MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Elasticidad lineal

Felipe Gabaldón Castillo

Índice

Índice

Introducción

- Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{u}$ el vector desplazamiento y $\boldsymbol{b}$ el vector de fuerzas volumétricas.
- Consideraremos el tensor de deformaciones infinitesimales, que se define como la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{u}, \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1)$$

- Las componentes del tensor de tensiones se expresan como combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones mediante un tensor de cuarto orden $\mathbf{C}$ (Ley de Hooke generalizada), cuyas componentes C_{ijkl} son constantes y se denominan "coeficientes elásticos":

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (2)$$

Introducción

El tensor de módulos elásticos tiene las siguientes propiedades:

1. Simetría mayor:
$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{3}$$
2. Simetría menor:
$$C_{ijkl} = C_{jikl} \qquad C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{4}$$
3. Es definido positivo:
$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} \geq 0 \quad \forall \Phi_{ij} \text{ simétrico} \tag{5}$$
$$C_{ijkl}\Phi_{ij}\Phi_{kl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ij} = 0 \tag{6}$$

Consideraremos un sólido elástico definido por un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\mathrm{dim}}}$ con contorno $\partial\Omega$, tal que:

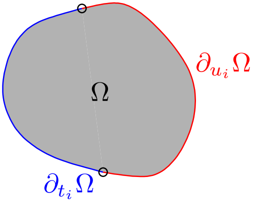
$$\partial\Omega = \partial_{u_i}\Omega \cup \partial_{t_i}\Omega \qquad \emptyset = \partial_{u_i}\Omega \cap \partial_{t_i}\Omega \tag{7}$$

siendo $\partial_{u_i}\Omega$ la parte del contorno con desplazamientos impuestos en dirección i, y $\partial_{t_i}\Omega$ la parte con tensiones impuestas en dirección i

Índice

Formulación fuerte

Sea $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ el dominio ocupado por un sólido, cuyo contorno es $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega$ con $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:



Dados $\boldsymbol{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathbb{R}^n$ que cumple:

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \qquad \text{en} \quad \partial_t\Omega \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \qquad \text{en} \quad \partial_u\Omega \tag{10}$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u}$

Formulación débil

Dados $\boldsymbol{b} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las funciones $\overline{\boldsymbol{u}} : \partial_u\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{t}} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u} \in \delta \mid \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u}\right)\, d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, d\Gamma = 0 \tag{11}$$

siendo:

$$\delta = \left\{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial_u\Omega\right\} \tag{12}$$

$$\mathcal{V} = \left\{\delta\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial_u\Omega\right\} \tag{13}$$

y $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

$$H^1 = \left\{\boldsymbol{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \Big| \quad \int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|_{2,1}\, d\Omega < \infty\right\}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

- Lema 1. Descomposición euclídea de un tensor de orden 2

$$s_{ij} = \underbrace{s_{(ij)}}_{\text{simétrico}} + \underbrace{s_{[ij]}}_{\text{hemisimétrico}} \quad ; \quad s_{(ij)} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2}, \; s_{[ij]} = \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2}$$

- Lema 2. Sea s_{ij} un tensor simétrico y t_{ij} un tensor no simétrico. Entonces,

$$s_{ij} t_{ij} = s_{ij} t_{(ij)}$$

El lema queda demostrado si $s_{ij} t_{[ij]} = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} s_{ij} t_{[ij]} &= -s_{ij} t_{[ji]} \\ &= -s_{ji} t_{[ji]} \\ &= -s_{ij} t_{[ij]} \end{aligned}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

Si $\boldsymbol{u}$ es solución del problema fuerte, multiplicando (8) por $\delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ e integrando en Ω:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega \\ &= \int_\Omega (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j} d\Omega + \int_\Omega b_i \delta u_i d\Omega \\ &= -\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{(i,j)} d\Omega + \int_\Omega b_i\delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \tag{14}$$

y por tanto u_i es solución del problema débil

Equivalencia de ambas formulaciones

Sea u_i solución del problema débil. Dado que $u_i \in \delta_i$, $u_i = \overline{u}_i$ en $\partial_{u_i}\Omega$. De (11):

