



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

# Elementos Finitos en Biomedicina en Ingeniería Biomédica

Aplicaciones con el software FEBio

**José María Goicolea y Pedro Navas**





---

## **Resumen**

---

Resumen del libro...



---

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>V</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>VII</b>
<b>1 Modelo de elementos finitos para una fibra elástica 1D</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos de la práctica . . . . .	1
1.2. Base teórica . . . . .	1
1.3. Discritetización de las ecuaciones de gobiemo . . . . .	3
1.4. Tareas para entregar . . . . .	8
1.5. Organización del código . . . . .	9
1.6. Primeros pasos . . . . .	10
<b>2 Elementos finitos para biomecánica: problemas lineales</b>	<b>13</b>
2.1. Objetivos de la práctica . . . . .	13
2.2. Base teórica: Sistema matricial y Elásticidad 3D . . . . .	13
2.3. Simulación de un femur sometido a compresión . . . . .	15
2.4. Tareas para entregar . . . . .	20
<b>3 Cálculo no lineal mediante elementos finitos</b>	<b>21</b>
3.1. Objetivos de la práctica . . . . .	21
3.2. Base teórica y solución analítica . . . . .	21
3.3. Extensión uniaxial homogénea con FEBiO . . . . .	23
3.4. Compresión de una arteria con FEBiO . . . . .	32
3.5. Tareas para entregar . . . . .	37
<b>4 Dinámica de fluidos computacional (CFD)</b>	<b>39</b>
4.1. Objetivos de la práctica . . . . .	39
4.2. Flujo de Poiseuille . . . . .	39
4.3. CFD en tubo recto . . . . .	40
4.4. CFD en tubo curvo . . . . .	47
4.5. Tareas para entregar . . . . .	54



---

# Índice de figuras

---

1.1.	Definición del problema y sus condiciones de contorno. . . . .	2
1.2.	Esquema de las funciones de forma lineales del elemento 2 de una discretización 1D de una barra con 3 elementos . . . . .	5
1.3.	Modelo de fibra elástica 1D . . . . .	8
2.1.	Abrir modelo de archivo *.feb . . . . .	15
2.2.	Modelo de fémur importado en <i>FEBiO</i> . . . . .	15
2.3.	Selección de nodos a fijar. . . . .	16
2.4.	Fijación de nodos. . . . .	16
2.5.	Selección de nodos a cargar. . . . .	17
2.6.	Creación de archivo de cálculo. . . . .	18
2.7.	Paso de Preview a Postview. . . . .	18
2.8.	Corte en el plano coronal y esquema de materiales del modelo de fémur empleado. . . . .	19
2.9.	Resultados de tensiones para el problema real de un fémur sometido a flexión. . . . .	19
3.1.	Solución analítica uniaxial del modelo Neohookeano ( $\mu = 80$ kPa) . . . . .	23
3.2.	Solución analítica uniaxial del modelo de Ogden ( $N = 1$ , $c_1 = 6,58$ kPa, $m_1 = 6,83$ ). . . . .	24
3.3.	Apertura de Preview y creación de geometría . . . . .	24
3.4.	Creación de la malla . . . . .	25
3.5.	Definición del material . . . . .	25
3.6.	Establecer condiciones de contorno . . . . .	26
3.7.	Condiciones de contorno de desplazamiento nulo en los otros dos planos . . . . .	26
3.8.	Condiciones de contorno de desplazamiento impuesto . . . . .	27
3.9.	Definición del <i>Step</i> de análisis . . . . .	27
3.10.	Curva de aplicación y exportación del fichero de cálculo . . . . .	27
3.11.	Cálculo con <i>FEBiO</i> . . . . .	28
3.12.	Abrir fichero .xplt en programa <i>Postview</i> . . . . .	28
3.13.	Fijar escala y perspectiva . . . . .	28
3.14.	Definir variable a representar, $\sigma_{zz}$ . . . . .	29
3.15.	Obtener curva de historia $\sigma_{zz}/t$ . . . . .	29
3.16.	Inspección y gráficos para historia $\sigma_{zz}(t)$ , visualizada externamente . . . . .	30
3.17.	Definición de modelo homogéneo con material de Ogden . . . . .	30
3.18.	Resultados para $\sigma_{zz}$ con material de Ogden . . . . .	31
3.19.	Esquema del problema . . . . .	32
3.20.	Simetrías que nos ofrece el problema . . . . .	32
3.21.	Geometría del problema . . . . .	33
3.22.	Malla del problema . . . . .	33
3.23.	Material . . . . .	34
3.24.	Condiciones de contorno en desplazamiento igual a 0 . . . . .	34
3.25.	Condición de contorno en desplazamiento impuesto . . . . .	35
3.26.	Condición de cálculo . . . . .	35
3.27.	Mapa de desplazamientos totales . . . . .	36
3.28.	Mapa de desplazamientos totales . . . . .	36
4.1.	Definición analítica del flujo de Poiseuille para el caso considerado . . . . .	40
4.2.	Apertura de Preview y creación de geometría y malla . . . . .	41

4.3. Definición del material fluido y asignación al modelo (seleccionando la parte) . . . . .	41
4.4. Condición de contorno de velocidad nula en superficies laterales del cilindro . . . . .	42
4.5. Condición de contorno de presión nula (a través de <i>fluid dilatation</i> ) en superficie superior del cilindro . . . . .	42
4.6. Condición de contorno de presión nula (a través de <i>fluid dilatation</i> ) en el borde de la base inferior . . . . .	43
4.7. Definición de velocidad del fluido de entrada en la sección inferior del tubo . . . . .	43
4.8. Definición del <i>Step</i> para el cálculo CFD y parámetros del mismo . . . . .	44
4.9. Resultados del campo de velocidades en el instante final . . . . .	44
4.10. Perfil de velocidades a lo largo de una línea diametral de nodos en la sección de salida, en los distintos instantes de tiempo . . . . .	45
4.11. Perfil de velocidades a lo largo de una línea diametral de nodos en la sección de entrada, en los distintos instantes de tiempo . . . . .	45
4.12. Perfil de velocidades . . . . .	45
4.13. Resultados de velocidades en el instante final, obtenidos con FEBiO para los casos de velocidad de entrada uniforme (c) y parabólica (p) y perfil teórico de Poiseuille . . . . .	46
4.14. Creación de la geometría de un toro . . . . .	47
4.15. Crear malla del toro <i>Editable</i> . . . . .	47
4.16. Activación de selección de elementos en la barra inferior para cortar el modelo . . . . .	48
4.17. Seleccionar y separar 3/4 del toro . . . . .	48
4.18. Eliminación de partición con 3/4 del modelo . . . . .	48
4.19. Modelo del tubo curvo resultante . . . . .	49
4.20. Asignación de material fluido y propiedades . . . . .	49
4.21. Condiciones de contorno (1) . . . . .	50
4.22. Condiciones de contorno (2) . . . . .	50
4.23. Curva de aplicación del flujo de entrada . . . . .	51
4.24. Parámetros del <i>Step</i> de cálculo . . . . .	51
4.25. Campo de velocidades del fluido . . . . .	52
4.26. Selección de perfil de velocidades en la sección de salida . . . . .	52
4.27. Selección de perfil de velocidades en la sección de entrada . . . . .	52
4.28. Comparación de perfiles de velocidades de entrada y salida con el modelo teórico de Poiseuille . . . . .	53

---

## **Índice de cuadros**

---



# CAPÍTULO 1

## Modelo de elementos finitos para una fibra elástica 1D

### 1.1. Objetivos de la práctica

En esta práctica se ejemplifica la programación en **Matlab** de un código, basado en la técnica de los elementos finitos, capaz de resolver un problema elástico en una dimensión en el que se carga una fibra de un material biológico. Partimos de las siguientes premisas:

1. Se han dado en la clase teórica, y aparecen a su vez en este documento, una serie de nociones teóricas en cuanto a la construcción de matrices de rigidez elementales, las cuales han de ser programadas por el alumnado.
2. A su vez, estas matrices elementales han de pasar a formar parte de un sistema global a través del ensamblado de la matriz de rigidez global, para la cual también se han explicado unas nociones teóricas.
3. Para la resolución del sistema de ecuaciones es necesario conocer las condiciones de contorno de carga y desplazamiento del problema. Se han de aplicar las mismas al sistema matricial que se ha desarrollado en **Matlab**.
4. El sistema puede ser resuelto finalmente, y, con los resultados obtenidos, se puede comparar con solución analítica que el propio alumno ha de deducir y calcular en **Matlab**. Dicha comparación ha de ser llevada a cabo con las herramientas de dibujo de **Matlab**.

Esta práctica permite a los alumnos conocer como es un código de Elementos Finitos de forma simplificada. La práctica 8.2 es una continuación de los contenidos teóricos de esta, si bien la 8.2 ahonda en la resolución con un software de terceros: **FeBio**. Servirá tambien el resultado obtenido con dicho software para la comparación con el desarrollado en esta práctica 8.1.

### 1.2. Base teórica

#### Ecuaciones de gobierno

La ecuación que gobierna el fenómeno físico es la de una fibra elástica cuyo desplazamiento se define por  $u(x)$ . Como se ha descrito, esta es una ecuación elíptica lineal en una dimensión, con la siguiente forma:

$$\frac{d\sigma}{dx} + q(x) = \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $E$  es el módulo de Young, un parámetro elástico del material que describe su rigidez y  $A$  su área.  $q(x)$  representa las fuerzas volumétricas para este problema, por unidad de longitud. La resolución numérica de este problema supone encontrar un  $u(x)$ , en el intervalo abierto  $(0, L)$ , tal que el sistema esté en equilibrio teniendo en cuenta unas condiciones de contorno definidas para el problema en cuestión.

#### Condiciones de contorno y fuerzas volumétricas

Las posibles condiciones de contorno que nos encontramos en el problema a resolver se resumen en la Fig. 1.1.

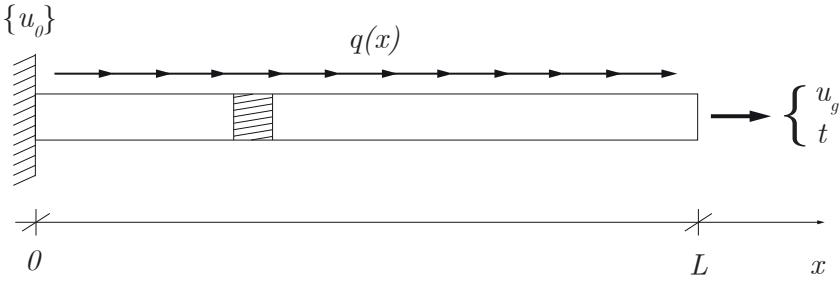


Figura 1.1: Definición del problema y sus condiciones de contorno.

Sobre las condiciones de contorno, nos podemos encontrar de dos tipos:

- *Tipo Dirichlet o Esenciales*

Aquellas que se aplican en el campo en el que hemos definido la ecuación diferencial, en nuestro caso  $u(x)$ . En este caso son condiciones de contorno “en desplazamiento”.

$$u(0) = u_0$$

$$u(L) = u_g$$

- *Tipo Neumann o Naturales*

Aquellas que se aplican en la derivada espacial del campo en el que hemos definido la ecuación diferencial, que teniendo en cuenta la ecuación constitutiva, sería:

$$t = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L}$$

Estas podrían considerarse como condiciones de contorno “en fuerzas”.

Por otro lado nos encontramos las *fuerzas volumétricas* o *distribuidas*, aquellas que se aplican a todo el dominio y que en la ecuación (1.1) están definidas por  $q(x)$ . Estas fuerzas pueden depender de la posición o bien ser constantes.

Un ejemplo de este tipo de fuerzas en el problema mecánico son aquellas asociadas a la gravedad, las cuales dependen de una sección  $A(x)$ , dependiente o no de la posición, y una densidad, que también puede variar a lo largo del dominio, por lo que dicha fuerza también variaría con la posición:

$$q(x) = A(x)\rho(x)g$$

En el ejemplo a resolver en esta práctica,  $q(x)$  será una función dada dependiente de la posición, representando así la carga aplicada por unidad de longitud.

### 1.3. Discritetización de las ecuaciones de gobiemo

#### Formulación fuerte y solución analítica

La ecuación (1.1) se puede considerar como la formulación fuerte del problema, que se denomina así porque se obliga a que la ecuación en derivadas parciales se cumpla en cada punto del intervalo de interés,  $(0, L)$ .

Como vemos, dicha ecuación involucra una derivada segunda del campo  $u(x)$ , lo que implica que dicho campo ha de ser derivable dos veces con respecto a  $x$ .

A continuación se detalla la obtención de la solución analítica. Partimos de la integración de la formulación fuerte entre un punto  $y \in (0, L)$  y  $L$ :

$$A \int_y^L \frac{d\sigma}{dx} dx = - \int_y^L q(x) dx \quad (1.2)$$

$$\sigma(L) - \sigma(y) = -\frac{1}{A} \int_y^L q(x) dx \quad (1.3)$$

Si empleamos la definición que nos aporta la ecuación constitutiva,  $\sigma = Eu_{,x}$ :

$$E \frac{du(y)}{dy} = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + \frac{1}{A} \int_y^L q(x) dx \quad (1.4)$$

De nuevo, integramos entre 0 y un punto  $z \in (0, L)$ :

$$\int_0^z E \frac{du(y)}{dy} dy = \int_0^z \left( E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + \frac{1}{A} \int_y^L q(x) dx \right) dy \quad (1.5)$$

Asumiendo que  $E$  es constante, al que la derivada de  $u$  con respecto a  $x$  en el punto  $x = L$ , el resultado obtenido de la integral es:

$$Eu(z) - Eu(0) = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} z + \frac{1}{A} \int_0^z \int_y^L q(x) dx dy \quad (1.6)$$

Por tanto, la solución de  $u(z)$  resulta:

$$u(z) = u(0) + \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} z + \frac{1}{EA} \int_0^z \int_y^L q(x) dx dy \quad (1.7)$$

La solución analítica de la ecuación (1.7) depende de dos constantes para las que son necesarias la aplicación de las dos condiciones de contorno que tengo,  $u(0)$  y  $\frac{du}{dx} \Big|_{x=L}$ , condiciones de contorno esencial y natural respectivamente. Para el caso de no tener una condición de contorno natural en el extremo  $x = L$  sino una condición en desplazamientos, el término  $\frac{du}{dx} \Big|_{x=L}$  se puede calcular imponiendo  $z = L$ , siendo que  $u(L)$  es conocido.

Para el caso particular en que las condiciones de contorno sean:  $u(0) = 0$  (extremo fijo) y  $EAdu/dx|L = P$  (carga  $P$  en  $x = L$ ), y la fuerza distribuida sea una función lineal  $q(x) = q_0 + rx$ , se desea obtener la expresión de la solución analítica. **Dicha resolución ha de ser realizada por los alumnos.**

Teniendo en cuenta las hipótesis realizadas, solo podremos obtener expresiones analíticas para valores sencillos de  $E(x)$  y  $f(x)$ , abandonando la idea cuando estos valores se complican, por lo que hemos de buscar soluciones aproximadas. Una de las técnicas más empleadas es la del método de los elementos finitos, para el que necesitamos la forma débil del problema, que pasamos a describir en la siguiente sección.

#### Formulación débil

Esta formulación se consigue con una función de ponderación arbitraria  $w(x)$ , por la que se multiplica la ecuación de la formulación fuerte y se integra sobre todo el dominio:

$$\int_0^L w \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) dx + \int_0^L w q dx = 0 \quad (1.8)$$

Integrando por partes el primer término:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ w \cdot EA \frac{du}{dx} \right] &= \frac{dw}{dx} \cdot EA \frac{du}{dx} + w \cdot \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) \\ \left[ w \cdot EA \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dx} \cdot EA \frac{du}{dx} dx &= \int_0^L w \cdot \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (1.9)$$

obtenemos el resultado de integrar la ecuación 1.8:

$$\int_0^L \frac{dw}{dx} \cdot EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L w q dx - w(L) t_L + w(0) t_0 \quad (1.10)$$

donde  $t_L$  y  $t_0$  son las condiciones de contorno naturales en los extremos, que físicamente corresponden a las fuerzas aplicadas en dichos extremos. Si en el extremo  $x = 0$  se aplica una condición (esencial) de desplazamiento impuesto o fijo, en este caso a la función de ponderación se le exige también  $w(0) = 0$ , por lo que el último sumando de la ecuación (1.10) desaparece.

