MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
Elementos isoparamétricos

Felipe Gabaldón Castillo

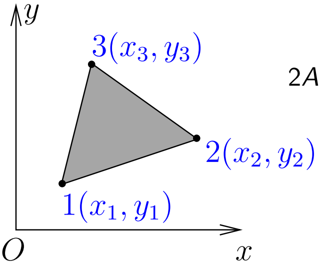
Índice

Ejemplo: CST para problemas de tensión plana

A continuación se desarrollarán las ecuaciones a nivel elemental del triángulo de deformación constante (CST) para el problema de tensión plana. Este elemento presenta las siguientes características:

- Es un elemento isoparamétrico
- No es necesario emplear cuadraturas para la integración numérica, ya que las integrales se pueden resolver de forma exacta.
- Se utiliza en aplicaciones no estructurales por la facilidad para generar mallas, ya que en análisis estructural sus prestaciones son bastante pobres.

Geometría y sistema de coordenadas



$$2A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$
$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

- Coordenadas triangulares: ξ_1, ξ_2, ξ_3
- $\xi_i = \mathrm{cte}$ es una recta paralela al lado opuesto al nodo i
- No son independientes: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$

Interpolación lineal

Una función lineal f definida en el triángulo se expresa en coordenadas cartesianas:

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{1}$$

determinándose los coeficientes a_i a partir de tres condiciones que proporciones los valores f_1, f_2 y f_3 (que en el contexto del MEF se denominan "valores nodales").
La expresión de f en coordenadas triangulares hace uso directamente de los valores nodales:

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = [f_1\ f_2\ f_3] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\} \tag{2}$$

Transformación de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \tag{4}$$

siendo $x_{jk} = x_j - x_k$, $y_{jk} = y_j - y_k$ y $A_{jk} = 0{,}5(x_j y_k - x_k y_j)$ es el área encerrada por los nodos j, k y el origen de coordenadas.

Formulación del elemento CST

- Funciones de forma: $N_j = \xi_j, \quad j = 1 \dots 3$
- Interpolación del campo de desplazamientos:

$$u_x = u_{x1}\xi_1 + u_{x2}\xi_2 + u_{x3}\xi_3 \tag{5}$$

$$u_y = u_{y1}\xi_1 + u_{y2}\xi_2 + u_{y3}\xi_3 \tag{6}$$

que en forma matricial se expresa:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_x \\ u_y \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cccccc} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{array} \right\} \tag{7}$$

que es la particularización de
$\boldsymbol{u}^h = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \boldsymbol{d}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{N}^T \boldsymbol{d}^e$ para el triángulo CST

Formulación del elemento CST: Derivadas parciales

- A partir de las relaciones (3) y (4) es inmediato obtener las relaciones:

$$2A\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = y_{jk}, \qquad 2A\frac{\partial \xi_i}{\partial y} = x_{kj} \tag{8}$$

siendo j y k las permutaciones cíclicas de i.

- Las derivadas de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ respecto de las coordenadas cartesianas se obtienen mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}y_{12}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}x_{21}\right) \tag{10}$$

Formulación del elemento CST

- Relaciones deformación–desplazamiento

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{B}\boldsymbol{d}^e = \frac{1}{2A}\begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

siendo:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Obsérvese que las deformaciones son constantes en el elemento

Formulación del elemento CST

- Relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathsf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{13}$$

- La matriz constitutiva C se supondrá constante en el elemento. Por tanto, dado que las deformaciones son constantes en el elemento las tensiones también los son.

Formulación del elemento CST

- Matriz de rigidez elemental
  La expresión $\mathrm{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\mathrm{B}\, d\Omega$ de la matriz de rigidez elemental en este caso se puede escribir:

$$\mathrm{K}^e = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\mathrm{B} \int_{\Omega^e} h d\Omega \tag{14}$$

siendo h el espesor y Ω^e el dominio del triángulo. Si el espesor es constante la matriz de rigidez se expresa en forma cerrada:

$$\mathrm{K}^e = \frac{h}{4A} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \mathrm{C} \begin{pmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Formulación del elemento CST

- Vector de fuerzas nodales (volumétricas)

$$\boldsymbol{f}^e = \int_{\Omega^e} h \mathrm{N} \boldsymbol{b} d\Omega = \int_{\Omega^e} h \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{b} d\Omega \tag{16}$$

En el caso más sencillo en que h y $\boldsymbol{b}$ sean constantes en el elemento, y teniendo en cuenta:

$$\int_{\Omega^e} \xi_1 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_2 d\Omega = \int_{\Omega^e} \xi_3 d\Omega = A/3 \tag{17}$$

resulta:

$$(\boldsymbol{f}^e)^{\mathrm{T}} = \frac{Ah}{3} \begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} & b_{x2} & b_{y2} & b_{x3} & b_{y3} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Integración numérica

- La integración numérica es un ingrediente imprescindible en el cálculo de las integrales elementales
- Existen diversas cuadraturas: Gauss, Simpson, Lobatto, etc.
- Las cuadraturas de Gauss proporcionan mayor exactitud que otras reglas para un determinado número de puntos de integración
- En cada punto de Gauss se realiza un número importante de operaciones

Integración numérica

- Cuadraturas de Gauss en una dimensión:

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi = \sum_{1}^{p} w_i F(\xi_i) \tag{19}$$

siendo p el número de puntos de integración, ξ_i las coordenadas de cada punto i y w_i los pesos correspondientes.