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j} d\Omega + \int_\Omega b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \overline{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= -\int_\Omega (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} d\Omega + \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega + \int_{\partial_{t_i}\Omega} \overline{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + b_i)\delta u_i d\Omega - \int_{\partial_{t_i}\Omega} (\sigma_{ij} n_j - \overline{t}_i)\delta u_i d\Gamma \end{aligned} \tag{15}$$

Equivalencia de ambas formulaciones

Sean:

$$\alpha_i = \sigma_{ij,j} + b_i \tag{16}$$

$$\beta_i = \sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i \tag{17}$$

La equivalencia entre ambas formulaciones estará demostrada si se verifica que $\alpha_i = 0$ en Ω y $\beta_i = 0$ en $\partial_{t_i}\Omega$. Sea $\delta u_i = \alpha_i \phi$, donde:

$$\phi > 0 \text{ en } \Omega$$
$$\phi = 0 \text{ en } \partial\Omega$$
$$\phi \text{ suave}$$

Con estas condiciones queda garantizado que $\delta u_i \in \mathcal{V}$.

Equivalencia de ambas formulaciones

Sustituyendo este δu_i en (15):

$$0 = \int_\Omega \underbrace{\alpha_i\,(\alpha_i}_{\geq 0}\underbrace{\ \phi\ }_{>0})d\Omega \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \text{ en } \Omega \tag{18}$$

Análogamente, tomemos ahora $\delta u_i = \delta_{i1}\beta_1\psi$, donde:

$$\begin{aligned} &\psi > 0 \text{ en } \partial_{t_1}\Omega \\ &\psi = 0 \text{ en } \partial_{u_1}\Omega \\ &\psi \text{ suave} \end{aligned}$$

Sustituyendo esta nueva expresión de $\delta u_i \in \mathcal{V}$ en (15):

$$0 = \int_{\partial_{t_1}\Omega} \underbrace{\beta_1\,(\beta_1}_{\geq 0}\underbrace{\ \psi\ }_{>0})d\Omega \Rightarrow \quad \beta_1 = 0 \text{ en } \partial_{t_1}\Omega \tag{19}$$

Índice

Formulaciones variacionales

Considerando el funcional de la energía potencial:

$$\Pi_p(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \left(W(\boldsymbol{x}, \varepsilon) - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\right) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma \qquad (20)$$

la ecuación (11) equivale a establecer la condición de estacionariedad del funcional (20):

$$\delta \Pi_p(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad (21)$$

- Se dice que (11) es la ecuación variacional del problema (21), y que las ecuación (8) es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema variacional (21).
- Para la ley de Hooke:

$$W(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \mathbf{C} \varepsilon \qquad (22)$$

- Existen otros principios variacionales diferentes al expresado en (21), asociado al funcional de la *energía potencial total* (20).
- Dichos principios son la base de la formulación de los denominados "elementos mixtos".
- En general se deducen a partir de "funcionales multicampo" como, por ejemplo, el de Hu-Washizu:

$$\Pi_W(\boldsymbol{u}, \varepsilon, \boldsymbol{\sigma}) = \int_\Omega \Big(W(\boldsymbol{x}, \varepsilon) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \Big) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma$$

Índice

Formulación de Galerkin

- Sean ν^h y δ^h aproximaciones de dimensión finita de los espacios funcionales ν y δ, respectivamente
- Se adopta la descomposición: $\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{v}^h + \overline{\boldsymbol{u}}^h$ con $\boldsymbol{v}^h \in \nu^h$ y $\overline{\boldsymbol{u}}^h = \overline{\boldsymbol{u}}$ en $\partial_u\Omega$ ("aproximadamente")
- Dados $\boldsymbol{b} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y las funciones $\overline{\boldsymbol{u}} : \partial_u\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{t}} : \partial_t\Omega \to \mathbb{R}^n$, encontrar el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{v}^h + \overline{\boldsymbol{u}}^h$, con $\delta\boldsymbol{v}^h \in \nu^h$, tal que $\forall\delta\boldsymbol{u}^h \in \nu^h$ se cumple:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{v}^h \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\nabla}^S \delta\boldsymbol{u}^h \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u}^h \, d\Omega + \int_{\partial_t\Omega} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u}^h \, d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^S \overline{\boldsymbol{u}}^h \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\nabla}^S \delta\boldsymbol{u}^h \, d\Omega \tag{23}$$

