \delta u^h \cdot \mathbf{k} \nabla \bar{u}^h d\Omega \quad (2.52)$$

2.6. Formulación matricial

El dominio $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ en el que se define el problema de contorno que nos ocupa se discretiza en n_{elm} subdominios $\bar{\Omega}^e$, $1 \leq e \leq n_{\text{elm}}$, que se denominan *elementos*. En dos dimensiones los elementos generalmente son triángulos o cuadriláteros, y en tres dimensiones tetraedros o hexaedros (ver figura 2.2). Los puntos donde se obtienen los valores aproximados de la variable primaria (por ejemplo la temperatura) se denominan *nodos*. Habitualmente los nodos están situados en los vértices del elemento, en puntos intermedios de los lados e incluso en el interior de los propios elementos.

La discretización de $\bar{\Omega}$ en elementos finitos debe verificar:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \bar{\Omega}^e \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \quad (2.53)$$

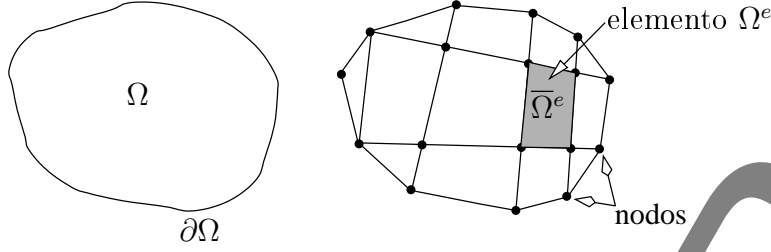


Figura 2.2: Discretización en elementos finitos del dominio Ω en que se define el problema de contorno

Sean $\eta = \{1, 2, \dots, n_{\text{nod}}\}$ el conjunto de números cardinales que corresponden a la numeración global de los n_{nod} nodos de la malla de elementos finitos. Sea $\eta_u \subset \eta$ el conjunto de nodos con la variable primaria prescrita. El conjunto complementario de η_u respecto de η lo denotaremos por $\eta - \eta_u$ y corresponde al conjunto de nodos en los que hay que calcular el valor aproximado de u^h . Dado que hay un grado de libertad por nodo, el cardinal de $\eta - \eta_u$ es igual al número de ecuaciones del problema: $\phi(\eta - \eta_u) = n_{\text{eq}}$.

Los elementos de \mathcal{V}^h en (2.52) se expresan:

$$\delta u^h = \sum_{A \in \eta - \eta_u} \delta u_A N_A, \quad v^h = \sum_{A \in \eta - \eta_u} d_A N_A \quad (2.54)$$

siendo N_A la función de interpolación (o función de forma) asociada al nodo A , δu_A una constante arbitraria y d_A la incógnita correspondiente al nodo A (por ejemplo la temperatura). Por otra parte las condiciones esenciales de contorno (2.31) se interpolan de acuerdo con:

$$\bar{u}^h = \sum_{A \in \eta_u} \bar{u}_A N_A \quad (2.55)$$

siendo \bar{u}_A el valor de la variable primaria impuesto en el nodo A : $\bar{u}_A = \bar{u}(\mathbf{x}_A)$.

Observación. La expresión (2.55) establece una interpolación de las condiciones esenciales de contorno, en términos de las funciones de forma, que aproxima la ecuación (2.31), y como tal aproximación introduce un error asociado a la solución numérica del problema de contorno. Otras fuentes de errores inevitables de discretización son: a) las posibles aproximaciones f^h y \bar{q}^h de las funciones f y \bar{q} , respectivamente; y b) La aproximación del contorno $\partial\Omega$ mediante los contornos de los elementos utilizados en la discretización de Ω .

Sustituyendo (2.54) y (2.55) en (2.52), y teniendo en cuenta que los coe-

ficientes δu_A son arbitrarios, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{B \in \eta - \eta_u} \left(\int_{\Omega} \nabla^T N_A \cdot \mathbf{k} \nabla N_B d\Omega \right) d_B = \int_{\Omega} N_A f d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} N_A \bar{q} d\Gamma - \sum_{B \in \eta_u} \left(\int_{\Omega} \nabla^T N_A \cdot \mathbf{k} \nabla N_B d\Omega \right) \bar{u}_B \quad (A \in \eta - \eta_u) \quad (2.56)$$

Para expresar en forma matricial este sistema lineal de ecuaciones es necesario establecer la numeración global de las $\eta - \eta_u$ incógnitas que lo constituyen. Esto se hace asignando a cada nodo A en el que la variable primaria es incógnita, el número de la incógnita global que le corresponde:

$$id(A) = \begin{cases} P & \text{si } A \in \eta - \eta_u \\ < 0 & \text{si } A \in \eta_u \end{cases} \quad (2.57)$$

siendo P el número de la incógnita global correspondiente al nodo A , y tal que $1 \leq P \leq n_{eq}$. La dimensión de la matriz \mathbf{id} es n_{nod} .

