



Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción
Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Estructuras de barras articuladas

Felipe Gabaldón Castillo



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1

Introducción



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D

4 Método de elementos finitos



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D

4 Método de elementos finitos



Introducción

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- El Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) es un procedimiento numérico para resolver ecuaciones diferenciales de manera aproximada
- El dominio en el que está definido el problema se divide en "subdominios" denominados ELEMENTOS FINITOS
- El conjunto de elementos finitos que discretizan el dominio se denomina MALLA
- Se abordan problemas de contorno (estática) y problemas de valor inicial (dinámica)



Introducción

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- En general, la variable continua queda definida por sus valores aproximados en puntos discretos, denominados NODOS
- La aproximación de esta variable en puntos distintos de los nodos (dentro de cada elemento) se interpola mediante FUNCIONES DE FORMA (generalmente polinómicas)
- Los GRADOS DE LIBERTAD son variables definidas en los nodos (temperaturas, desplazamientos, etc). También se denominan incógnitas primarias o variables de estado.



Ejemplo: distribución de temperaturas en una barra

Estructuras de
barras
articuladas

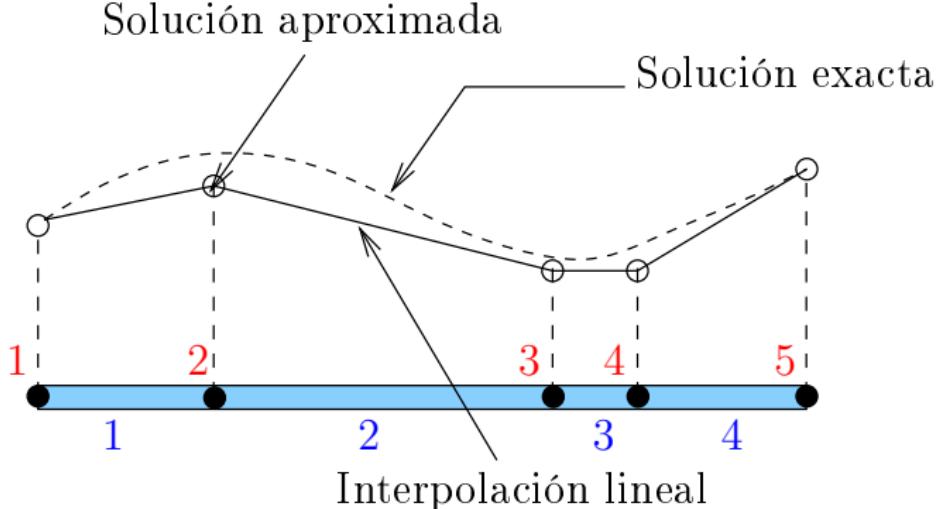
Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos





Motivación

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- El análisis de las estructuras de barras articuladas es esencialmente unidimensional. La barra elástica lineal cargada en dirección axial es el modelo básico que sirve de partida, y que posteriormente se generaliza a 2D y 3D.
- Se presentan dos descripciones alternativas para el análisis del equilibrio de sistemas barras:
 - ① Método directo, basado en conceptos ya conocidos de la Mecánica de Materiales, para expresar el equilibrio de fuerzas, las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones de compatibilidad.
 - ② Formulación débil del problema de contorno como base de partida para el desarrollo método de elementos finitos.