Índice

Formulación de elementos finitos

- El dominio Ω se discretiza en n_{elm} elementos Ω^e:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \Omega^e \qquad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \ \text{si } i \neq j \tag{24}$$

- El elemento Ω^e se transforma en un "cubo unitario"

$$\square = \underbrace{[-1,1] \times \cdots \times [-1,1]}_{n_{\mathrm{dim}}}$$

definido en el espacio isoparamétrico de coordenadas $\{\boldsymbol{\xi}\}$:

$$\phi : \boldsymbol{\xi} \in \square \to \boldsymbol{x} \in \Omega^e; \qquad \boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \boldsymbol{x}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) \tag{25}$$

siendo $\boldsymbol{x}_A$ las coordenadas de los nodos del elemento e

Formulación de elementos finitos

- Los subespacios de dimensión finita δ^h y $\mathcal{V}^h$ se definen mediante unas funciones de interpolación $N_A,\ A = 1 \dots n_{\text{nod}}$ (polinómicas), que se denominan "funciones de forma"

$$\delta^h = \left\{ \boldsymbol{u}^h \in \delta \mid u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} u_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{A \in \eta_{u_i}} \overline{u}_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) \right\}$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \delta \boldsymbol{u}^h \in \mathcal{V} \mid \delta u_i^h = 0 \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial_{u_i}\Omega; \quad \delta u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{u_i}} \delta u_{iA} N_A(\boldsymbol{\xi}) \right\}$$

siendo $\eta = \{1, 2, \dots, n_{\text{numnp}}\}$ el conjunto de números de los n_{numnp} nodos de la malla, $\eta_{u_i} \subset \eta$ el conjunto de nodos en los que $u_i^h = \overline{u}_i$, y $\eta - \eta_{u_i}$ el conjunto complementario de η_{u_i}

Índice

Si se emplea una formulación isoparamétrica que interpola los desplazamientos con la misma interpolación que las coordenadas (25):

$$\boldsymbol{u}^h = \sum_{A=1}^{n^e_{\mathrm{nod}}} \boldsymbol{d}_A N_A(\xi) = \mathbf{N}^T \boldsymbol{d}^e \tag{26}$$

siendo $\boldsymbol{d}^e$ el vector de desplazamientos nodales del elemento e y $\mathbf{N}$ la matriz de funciones de forma del elemento. Por ejemplo, en 2D:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_{\mathrm{n}_{nod}} & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_{\mathrm{n}_{nod}} \end{pmatrix} \boldsymbol{d}^e \tag{27}$$

Interpolación del campo de deformaciones

Con la notación en que las tensiones y deformaciones se expresan en forma de vector (por ejemplo en 2D: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T$) y derivando (26), la interpolación del campo de deformaciones se expresa:

$$\nabla^S u^h_{ij} = \sum_{A=1}^{n^e_{\text{nod}}} \frac{1}{2} \left(N^e_{A,i} d_{Aj} + N^e_{A,j} d_{Ai} \right) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}^S \boldsymbol{u}^h = \mathbf{B}\boldsymbol{d}^e \qquad (28)$$

En 2D:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{\mathrm{n}_{nod}}}{\partial x_1} \end{pmatrix} \boldsymbol{d}^e \qquad (29)$$

Ecuaciones de elementos finitos

Sustituyendo (26) y (28) en (23) e imponiendo que los desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{u}$ son arbitrarios, después de operar se obtiene:

$$\boldsymbol{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\varepsilon)\, d\Omega \right] = \mathbf{0} \tag{30}$$

donde $\mathsf{A}[\cdot]$ es el operador de ensamblaje y $\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}}$ es el vector de fuerzas externas convencional que se obtiene a partir de la expresión (23):

$$\boldsymbol{f}^{e,\text{ext}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \tag{31}$$

Observaciones:

