MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Elasticidad lineal

Felipe Gabaldón Castillo

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Índice

Introducción

- Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, $\mathbf{u}$ el vector desplazamiento y $\mathbf{b}$ el vector de fuerzas volumétricas.
- Consideraremos el tensor de deformaciones infinitesimales, que se define como la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u}, \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

- Las componentes del tensor de tensiones se expresan como combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones mediante un tensor de cuarto orden $\mathbf{C}$ (Ley de Hooke generalizada), cuyas componentes C_{ijkl} son constantes y se denominan "coeficientes elásticos":

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Introducción

El tensor de módulos elásticos tiene las siguientes propiedades:

1. Simetría mayor:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{3}$$

2. Simetría menor:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \qquad C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{4}$$

3. Es definido positivo:

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} \geq 0 \quad \forall \Phi_{ij} \text{ simétrico} \tag{5}$$

$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ij} = 0 \tag{6}$$

Consideraremos un sólido elástico definido por un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{dim}}}$ con contorno $\partial\Omega$, tal que:

$$\partial\Omega = \partial_{u_i}\Omega \cup \partial_{t_i}\Omega \qquad \emptyset = \partial_{u_i}\Omega \cap \partial_{t_i}\Omega \tag{7}$$

siendo $\partial_{u_i}\Omega$ la parte del contorno con desplazamientos impuestos en dirección i, y $\partial_{t_i}\Omega$ la parte con tensiones impuestas en dirección i.

$$\underset{\sim}{\nabla} \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Descomposición aditiva de un tensor de 2° orden

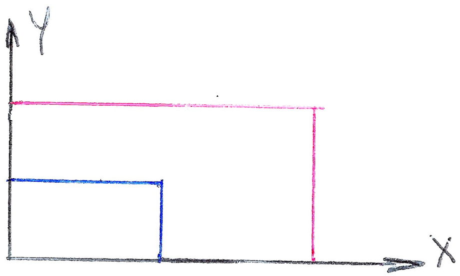
$$\underset{\sim}{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T)}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T)}_{\text{hemisimétrico}}$$

$$\nabla^s \bar{u}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Ejemplo:

$u(x,y) = x$

$v(x,y) = y$



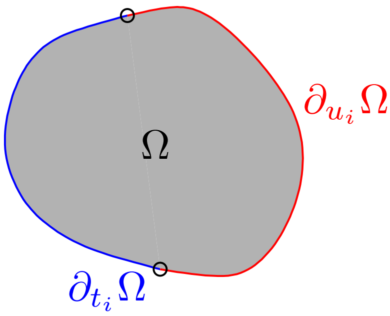
$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1$

$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1$

$\varepsilon_{xy} = 0$

Formulación fuerte

Sea $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ el dominio ocupado por un sólido, cuyo contorno es $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega$ con $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:



Dados $\mathbf{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathbb{R}^n$ que cumple:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \qquad \text{en} \;\; \Omega \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \qquad \text{en} \;\; \partial_t\Omega \tag{9}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{en} \;\; \partial_u\Omega \tag{10}$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u}$

Formulación débil

Dados $\mathbf{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y las funciones $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in \delta \mid \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \delta\mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \right) \, d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \tag{11}$$

siendo:

$$\delta = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \partial_u\Omega \right\} \tag{12}$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \partial_u\Omega \right\} \tag{13}$$

y $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

$$H^1 = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \Big| \quad \int_\Omega \|\mathbf{u}\|_{2,1} \, d\Omega < \infty \right\}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

- Lema 1. Descomposición euclídea de un tensor de orden 2

$$s_{ij} = \underbrace{s_{(ij)}}_{\text{simétrico}} + \underbrace{s_{[ij]}}_{\text{hemisimétrico}} \quad ; \quad s_{(ij)} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2}, \; s_{[ij]} = \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2}$$