La expresión matricial del sistema de ecuaciones (2.56) es

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.58)$$

donde:

$$\mathbf{K} = [K_{PQ}], \quad \mathbf{d} = \{d_Q\}, \quad \mathbf{F} = \{F_P\}, \quad 1 \leq P, Q \leq n_{eq} \quad (2.59)$$

siendo:

$$K_{PQ} = \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial N_A}{\partial x_i} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} d\Omega, \quad P = id(A), \quad Q = id(B), \quad (2.60)$$

$$F_P = \int_{\Omega} N_A f d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} N_A \bar{q} d\Gamma - \sum_{B \in \eta_u} \left(\int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial N_A}{\partial x_i} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} d\Omega \right) \bar{u}_B \quad (2.61)$$

Teorema 2.6.1. *La matriz de rigidez \mathbf{K} es simétrica.*

La demostración es inmediata a partir de (2.60), teniendo en cuenta que la matriz constitutiva \mathbf{k} es simétrica.

Teorema 2.6.2. *La matriz de rigidez \mathbf{K} es definida positiva.*

Demostración

Esta demostración se hará en dos partes:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} \mathbf{a} \geq 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_{eq}}$

b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

a) A cada vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_{eq}}$, de componentes a_P , se le asocia una función de prueba $w^h \in \mathcal{V}^h$ mediante:

$$w^h = \sum_{A \in \eta - \eta_u} \bar{a}_A N_A, \quad \text{siendo: } \bar{a}_A = a_P, \quad P = id(A) \quad (2.62)$$

Entonces,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} \mathbf{a} = a_P K_{PQ} a_Q = \bar{a}_A \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_A}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} d\Omega \right) \bar{a}_B = \int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial w^h}{\partial x_j} d\Omega \geq 0 \quad (2.63)$$

por ser la matriz constitutiva \mathbf{k} definida positiva.

b) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} \mathbf{a} = 0$, de acuerdo con la demostración anterior:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial w^h}{\partial x_j} d\Omega}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w^h}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{por ser } k_{ij} \text{ definida positiva})$$

$$\Rightarrow w^h \text{ constante} \quad (2.64)$$

Pero si w^h es constante y de acuerdo con (2.36) $w^h = 0$ en $\partial_u \Omega$, entonces $w^h = 0$ en Ω . En consecuencia, de la definición de w^h en (2.62) se deduce que cada componente $a_P = 0$, y por tanto $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ como se quería demostrar. \square

2.7. Formulación de elementos finitos

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas globales se pueden expresar mediante la suma de las correspondientes contribuciones a nivel de cada elemento e :

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^e = [K_{PQ}^e] \quad (2.65)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{F}^e = [F_P^e] \quad (2.66)$$

siendo:

$$K_{PQ}^e = \int_{\Omega^e} \nabla^T N_A \cdot \mathbf{k} \nabla N_B d\Omega \quad (2.67)$$

$$F_P^e = \int_{\Omega^e} N_A f d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} N_A \bar{q} d\Gamma - \sum_{B \in \eta_u} \left(\int_{\Omega^e} \nabla^T N_A \cdot \mathbf{k} \nabla N_B d\Omega \right) \bar{u}_B \quad (2.68)$$

$$P = id(A), \quad Q = id(B), \quad \partial_t \Omega^e = \bar{\Omega}^e \cap \partial_t \Omega \quad (2.69)$$

Suponiendo ahora que el elemento e tiene n_{en} nodos, la matriz de rigidez elemental \mathbf{k}^e y el vector de fuerzas elemental \mathbf{f}^e se expresan:

$$\mathbf{k}^e = [k_{ab}^e], \quad \mathbf{f}^e = [f_a^e], \quad 1 \leq a, b \leq n_{\text{en}} \quad (2.70)$$

$$k_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \nabla^T N_a \cdot \mathbf{k} \nabla N_b d\Omega \quad (2.71)$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N_a f d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} N_a \bar{q} d\Gamma - \sum_{b=1}^{n_{\text{en}}} k_{ab}^e \bar{u}_b^e \quad (2.72)$$

donde \bar{u}_b^e es el valor de u impuesto en el nodo b del elemento e (igual a cero si el nodo no tiene condiciones esenciales de contorno). A partir de los vectores y matrices elementales se obtienen los globales mediante un operador de ensamble $\mathbf{A}[\cdot]$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_{\text{elm}} \\ \mathbf{k}^e \\ e=1 \end{matrix} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_{\text{elm}} \\ \mathbf{f}^e \\ e=1 \end{matrix} \quad (2.74)$$

La matriz de rigidez elemental se puede expresar en la forma “estándar”:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.75)$$

siendo:

$$\underbrace{\mathbf{B}}_{n_{\text{dim}} \times n_{\text{en}}} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n_{\text{en}}}], \quad \underbrace{\mathbf{B}_a}_{n_{\text{dim}} \times 1} = \nabla N_a \quad (2.76)$$

Problemas axisimétricos

En modelos de la ecuación de Poisson en los que exista simetría de revolución la formulación es prácticamente la misma. Únicamente hay que incluir el factor $2\pi r$ en cada integrando de la formulación débil para considerar en los volúmenes la ponderación correspondiente. Es decir, el elemento diferencial de área $d\Omega = 2\pi r dr dz$ reemplaza a $d\Omega = dx dy$, siendo r y z las coordenadas radial y axial, respectivamente, del problema axisimétrico. Asimismo, el factor 2π se puede simplificar pues aparece en todos los términos de la formulación.