Motivación

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos





Motivación

Estructuras de
barras
articuladas

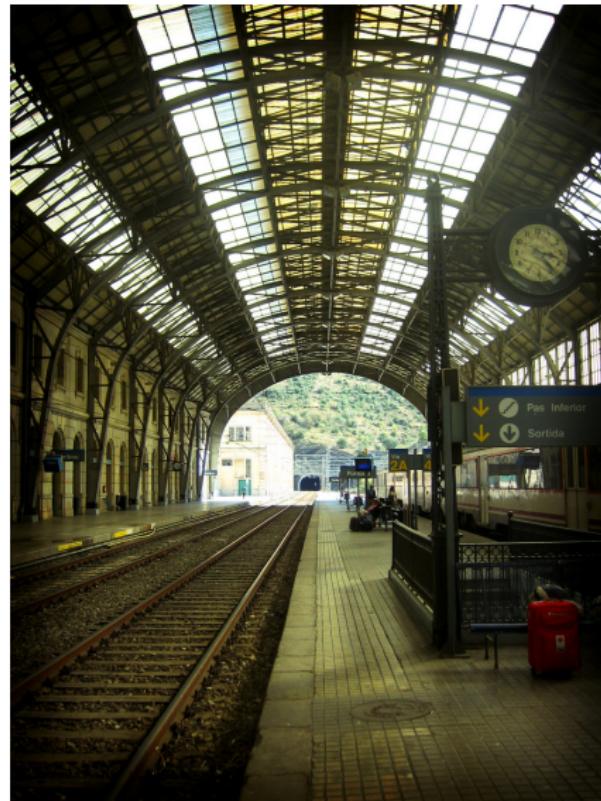
Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos





Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D

4 Método de elementos finitos



Cuestiones generales

Estructuras de
barras
articuladas

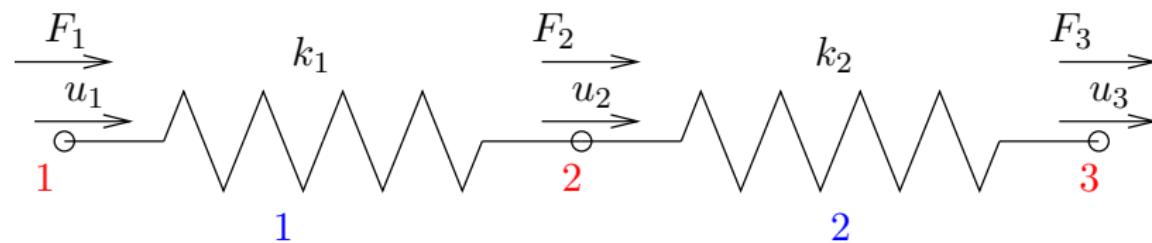
Felipe
Gabaldón

Introducción
Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

x



- F_i son las fuerzas nodales directamente aplicadas en los nodos.
- u_i son los desplazamientos nodales.
- Las constantes k_i son las rigideces correspondientes a cada elemento



Cuestiones generales

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

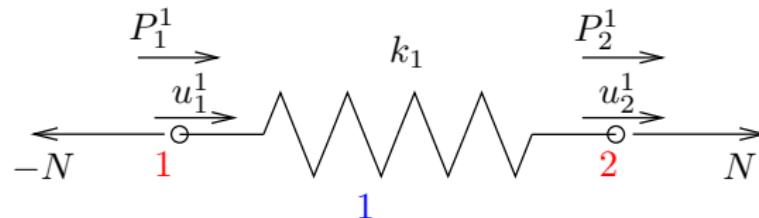
Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Considerando sólo un elemento:



- P_i^e es la fuerza nodal elemental correspondiente al nodo local i del elemento e
- u_i^e son los desplazamientos del nodo local i del elemento e
- N y $-N$ son las fuerzas internas



Ecuaciones (elemento 1)

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Ley constitutiva (Hooke)

$$N = k(u_2 - u_1) \quad k = \frac{EA}{L}$$

- Equilibrio en los nodos del elemento 1:

$$P_1^1 = -N \Rightarrow P_1^1 = -k_1(u_2^1 - u_1^1)$$

$$P_2^1 = N \Rightarrow P_2^1 = k_1(u_2^1 - u_1^1)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{Bmatrix}$$



Expresión matricial elemental

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Para el elemento 2

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}$$

- Las ecuaciones anteriores se puede generalizar para un elemento e , expresándose:

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{P}^e$$

donde:

\boldsymbol{K}^e : Matriz de rigidez del elemento e (sim. y def. pos.)