- Lema 2. Sea s_{ij} un tensor simétrico y t_{ij} un tensor no simétrico. Entonces,

$$s_{ij} t_{ij} = s_{ij} t_{(ij)}$$

El lema queda demostrado si $s_{ij} t_{[ij]} = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} s_{ij} t_{[ij]} &= -s_{ij} t_{[ji]} \\ &= -s_{ji} t_{[ji]} \\ &= -s_{ij} t_{[ij]} \end{aligned}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Si $\mathbf{u}$ es solución del problema fuerte, multiplicando (8) por $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e integrando en Ω:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega \\ &= \int_\Omega (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j} d\Omega + \int_\Omega b_i \delta u_i d\Omega \\ &= -\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{(i,j)} d\Omega + \int_\Omega b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \qquad (14)$$

y por tanto u_i es solución del problema débil

Equivalencia de ambas formulaciones

Sea u_i solución del problema débil. Dado que $u_i \in \delta_i$, $u_i = \overline{u}_i$ en $\partial_{u_i}\Omega$. De (11):

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j} d\Omega + \int_\Omega b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \overline{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= -\int_\Omega (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega + \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \overline{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega - \int_{\partial_{t_i}\Omega} (\sigma_{ij} n_j - \overline{t}_i)\delta u_i d\Gamma \qquad (15) \end{aligned}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

Sean:

$$\alpha_i = \sigma_{ij,j} + b_i \qquad (16)$$

$$\beta_i = \sigma_{ij} n_j - \overline{t}_i \qquad (17)$$

La equivalencia entre ambas formulaciones estará demostrada si se verifica que $\alpha_i = 0$ en Ω y $\beta_i = 0$ en $\partial_{t_i}\Omega$. Sea $\delta u_i = \alpha_i \phi$, donde:

$$\begin{aligned} &\phi > 0 \text{ en } \Omega \\ &\phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ &\phi \text{ suave} \end{aligned}$$

Con estas condiciones queda garantizado que $\delta u_i \in \mathcal{V}$.

Equivalencia de ambas formulaciones

Sustituyendo este δu_i en (15):

$$0 = \int_\Omega \underbrace{\alpha_i\,(\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{\;\phi\;}_{>0})d\Omega \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \text{ en } \Omega \qquad (18)$$

Análogamente, tomemos ahora $\delta u_i = \delta_{i1}\beta_1\psi$, donde:

$$\begin{aligned} &\psi > 0 \text{ en } \partial_{t_1}\Omega \\ &\psi = 0 \text{ en } \partial_{u_1}\Omega \\ &\psi \text{ suave} \end{aligned}$$

Sustituyendo esta nueva expresión de $\delta u_i \in \mathcal{V}$ en (15):

$$0 = \int_{\partial_{t_1}\Omega} \underbrace{\beta_1\,(\beta_1}_{\geq 0} \underbrace{\;\psi\;}_{>0})d\Omega \Rightarrow \quad \beta_1 = 0 \text{ en } \partial_{t_1}\Omega \qquad (19)$$

Formulaciones variacionales

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Considerando el funcional de la energía potencial:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_\Omega (W(\mathbf{x},\varepsilon) - \mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\; d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \bar{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\, d\Gamma \qquad (20)$$

la ecuación (11) equivale a establecer la condición de estacionariedad del funcional (20):

$$\delta\Pi_p(\mathbf{u}) = 0 \qquad (21)$$

- Se dice que (11) es la ecuación variacional del problema (21), y que las ecuación (8) es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema variacional (21).
- Para la ley de Hooke:

$$W(\mathbf{x},\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\mathbf{C}\varepsilon \qquad (22)$$

Formulaciones variacionales

- Existen otros principios variacionales diferentes al expresado en (21), asociado al funcional de la *energía potencial total* (20).
- Dichos principios son la base de la formulación de los denominados "elementos mixtos".
- En general se deducen a partir de "funcionales multicampo" como, por ejemplo, el de Hu-Washizu:

$$\Pi_W(\mathbf{u}, \varepsilon, \boldsymbol{\sigma}) = \int_\Omega \Big(W(\mathbf{x}, \varepsilon) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \Big) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma$$