## Funciones de forma

En el Método de los elementos finitos es necesario realizar la aproximación de la incógnita  $u(x)$  por funciones de aproximación, también llamadas funciones de forma, en la forma:

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{B=1}^{N_{\text{nod}}} u_B N_B(x) \quad (1.11)$$

Se emplea un conjunto finito ( $N_{\text{nod}}$ ) de funciones de interpolación  $N_B(x)$ . Esto conlleva un error que en principio disminuye cuanto mayor sea el número de nodos  $N_{\text{nod}}$  o el orden de las funciones de interpolación.

El Método de Galerkin, que es el método más empleado y, por tanto, el que vamos a utilizar, emplea para las funciones de ponderación  $w(x)$  la misma interpolación que para la función incógnita  $u(x)$ :

$$w(x) \approx w_h(x) = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A N_A(x) \quad (1.12)$$

La interpolación de las derivadas que aparecen en la forma débil será

$$\frac{du_h}{dx} = \sum_{B=1}^{N_{\text{nod}}} u_B \frac{dN_B}{dx}; \quad \frac{dw_h}{dx} = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A \frac{dN_A}{dx} \quad (1.13)$$

Sustituyendo en las integrales de la forma débil (Eq. (1.10)), obtenemos:

$$\int_0^L \left( \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A \frac{dN_A}{dx} \right) EA \left( \sum_{B=1}^{N_{\text{nod}}} u_B \frac{dN_B}{dx} \right) dx = \sum_{A,B=1}^{N_{\text{nod}}} w_A \left[ \int_0^L \frac{dN_A}{dx} EA \frac{dN_B}{dx} dx \right] u_B \quad (1.14)$$

donde

$$\int_0^L \frac{dN_A}{dx} EA \frac{dN_B}{dx} dx = K_{AB}$$

es decir, la denominada matriz de rigidez,  $[K]$ . Análogamente, para las acciones aplicadas o fuentes se obtienen los términos del vector de fuerzas:

$$\int_0^L \left( \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A N_A \right) q dx = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A \underbrace{\left[ \int_0^L N_A q dx \right]}_{f_A^{\text{int}}} \quad (1.15)$$

$$\left[ w \cdot EA \frac{du}{dx} \right]_0^L = -w(L) t_L + w(0) t_0 = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A f_A^{\text{ext}} \quad (1.16)$$

De las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) resulta el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\sum_{A,B=1}^{N_{\text{nod}}} w_A K_{AB} u_B = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A (f_A^{\text{int}} + f_A^{\text{ext}}) = \sum_{A=1}^{N_{\text{nod}}} w_A f_A \quad (1.17)$$

donde las fuerzas aplicadas se obtienen como suma de las interiores (fuentes distribuidas) y las exteriores en el contorno

$$f_A = f_A^{\text{int}} + f_A^{\text{ext}}$$

Y teniendo en cuenta que  $w(x)$  son arbitrarias,  $w_A$  también lo serán, por lo que se obtiene la ecuación matricial:

$$\sum_{B=1}^{N_{\text{nod}}} K_{AB} u_B = f_A \Leftrightarrow [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (1.18)$$

### Funciones de forma elementales

En la práctica el cálculo de las integrales y la expresión de las funciones de interpolación se hacen elemento a elemento. Esto facilita sobremanera el cálculo que se hace con el mismo algoritmo en cada uno de los elementos, para luego ensamblar las matrices globales. Las funciones de interpolación tienen soporte compacto, es decir son cero fuera del subdominio  $\Omega^e$  correspondiente al elemento ( $e$ ) en cuestión. Se establece una numeración y coordenadas locales en cada elemento, que tienen su correspondencia con las globales.

En el caso a resolver 1D podemos suponer funciones de forma lineales de dos nodos como los de la figura 1.2.

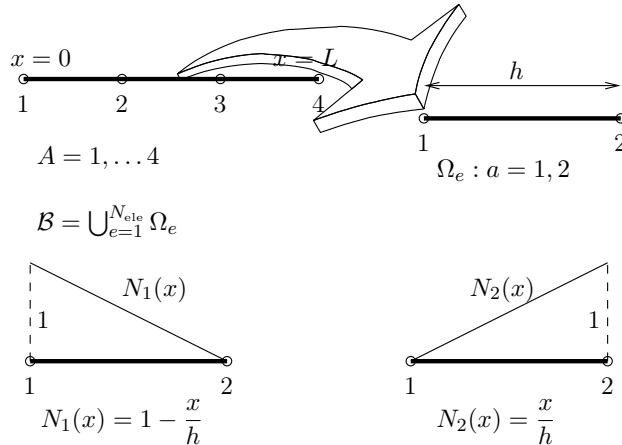


Figura 1.2: Esquema de las funciones de forma lineales del elemento 2 de una discretización 1D de una barra con 3 elementos

Teniendo en cuenta los valores de  $N_1$  y  $N_2$  que aparecen en la figura 1.2, se realizan las integrales de cada uno de los términos; por ejemplo  $K_{11}^e$  es:

$$K_{11}^e = \int_0^h \frac{dN_1}{dx} EA \frac{dN_1}{dx} dx = \frac{EA}{h^2} h = \frac{EA}{h} \quad (1.19)$$

y análogamente los demás:

$$K_{22}^e = \frac{EA}{h}; \quad K_{12}^e = K_{21}^e = -\frac{EA}{h} \quad (1.20)$$

resultando

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{EA}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Similarmente el vector de fuerzas internas del elemento resulta

$$\{\mathbf{f}^{\text{int},e}\} = \frac{h}{6} \begin{Bmatrix} 2q_1 + q_2 \\ q_1 + 2q_2 \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

Una vez formadas las matrices elementales se convierten a numeración global,

$$\begin{aligned} K_{ab}^e &\rightarrow [\hat{\mathbf{K}}^e] \\ f_a^e &\rightarrow \{\hat{\mathbf{f}}^e\} \end{aligned}$$

ensamblándose finalmente estas matrices locales dentro de las matrices globales del sistema. Para el ejemplo de la figura 1.2, puesto que todos los elementos son iguales, las matrices elementales de rigidez son todas iguales entre sí, siendo su valor el de la matriz de la ecuación (1.3).

Para poder realizar el ensamblaje hay que tener en cuenta el lugar que van a ocupar en la matriz de rigidez global las distintas componentes de las matrices de rigidez locales. Si observamos la figura 1.2 vemos que el elemento 1 y el elemento 2 comparten el nodo número 2, por eso la posición (2, 2) de la matriz de rigidez global será compartida por las matrices de rigidez locales de los elementos 1 y 2. La forma que tendrá esta matriz de rigidez global será:

$$K^{global} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

De este ensamblaje, teniendo en cuenta los valores de las matrices de rigidez locales, obtenemos la matriz de rigidez global:

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices elementales y global de fuerzas internas son

$$\{\mathbf{f}^{int,e}\} = \frac{h}{6} \begin{Bmatrix} 2q_1 + q_2 \\ q_1 + 2q_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\mathbf{f}^{int}\} = \frac{h}{6} \begin{Bmatrix} 2q_1^{(1)} + q_2^{(1)} \\ q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} + 2q_1^{(2)} + q_2^{(2)} \\ q_1^{(2)} + 2q_2^{(2)} + 2q_1^{(3)} + q_2^{(3)} \\ q_1^{(3)} + 2q_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Si considerasemos una restricción del movimiento en el extremo  $x = 0$  y una carga  $q_L$  aplicada en el extremo  $x = L$ , la ecuación matricial que resulta de aplicar el método de los Elementos Finitos es:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} &= \{\mathbf{f}^{int}\} + \{\mathbf{f}^{ext}\} \\ \frac{EA}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} &= \frac{h}{6} \begin{Bmatrix} 2q_1^{(1)} + q_2^{(1)} \\ q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} + 2q_1^{(2)} + q_2^{(2)} \\ q_1^{(2)} + 2q_2^{(2)} + 2q_1^{(3)} + q_2^{(3)} \\ q_1^{(3)} + 2q_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Al vector de fuerzas volumétricas se le suma el de externas, en este caso una posible carga en  $P$ . Por otro lado, en el extremo  $x = 0$  existe una reacción para que el desplazamiento sea igual al impuesto,  $u(0) = 0$ . Dicha reacción se calcula *a posteriori*, una vez calculados los desplazamientos  $\{\mathbf{u}\}$ .

Una vez calculados los desplazamientos por la inversión de la matriz de rigidez, ya reducida por la aplicación de las condiciones de contorno, cabe la posibilidad de verificar el equilibrio, que se

puede obtener como resultado de la suma de las fuerzas internas del cuerpo, que, en el caso del equilibrio, deben ser 0, siendo estas fuerzas internas calculadas como:

$$\{\mathbf{f}^{\text{int}}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}$$

Por otro lado, la reacción en este caso se podría calcular multiplicando la fila eliminada de la matriz  $[\mathbf{K}]$  por el vector de desplazamientos y restándole las fuerzas aplicadas en dicho nodo, que, al tratarse de un contorno tipo *esencial*, solo podrán ser fuerzas volumétricas:

$$R_0 = K_{1j}u_j - f_1^{\text{vol}}$$

#### 1.4. Tareas para entregar

Se desea calcular la respuesta de una fibra elástica unidimensional, de longitud  $L = 10\text{mm}$  y sección uniforme  $A = 1\text{mm}^2$ . El material es elástico lineal, con módulo de Young  $E = 1000\text{MPa}$ . El extremo izquierdo ( $x = 0$ ) está fijo mientras que sobre el derecho ( $x = L$ ) actúa una fuerza axial de valor  $P = 5\text{N}$ , como se indica en la figura 1.3. Se podrá suponer que las deformaciones son pequeñas.

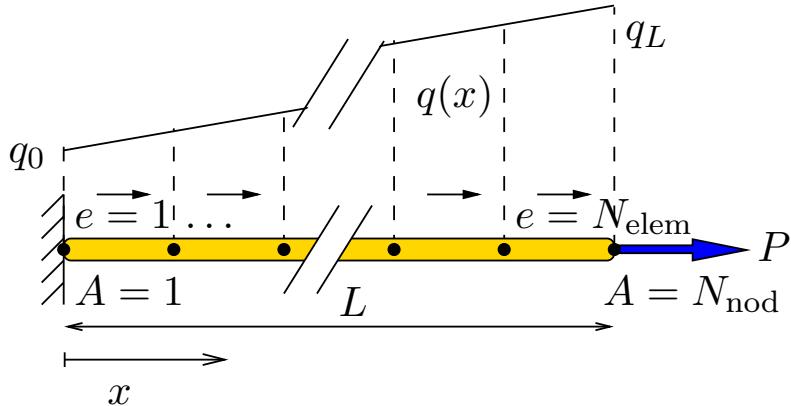


Figura 1.3: Modelo de fibra elástica 1D

A partir de los dígitos de las decenas ( $d$ ) y unidades ( $u$ ) del número de matrícula de cada estudiante,  $N_{\text{mat}} = du$ , se tomarán los siguientes parámetros para el modelo:

- Número de elementos  $N_{\text{elem}} = 9 - d$
- La carga distribuida  $q(x)$ , fuerza longitudinal por unidad de longitud, será lineal entre los extremos  $x = 0$  y  $x = L$ , con los valores en los extremos  $q_0 = d/10 \text{ N/mm}$ ,  $q_L = q_0 + u/10 \text{ N/mm}$ .

Los pasos a seguir son:

1. Planteamiento del problema elástico y condiciones de contorno.
2. Expresiones numéricas de las matrices de rigidez y de fuerzas del modelo completo.
3. Aplicación de condiciones de contorno y resolución.
4. Solución para los desplazamientos  $u(x)$  y tensiones  $\sigma(x)$  en cada punto, dibujando la gráfica en función de  $x$  y comparando con la solución analítica. (Nota: las tensiones se calculan a partir de los desplazamientos como  $\sigma = E\varepsilon = Edu/dx$ , y empleando la aproximación en un elemento finito,  $\sigma^h = Eu_a dN_a/dx = E(u_2 - u_1)/h$ .)

Se pide:

1. Desarrollo de la solución analítica.
2. Comparativa de las soluciones analítica y numérica para los desplazamientos  $u(x)$  y las tensiones.
3. Discutir los resultados. ¿Qué forma tienen las tensiones? ¿Por qué?

Se recomienda emplear **Matlab** como software de referencia.

Al finalizar la clase se debe entregar, en una tarea en *Moodle*, un archivo `*.m` donde se evaluará la capacidad de resolución del problema. NO ES OBLIGATORIO HABER ACABADO EL PROBLEMA.

Si no se ha acabado el *script* de **MatLab** y respondidas a las cuestiones planteadas, se deberá completar en casa y ha de ser entregado en conjunto con la práctica 8.2, donde se resolverá el problema también con **FeBio**. Se habilitará una nueva tarea de *Moodle* en el horario indicado, valorándose en este caso la discusión que se realice de los resultados.

## 1.5. Organización del código

La organización del código de **Matlab** es totalmente libre, pero, puesto que es la primera aproximación que el alumno hace a un código de elementos finitos, el seguir el esquema 1.1 puede resultar muy interesante para seguir unas pautas.

Listing 1.1: Esquema Matlab

```
1 % A: PREPROCESO
2 %-----
3 % 1. Geometría
4
5 % 2. Material
6
7 % 3. Condiciones de contorno en carga
8
9 % 4. Malla
10
11 % 5. Grados de Libertad del problema
12
13
14 % B: CONSTRUCCIÓN de MATRICES y VECTORES globales
15 %-----
16
17 % C: APLICACIÓN de las CONDICIONES de CONTORNO y RESOLUCIÓN
18 %-----
19
20 % D: POSTPROCESO
21 %-----
```

## 1.6. Primeros pasos

Listing 1.2: Primeros pasos

```

1 % Definición de parámetros particulares de cada alumno
2 Nmat=24 % número de matrícula del alumno
3 d=floor(Nmat/10) % cifra de decenas
4 u=Nmat-d*10 % cifra de unidades
5
6 % A: PREPROCESO
7 %-----
8 % 1. Geometría
9 A=1; % Área
10 L=10; % Longitud de la fibra
11
12 % 2. Material
13 E=1000; % datos del enunciado
14
15 % 3. Condiciones de contorno en carga
16 P=5; % dato de fuerza aplicada en x=L
17 q0=---;
18 qf=---;
19
20 % 4. Malla
21 Nele=; % Dato del problema!!!
22 Nnod=; % Número de nodos. Piensa!
23 H=; % Tamaño de elemento, longitud entre numero de elementos
24 % Carga de cada nodo correspondiente a la carga repartida
25 q=----; % Que función conozco para hacer una distribución lineal
26
27 % 5. Grados de Libertad del problema
28 % Dim = GDL totales = grados de libertad nodales x no nodos
29 gdl=1; % Desplazamiento en x
30 Dim=Nnod*gdl;
31
32 % B: CONSTRUCCIÓN de MATRICES y VECTORES globales
33 %-----
34 % 0. Inicialización
35 K=zeros(Dim);
36 F=zeros(Dim,1);
37 Fext=zeros(Dim,1);
38
39 % 1. Matriz de rigidez elemental (común a todos los elementos)
40 k=---;
41
42 % 2. Ensamblaje de la matriz global
43 for i=1:Nele
44     ---
45 end
46
47 % 3. Ensamblaje del vector de fuerzas volumétricas global (diferente para cada ...
48 %     elemento)
49 for i=1:Nele
50     % vector elemental de cargas distribuidas
51     f=---;
52     % ensambla cargas
53     ---
54 end
55
56 % 4. Suma del vector de fuerzas externas
57 Fext(Nnod)=Fext(Nnod)+P;
58 F=F+Fext; % suma cargas en contorno y cargas distribuidas
59
60 % C: APLICACIÓN de las CONDICIONES de CONTORNO y RESOLUCIÓN
61 %-----
62
63 % 1. Reducción de la matriz de rigidez
64
65 % 2. Reducción del vector de fuerzas
66
67

```

```

68
69 % 3. Resuelve sistema reducido para desplazamientos
70 ug=Kg\Fg;
71
72 % 4. Desplazamientos y reacciones. Equilibrio: Sum fuerzas = 0
73 un=[0;ug];
74 fint=-----;
75 r_0=-----;
76
77 Eq=sum(fint);
78 if ---- (Alcanzamos el equilibrio cuando las fuerzas internas suman 0... o casi ...
    0....)
    disp('Equilibrio no alcanzado');
80 end
81
82 % D: POSTPROCESO
83 %-----
84
85 % 1. Deformaciones y Tensiones
86 epsilon=zeros(Nele,1);
87 sigma=zeros(Nele,1);
88 for i=1:Nele
89     epsilon(i)=---
90     sigma(i)=---
91 end
92
93
94 % 2. Solución analítica
95 dx=20;
96 xc=linspace(0,L,dx);
97 dq=qf-q0;
98 r=dq/L; uc=1/(E*A)*(P+q0*L+1/2*r*L^2)*xc-(1/2*q0*xc.^2+1/6*r*xc.^3); ...
    sigmac=1/A*(P+q0*(L-xc)+1/2*r*(L^2-xc.^2));
99
100 % 3. Gráfico
101 % 3.1. Dibuja la solución del desplazamiento en x
102
103 % 3.2. Dibuja la solución de la tensión en x

```



## CAPÍTULO 2

# Elementos finitos para biomecánica: problemas lineales

### 2.1. Objetivos de la práctica

En esta práctica se desarrolla la simulación mediante elementos finitos del comportamiento de materiales biológicos que se rigen por un modelo elástico lineal de comportamiento. La herramienta empleada es el programa *FEBio* [Wei18a]. Se supone que al inicio de la práctica se tendrán ciertas destrezas de manejo de la suite *FEBio Studio*, las cuales se habrán adquirido de el seguimiento de la práctica 8.2.

