



Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

# MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

## Elementos isoparamétricos

Felipe Gabaldón Castillo



## Índice

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- 1 Ejemplo: el elemento CST
- 2 Cuadraturas
- 3 Elementos isoparamétricos



# Ejemplo: CST para problemas de tensión plana

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

A continuación se desarrollarán las ecuaciones a nivel elemental del triángulo de deformación constante (CST) para el problema de tensión plana. Este elemento presenta las siguientes características:

- Es un elemento isoparamétrico
- No es necesario emplear cuadraturas para la integración numérica, ya que las integrales se pueden resolver de forma exacta.
- Se utiliza en aplicaciones no estructurales por la facilidad para generar mallas, ya que en análisis estructural sus prestaciones son bastante pobres.



## Geometría y sistema de coordenadas

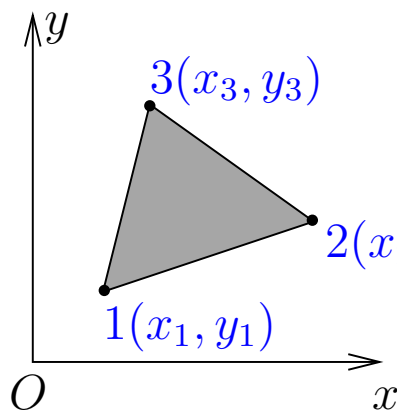
Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos



$$2A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

- Coordenadas triangulares:  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$
- $\xi_i = \text{cte}$  es una recta paralela al lado opuesto al nodo  $i$
- No son independientes:  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$



# Interpolación lineal

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

Una función lineal  $f$  definida en el triángulo se expresa en coordenadas cartesianas:

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (1)$$

determinándose los coeficientes  $a_i$  a partir de tres condiciones que proporcionen los valores  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  (que en el contexto del MEF se denominan "valores nodales").

La expresión de  $f$  en coordenadas triangulares hace uso directamente de los valores nodales:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = [f_1 \ f_2 \ f_3] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$



# Transformación de coordenadas

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

siendo  $x_{jk} = x_j - x_k$ ,  $y_{jk} = y_j - y_k$  y  $A_{jk} = 0,5(x_jy_k - x_ky_j)$  es el área encerrada por los nodos  $j$ ,  $k$  y el origen de coordenadas.



# Formulación del elemento CST

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Funciones de forma:  $N_j = \xi_j, \quad j = 1 \dots 3$
- Interpolación del campo de desplazamientos:

$$u_x = u_{x1}\xi_1 + u_{x2}\xi_2 + u_{x3}\xi_3 \quad (5)$$

$$u_y = u_{y1}\xi_1 + u_{y2}\xi_2 + u_{y3}\xi_3 \quad (6)$$

que en forma matricial se expresa:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

que es la particularización de

$$\mathbf{u}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}} \mathbf{d}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}^T \mathbf{d}^e \text{ para el triángulo CST}$$



# Formulación del elemento CST: Derivadas parciales

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- A partir de las relaciones (3) y (4) es inmediato obtener las relaciones:

$$2A \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = y_{jk}, \quad 2A \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = x_{kj} \quad (8)$$

siendo  $j$  y  $k$  las permutaciones cíclicas de  $i$ .

- Las derivadas de  $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  respecto de las coordenadas cartesianas se obtienen mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1} y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} y_{12} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1} x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} x_{21} \right) \quad (10)$$



# Formulación del elemento CST

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Relaciones deformación–desplazamiento

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

siendo:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Obsérvese que las deformaciones son constantes en el elemento



# Formulación del elemento CST

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

- La matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  se supondrá constante en el elemento. Por tanto, dado que las deformaciones son constantes en el elemento las tensiones también lo son.