Formulación de Galerkin

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

- Sean ν^h y δ^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales ν y δ, respectivamente
- Se adopta la descomposición: $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \overline{\mathbf{u}}^h$ con $\mathbf{v}^h \in \nu^h$ y $\overline{\mathbf{u}}^h = \overline{\mathbf{u}}$ en $\partial_u \Omega$ ("aproximadamente")
- Dados $\mathbf{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y las funciones $\overline{\mathbf{u}} : \partial_u \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t \Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \overline{\mathbf{u}}^h$, con $\delta \mathbf{v}^h \in \nu^h$, tal que $\forall \delta \mathbf{u}^h \in \nu^h$ se cumple:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\nabla}^S \delta \mathbf{u}^h \, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}^h \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}^h \, d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^S \overline{\mathbf{u}}^h \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\nabla}^S \delta \mathbf{u}^h \, d\Omega \tag{23}$$

Formulación de elementos finitos

- El dominio Ω se discretiza en n_{elm} elementos Ω^e:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \Omega^e \qquad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \tag{24}$$

- El elemento Ω^e se transforma en un "cubo unitario"

$$\square = \underbrace{[-1,1] \times \cdots \times [-1,1]}_{n_{\mathrm{dim}}}$$

definido en el espacio isoparamétrico de coordenadas $\{\boldsymbol{\xi}\}$:

$$\phi : \boldsymbol{\xi} \in \square \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega^e; \qquad \mathbf{x} = \phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n_{\mathrm{nod}}^e} \mathbf{x}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) \tag{25}$$

siendo $\mathbf{x}_A$ las coordenadas de los nodos del elemento e

Formulación de elementos finitos

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

- Los subespacios de dimensión finita δ^h y $\mathcal{V}^h$ se definen mediante unas funciones de interpolación $N_A, \ A = 1 \dots n_{\mathrm{nod}}$ (polinómicas), que se denominan "funciones de forma"

$$\delta^h = \left\{ \mathbf{u}^h \in \delta \mid u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} u_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{A \in \eta_{u_i}} \overline{u}_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) \right\}$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \delta\mathbf{u}^h \in \mathcal{V} \mid \delta u_i^h = 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \partial_{u_i}\Omega; \quad \delta u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) \right\}$$

siendo $\eta = \{1, 2, \dots, n_{\mathrm{numnp}}\}$ el conjunto de números de los n_{numnp} nodos de la malla, $\eta_{u_i} \subset \eta$ el conjunto de nodos en los que $u_i^h = \overline{u}_i$, y $\eta - \eta_{u_i}$ el conjunto complementario de η_{u_i}

Interpolación del campo de desplazamientos

Si se emplea una formulación isoparamétrica que interpola los desplazamientos con la misma interpolación que las coordenadas (25):

$$\mathbf{u}^h = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \mathbf{d}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}^T \mathbf{d}^e \tag{26}$$

siendo $\mathbf{d}^e$ el vector de desplazamientos nodales del elemento e y $\mathbf{N}$ la matriz de funciones de forma del elemento. Por ejemplo, en 2D:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_{\mathrm{n}_{nod}} & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_{\mathrm{n}_{nod}} \end{pmatrix} \mathbf{d}^e \tag{27}$$

Interpolación del campo de deformaciones

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

Con la notación en que las tensiones y deformaciones se expresan en forma de vector (por ejemplo en 2D: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T$) y derivando (26), la interpolación del campo de deformaciones se expresa:

$$\nabla^S u^h_{ij} = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \frac{1}{2}\left(N^e_{A,i} d_{Aj} + N^e_{A,j} d_{Ai}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}^S \mathbf{u}^h = \mathbf{B}\mathbf{d}^e \tag{28}$$

En 2D:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_1} \end{pmatrix} \mathbf{d}^e \tag{29}$$