El problema a llevar a cabo se realizará con la geometría de un fémur real, suponiendo dos tipos de materiales elásticos de distinta rigidez y diferentes estados de carga. Este caso supone una aplicación real con este tipo de materiales en biomecánica.

Recordar que la suite se subdivide en 3 programas que a día de hoy se integran en una Suite denominada *FEBiO Studio*. Los 3 programas han sido desarrollados como código Open Source en la Universidad de Utah (USA). Se pueden instalar en una única instalación, desde un mismo archivo de instalación que se puede encontrar en la siguiente enlace para los diferentes sistemas operativos:

<http://stokes.mecanica.upm.es/MNUB/>

- *Usuario:* mnub
- *Contraseña:* BioMecanica

Independientemente, se pueden descargar de la página web de la propia suite:  
<https://febio.org/downloads/>

Las versiones con la que se va a trabajar en este curso, con la que se ha elaborado esta guía y se muestra estable, es la 1.0.3 para Windows, Linux y Mac. Es una versión que trabaja con FEBio 3.0.2.

### 2.2. Base teórica: Sistema matricial y Elásticidad 3D

El problema que se plantea resolver en esta práctica tiene en cuenta que cada nodo tiene 3 grados de libertad, a diferencia del problema estudiado en la práctica anterior que era 1D. Por tanto, la variable a aproximar será un vector de desplazamientos nodales de  $i$  grados de libertad:

$$u_i^h(x) = \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} u_{ia} N_a(x) \quad (2.1)$$

donde las funciones de forma se pueden escribir en forma matricial. Asimismo, las deformaciones pueden interpolarse con las derivadas de dichas funciones de forma de la siguiente manera:

$$(\varepsilon_{kl})^h = \frac{1}{2} \sum_b (u_{kb} N_{b,l} + u_{lb} N_{b,k}) = \sum_b B_{lb} u_{kb}, \quad (2.2)$$

siendo  $B_{lb}$  la matriz de gradiente de funciones de forma simétrica, que sirve para aproximar las deformaciones, pero también fuerzas internas y matriz de rigidez:

$$F_{pa}^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} B_{qa} \sigma_{pq} dV \quad (2.3)$$

$$K_{parb} = \int_{\mathcal{B}} B_{qa} C_{pqrs} B_{sb} dV \quad (2.4)$$

La tensión se define por tanto con un tensor tridimensional,  $\sigma$ , denominado tensor de tensiones de *Cauchy*.  $C_{pqrs}$  representa el tensor constitutivo de cuarto orden, tal que tensiones y deformaciones quedan relacionadas por él mismo de la forma:

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon, \quad (2.5)$$

que para el caso de elasticidad 3D se define por:

$$\mathbb{C} \equiv C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.6)$$

El último componente del sistema, las fuerzas externas, se puede definir en 3D por:

$$F_{pa}^{\text{ext}} = \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_p^* N_a dS + \int_{\mathcal{B}} q_p N_a dV \quad (2.7)$$

Por tanto, el sistema a resolver, similar al estudiado en una dimensión, es:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}. \quad (2.8)$$

Este sistema, para los ejemplos en 3D que se han referido en los objetivos del apartado 4.1, se resolverán en la siguiente práctica con la suite *FEBiO*, que se describe en el siguiente apartado.

## 2.3. Simulación de un fémur sometido a compresión

Para los materiales estudiados en biomecánica, el caso de los tejidos oseos es el que mejor se aproxima al comportamiento elástico lineal. Una vez se ha trabajado con el programa en prácticas anteriores simplificados a una sola fibra elástica, podemos proceder al estudio de un problema con un hueso real.

Para ello, hemos de importar el archivo **FEMUR.feb** que está en Moodle. La forma de importarlo es seleccionando *File/Open Model File*. Deberemos guardar el archivo como \*.fsm para seguir trabajando con el mismo. Este tipo de archivo, FEBio Studio Model, es el que se guarda como global del proyecto.

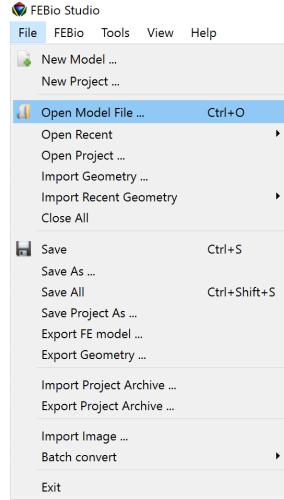


Figura 2.1: Abrir modelo de archivo \*.feb

Obtendremos algo similar al fémur de la figura 2.2. Como vemos, dicho modelo ya viene con la geometría y la malla de un fémur real, en milímetros. Además, en la sección *Model*, vemos como existen dos materiales, denominados duro y blando. El primero se refiere a la parte de hueso compacto mientras que el segundo está asignado al hueso esponjoso.

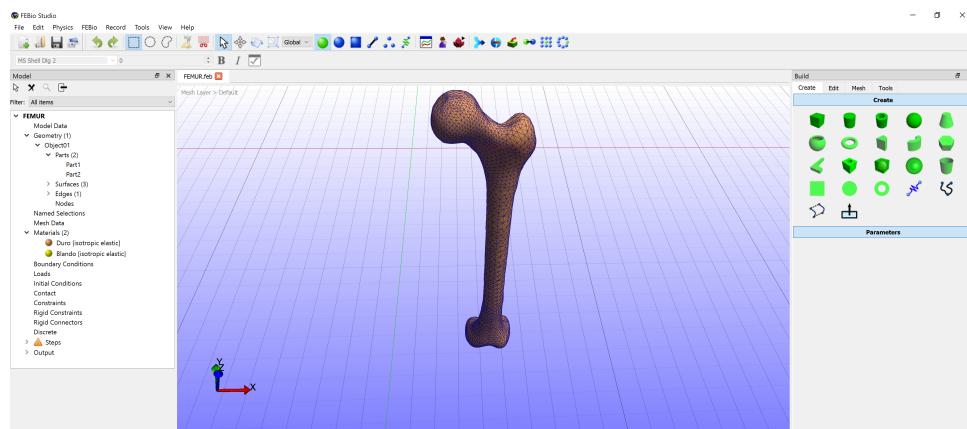


Figura 2.2: Modelo de fémur importado en *FEBiO*

Este modelo es el punto de partida para estudiar un caso real. Para ello debemos asignar las condiciones de contorno correspondientes al caso a resolver. Se ha planteado la idea de calcular las tensiones producidas por cargar el peso de un individuo de 100 kg desde la cadera. Para ello, fijaremos la articulación de la rodilla y cargaremos en la parte superior con una fuerza vertical de 1000 N. Para fijar la parte inferior, hemos de seleccionar los nodos correspondientes a estas zonas. En la figura 2.3 vemos cómo hemos de, una vez seleccionado el objeto, activar la selección de nodos y la opción de seleccionar nodos adyacentes. Con un radio de acción de 20 y manteniendo pulsada la tecla mayúscula, seleccionamos en el punto central de cada una de las dos protusiones. Deberían quedar seleccionados una serie de nodos similar a los nodos señalados en rojo de la figura 2.3.

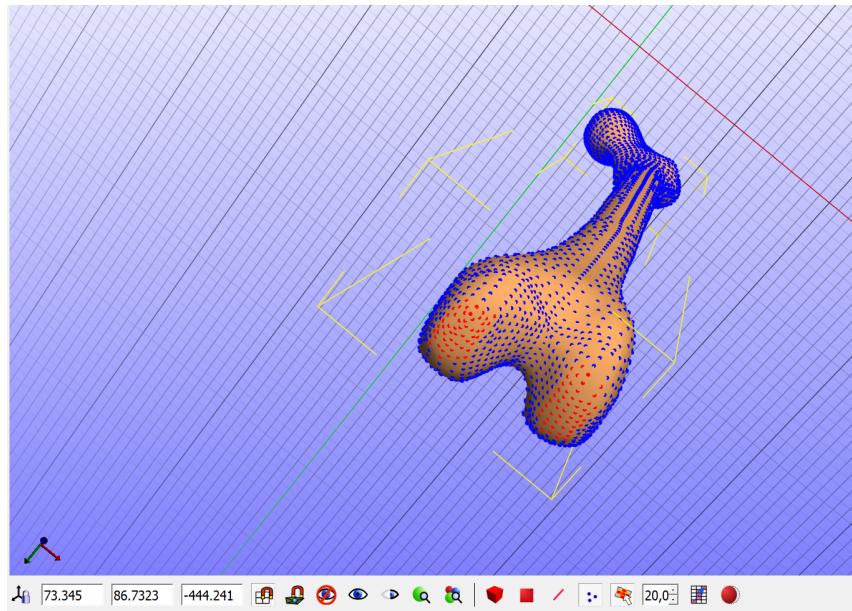


Figura 2.3: Selección de nodos a fijar.

Una vez seleccionados estos nodos se añadirá la condición de contorno en *Physics/Add Boundary Condition* y procederemos a fijar los desplazamientos en las tres direcciones del espacio (*Fixed Displacements*).

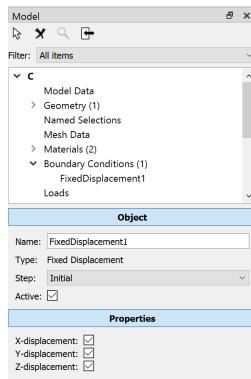


Figura 2.4: Fijación de nodos.

Al pulsar la tecla *escape* deseleccionamos los nodos seleccionados anteriormente. Procedemos ahora con la condición de contorno de carga. En este caso seleccionamos un nodo en la parte más alta del fémur. El radio de acción escogido en este caso será de 10. La zona seleccionada será similar a la de la figura 2.5.

Añadiremos una carga nodal desde *Physics/Add Nodal Load*, seleccionando la dirección *z* y dejando el valor, por ahora, en 1. Se añadirá dicha carga a la sección *Model*. Necesitaremos ahora conocer el número de nodos seleccionados. Cuando lo sepamos hemo de dividir la carga a aplicar, 1000 N entre los nodos a cargar, en el caso del modelo de la figura 2.5: 40. Por tanto, cambiaremos el valor de 1 por -25.00, puesto que es el valor del reparto de dicha carga y hemo de darle la dirección negativa en el eje *z*.

Finalmente, hemo de añadir un *Analysis Step* (*Physics/Add Analysis Step*), que dejaremos el que nos crea por defecto, en 10 pasos de carga. Ahora podremos generar un archivo de cálculo *.feb*, con cuidado de cambiar el nombre al que hemo importado para no sobrescribir el mismo. Por defecto lo genera dentro de una carpeta *jobs*, con la siguiente configuración:

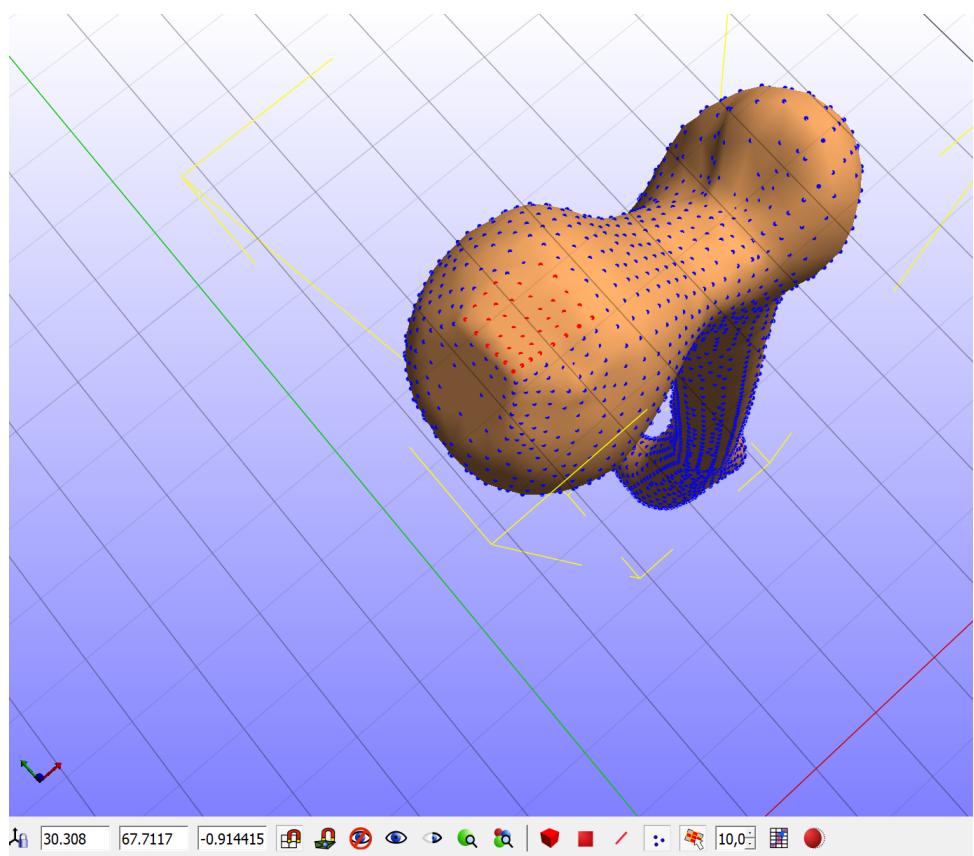


Figura 2.5: Selección de nodos a cargar.

## 2. Elementos finitos para biomecánica: problemas lineales

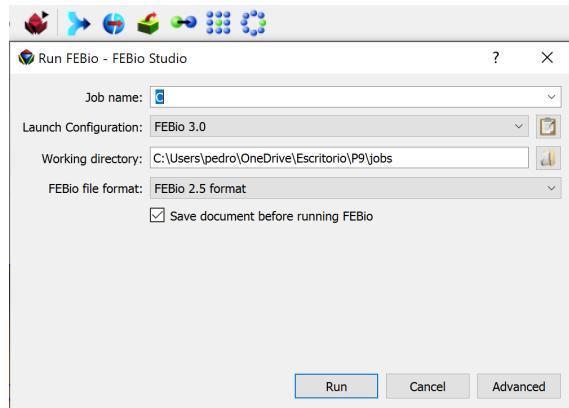


Figura 2.6: Creación de archivo de cálculo.

Una vez exportado, procedemos a correr la simulación. Cuando esta finalice, podremos abrir el archivo .xplt generado. Hacemos doble click en el nombre del trabajo creado:

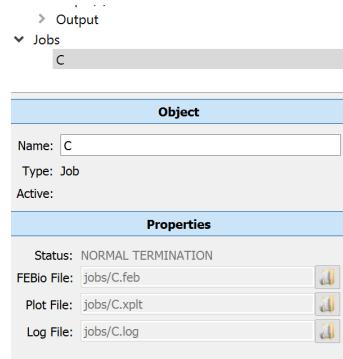


Figura 2.7: Paso de Preview a Postview.