\boldsymbol{d}^e : Vector elemental de desplazamientos (nodales)

\boldsymbol{P}^e : Vector elemental de fuerzas



Compatibilidad y equilibrio. Ensamblaje

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Considerando la compatibilidad de desplazamientos:

$$u_1 = u_1^1 \quad u_2 = u_2^1 = u_1^2 \quad u_3 = u_2^2$$

y el equilibrio de fuerzas:

$$F_1 = P_1^1 \quad F_2 = P_2^1 + P_1^2 \quad F_3 = P_2^2$$

los sistemas matriciales expresados anteriormente para los elementos 1 y 2, se ensamblan mediante la suma para obtener el sistema global:

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



Condiciones de sustentación (apoyos)

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- $\det(\mathbf{K}) = 0 \Rightarrow$ existen desplazamientos de sólido rígido (el sistema estructural carece de la sustentación suficiente)
- Para evitarlo es suficiente imponer $u_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0 \quad (\text{c.c. de tipo esencial})$$



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D

4 Método de elementos finitos



Metodología

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

A continuación se generaliza la formulación 1D para el caso de estructuras en dos y tres dimensiones

Para la formulación 2D/3D, la metodología es la misma que la descrita anteriormente:

- ① Ecuaciones de equilibrio en cada elemento (propiedades constitutivas y condiciones de equilibrio)
- ② Compatibilidad (topología y conectividad)
- ③ Equilibrio de la estructura completa
- ④ Condiciones de contorno
- ⑤ Solución del sistema completo de ecuaciones



Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

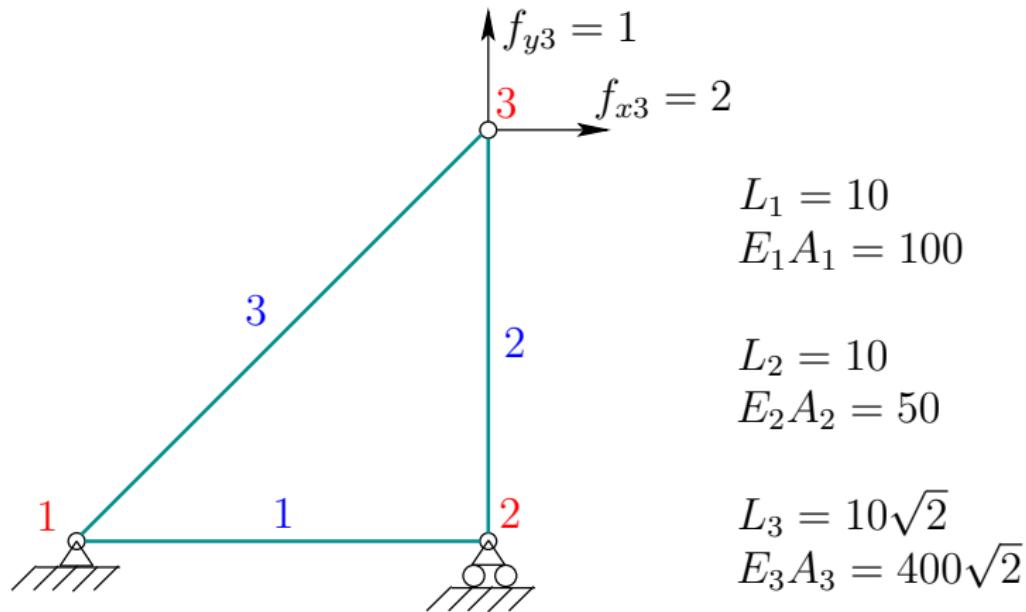
Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Definición de la Estructura





Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

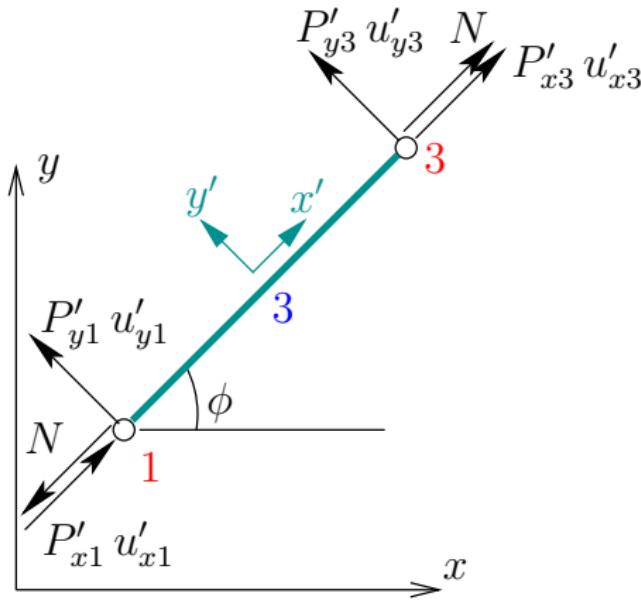
Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

• Equilibrio del elemento 3





Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Equilibrio del elemento 3 en ejes locales

$$\underbrace{\frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(K^e)'} \begin{Bmatrix} u'_{x1} \\ u'_{y1} \\ u'_{x3} \\ u'_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ P'_{x3} \\ P'_{y3} \end{Bmatrix}$$

- Relación entre ejes locales y ejes globales

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}}_{L^T} \begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_y \end{Bmatrix}; \quad L^T L = 1$$



Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

• Equilibrio del elemento (en ejes globales)

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{L}^T (\mathbf{u}^e)'$$

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{L}^T (\mathbf{P}^e)'$$

resultando:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{L}^T (\mathbf{K}^e)' \mathbf{L}$$

$$= \frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \operatorname{sen} \phi \cos \phi & -\cos^2 \phi & -\operatorname{sen} \phi \cos \phi \\ \operatorname{sen} \phi \cos \phi & \operatorname{sen}^2 \phi & -\operatorname{sen} \phi \cos \phi & -\operatorname{sen}^2 \phi \\ -\cos^2 \phi & -\operatorname{sen} \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & \operatorname{sen} \phi \cos \phi \\ -\operatorname{sen} \phi \cos \phi & -\operatorname{sen}^2 \phi & \operatorname{sen} \phi \cos \phi & \operatorname{sen}^2 \phi \end{pmatrix}$$



Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

• Matrices de rigidez elementales

$$\boldsymbol{K}^{e=1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{K}^{e=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}^{e=3} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & -20 & -20 \\ 20 & 20 & -20 & -20 \\ -20 & -20 & 20 & 20 \\ -20 & -20 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$



Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

● Ensamblaje

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 10 + 20 & 20 & -10 & 0 & -20 & -20 \\ 20 & 20 & 0 & 0 & -20 & -20 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -20 & -20 & 0 & 0 & 20 & 20 \\ -20 & -20 & 0 & -5 & 20 & 5 + 20 \end{pmatrix}$$



Ejemplo

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

• Condiciones de contorno

$$u_{x1} = 0 \quad u_{y1} = 0 \quad u_{y2} = 0$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & -10 & 0 & -20 & -20 \\ 20 & 20 & 0 & 0 & -20 & -20 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -20 & -20 & 0 & 0 & 20 & 20 \\ -20 & -20 & 0 & -5 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$



Solución del sistema de ecuaciones

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- El método menos eficiente es el de invertir la matriz de rigidez:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$$

- Metodología: Eliminación de Gauss
Partiendo del sistema global de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$



Método directo: Estructuras en 2D y 3D

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Mediante operaciones con pivotes en filas, se llega al sistema:

$$\begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \dots & k'_{1n} \\ 0 & k'_{22} & \dots & k'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k'_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$d_n = \frac{f_n}{k'_{nn}}; \quad d_{n-1} = \frac{f_{n-1} - k'_{n-1\,n}d_n}{k'_{n-1\,n-1}}; \quad \dots \quad d_1 = \frac{f_1 - \sum_{i=2}^n k'_{1i}d_i}{k'_{11}}$$