- La ecuación (30) está planteada en forma residual (anulando la diferencia entre las fuerzas externas y las fuerzas internas), que es la adecuada para problemas no lineales.
- En lo sucesivo se considerará el caso de la elasticidad lineal, en el que si denominamos $\mathbf{C}$ a la matriz de módulos elásticos (o matriz constitutiva), resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\varepsilon) = \mathbf{CB}\boldsymbol{d}^e \tag{32}$$

entonces la ecuación (30) se expresa:

$$\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{CB} \, d\Omega \right) \right] \boldsymbol{d} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \boldsymbol{f}^{e,\mathrm{ext}} \tag{33}$$

Ecuaciones de elementos finitos

- La matriz de rigidez elemental se define como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \tag{34}$$

- Ensamblando los vectores de fuerzas elementales y las matrices de rigidez elementales:

$$\boldsymbol{f} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \boldsymbol{f}^{e,\mathrm{ext}} \tag{35}$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}} \mathbf{K}^{e} \tag{36}$$

el sistema (33) se expresa:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{d} = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{37}$$

Índice

Ecuaciones de la elasticidad lineal

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}\\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}\\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}\\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G}\\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G}\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}
\end{aligned}
$$

- Módulo de corte:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Deformación volumétrica

$$e = \varepsilon_{ii}$$

- Módulo de def. volumétrica

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii} \Rightarrow p = -ke$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Elasticidad 2D. Deformación plana

- La condición de deformación plana es ($\varepsilon_{zz} = 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{38}$$

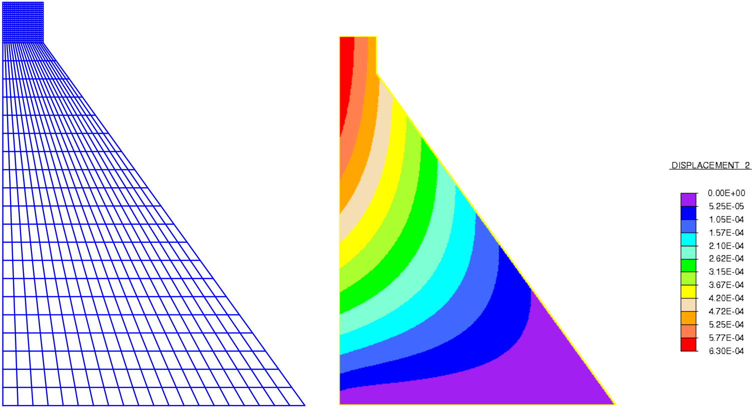
$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{39}$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{40}$$

Deformación plana: aplicaciones

Deformación plana: aplicaciones



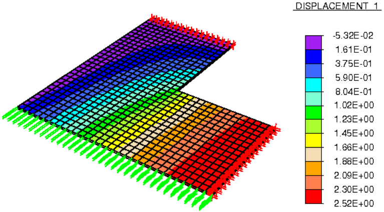
Elasticidad 2D. Tensión plana

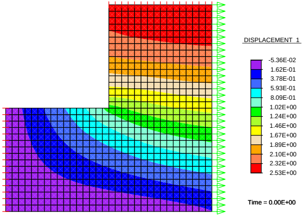
- La condición de tensión plana es ($\sigma_{zz} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \quad (41)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (42)$$

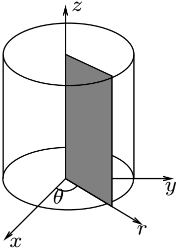
Elasticidad 2D. Tensión plana





Elasticidad 2D. Problemas axilsimétricos

- Se expresa en términos de las coordenadas cilíndricas r (radial), z (axial) y θ (circunferencial).



- Condición de simetría axial: todas las variables son independientes de θ y además: u_θ=0, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0$
- En todos los integrandos hay que considerar un factor de $2\pi r$

- Relación tensión - deformación

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \tag{43}$$

- La matriz **B** (de interpolación del campo de deformaciones) es:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{pmatrix} \qquad a = 1 \ldots n_{\mathrm{nen}} \tag{44}$$

Elasticidad 2D. Problemas axilsiméticos

Elasticidad 3D

- Relación tensión - deformación

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon xx \\ \varepsilon yy \\ \varepsilon zz \\ \varepsilon yz \\ \varepsilon xz \\ \varepsilon xy \end{array} \right\} \tag{45}$$

Elasticidad 3D