Una vez abramos el archivo, la ventana cambia a postproceso (*Postview*). Es interesante verificar los materiales de los que se compone nuestro modelo. Para ello, añadimos un corte con la herramienta corte de Postview (señalada en rojo en la figura 2.8, y especificamos que el plano sea el normal al eje *y*. Jugando con la distancia al (0, 0, 0) podemos conseguir una visión similar a la de la figura 2.8.

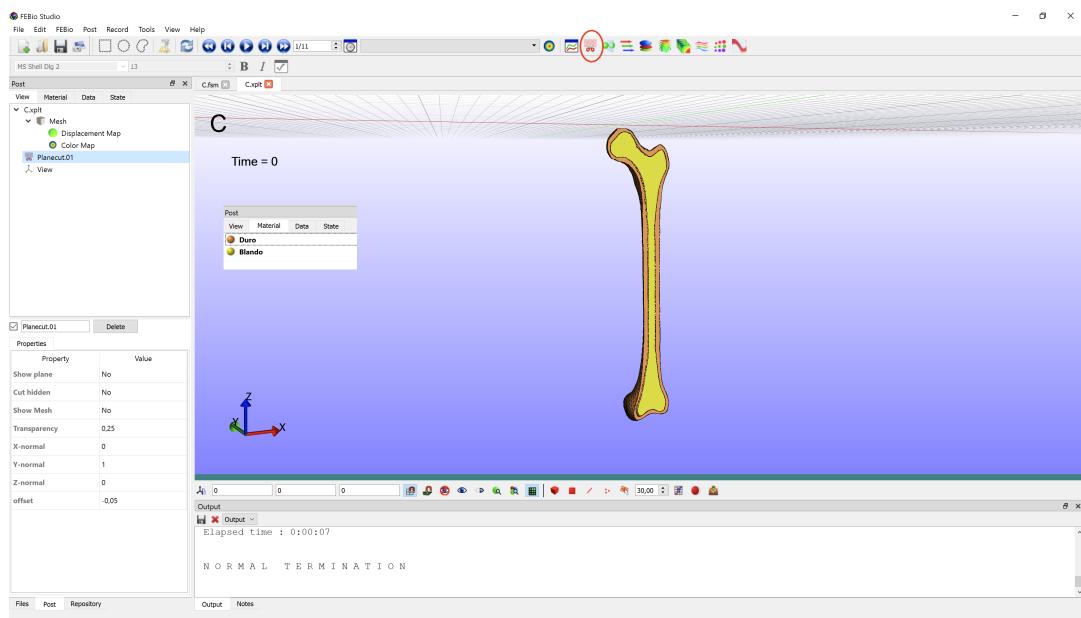


Figura 2.8: Corte en el plano coronal y esquema de materiales del modelo de fémur empleado.

A modo de análisis de resultados, en un problema de huesos nos resulta interesante ver en qué puntos puede fallar el tejido óseo. Para ello, nos interesa conocer los valores usuales que usan los criterios de fallo típicos de este material, que serían la tensión efectiva o tensión de von Mises y la tensión principal 1 o tensión principal a tracción. Ambos valores, para el último paso de carga, se pueden observar en la figura 2.9.

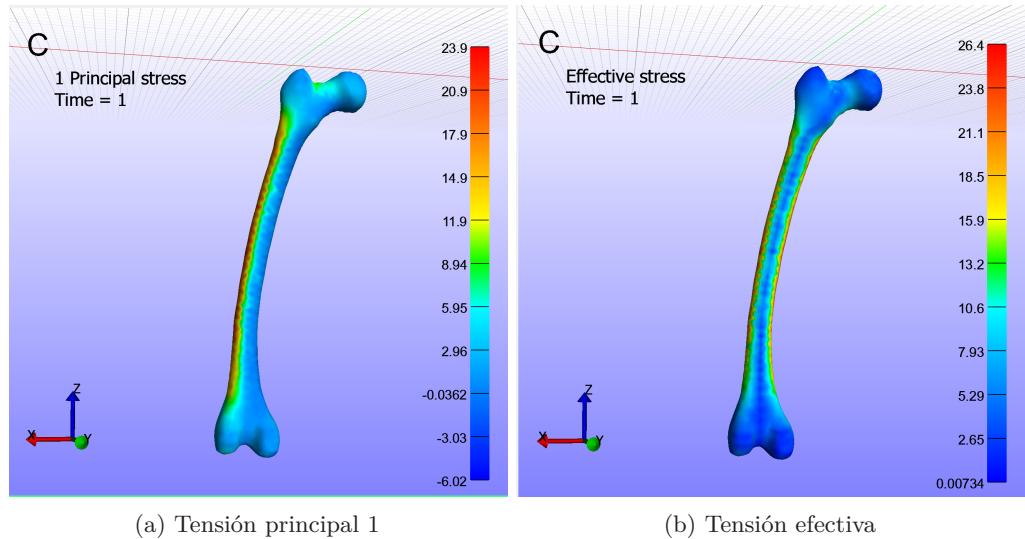


Figura 2.9: Resultados de tensiones para el problema real de un fémur sometido a flexión.

## 2.4. Tareas para entregar

Deberán obtenerse y presentarse los siguientes resultados:

1. Realizar un estudio de la aplicación de una carga de flexión para la obtención de la carga a la que rompería el tejido oseo. Consideraremos una tensión máxima en compresión de 200 MPa y de 100 MPa en tracción.
2. Fichero de video (.avi o .mov) con animación del mapa coloreado de las tensiones más representativas para el caso del fémur.

## CAPÍTULO 3

# Cálculo no lineal mediante elementos finitos

### 3.1. Objetivos de la práctica

En esta práctica se desarrolla la simulación mediante elementos finitos del comportamiento del tejido biológico blando, empleando modelos hiperelásticos no lineales y grandes deformaciones, mediante el programa FEBiO [Wei18a]. En particular se desarrollan los siguientes modelos:

1. En primer lugar se desarrolla la solución analítica mediante modelos de material hiperelástico incompresible, que será empleada posteriormente para comparar con las soluciones numéricas (sección 3.2).
2. Se simula de la deformación *homogénea* en un punto del tejido, mediante un modelo con un único elemento, sometido a tracción uniaxial sin confinar (sección 3.3).
3. Se simula de la deformación de una arteria comprimida en una sección con un modelo discretizado con varios elementos aprovechando diferentes simetrías. (sección 3.4).
4. Se proponen algunas tareas a llevar a cabo por los estudiantes para evaluar el aprovechamiento de la práctica (sección 4.5).

### 3.2. Base teórica y solución analítica

#### Ecuaciones generales

Se considera un material hiperelástico definido, en la configuración de referencia, mediante la función de densidad de energía por unidad de volumen,

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  el tensor de deformación de Cauchy-Green y  $\mathbf{S}$  el tensor de tensiones segundo de Piola-Kirchhoff (PK). Suponemos un material isotrópico, con deformación caracterizada por las extensiones principales ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ), por lo que tomando coordenadas según estas direcciones principales las matrices de componentes son

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

La tensión PK resulta también alineada con las mismas direcciones principales,

$$[\mathbf{S}] = 2 \begin{pmatrix} \partial W / \partial C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial W / \partial C_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial W / \partial C_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior de  $\mathbf{C}$  y la regla de la cadena resulta:

$$S_i = 2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial C_i} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{1}{\lambda_i} \quad (\text{sin sumatorio en índice } i). \quad (3.4)$$

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

---

La tensión de Cauchy está alineada también con las mismas direcciones principales, al ser su relación con el tensor de PK la siguiente

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^T, \quad (3.5)$$

por lo que las tensiones principales de Cauchy (verdaderas) resultan

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \quad (3.6)$$

Consideramos ahora el caso incompresible. Se introduce la restricción de volumen constante

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.7)$$

Esta restricción origina una indeterminación en las expresiones (3.6) de las tensiones, en función de una presión  $p$ , a priori desconocida

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p. \quad (3.8)$$

El valor de  $p$  no se puede obtener mediante las ecuaciones constitutivas del material y deberá ser calculada en cada caso a partir de las condiciones de contorno.

Suponemos ahora el caso de tensión uniaxial, según esta dirección tomaremos la extensión principal  $\lambda_1$ . Las deformaciones en las dos direcciones laterales serán iguales  $\lambda_2 = \lambda_3$ , y de la condición de incompresibilidad (3.7) se deduce  $\lambda_1 = 1/\lambda_2^2$ . Por otra parte, en las direcciones laterales la tensión es nula, permitiendo estas condiciones de contorno la determinación de  $p$ :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \Rightarrow p = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \quad (3.9)$$

y sustituyendo en (3.8) resulta la relación entre la tensión y el alargamiento:

$$\boxed{\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_1^{-1/2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}}. \quad (3.10)$$

Esta expresión general se puede aplicar a casos particulares de materiales hiperelásticos con funciones específicas de densidad de energía  $W(\lambda_i)$ .

#### Material Neohookeano

Consideramos un material Neohookeano incompresible, definido por la función de energía

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3), \quad (3.11)$$

donde el invariante principal 1 se expresa en función de las extensiones principales como  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ .

En FEBiO [Wei18b] el material Neohookeano se obtiene como un caso particular del material de Mooney-Rivlin,

$$\bar{W} = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3), \quad (3.12)$$

tomando  $c_1 = \mu/2$  y  $c_2 = 0$ . Aplicando (3.10) se obtiene directamente la expresión tensión–alargamiento:

$$\boxed{\sigma = \mu(\lambda^2 - \lambda^{-1})}, \quad (3.13)$$

donde hemos denominado  $\lambda = \lambda_1$  y  $\sigma = \sigma_1$ .

Como ejemplo se muestra el caso  $\mu = 2c_1 = 80$  kPa en la figura 3.1.

#### Material de Ogden

El material incompresible de Ogden se define por la siguiente función de densidad de energía

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{a_i} (\lambda_1^{a_i} + \lambda_2^{a_i} + \lambda_3^{a_i} - 3) \quad (3.14)$$

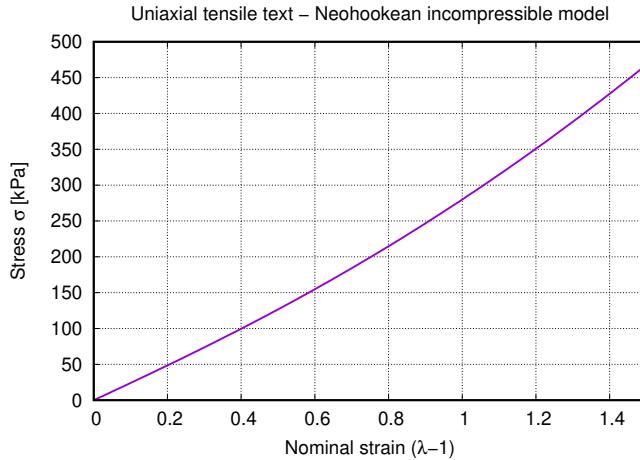


Figura 3.1: Solución analítica uniaxial del modelo Neohookeano ( $\mu = 80$  kPa)

En FEBiO [Wei18b] la función se expresa con una definición ligeramente distinta de los parámetros,

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i^2} (\lambda_1^{m_i} + \lambda_2^{m_i} + \lambda_3^{m_i} - 3) \quad (3.15)$$

La equivalencia entre ambos viene dada por  $C_i = c_i/m_i$ ,  $a_i = m_i$ .

Desarrollando la expresión (3.10) se obtiene directamente la expresión tensión–alargamiento:

$$\sigma = \sum_{i=1}^N C_i (\lambda^{a_i} - \lambda^{-a_i/2}), \quad (3.16)$$

Consideramos aquí por simplicidad un modelo con un único término ( $N = 1$ ). En este caso, la relación tensión–alargamiento será

$$\boxed{\sigma = C_1 (\lambda^{a_1} - \lambda^{-a_1/2})}. \quad (3.17)$$

Como ejemplo se muestra el caso ( $N = 1$ ,  $c_1 = 6,58$  kPa,  $a_1 = m_1 = 6,83$ ) en la figura 3.2.

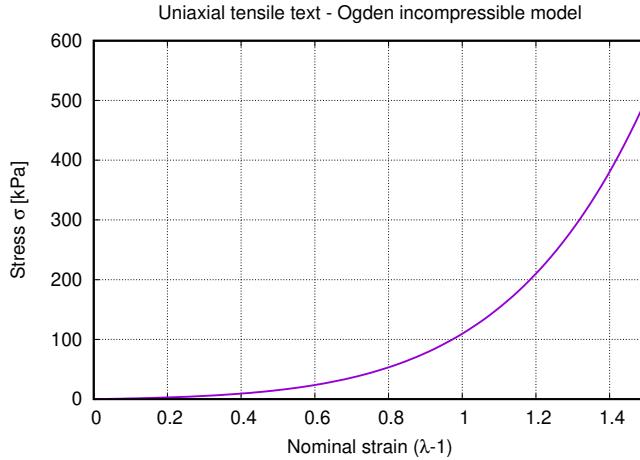


Figura 3.2: Solución analítica uniaxial del modelo de Ogden ( $N = 1$ ,  $c_1 = 6,58$  kPa,  $m_1 = 6,83$ ).

### 3.3. Extensión uniaxial homogénea con FEBiO

#### Geometría y malla

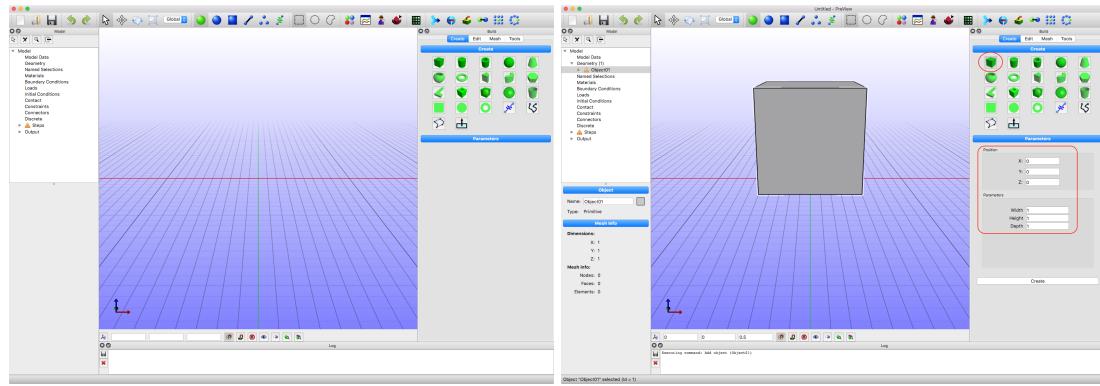
Desarrollamos en primer lugar un modelo sencillo, con un único elemento, y deformado de manera homogénea mediante la extensión uniaxial en dirección perpendicular a una de sus caras,

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

sin confinamiento alguno en las caras laterales. Naturalmente esto obliga a que la tensión sea también uniforme a lo largo del modelo. Este caso servirá para verificar la la ecuación constitutiva del material. Asimismo permite una introducción sencilla a la elaboración y cálculo de un modelo no lineal con FEBiO.

La geometría será un hexaedro con dimensiones  $1 \times 1 \times 1$  mm<sup>3</sup>, para el que supondremos además condiciones de simetría en los planos dorsales normales a  $x$ ,  $y$  y  $z$ . (Por tanto el cuerpo físico real al que corresponde el modelo tendría dimensiones  $2 \times 2 \times 2$  mm<sup>3</sup>.) En el plano superior  $z = 1$  aplicaremos un desplazamiento impuesto de valor  $u_z = 1,5$ , que equivale a un estiramiento en esta dirección de valor  $\lambda = (1 + 1,5)/1 = 2,5$ . El comportamiento del material lo supondremos según los modelos Neohookeano y de Ogden descritos en la sección anterior.