- Ejemplo: Solución

$$u_{x2} = 0,0 \quad u_{x3} = 0,3 \quad u_{y3} = -0,2$$



Índice

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

1 Introducción

2 Método directo. Formulación 1D

3 Método directo: Estructuras en 2D y 3D

4 Método de elementos finitos



Problema de contorno

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Las ecuaciones que, de acuerdo con la mecánica de medios continuos, rigen el comportamiento de la barra articulada son las siguientes:

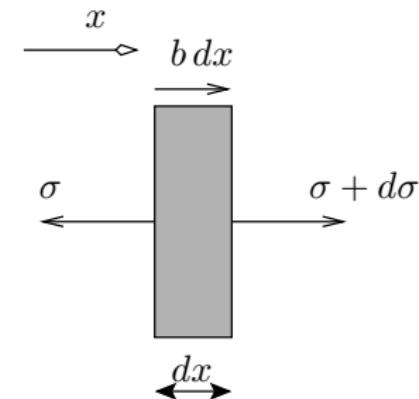
$$A \frac{d\sigma}{dx} + b = 0$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$A\sigma(0) = -\bar{t}$$

$$u(L) = \bar{u}$$



Las *condiciones de contorno naturales* se expresan en términos de las derivadas de u . Las *condiciones de contorno esenciales* se expresan directamente en términos de u .



Formulación fuerte

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Sea $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la parte del eje local x ocupado por la barra articulada ($\Omega = (0, L)$, $\bar{\Omega} = [0, L]$) y $\partial\Omega$ el contorno de la barra: $x = 0$ y $x = L$). La formulación fuerte del problema se establece en los siguientes términos:

Dados $b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y las constantes $\bar{u} \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathbb{R}$ que cumple:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + b = 0 \text{ en } \Omega$$

$$u(L) = \bar{u}$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = -\bar{t}$$



Formulación débil

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Dados $b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y las constantes $\bar{u} \in \mathbb{R}$ $\bar{t} \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u \in \mathcal{U} \mid \forall \delta u \in \mathcal{V}$ cumple:

$$\int_0^L E A \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L \delta u b dx + \delta u(0) \bar{t}$$

donde:

$$\mathcal{V} = \{\delta u \mid \delta u \in H^1, \delta u(L) = 0\}; \quad \mathcal{U} = \{u \mid u \in H^1, u(L) = \bar{u}\}$$

siendo H^1 el espacio de Sobolev de orden 1 y grado 2:

$$H^1 = \left\{ u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\}$$



Método de Galerkin

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- La formulación de Galerkin es el punto de partida del método de elementos finitos: permite obtener una solución aproximada de la formulación débil.
- El primer paso es la construcción de los subespacios \mathcal{V}^h y \mathcal{U}^h , que son aproximaciones de dimensión finita de \mathcal{V} y \mathcal{U} :

$$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \quad (\delta u^h \in \nu^h \Rightarrow \delta u^h \in \nu)$$
$$\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \quad (u^h \in \delta^h \Rightarrow u^h \in \delta)$$

- El método de Galerkin establece que los elementos $u^h \in \mathcal{U}^h$ se construyen a partir de los elementos $v^h \in \mathcal{V}^h$ mediante:

$$u^h = v^h + \bar{u}^h$$

donde \bar{u}^h es una función dada que verifica $\bar{u}^h(L) = \bar{u}$



Método de Galerkin

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- La formulación de Galerkin es el punto de partida del método de elementos finitos: permite obtener una solución aproximada de la formulación débil.
- El primer paso es la construcción de los subespacios \mathcal{V}^h y \mathcal{U}^h , que son aproximaciones de dimensión finita de \mathcal{V} y \mathcal{U} :

$$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \quad (\delta u^h \in \nu^h \Rightarrow \delta u^h \in \nu)$$
$$\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \quad (u^h \in \delta^h \Rightarrow u^h \in \delta)$$