## Formulación del elemento CST

Elementos iso-paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-paramétricos

- Matriz de rigidez elemental

La expresión  $K^e = \int_{\Omega^e} B^T C B d\Omega$  de la matriz de rigidez elemental en este caso se puede escribir:

$$K^e = B^T C B \int_{\Omega^e} h d\Omega \quad (14)$$

siendo  $h$  el espesor y  $\Omega^e$  el dominio del triángulo. Si el espesor es constante la matriz de rigidez se expresa en forma cerrada:

$$K^e = \frac{h}{4A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \quad (15)$$



## Formulación del elemento CST

Elementos iso-paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-paramétricos

- Vector de fuerzas nodales (volumétricas)

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} h N \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega^e} h \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 \end{pmatrix} \mathbf{b} d\Omega \quad (16)$$

En el caso más sencillo en que  $h$  y  $\mathbf{b}$  sean constantes en el elemento, y teniendo en cuenta:

$$\int_{\Omega^e} \xi_1 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_2 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_3 d\Omega = A/3 \quad (17)$$

resulta:

$$(\mathbf{f}^e)^T = \frac{Ah}{3} \begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} & b_{x2} & b_{y2} & b_{x3} & b_{y3} \end{pmatrix} \quad (18)$$



# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- La integración numérica es un ingrediente imprescindible en el cálculo de las integrales elementales
- Existen diversas cuadraturas: Gauss, Simpson, Lobatto, etc.
- Las cuadraturas de Gauss proporcionan mayor exactitud que otras reglas para un determinado número de puntos de integración
- En cada punto de Gauss se realiza un número importante de operaciones



# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Cuadraturas de Gauss en una dimensión:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_1^p w_i F(\xi_i) \quad (19)$$

siendo  $p$  el número de puntos de integración,  $\xi_i$  las coordenadas de cada punto  $i$  y  $w_i$  los pesos correspondientes.

- Algunas cuadraturas:

$$\begin{aligned} 1 \text{ punto: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx 2F(0) \\ 2 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx F(-1/\sqrt{3}) + F(1/\sqrt{3}) \\ 3 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \frac{5}{9}F(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F(\sqrt{3/5}) \\ 4 \text{ puntos: } & \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx w_1F(\xi_1) + w_2F(\xi_2) + w_3F(\xi_3) + w_4F(\xi_4) \end{aligned}$$



# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Para la regla de 4 puntos:

$$w_1 = w_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{5/6}, \quad w_2 = w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5/6}$$

$$\xi_1 = -\xi_4 = -\sqrt{(3 + 2\sqrt{6/5})/7}, \quad \xi_2 = -\xi_3 = -\sqrt{(3 - 2\sqrt{6/5})/7}$$

- Las cuatro reglas descritas integran de manera exacta polinomios de hasta grado 1, 3, 5 y 7, respectivamente.
- En general, una cuadratura 1D de Gauss con  $p$  puntos integra exactamente polinomios de orden  $2p - 1$



# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Para calcular la integral de  $F(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  se hace un cambio de variable definiendo  $\xi$  en el intervalo biunitario:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 F(\xi) J d\xi$$

siendo:

$$\xi = \frac{2}{b-a} \left( x - \frac{1}{2}(a+b) \right), \quad J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}$$

- Las cuadraturas de Gauss de orden más alto están tabuladas en los libros de cálculo numérico (en HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS. ABRAMOWITZ & STEGUN hasta 96 puntos). No obstante, las cuadraturas de orden superior a 4 no se pueden expresar de manera cerrada.





# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones
  - Las cuadraturas de Gauss más simples se obtienen aplicando las cuadraturas 1D a cada variable. Para ello las integrales han de transformarse al cuadrilátero biunitario.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

siendo  $p_1$  y  $p_2$  el número de puntos en cada dirección (que son iguales si las funciones de forma también lo son).



# Integración numérica

Elementos iso-  
paramétricos

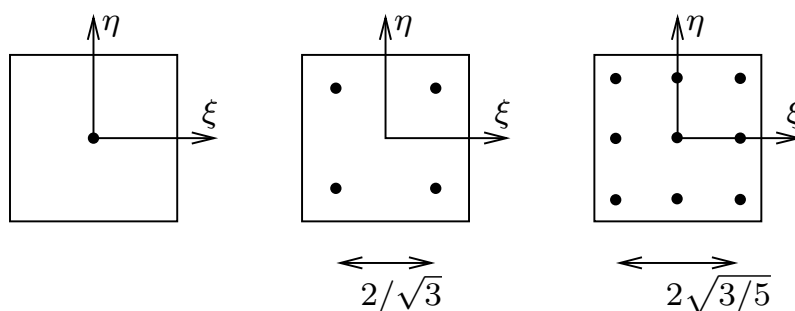
F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones



1 punto:

$$w_1 = 4,$$

2 puntos:

$$w_{2 \times 2} = 1,$$

3 puntos:

$$\begin{aligned} w_1 = w_3 = w_7 = w_9 &= \frac{25}{81} \\ w_2 = w_4 = w_6 = w_8 &= \frac{40}{81} \\ w_5 &= \frac{64}{81} \end{aligned}$$



# Elementos isoparamétricos

Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

Las relaciones geométricas y la interpolación del campo de desplazamientos verifican:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n_{\text{nod}}^e} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n_{\text{nod}}^e} \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn_{\text{nod}}^e} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn_{\text{nod}}^e} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{n_{\text{nod}}^e} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

El triángulo CST descrito anteriormente se expresa de acuerdo con (20) tomando  $n_{\text{nod}}^e = 3$ ,  $N_1 = \xi_1$ ,  $N_2 = \xi_2$  y  $N_3 = \xi_3$



# Elementos isoparamétricos

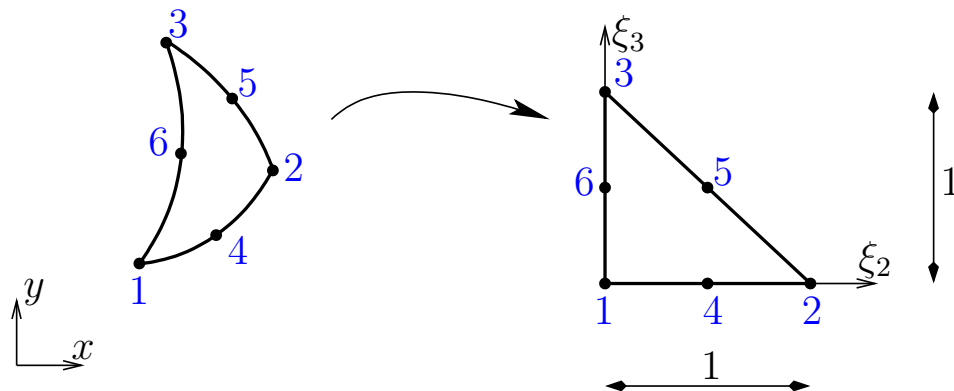
Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos



Triángulo cuadrático de seis nodos



# Elementos isoparamétricos

Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

## ● Triángulo cuadrático

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

siendo:

$$N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \quad N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \quad N_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \quad (22)$$

$$N_4 = 4\xi_1\xi_2 \quad N_5 = 4\xi_2\xi_3 \quad N_6 = 4\xi_3\xi_1 \quad (23)$$



# Elementos isoparamétricos

Elementos isoparamétricos

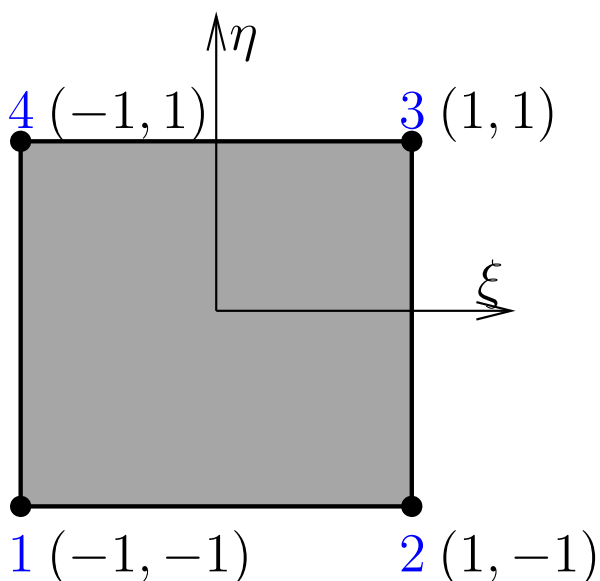
F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

## ● Elementos cuadriláteros



Cuadrilátero bilineal



# Elementos isoparamétricos

Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

## ● Cuadrilátero bilineal

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

siendo:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (25)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (26)$$