En primer lugar abrimos el programa *Febio Studio* y comenzamos con un nuevo modelo, obteniendo la ventana de la figura 4.2a. A continuación en la ventana del módulo *build* (lado derecho) crearemos un hexaedro, centrado en (0, 0, 0) y con dimensiones (1, 1, 1), fig. 3.3b. A

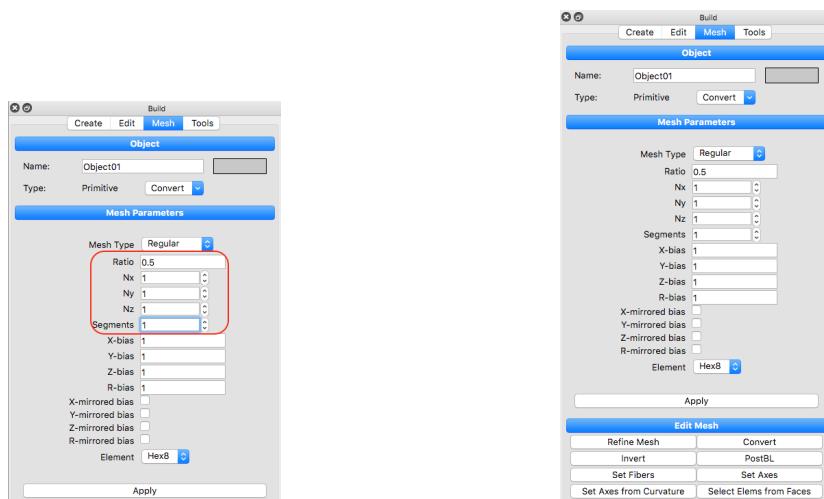


(a) Ventana de apertura de Preview

(b) Crear geometría de hexaedro

Figura 3.3: Apertura de Preview y creación de geometría

continuación definimos la malla sobre esta geometría, en la pestaña *Mesh*, empleando un único elemento ( $N_x = N_y = N_z = 1$ , fig. 4.3); al activar con el botón *Apply* se obtiene la imagen de la fig. 4.3, con los parámetros de la malla.



(a) Parámetros de la malla (1 elemento)

(b) Malla creada

Figura 3.4: Creación de la malla

### Material (Neohookeano) y condiciones de contorno

El próximo paso es definir el material; para ello se activa el ícono en la barra superior para seleccionar partes (fig. 3.5a), la marcamos con el ratón, y en el módulo *Model* (a la izquierda)

con el botón derecho se activa *add material* apareciendo una ventana para seleccionar el tipo de material, donde escogeremos *elastic uncoupled* y *Mooney-Rivlin* (fig. 3.5a). En los recuadros que aparecen especificamos los parámetros del material,  $c_1 = 40$ ,  $c_2 = 0$ , y un módulo volumétrico suficientemente alto para garantizar la incompresibilidad  $k = 40000$  (fig. 4.7). La densidad del material es irrelevante en este caso, al ser un cálculo estático, por lo que no se modifica el valor que viene por defecto ( $\rho = 1$ ).

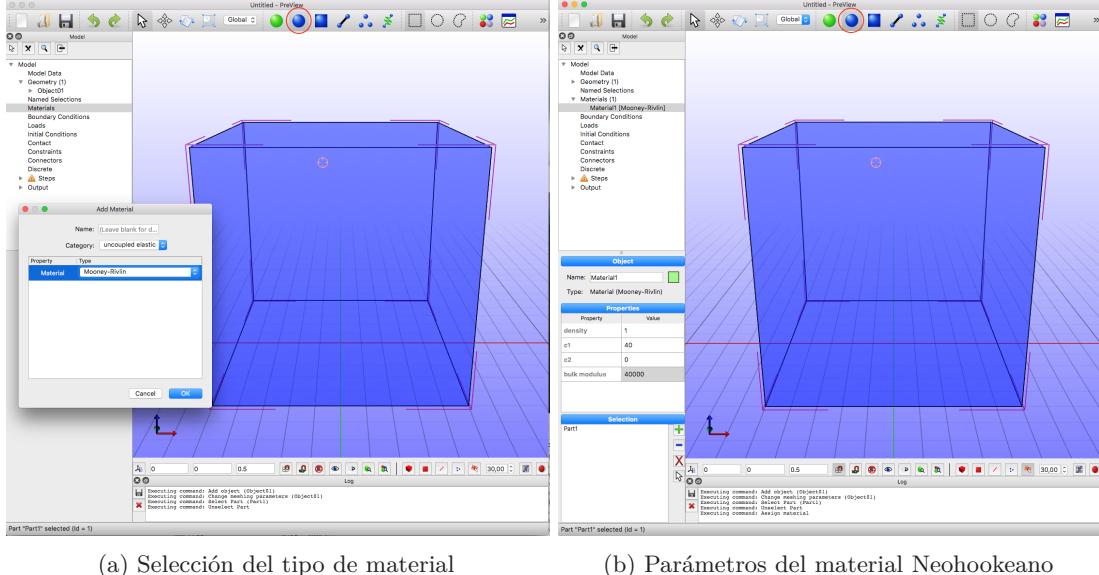


Figura 3.5: Definición del material

El siguiente paso es definir las condiciones de contorno, en el módulo *Model* (a la izquierda), empleando el botón derecho del ratón, sobre *Boundary conditions* → *Add boundary condition*. En primer lugar definimos una condición de tipo *Fixed displacement* (fig. 4.8); se activa el ícono de seleccionar las caras y se escoge la cara posterior según el eje  $x$ , definiendo la condición como fijado  $X$ -displacement (fig. 3.6b). Para orientarse con los ejes debe indicarse que los colores son: **rojo =  $x$** , **verde =  $y$** , **azul =  $z$** . La cara correspondiente (en este caso *Surface4*) debe aparecer en el recuadro inferior. Si se comete un error en la selección puede corregirse esta con los botones al lado de este recuadro, remarcados en la figura. A continuación se establecen de igual manera, seleccionando las

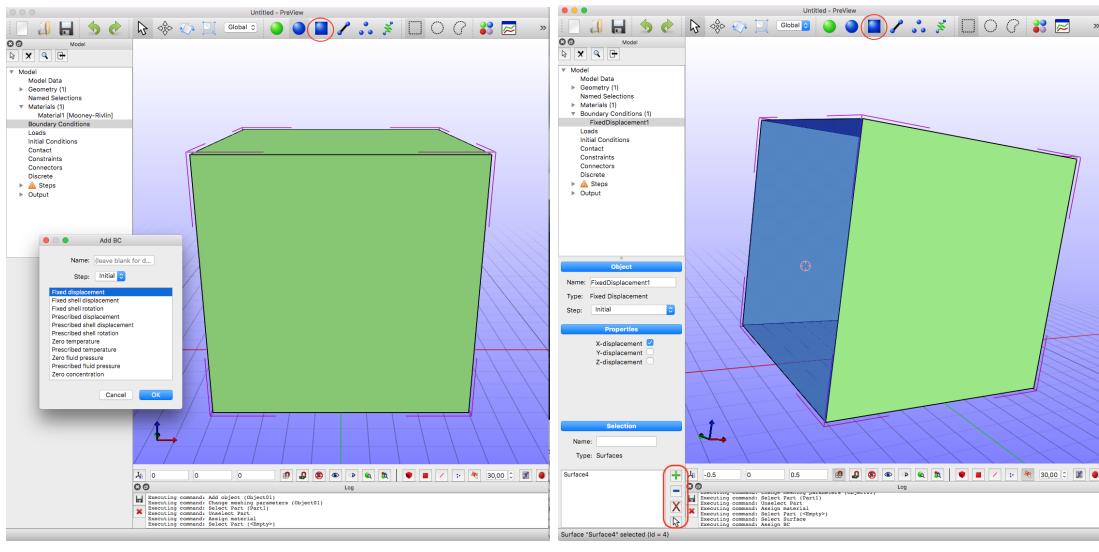
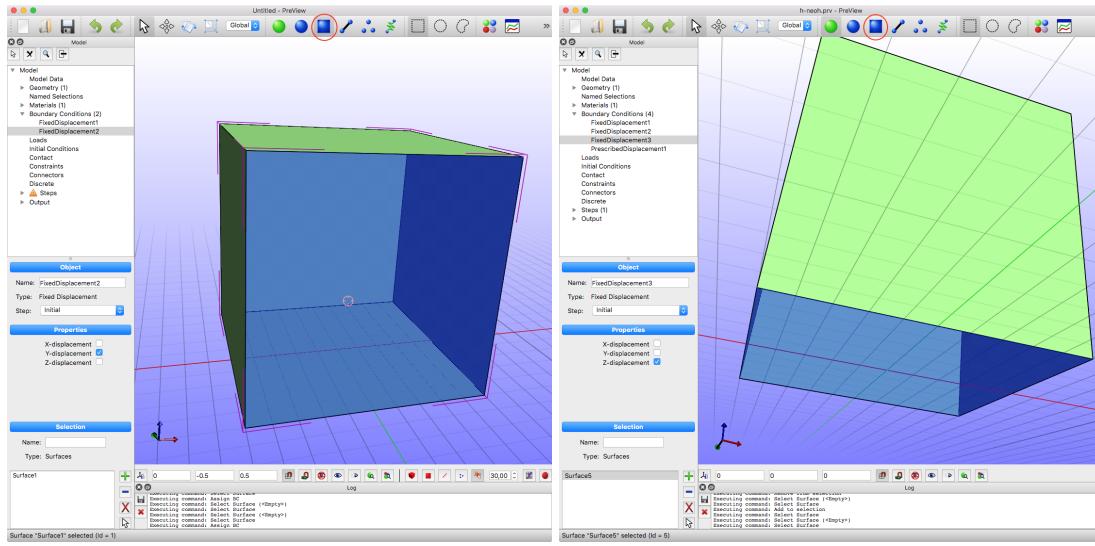


Figura 3.6: Establecer condiciones de contorno

caras correspondientes, las condiciones de contorno de desplazamiento nulo en los otros dos planos

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

posteriores normales a los ejes  $y$  (fig. 3.7a) y  $z$  (fig. 3.7b).

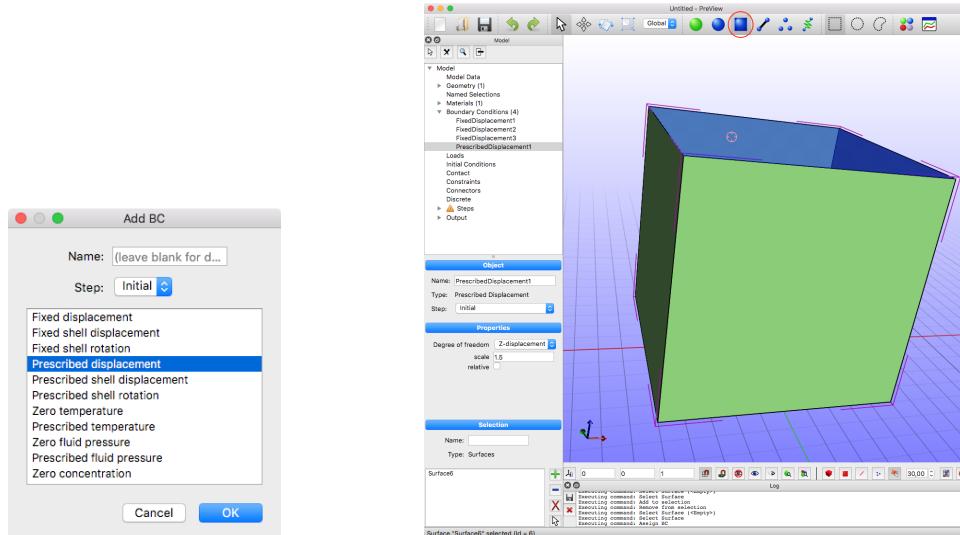


(a) Condición  $u_y = 0$  en la cara dorsal  $y$

(b) Condición  $u_z = 0$  en la cara dorsal  $z$

Figura 3.7: Condiciones de contorno de desplazamiento nulo en los otros dos planos

Por último se define una condición de contorno en la superficie del plano superior  $z = 1$  de desplazamiento impuesto, seleccionando en el menú la opción *Prescribed displacement* (fig. 3.8a) para la cara del plano superior y definiendo el valor del desplazamiento  $u_z = 1,5$  (fig. 3.8b).



(a) Selección para desplazamiento impuesto

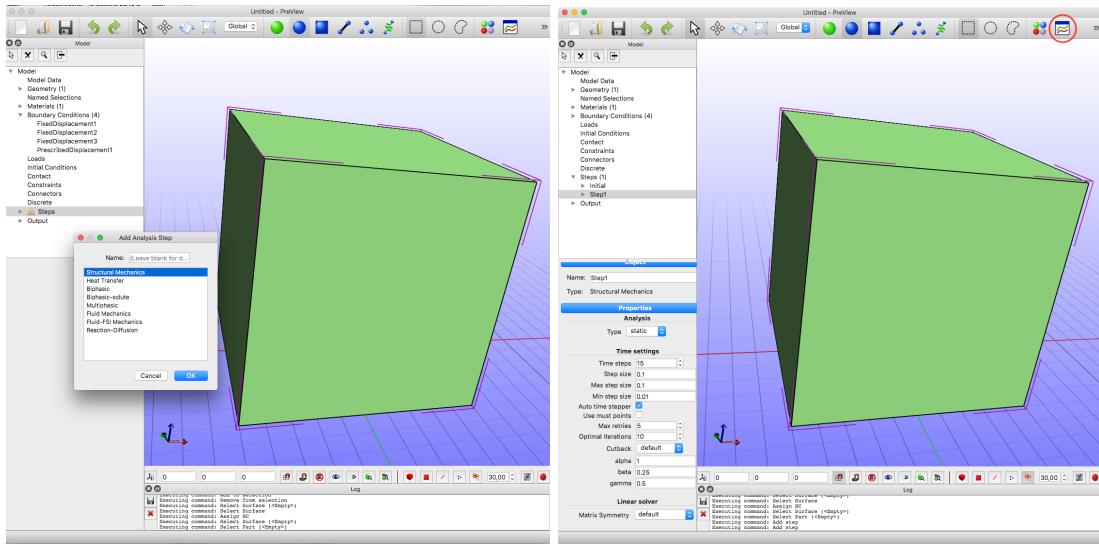
(b) Definición de  $u_z = 1,5$  en la cara  $z = 1$

Figura 3.8: Condiciones de contorno de desplazamiento impuesto

## Definición y ejecución del caso de cálculo

Se necesita definir ahora el caso (*Step*) de cálculo, seleccionando en el menú *Step* → *Add step*, del tipo *Structural mechanics* (fig. 3.9a).

Definimos un número de pasos de 15 y un incremento de tiempo  $\Delta t = 0,1$ , de forma que el tiempo final de cálculo será  $T_{\text{fin}} = 15 \times 0,1 = 1,5$ . Creamos una curva modificada de aplicación de la carga mediante el botón de creación/edición de curvas en el ícono a la derecha de la barra superior en la fig. 3.9b, y lo asignamos al desplazamiento impuesto. Esta curva la modificamos de forma que el tiempo de aplicación sea 1,5, cambiando el valor por defecto de 1,0; para ello se

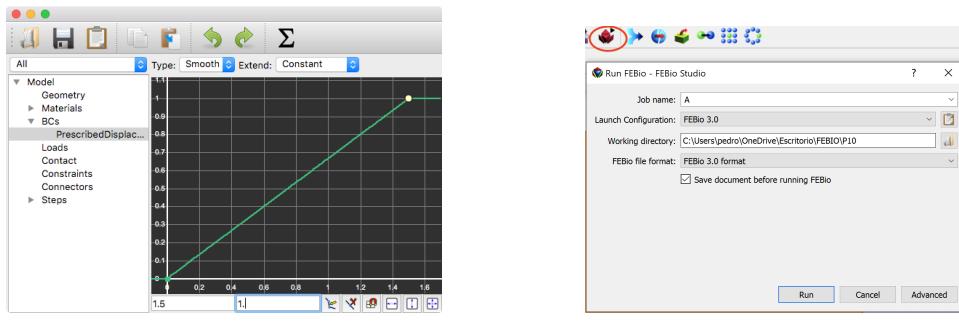


(a) Add step de tipo Structural mechanics

 (b) Parámetros:  $T_{\text{fin}} = 15 \times 0,1 = 1,5$ 

Figura 3.9: Definición del Step de análisis

redefine el punto como (1,5,1,0) (fig. 3.10a). Por último, se guarda el fichero (.fsm) de Preview, y se exporta el fichero de cálculo (.feb) para FEBiO (fig. 3.10b).