Ecuaciones de elementos finitos

Sustituyendo (26) y (28) en (23) e imponiendo que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$ son arbitrarios, después de operar se obtiene:

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\varepsilon)\, d\Omega \right] = \mathbf{0} \tag{30}$$

donde $\mathsf{A}[\cdot]$ es el operador de ensamblaje y $\mathbf{f}^{e,\text{ext}}$ es el vector de fuerzas externas convencional que se obtiene a partir de la expresión (23):

$$\mathbf{f}^{e,\text{ext}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{31}$$

Observaciones:

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal

- La ecuación (30) está planteada en forma residual (anulando la diferencia entre las fuerzas externas y las fuerzas internas), que es la adecuada para problemas no lineales.
- En lo sucesivo se considerará el caso de la elasticidad lineal, en el que si denominamos $\mathbf{C}$ a la matriz de módulos elásticos (o matriz constitutiva), resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\varepsilon) = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d}^e \tag{32}$$

entonces la ecuación (30) se expresa:

$$\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, d\Omega \right) \right] \mathbf{d} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \mathbf{f}^{e,\text{ext}} \tag{33}$$

Ecuaciones de elementos finitos

- La matriz de rigidez elemental se define como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \qquad (34)$$

- Ensamblando los vectores de fuerzas elementales y las matrices de rigidez elementales:

$$\mathbf{f} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \mathbf{f}^{e,\mathrm{ext}} \qquad (35)$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \mathbf{K}^{e} \qquad (36)$$

el sistema (33) se expresa:

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \Rightarrow \qquad \mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \qquad (37)$$

Ecuaciones de la elasticidad lineal

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}
\end{aligned}$$

- Módulo de corte:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Deformación volumétrica

$$e = \varepsilon_{ii}$$

- Módulo de def. volumétrica

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii} \Rightarrow p = -ke$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Elasticidad 2D. Deformación plana

- La condición de deformación plana es ($\varepsilon_{zz} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (39)$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (40)$$

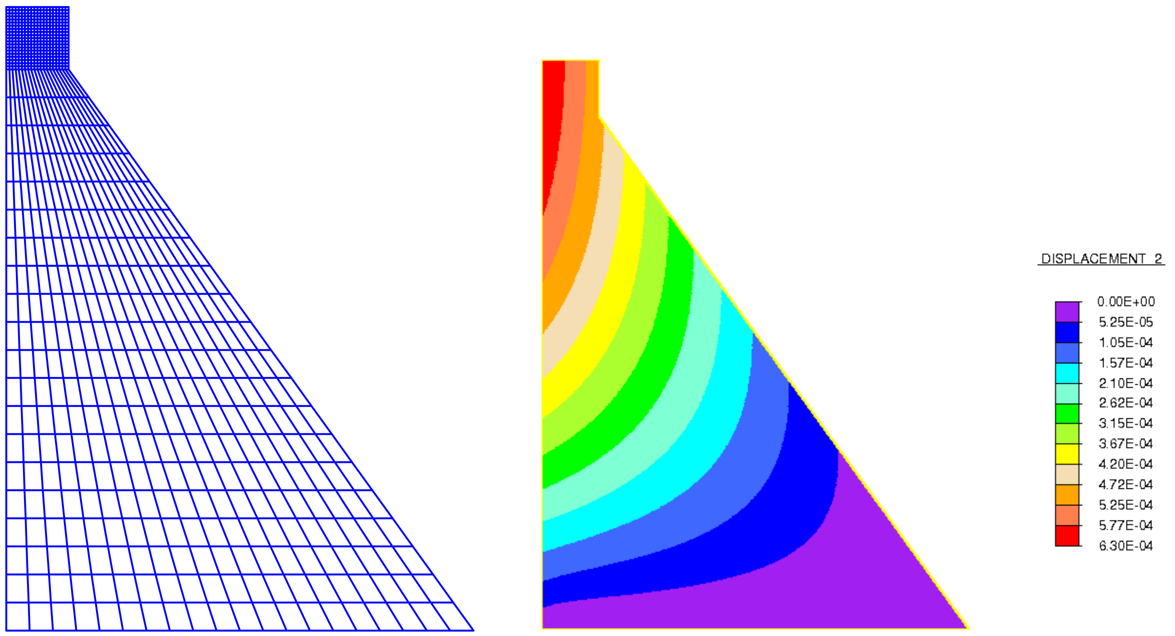
Deformación plana: aplicaciones

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción
Formulación del problema de contorno
Formulaciones variacionales
Formulación de Galerkin
Formulación de Elementos Finitos
Formulación matricial
Elasticidad lineal