# Elementos isoparamétricos

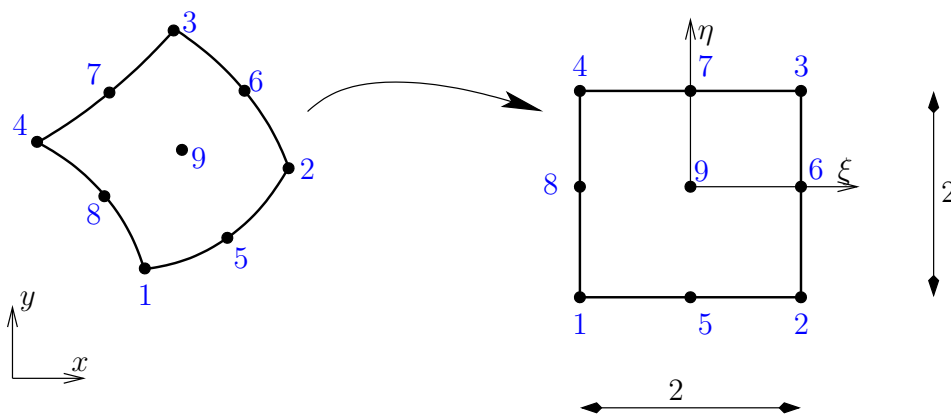
Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos



Cuadrilátero bicuadrático



# Elementos isoparamétricos

Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

## ● Cuadrilátero bicuadrático

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} & u_{x7} & u_{x8} & u_{x9} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} & u_{y7} & u_{y8} & u_{y9} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_9 \end{Bmatrix}$$

En este caso las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)\xi\eta, & N_2 &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)\xi\eta, & N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\xi\eta \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)\xi\eta, & N_5 &= -\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta, & N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)\xi \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)\eta, & N_8 &= -\frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)\xi, & N_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned}$$



# Diseño de las funciones de forma

Elementos isoparamétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el elemento CST

Cuadraturas

Elementos isoparamétricos

## Requisitos:

- La función de forma elemental  $N_A$  debe tomar valor 1 en el nodo  $A$ , y valor 0 en los demás nodos del elemento.
- $N_A$  debe ser nula en los contornos de los elementos que no contengan al nodo  $A$

y para problemas de índice variacional  $m$ :

- Las funciones de forma  $N_A$  definidas en los elementos que comparten el nodo  $A$  deben ser continuas de clase  $C^{m-1}$  entre los elementos adyacentes.
- Las funciones de forma de un elemento deben poder expresar de forma exacta cualquier polinomio de grado  $m$  en las coordenadas del elemento.

Para garantizar la complitud, en los elementos isoparamétricos es suficiente con verificar la condición de partición de la unidad.



## Diseño de las funciones de forma (elementos 2D)

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Las funciones de forma se expresan como el producto de  $n$  factores  $L_j(\xi_k)$ :

$$N_A = c_A L_1 L_2 \dots L_n \quad (27)$$

siendo las expresiones  $L_j = 0$  ecuaciones homogéneas de líneas (rectas o curvas) que son funciones lineales de las coordenadas naturales.

- Metodología de diseño:
  - Las  $L_j$  son el mínimo número de líneas isoparamétricas, con expresión lineal en las coordenadas naturales, que contengan a todos los nodos del elemento excepto el nodo  $A$  (generalmente estas líneas corresponden a los lados del elemento y a líneas que unen los puntos medios de los lados).
  - El coeficiente  $c_A$  se calcula para que  $N_A$  valga uno en el nodo  $A$ .



## Diseño de las funciones de forma (elementos 2D)

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Metodología de diseño (continuación):
  - Comprobar que  $N_A$  vale cero en todos los lados del elemento que no contienen al nodo  $A$ .
  - Comprobar el grado del polinomio correspondiente a particularizar la función de forma en los lados del elemento que contienen al nodo  $A$ . Si el número de nodos en un lado del elemento es  $p$ , para que se verifique el requisito de compatibilidad el grado del polinomio en dicho lado debe ser  $p - 1$ .
  - Una vez verificados los requisitos anteriores, comprobar finalmente que las funciones de forma definidas en el elemento suman la unidad.
- Ejemplo: obtención de las funciones de forma del triángulo cuadrático.



# Derivadas parciales

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Jacobiano de la transformación isoparamétrica

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (29)$$

La matriz  $\mathbf{J}$  se denomina *matriz Jacobiana* de la transformación isoparamétrica



# Derivadas parciales

Elementos iso-  
paramétricos

F. Gabaldón

Ejemplo: el  
elemento CST

Cuadraturas

Elementos iso-  
paramétricos

- Cálculo de las derivadas parciales.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (30)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}^e} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (31)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \quad (32)$$