(a) Definición de la curva de aplicación

(b) Exportar al fichero de FEBiO

Figura 3.10: Curva de aplicación y exportación del fichero de cálculo

Una vez exportado ejecuta el programa FEBiO. Si todo es correcto se obtiene al final un mensaje de terminación normal como la fig. 3.11b. El cálculo produce un fichero para postproceso del tipo .xplt en el mismo directorio.

## Postproceso con Postview

Abrimos el fichero .xplt en el programa *Postview* de la Suite *FEBio Studio* y la primera vista que se obtiene es desde el punto de vista superior  $z^+$ , fig. 3.12. Se gira con el ratón para obtener la orientación 3D deseada, y se fija la escala de forma que abarque tanto la configuración inicial (fig. 3.13a) como la final (fig. 3.13b). Con esta escala fijada se puede obtener una animación del proceso con los iconos de la barra superior a la derecha.

Sin embargo resulta más representativo obtener un mapa de colores con las variables significativas del problema, en este caso la tensión  $\sigma_{zz}$ , que se define como se indica en la fig. 3.14. Se pueden obtener instantáneas para la animación mediante el menú *Record*, o también se puede crear un fichero de vídeo, bien directamente con el menú *Record* o mediante la composición de los fotogramas individuales.

Adicionalmente podemos obtener la curva de historia (evolución) de cualquier variable en cualquier entidad (nodo, cara, elemento). En este caso obtenemos la historia de  $\sigma_{zz}$  en el único elemento del problema, fig. 3.15. Por otra parte los valores numéricos para esta curva se pueden obtener en un fichero de texto, mediante el ícono de salvar que se muestra en la fig. 3.15b. El fichero

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

```

Símbolo del sistema
C:\Users\goico\MNUB\h-neoh>febio2 h-neoh.feb
=====
[Output of the finite element model visualization]
=====

Símbolo del sistema
C:\> Seleccionar Símbolo del sistema
residual      3.286444e+006  3.371067e-007  0.000000e+000
energy        6.852989e+001  6.997064e-009  6.852989e-001
displacement  1.429005e-003  1.452327e-010  1.343364e-009

----- converged at time : 1.5

NON LINEAR ITERATION INFORMATION
Number of time steps completed ..... : 15
Total number of equilibrium iterations ..... : 50
Average number of equilibrium iterations ..... : 3.33333
Total number of right hand evaluations ..... : 65
Total number of stiffness reformations ..... : 15
Time in linear solver: 0:00:00

Elapsed time : 0:00:01

NORMAL TERMINATION
C:\Users\goico\MNUB\h-neoh>

```

(a) Mandato de ejecución de FEBiO

(b) Final correcto del cálculo

Figura 3.11: Cálculo con FEBiO

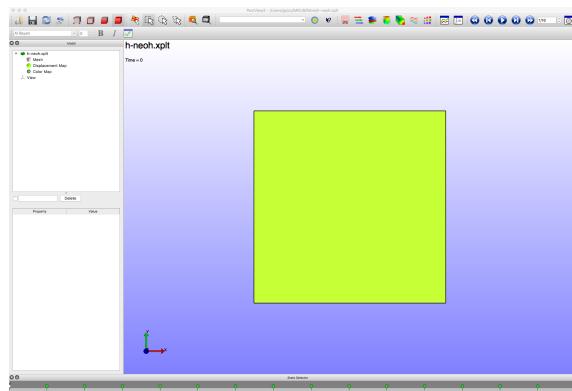
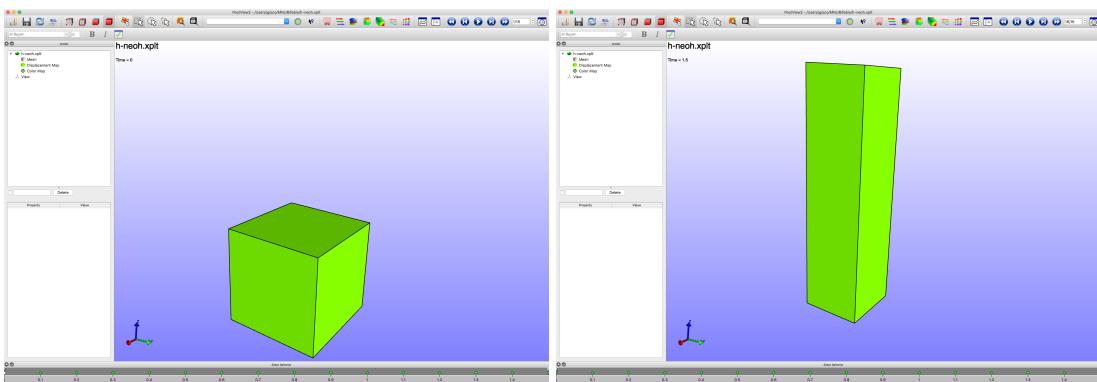


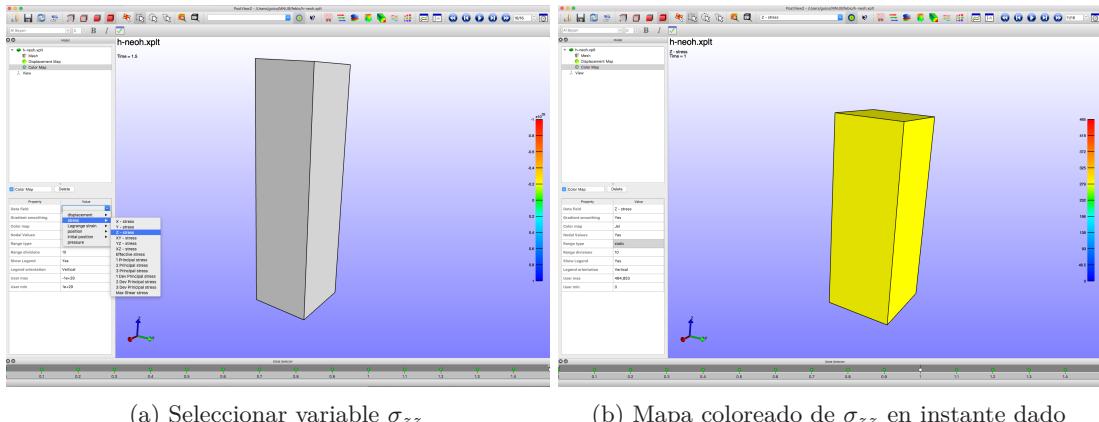
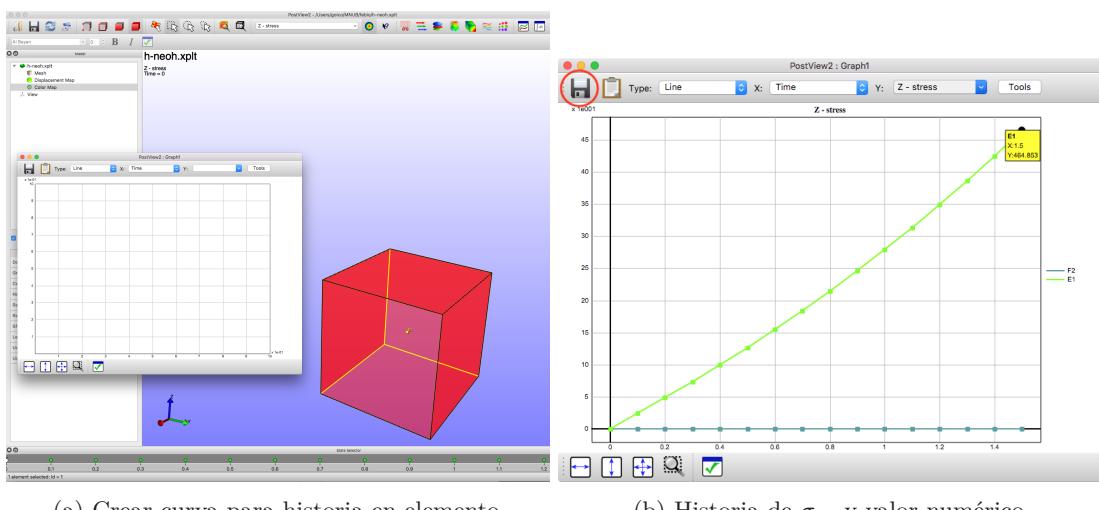
Figura 3.12: Abrir fichero .xplt en programa *Postview*



(a) Vista del modelo en  $t = 0$

(b) Vista del modelo en  $t = T_{\text{fin}}$

Figura 3.13: Fijar escala y perspectiva


 Figura 3.14: Definir variable a representar,  $\sigma_{zz}$ 

 Figura 3.15: Obtener curva de historia  $\sigma_{zz}/t$ 

se puede abrir con un editor de texto simple como *Notepad++* (fig. 3.16a). Estos resultados se pueden luego procesar junto a otros resultados o dibujar mediante algún programa especial para dibujo de curvas, fig. 3.16b, comparando el resultado numérico de EF con la solución analítica para este caso obtenida en la sección 3.2, ecuación (3.13). Se comprueba que la coincidencia con la solución analítica es excelente. Asimismo se puede observar que en este caso Neohookeano la no linealidad del material es moderada.

### Caso con material de Ogden

Se desarrolla ahora un caso similar, de extensión no confinada homogénea, en esta ocasión con material de Ogden, según se ha definido en la sección 3.2. Las propiedades son las ya definidas en la sección citada.

No es necesario repetir todos los pasos anteriores para la creación del modelo, de hecho se puede aprovechar el modelo creado antes haciendo una copia del fichero `.fsm` que modificaremos posteriormente. La modificación principal es desasignar el material Neohookeano anterior y crear un nuevo material del tipo Ogden y con las características citadas (fig. 3.17a). El único cambio adicional que haremos es definir incrementos de tiempo ligeramente más pequeños para facilitar la convergencia, que en este caso requiere más esfuerzo, ya que como veremos el carácter no lineal del material es mayor. Para ello se toman 20 incrementos de valor  $\Delta t = 0,075$ , sobre el mismo tiempo total  $T_{\text{fin}} = 20 \times 0,075 = 1,5$ , y con la misma curva de aplicación entre  $(0, 0)$  y  $(1,5, 1,0)$  que antes (fig. 3.17b).

Una vez guardado el fichero y procedido a su cálculo y su posterior visualización con *Postview*, se puede obtener ahora la historia temporal en FEBiO (fig 3.18a). Guardando los valores numéricos

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

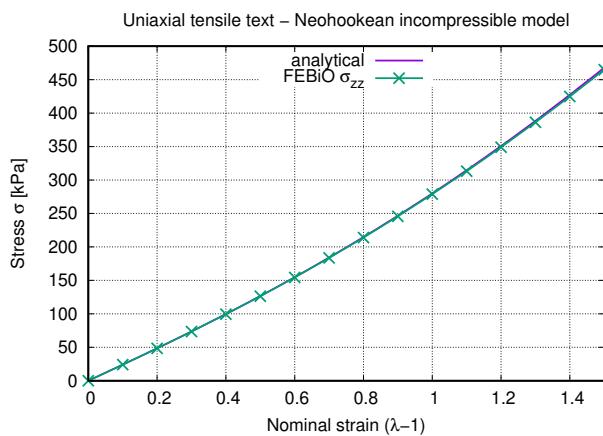
```

C:\Users\goico\MNUB\h-neoh\h-neoh_szz.dat - ...
Archivo Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración
Herramientas Macro Ejecutar Plugins Ventana ?
h-neoh_szz.dat
1 #Data : Z - stress
2
3 0 0
4 0.10000001 24.0501041
5 0.20000003 48.4737244
6 0.30000012 73.5485687
7 0.40000006 99.4720764
8 0.5 126.388115
9 0.60000024 154.409164
10 0.69999988 183.6035
11 0.80000012 214.040634
12 0.89999976 245.768372
13 1 278.824036
14 1.10000002 313.236938
15 1.20000005 349.03009
16 1.29999995 386.221619
17 1.39999998 424.825653
18 1.5 464.853119
19

```

Ln : 1 Col : 1 Sel : 0 | 0 Unix (LF) UTF-8 IN

(a) Notepad++ con historia de  $\sigma_{zz}(t)$



(b) Gráfico con soluciones analítica y numérica

Figura 3.16: Inspección y gráficos para historia  $\sigma_{zz}(t)$ , visualizada externamente

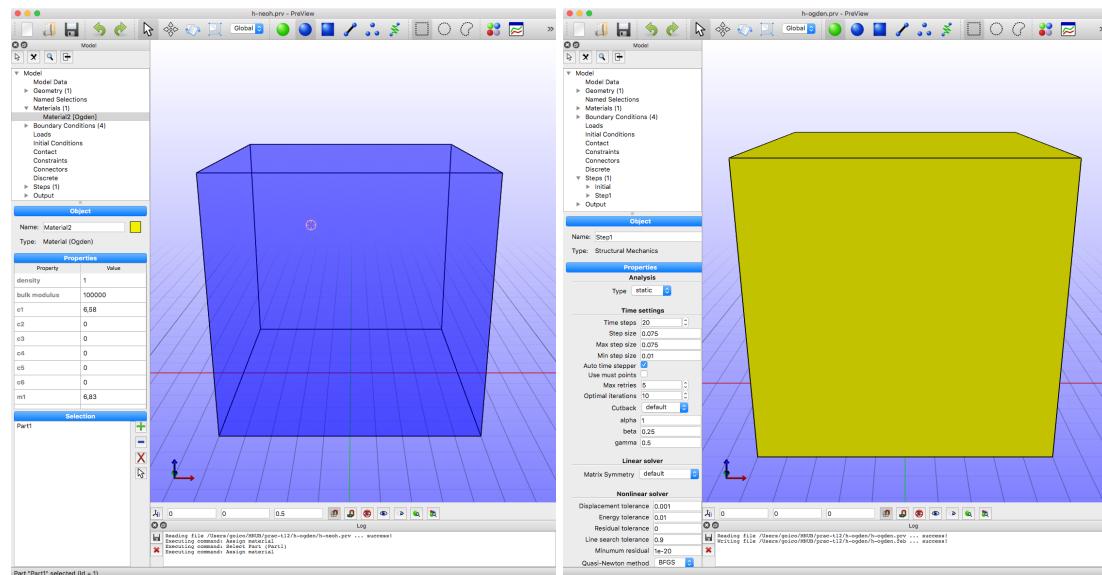


Figura 3.17: Definición de modelo homogéneo con material de Ogden

en un fichero de texto, la solución numérica de FEBiO puede compararse con la solución analítica expresada en la ecuación (3.17) (fig 3.18b), obteniéndose como antes una coincidencia casi exacta. En este caso sí se observa un efecto no lineal muy marcado, característico de muchos tejidos blandos con fibras.

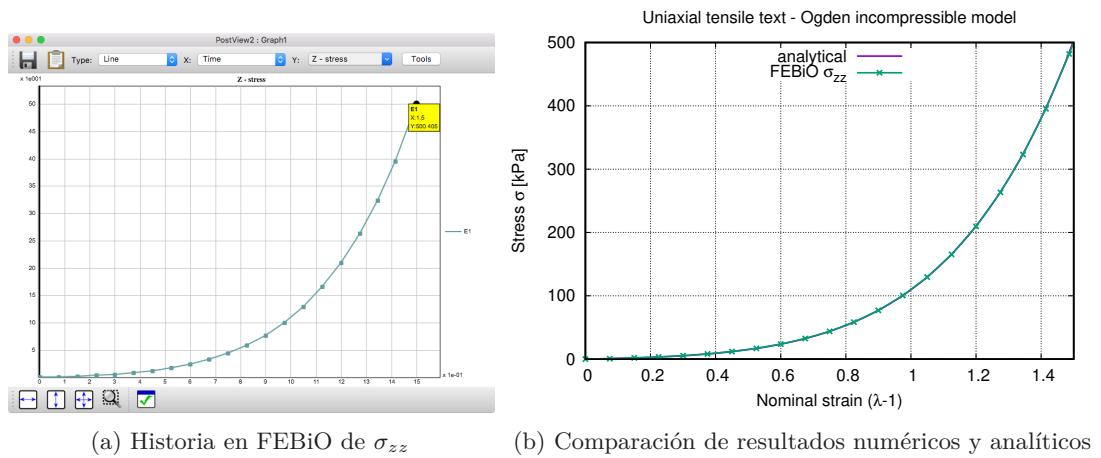


Figura 3.18: Resultados para  $\sigma_{zz}$  con material de Ogden

### 3.4. Compresión de una arteria con FEBiO

#### Modelo

En este caso vamos a aplicar materiales elásticos no lineales a un caso real, donde una sección de una arteria como la de la figura 3.19 se ve de alguna manera comprimida diametralmente. En el esquema de dicha figura vemos como el material a modelar es un cilindro hueco con diferentes radios interiores y exteriores.