2.7.1. Ensamble de las ecuaciones

En las expresiones (2.73) y (2.74), el operador \mathbf{A} genera la matriz de rigidez y el vector de fuerzas globales, a partir de las matrices y vectores calculados en cada elemento. A este proceso se le denomina *ensamble* o *ensamblaje*. Para realizar el ensamble es necesario conocer la topología de la malla de elementos finitos, que puede definirse mediante la conectividad y la numeración de las incógnitas del modelo:

1. *Conectividad.* Queda definida conociendo la numeración global correspondiente a los nodos de cada elemento. Desde el punto de vista computacional esta información puede almacenarse en una matriz de conectividad que denominaremos $ix(nen, elm)$, que asigna a cada nodo $a = 1 \dots nen$ (definido con la numeración local) del elemento e , el valor A correspondiente a la numeración global de dicho nodo local a :

$$ix(\underbrace{a}_{\text{nodo local}}, \underbrace{e}_{\text{elemento}}) = \underbrace{A}_{\text{nodo global}} \quad (2.77)$$

2. *Numeración de las incógnitas.* A cada grado de libertad se le asigna el número de la incógnita global que le corresponde. A efectos de la implementación computacional en una matriz id se almacenan los números globales de cada incógnita que le corresponden a los grados de libertad de cada nodo. En el caso de la ecuación de Poisson, cada nodo tiene un sólo grado de libertad por lo que la matriz id puede asimilarse a un vector:

$$id(\underbrace{A}_{\text{nodo global}}) = \underbrace{P}_{\text{ecuación}} \quad (2.78)$$

En un código de elementos finitos las matrices ix e id se construyen a partir de los datos de entrada correspondientes a la definición de los elementos (conectividad) y de las condiciones de contorno. Con objeto de clarificar el proceso de ensamble, a partir de ix e id se puede construir una matriz ld si bien la información que proporciona es redundante:

$$ld(a, e) = id(ix(a, e)) \quad (2.79)$$

A partir de los valores almacenados en ld el procedimiento de ensamble es automático, tal y como se explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Se considera la malla de la siguiente figura, en la que se muestra la numeración global de los nodos, la numeración de los elementos y las condiciones de contorno.

A partir de la conectividad se genera la matriz ix :

$$ix = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

La matriz id se genera asignando números consecutivos a las ecuaciones correspondientes a los nodos en los que hay que calcular el campo incógnita. Como los nodos 1, 4, 7 y 10 tienen condiciones esenciales de contorno, no

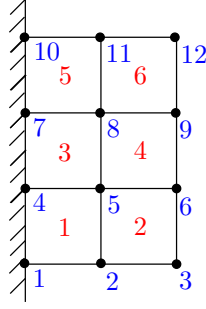


Figura 2.3: Malla de elementos de cuatro nodos. Numeración de nodos, elementos y condiciones de contorno.

tienen grados de libertad activos y por tanto se le asigna un número negativo. En este ejemplo resulta:

$$\mathbf{id} = (-1 \ 1 \ 2 \ -2 \ 3 \ 4 \ -3 \ 5 \ 6 \ -4 \ 7 \ 8) \quad (2.81)$$

Sustituyendo (2.80) y (2.81) en (2.79) se obtiene la matriz \mathbf{ld} :

$$\mathbf{ld} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & -3 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Los valores positivos y su posición en la columna j -ésima de la matriz \mathbf{ld} tiene la información necesaria para ensamblar la matriz y vector elementales correspondientes al elemento j . Por ejemplo, para el elemento 3:

$$\mathbf{ld}(a, 3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} K_{33} &\leftarrow K_{33} + k_{22}^e \\ K_{35} &\leftarrow K_{35} + k_{23}^e \\ K_{53} &\leftarrow K_{53} + k_{32}^e \\ K_{55} &\leftarrow K_{55} + k_{33}^e \\ F_3 &\leftarrow F_3 + f_2^e \\ F_5 &\leftarrow F_5 + f_3^e \end{aligned}$$

2.8. Ejercicios

1. Sea \mathbf{d}^e el vector de temperaturas nodales del elemento e . Demostrar que el flujo de calor en un punto $x \in \bar{\Omega}^e$ se puede calcular con la expresión:

$$\mathbf{q}(x) = -\mathbf{k}(x) \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{B}_a \mathbf{d}_a^e$$

siendo $\mathbf{k}(x)$ la matriz constitutiva de la ley de Fourier (matriz de conductividades) y \mathbf{B}_a la matriz de interpolación del gradiente de temperaturas. (Ejercicio 1, página 71, de la referencia [13])