Deformación plana: aplicaciones



Elasticidad 2D. Tensión plana

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

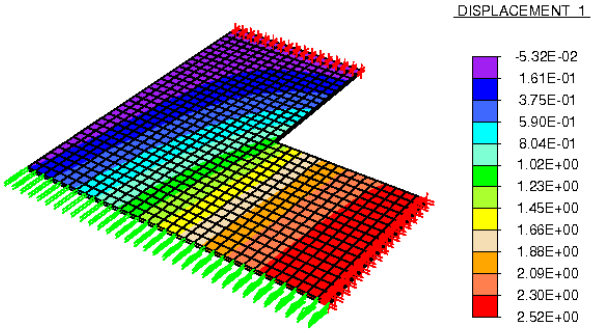
Elasticidad lineal

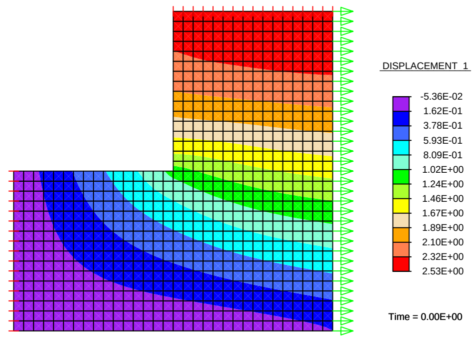
- La condición de tensión plana es ($\sigma_{zz} = 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{41}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{42}$$

Elasticidad 2D. Tensión plana

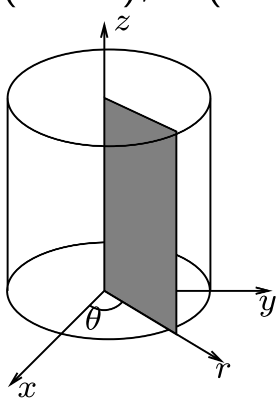




Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

Elasticidad lineal
F. Gabaldón
Introducción
Formulación del problema de contorno
Formulaciones variacionales
Formulación de Galerkin
Formulación de Elementos Finitos
Formulación matricial
Elasticidad lineal

- Se expresa en términos de las coordenadas cilíndricas r (radial), z (axial) y θ (circunferencial).



- Condición de simetría axial: todas las variables son independientes de θ y además: $u_\theta = 0$, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0$
- En todos los integrandos hay que considerar un factor de $2\pi r$

Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

- Relación tensión - deformación

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{array} \right\} \tag{43}$$

- La matriz **B** (de interpolación del campo de deformaciones) es:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{pmatrix} \qquad a = 1 \dots n_{\mathrm{nen}} \tag{44}$$

Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

Elasticidad lineal
F. Gabaldón
Introducción
Formulación del problema de contorno
Formulaciones variacionales
Formulación de Galerkin
Formulación de Elementos Finitos
Formulación matricial
Elasticidad lineal

Elasticidad 3D

- Relación tensión - deformación

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cccccc} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon xx \\ \varepsilon yy \\ \varepsilon zz \\ \varepsilon yz \\ \varepsilon xz \\ \varepsilon xy \end{array} \right\} \tag{45}$$

Elasticidad 3D

Elasticidad lineal

F. Gabaldón

Introducción

Formulación del problema de contorno

Formulaciones variacionales

Formulación de Galerkin

Formulación de Elementos Finitos

Formulación matricial

Elasticidad lineal