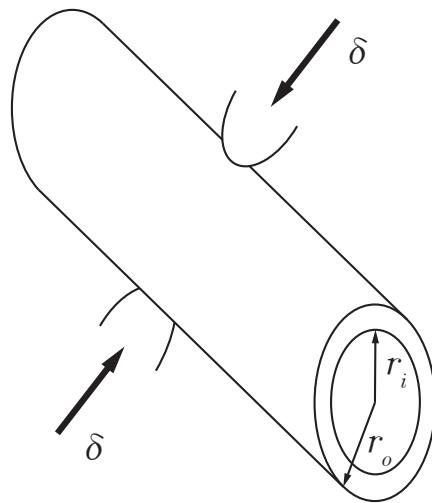
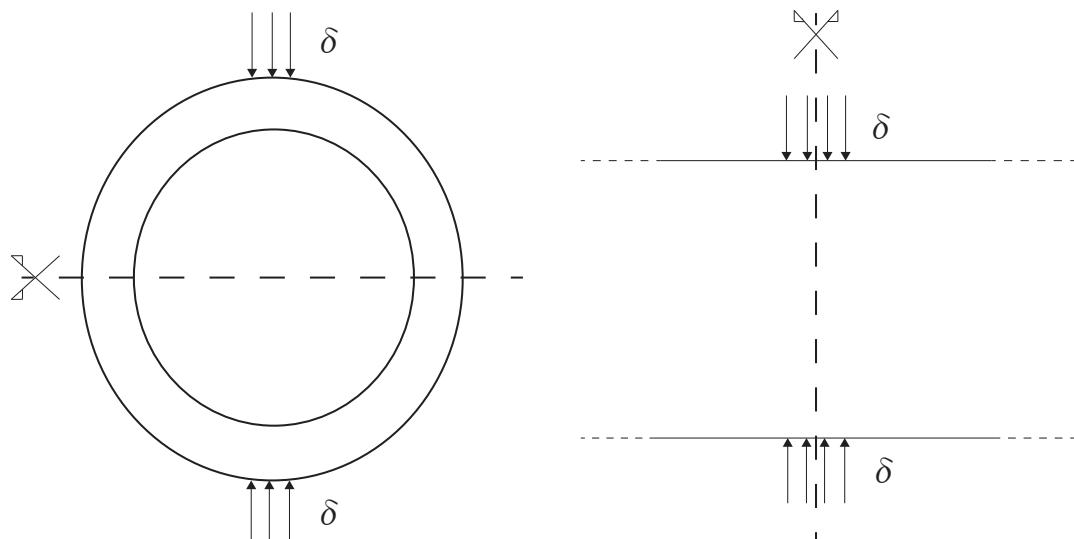


Figura 3.19: Esquema del problema

Por la configuración de la geometría y las cargas, con el fin de evitarnos sobrecargar el cálculo, decidimos aprovechar la simetría que el problema nos ofrece. Como vemos en la figura 3.20a, la geometría diametralmente es simétrica y, además los desplazamientos a imponer, puesto que será siempre una cantidad  $\delta$  a ambos lados, son igualmente simétricos, por lo que solo será necesario modelar 180 grados. Por otro lado, longitudinalmente, podemos coger solo la mitad de la longitud puesto que a ambos lados el desplazamiento es también similar.



(a) Simetría diametral

(b) Simetría longitudinal

Figura 3.20: Simetrías que nos ofrece el problema

La geometría que dispondremos por tanto será una arteria de 1 mm, radio exterior 1 mm y radio interior 0.9 mm. Solo nos hará falta modelar 180 grados, por lo que el tipo de objeto a elegir será *Solid Arc*. Todos estos datos se muestran en la figura reffig:a04.

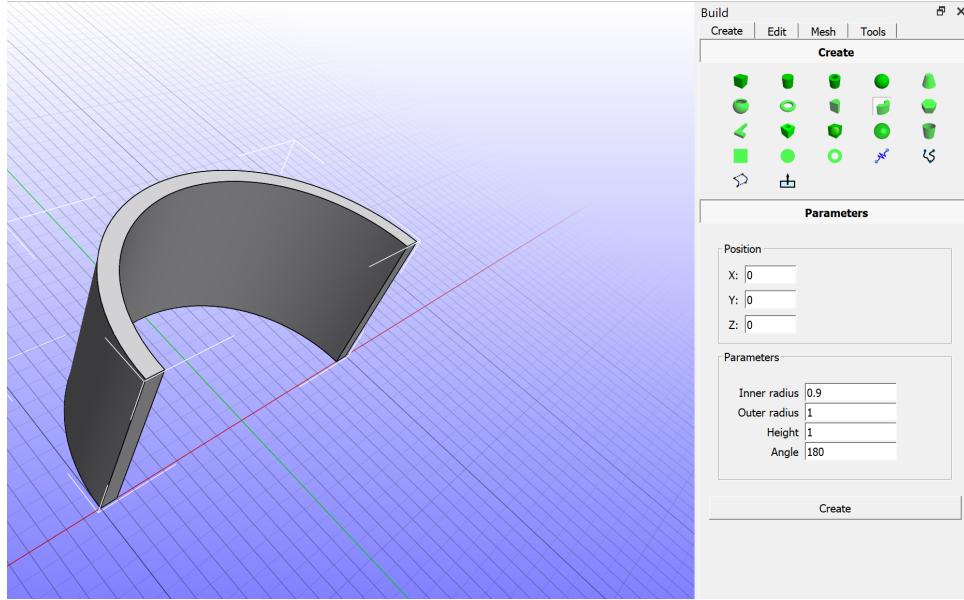


Figura 3.21: Geometría del problema

En este caso las divisiones de la geometría que impondremos al mallador serán diferentes que las del tipo *Box*: optaremos por 32 divisiones radiales del arco, 4 segmentos por ancho del tubo y 16 divisiones o *Stacks* en el eje longitudinal. Con esto saldrá una malla similar a la de la figura reffig:a05.

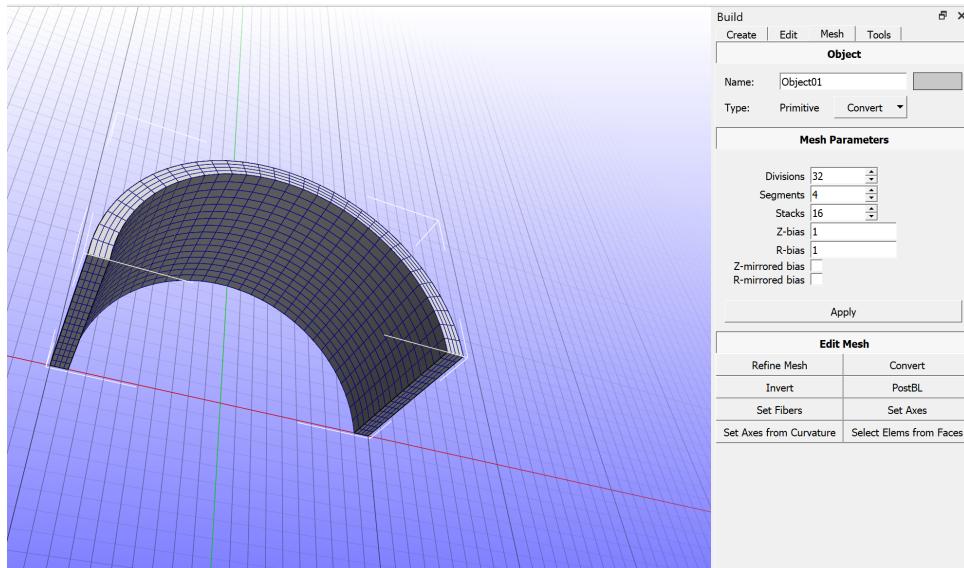


Figura 3.22: Malla del problema

Para el material tomaremos en primer lugar el modelo Neohookeano, con las mismas propiedades que en la sección anterior (fig 3.23). Hemos de tener en cuenta que hemos llegado a este material con el caso particular de un modelo *Mooney-Rivlin*. Recordar también que en el apartado *Selection*, para que no aparezca ninguna exclamación en nuestro material, debemos tener seleccionada la *parte* donde se encuentre nuestra geometría.

En cuanto a las condiciones de contorno, han de reflejar las condiciones de simetría mencionadas anteriormente. Por tanto, en el eje radial consideraremos fijar la dirección *y* puesto que es la dirección normal a esa superficie (fig 3.24a). Por otro lado, puesto que hay simetría longitudinal y

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

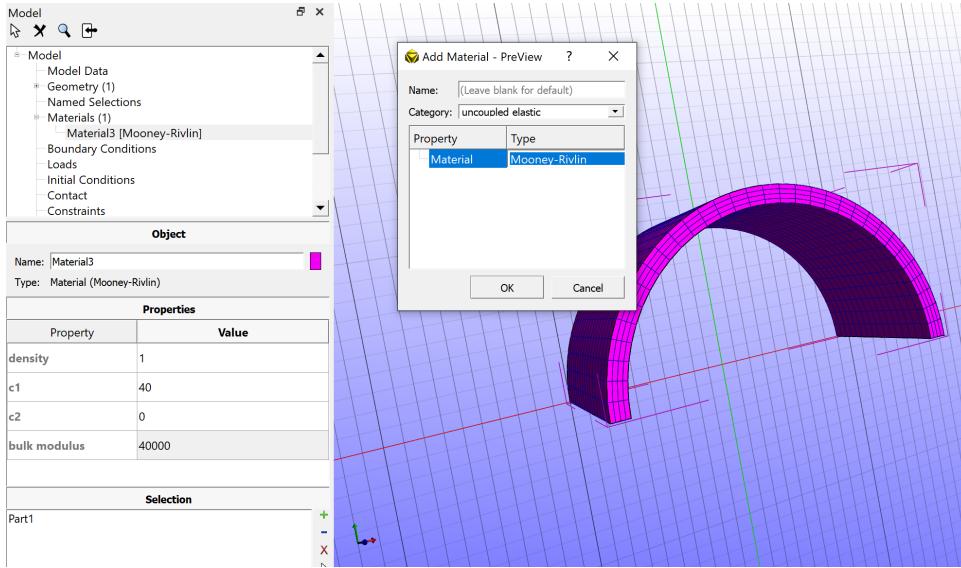
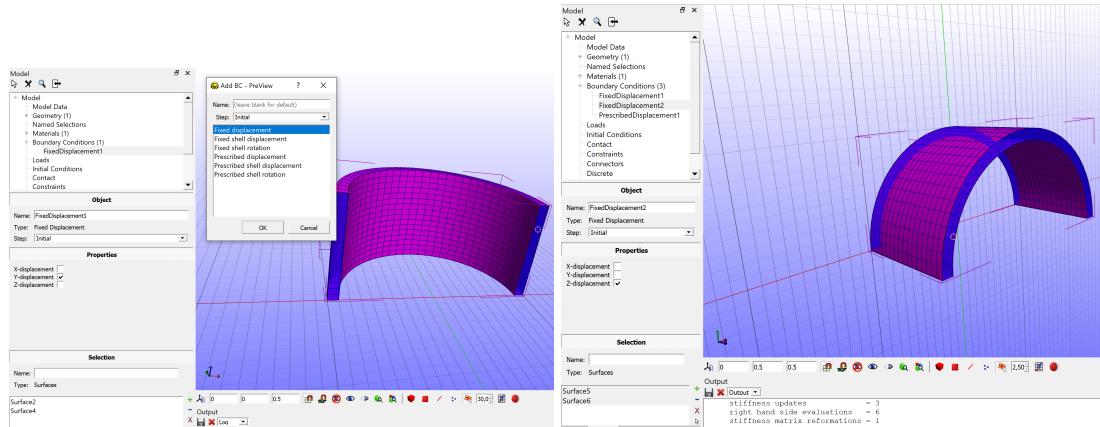


Figura 3.23: Material

a la vez existe la condición de dominio infinito en el eje longitudinal, podemos también fijar los dos extremos de la arteria que equivalen a los planos  $z=0.0$  y  $z=1.0$  (fig 3.24b). Dicha fijación se hace en la dirección normal, la  $z$ .



(a) Condición de contorno en  $y$

(b) Condición de contorno en  $z$

Figura 3.24: Condiciones de contorno en desplazamiento igual a 0

El desplazamiento impuesto se define como  $u_z = -1$  mm, aplicado en una zona en la cara superior (habría otra en la cara inferior que no simulamos para reducir el tiempo de computación). Hemos seleccionado 9 nodos cercanos a la superficie  $z = 1$ , en rojo en la figura 3.25, que, o bien se pueden seleccionar uno a uno o seleccionando un nodo de esa zona y activando la opción de adyacentes, con un radio de acción de 2.5.

En este caso tomaremos 20 incrementos, de valor  $\Delta t = 0,05$ , alcanzando un tiempo final de aplicación para la carga  $T_{\text{fn}} = 20 \times 0,05 = 1,0$  (fig. 3.26). No se precisa por tanto modificar la curva de carga por defecto que considera un tiempo final 1,0. Finalmente, se guarda el fichero **.fsm**, y se realiza el cálculo con FEBiO.

## Resultados

Los resultados en cuanto a mapas de los desplazamientos totales pueden verse en la fig. 3.27 para las configuraciones sin deformar ( $t=0$ ) y deformada ( $t=1$ ).

Además de otros muchos resultados, nos interesa saber como son las reacciones en la dirección  $y$ . Para ello vamos a integrar las tensiones en los planos en  $y=0$ . Para ello, debemos seleccionar

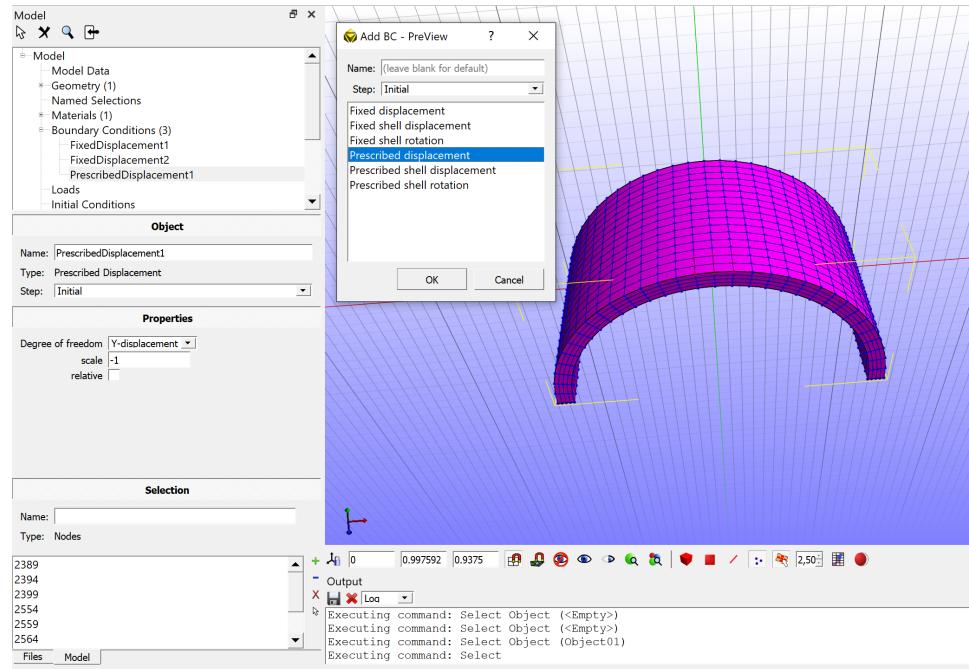


Figura 3.25: Condición de contorno en desplazamiento impuesto

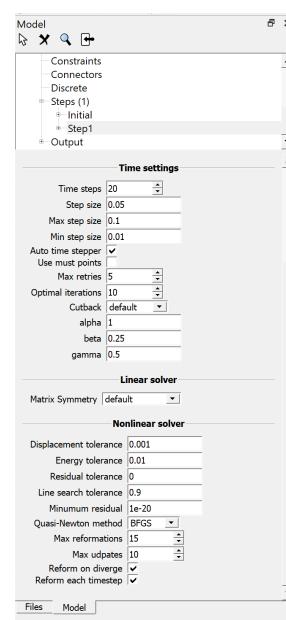
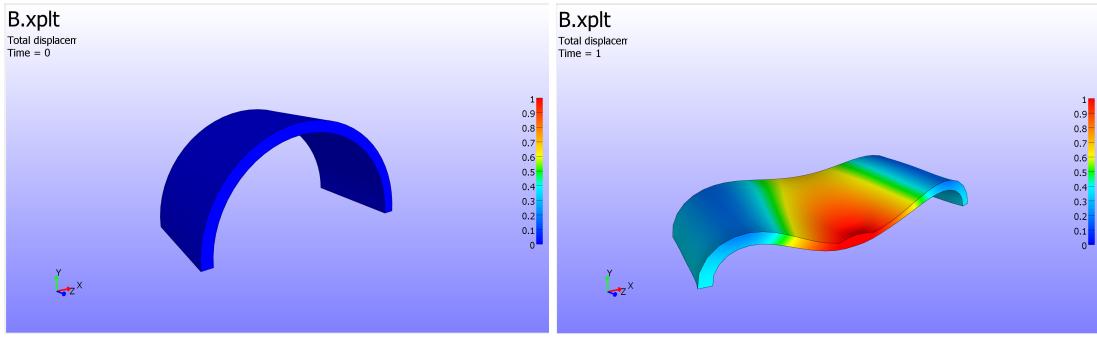