- Algunas cuadraturas:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{1 punto:} & \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi & \approx & 2F(0) \\
\text{2 puntos:} & \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi & \approx & F(-1/\sqrt{3}) + F(1/\sqrt{3}) \\
\text{3 puntos:} & \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi & \approx & \frac{5}{9}F(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F(\sqrt{3/5}) \\
\text{4 puntos:} & \int_{-1}^{1} F(\xi)d\xi & \approx & w_1F(\xi_1) + w_2F(\xi_2) + w_3F(\xi_3) + w_4F(\xi_4
\end{array}$$

Integración numérica

- Para la regla de 4 puntos:

$$w_1 = w_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{5/6}, \qquad w_2 = w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5/6}$$

$$\xi_1 = -\xi_4 = -\sqrt{(3 + 2\sqrt{6/5})/7}, \quad \xi_2 = -\xi_3 = -\sqrt{(3 - 2\sqrt{6/5})/7}$$

- Las cuatro reglas descritas integran de manera exacta polinomios de hasta grado 1, 3, 5 y 7, respectivamente.
- En general, una cuadratura 1D de Gauss con p puntos integra exactamente polinomios de orden $2p-1$

Integración numérica

- Para calcular la integral de $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se hace un cambio de variable definiendo ξ en el intervalo biunitario:

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_{-1}^1 F(\xi)\, J d\xi$$

siendo:

$$\xi = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{1}{2}(a+b)\right), \qquad J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}$$

- Las cuadraturas de Gauss de orden más alto están tabuladas en los libros de cálculo numérico (en Handbook of Mathematical Functions. Abramowitz & Stegun hasta 96 puntos). No obstante, las cuadraturas de orden superior a 4 no se pueden expresar de manera cerrada.

Integración numérica

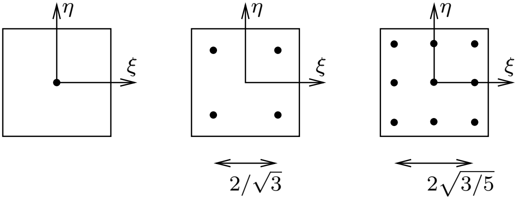
- Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones
  - Las cuadraturas de Gauss más simples se obtienen aplicando las cuadraturas 1D a cada variable. Para ello las integrales han de transformarse al cuadrilátero biunitario.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \int_{-1}^{1} d\eta \int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\, d\xi \approx \sum_{i=1}^{p_1}\sum_{i=1}^{p_2} w_i w_j F(\xi_i,\eta_j)$$

siendo p_1 y p_2 el número de puntos en cada dirección (que son iguales si las funciones de forma también lo son).

Integración numérica

- Cuadraturas de Gauss en dos dimensiones



1 punto: $w_1 = 4,$

2 puntos: $w_{2\times 2} = 1,$

3 puntos:

$$w_1 = w_3 = w_7 = w_9 = \frac{25}{81}$$

$$w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = \frac{40}{81}$$

$$w_5 = \frac{64}{81}$$

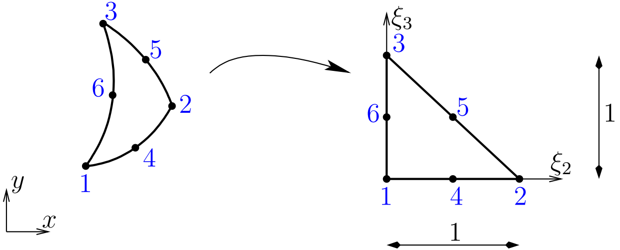
Elementos isoparamétricos

Las relaciones geométricas y la interpolación del campo de desplazamientos verifican:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n^e_{\mathrm{nod}}} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n^e_{\mathrm{nod}}} \\ u_{x1} & u_{x2} & \dots & u_{xn^e_{\mathrm{nod}}} \\ u_{y1} & u_{y2} & \dots & u_{yn^e_{\mathrm{nod}}} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_{n^e_{\mathrm{nod}}} \end{array} \right\} \tag{20}$$

El triángulo CST descrito anteriormente se expresa de acuerdo con (20) tomando $n^e_{\mathrm{nod}} = 3$, $N_1 = \xi_1$, $N_2 = \xi_2$ y $N_3 = \xi_3$

Elementos isoparamétricos



Triángulo cuadrático de seis nodos

Elementos isoparamétricos

- Triángulo cuadrático

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{x5} & u_{x6} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} & u_{y5} & u_{y6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