- El método de Galerkin establece que los elementos $u^h \in \mathcal{U}^h$ se construyen a partir de los elementos $v^h \in \mathcal{V}^h$ mediante:

$$u^h = v^h + \bar{u}^h$$

donde \bar{u}^h es una función dada que verifica $\bar{u}^h(L) = \bar{u}$

- La idea clave es que los espacios \mathcal{V}^h y \mathcal{U}^h contienen las mismas funciones con la única excepción de \bar{u}^h



Método de Galerkin

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

La aproximación de Galerkin del problema de contorno se obtiene expresando la formulación débil en términos de los subespacios de dimensión finita ν^h y δ^h :

$$\int_0^L E A \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{d(\nu^h + \bar{u}^h)}{dx} dx = \int_0^L \delta u^h b dx + \delta u^h(0) \bar{t}$$

y operando:

$$\begin{aligned} \int_0^L E A \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{d\nu^h}{dx} dx &= \int_0^L \delta u^h b dx + \delta u^h(0) \bar{t} - \\ &\quad \int_0^L E A \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{d\bar{u}^h}{dx} dx \end{aligned}$$



Formulación de Galerkin

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Dados $b : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y las constantes $\bar{u} \in \mathbb{R}$ $\bar{t} \in \mathbb{R}$, encontrar el campo de desplazamientos $u^h = v^h + \bar{u}^h \in \mathcal{U}^h$, con $v^h \in \mathcal{V}^h$, tal que $\forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$ se cumple:

$$\int_0^L E A \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} dx = \int_0^L \delta u^h b dx + \delta u^h(0) \bar{t} - \int_0^L E A \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{d\bar{u}^h}{dx} dx \quad (1)$$

- En el método de Galerkin las funciones v^h , δu^h pertenecen al mismo subespacio \mathcal{V}^h . Existen otros métodos, denominados “métodos de Petrov-Galerkin”, en los cuales las funciones v^h no pertenecen a \mathcal{V}^h . Dichos métodos se emplean principalmente en el contexto de la Mecánica de Fluidos Computacional



Formulación matricial

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Con las expresiones:

$$\delta u^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A \quad u^h = v^h + \bar{u}^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + \bar{u} N_{n+1}$$

la formulación de Galerkin resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^L E A \left(\sum_{A=1}^n c_A \frac{dN_A}{dx} \right) \left(\sum_{B=1}^n d_B \frac{dN_B}{dx} \right) dx = \\ \int_0^L \left(\sum_{A=1}^n c_A N_A \right) b dx + \left(\sum_{A=1}^n c_A N_A(0) \right) \bar{t} - \\ \int_0^L E A \left(\sum_{A=1}^n c_A \frac{dN_A}{dx} \right) \bar{u} \frac{dN_{n+1}}{dx} dx \end{aligned}$$



Formulación matricial

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción
Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Teniendo en cuenta que los coeficientes c_A son arbitrarios, se obtiene:

$$\sum_{A=1}^n c_A G_A = 0$$

siendo:

$$G_A = \sum_{B=1}^n \left(\int_0^L E A \frac{dN_A}{dx} \frac{dN_B}{dx} dx \right) d_B - \int_0^L N_A b dx - N_A(0) \bar{t} + \int_0^L E A \frac{dN_A}{dx} \bar{u} \frac{dN_{n+1}}{dx} dx$$



Formulación matricial

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

Finalmente, se puede poner:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

siendo:

$$K_{AB} = \int_0^L E A \frac{dN_A}{dx} \frac{dN_B}{dx} dx$$

$$f_A = \int_0^L N_A b dx + N_A(0)\bar{t} - \int_0^L E A \frac{dN_A}{dx} \bar{u} \frac{dN_{n+1}}{dx} dx$$



Elementos 1D

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

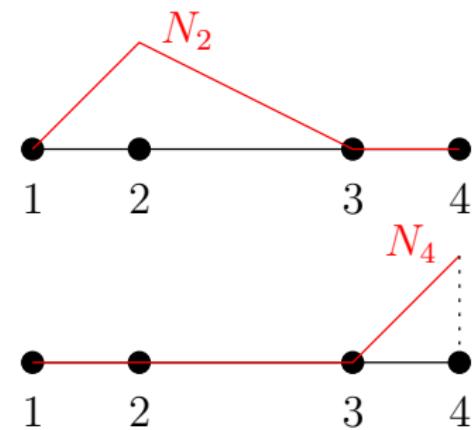
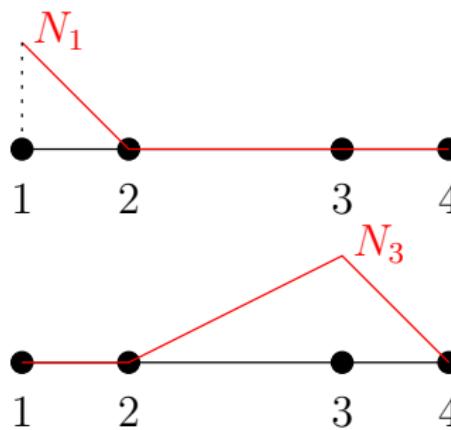
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

• Funciones de interpolación lineal

$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{A-1}}{h_{A-1}} & x_{A-1} < x < x_A \\ \frac{x_{A+1} - x}{h_A} & x_A < x < x_{A+1} \end{cases}$$





Elementos 1D

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

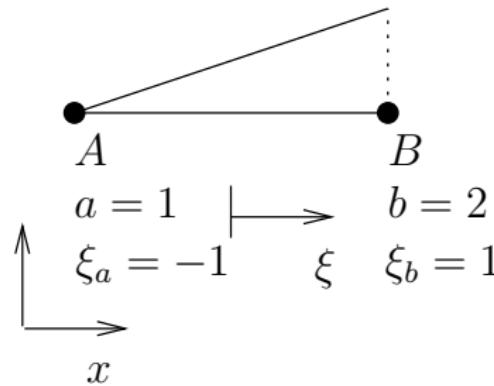
Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

● Referencias global y local

$$N_B(x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{x - x_A}{h^e} \quad (2)$$

$$N_b(\xi) = \frac{1 + \xi_b \xi}{2} \quad (3)$$





Elementos 1D

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.

Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

- Interpolación del campo de desplazamientos

$$u^h(x) = u_A N_A(x) + u_B N_B(x) \quad (4)$$

$$u^h(\xi) = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi) \quad (5)$$

- Relación entre coordenadas locales y globales

$$\xi(x) = \frac{2x - x_A - x_B}{h^e} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x^e(\xi) &= \frac{h^e \xi + x_A + x_B}{2} = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) x_a^e \\ &= \frac{1}{2} ((1 - \xi)x_A + (1 + \xi)x_B) \end{aligned} \quad (7)$$



Elementos 1D

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción

Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos

● Integración en coordenadas locales

$$K_{ab}^e = \int_{-1}^{+1} N_{a,\xi}(\xi) EA N_{b,\xi}(\xi) \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} d\xi \quad (8)$$

sustituyendo:

$$N_{a,\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \right] = \frac{1}{2} \xi_a \quad (9)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h^e \xi + x_A + x_B}{2} \right] = \frac{h^e}{2} \quad (10)$$

en (8), resulta:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{h^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$



Para ampliar este tema . . .

Estructuras de
barras
articuladas

Felipe
Gabaldón

Introducción
Método
directo.
Formulación
1D

Método
directo:
Estructuras en
2D y 3D

Método de
elementos
finitos



HUGHES, T.J.R.

*The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic
Finite Element Analysis.*

Dover Publications Inc., 2000.



OÑATE, E.

*Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos
Finitos. Análisis estático lineal.*

CIMNE. Segunda edición, 1995.



FELIPPA, C.A.

Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007).
*Department of Aerospace Engineering Sciences University
of Colorado at Boulder.*

<http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/Home.html>