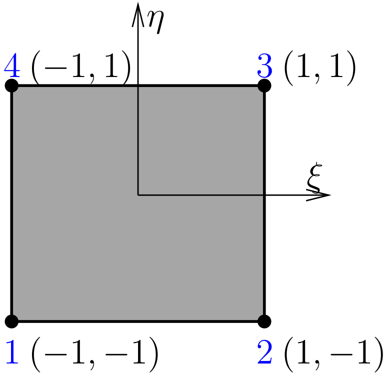
siendo:

$$N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \quad N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \quad N_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \tag{22}$$

$$N_4 = 4\xi_1\xi_2 \quad N_5 = 4\xi_2\xi_3 \quad N_6 = 4\xi_3\xi_1 \tag{23}$$

Elementos isoparamétricos

- Elementos cuadriláteros



Cuadrilátero bilineal

Elementos isoparamétricos

- Cuadrilátero bilineal

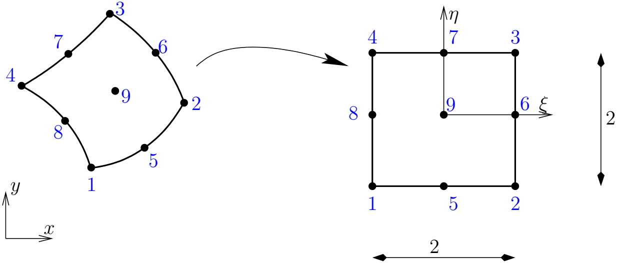
$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \\ u_x \\ u_y \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{array} \right\} \tag{24}$$

siendo:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{25}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{26}$$

Elementos isoparamétricos



Cuadrilátero bicuadrático

Elementos isoparamétricos

- Cuadrilátero bicuadrático

$$\left\{\begin{array}{c}1\\x\\y\\u_x\\u_y\end{array}\right\} = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_6&x_7&x_8&x_9\\y_1&y_2&y_3&y_4&y_5&y_6&y_7&y_8&y_9\\u_{x1}&u_{x2}&u_{x3}&u_{x4}&u_{x5}&u_{x6}&u_{x7}&u_{x8}&u_{x9}\\u_{y1}&u_{y2}&u_{y3}&u_{y4}&u_{y5}&u_{y6}&u_{y7}&u_{y8}&u_{y9}\end{pmatrix}\left\{\begin{array}{c}N_1\\N_2\\\vdots\\N_9\end{array}\right\}$$

En este caso las funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta,\ N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta,\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta,\ N_5 = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta,\ N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta,\ N_8 = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi,\ N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

Diseño de las funciones de forma

Requisitos:

- La función de forma elemental N_A debe tomar valor 1 en el nodo A, y valor 0 en los demás nodos del elemento.
- N_A debe ser nula en los contornos de los elementos que no contengan al nodo A

y para problemas de índice variacional m:

- Las funciones de forma N_A definidas en los elementos que comparten el nodo A deben ser continuas de clase $\mathcal{C}^{m-1}$ entre los elementos adyacentes.
- Las funciones de forma de un elemento deben poder expresar de forma exacta cualquier polinomio de grado m en las coordenadas del elemento.

Para garantizar la complitud, en los elementos isoparamétricos es suficiente con verificar la condición de partición de la unidad.

Diseño de las funciones de forma (elementos 2D)

- Las funciones de forma se expresan como el producto de n factores $L_j(\xi_k)$:

$$N_A = c_A L_1 L_2 \ldots L_n \tag{27}$$

  siendo las expresiones $L_j = 0$ ecuaciones homogéneas de líneas (rectas o curvas) que son funciones lineales de las coordenadas naturales.

- Metodología de diseño:
  - Las L_j son el mínimo número de líneas isoparamétricas, con expresión lineal en las coordenadas naturales, que contengan a todos los nodos del elemento excepto el nodo A (generalmente esta líneas corresponden a los lados del elemento y a líneas que unen los puntos medios de los lados).
  - El coeficiente c_A se calcula para que N_A valga uno en el nodo A.

Diseño de las funciones de forma (elementos 2D)

- Metodología de diseño (continuación):
  - Comprobar que N_A vale cero en todos los lados del elemento que no contienen al nodo A.
  - Comprobar el grado del polinomio correspondiente a particularizar la función de forma en los lados del elemento que contienen al nodo A. Si el número de nodos en un lado del elemento es p, para que se verifique el requisito de compatibilidad el grado del polinomio en dicho lado debe ser $p - 1$.
  - Una vez verificados los requisitos anteriores, comprobar finalmente que las funciones de forma definidas en el elemento suman la unidad.
- Ejemplo: obtención de las funciones de forma del triángulo cuadrático.

Derivadas parciales

- Jacobiano de la transformación isoparamétrica

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \boldsymbol{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} \qquad (28)$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right) \qquad (29)$$

La matriz $\boldsymbol{J}$ se denomina *matriz Jacobiana* de la transformación isoparamétrica

Derivadas parciales

- Cálculo de las derivadas parciales.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \tag{30}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{PX} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \tag{32}$$