Figura 3.26: Condición de cálculo

### 3. Cálculo no lineal mediante elementos finitos

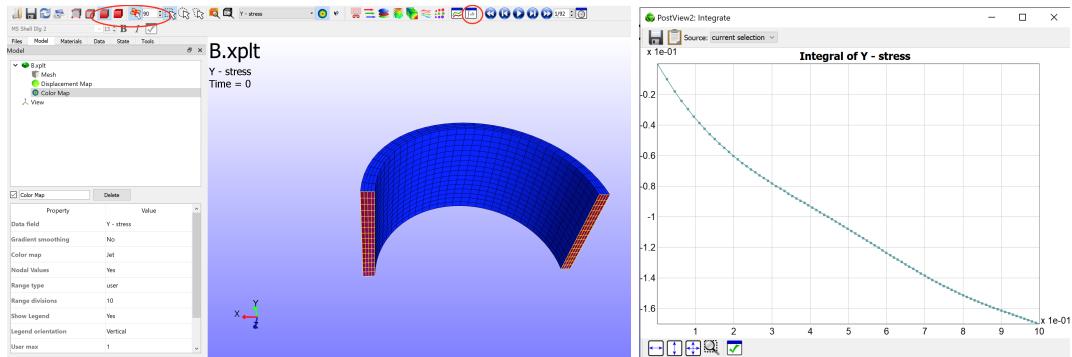


(a) Resultados para  $t=0$

(b) resultados para  $t=1$

Figura 3.27: Mapa de desplazamientos totales

el mapa de colores de tensiones en  $y$ ,  $\sigma_{yy}$ . A continuación hemos de seleccionar dichos planos. Podemos seleccionar las caras de todos los elementos o, si clickamos en la opción de seleccionar también los adyacentes, seleccionar toda esa superficie de una vez, y pulsando la tecla mayúscula, también añadir la superficie opuesta. Una vez seleccionado pulsamos en el botón *integrate*. Todos estos pasos vienen reflejados en la imagen 3.28a. Como vemos, se nos genera una curva que integra las tensiones y que, dividiendo por el área aplicada, nos da una idea de las fuerzas a las que esta sometida esta sección.



(a) Resultados para  $t=0$

(b) resultados para  $t=1$

Figura 3.28: Mapa de desplazamientos totales

### 3.5. Tareas para entregar

Deberán obtenerse y presentarse los siguientes resultados:

1. Historia de  $\sigma_{zz}(t)$  para el modelo homogéneo (1 elemento) Neohookeano, de material de Ogden y otro elástico lineal (buscar parámetros equivalentes sabiendo la equivalencia entre los parámetros del Neo-Hookeano y los modelos volumétricos y a cortante elásticos) con el fin de comparar los resultados de los diferentes materiales empleados.
2. Para el caso de la arteria, repetir el caso con el material de Ogden y comparar el resultado de la integral de tensiones en  $y$ .
3. Se observa en el caso de la arteria (fig 3.27b) como todo el dominio se deforma en la dirección  $y$ . Sin embargo, el caso esperado sería que solo una pequeña zona se deformase. Con el propósito de buscar este resultado, repetir el cálculo de la arteria con material Neohookeano con una longitud de 4 mm. La malla se hace 4 veces más grande. ¿Qué propondrías para reducir tiempo de cálculo?



## CAPÍTULO 4

# Dinámica de fluidos computacional (CFD)

### 4.1. Objetivos de la práctica

En esta práctica se desarrolla la simulación mediante elementos finitos del flujo sanguíneo en régimen dinámico, aplicado a casos sencillos de un tubo recto (flujo de Poiseuille) y un tubo curvo, considerando fluido Newtoniano mediante el programa FEBiO [Wei18a]. En particular se desarrollan los siguientes modelos:

1. En primer lugar se describe la solución analítica del flujo de Poiseuille (sección 4.2).
2. Se simula en régimen dinámico el flujo en un tubo recto (sección 4.3).
3. Se simula en régimen dinámico el flujo en un tubo curvo (sección 4.4).
4. Se proponen algunas tareas a llevar a cabo por los estudiantes para evaluar el aprovechamiento de la práctica (sección 4.5).

### 4.2. Flujo de Poiseuille

#### Ecuaciones generales

En un tubo recto de sección circular, un fluido Newtoniano en régimen estacionario desarrolla un perfil de velocidades parabólico en relación con la coordenada radial  $r$ ,

$$v(r) = \frac{\Delta p}{L} \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad (4.1)$$

donde  $\Delta p$  es la pérdida de presión sufrida por el fluido en una longitud de tubo  $L$ ,  $\eta$  es la viscosidad dinámica (constante en un fluido Newtoniano) y  $R$  es el radio del tubo. Esta distribución es la que adopta aproximadamente una arteria admitiendo que sea un cilindro circular perfecto y el flujo estacionario, es decir si se puede despreciar el carácter pulsátil del flujo, lo que ocurre para números de Womersley del orden de 1 o inferiores.

La distribución anterior, integrando el caudal en la sección completa, genera una relación lineal entre el caudal y el gradiente de presión, y proporcional a la potencia cuarta del radio de la arteria:

$$Q = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi}{8\eta} R^4 \quad (4.2)$$

Asimismo puede expresarse la relación entre la pérdida de presión y caudal o resistencia vascular como

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \quad (4.3)$$

De las ecuaciones anteriores (4.1) y (4.2) se puede deducir la relación entre la velocidad máxima y la velocidad media del flujo:

$$\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = 2 \quad (4.4)$$

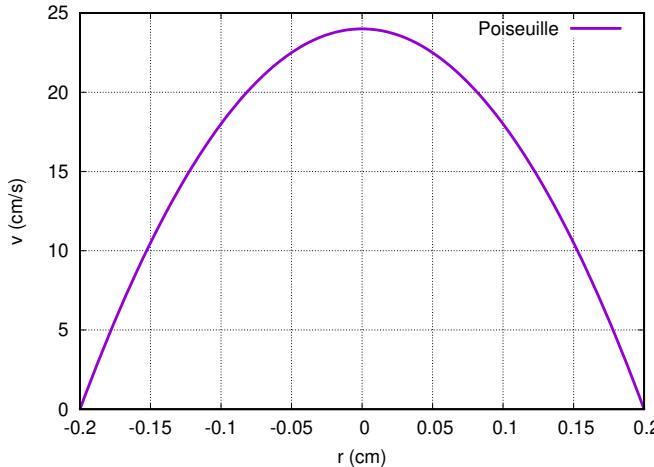


Figura 4.1: Definición analítica del flujo de Poiseuille para el caso considerado

### Aplicación hemodinámica

Consideraremos una aplicación al flujo sanguíneo, para una arteria de sección circular y diámetro 0,4 cm, representativa de una carótida humana. Las propiedades de la sangre se tomarán como densidad  $\rho = 1,06 \text{ g/cm}^3$ , viscosidad cinemática  $\eta = 0,04 \text{ P}$  (poise). Se supone un flujo con una velocidad media  $\bar{v} = 12 \text{ cm/s}$ . Consideraremos una longitud de la arteria  $L = 2 \text{ cm}$ , con una pérdida de presión a lo largo de la misma  $\Delta p = 192 \text{ dyn/cm}^2$ . (Nota: Todas las magnitudes físicas se expresan en el sistema cgs — centímetro, gramo, segundo.) Para estos datos el perfil de velocidades de Poiseuille definido por la ecuación (4.1) se representa en la fig. 4.1. La velocidad máxima vale  $v_{\max} = 24 \text{ cm/s}$ , mientras que la velocidad media es  $\bar{v} = 12 \text{ cm/s}$ . El número de Reynolds que corresponde al flujo es

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} \approx 120$$

(siendo  $D = 2R$ ), lo que corresponde a una situación de flujo laminar. En este caso el número de Womersley vale

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega \rho}{\eta}} = 2,79 \quad (4.5)$$

que al ser mayor que 1 indica que en rigor no sería esperable el desarrollo de un flujo de Poiseuille debido a la frecuencia de las pulsaciones.

El fluido se supondrá prácticamente incompresible, para lo cual en las simulaciones numéricas se tomará un módulo de compresibilidad volumétrica elevado,  $K = 1 \times 10^7 \text{ dyn/cm}^2$ .

### 4.3. CFD en tubo recto

#### Geometría, malla y material

Se abre el programa *FEBio Studio*, y al crear un nuevo modelo se selecciona un problema de *Fluid Mechanics* (fig. 4.2a). A continuación, en el módulo *Build* se crea un objeto cilíndrico con las dimensiones anteriormente indicadas (fig. 4.2b) y una malla como se define en la fig. 4.2c. El parámetro *R-bias* sirve para hacer la malla más fina cerca del borde del tubo, donde el gradiente de velocidades es mayor.

El siguiente paso es crear el material, definir sus propiedades y asignarlo a la parte del modelo creada anteriormente, fig. 4.3. Para ello se activa la selección de partes en la barra superior, se activa la parte con el ratón, y se agrega para el material definido en el recuadro inferior del mismo. Las propiedades del fluido que se han empleado son las definidas arriba en la sección 4.2.

#### Condiciones de contorno y cargas

En primer lugar se define la condición de contorno de velocidad nula en la superficie lateral del cilindro (formada por cuatro superficies individuales en el modelo de *Preview*). Se agrega una

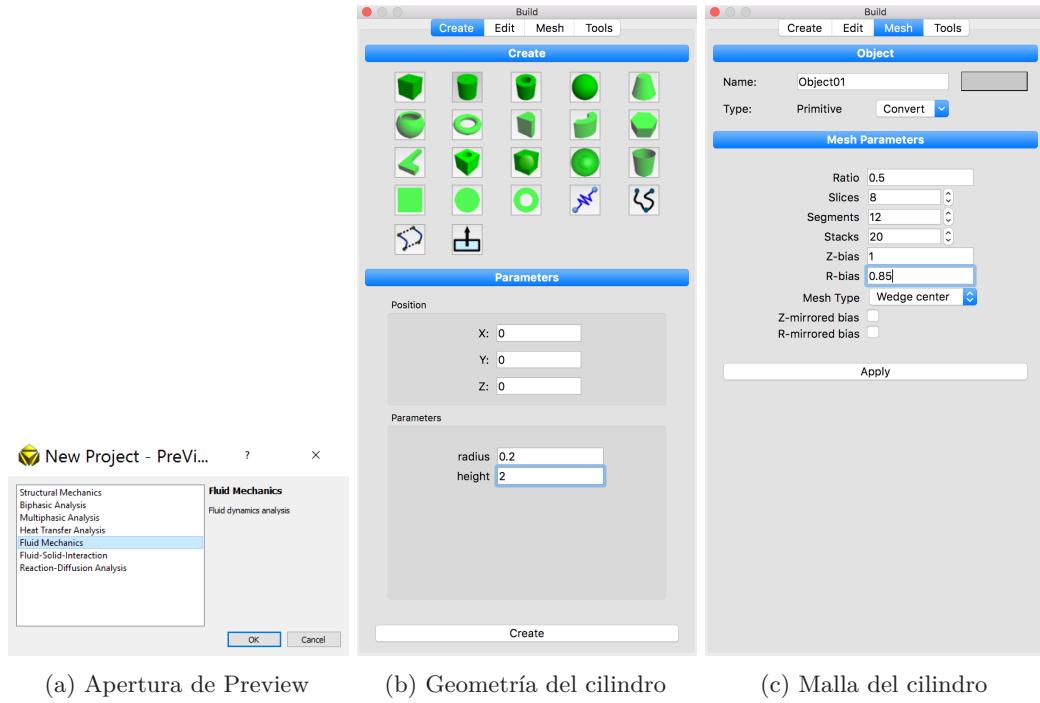


Figura 4.2: Apertura de Preview y creación de geometría y malla

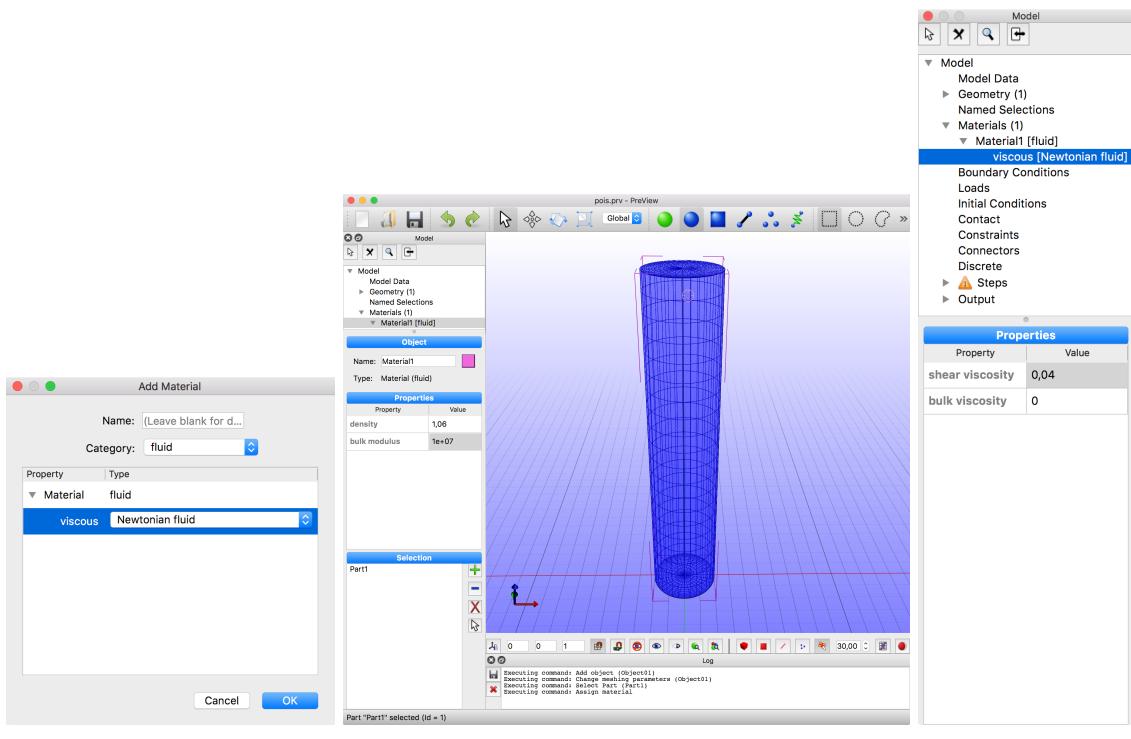


Figura 4.3: Definición del material fluido y asignación al modelo (seleccionando la parte)

## 4. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

nueva condición de contorno, seleccionándola como de velocidad nula (fig. 4.4a), y se asigna a las superficies laterales del cilindro (fig. 4.4b).

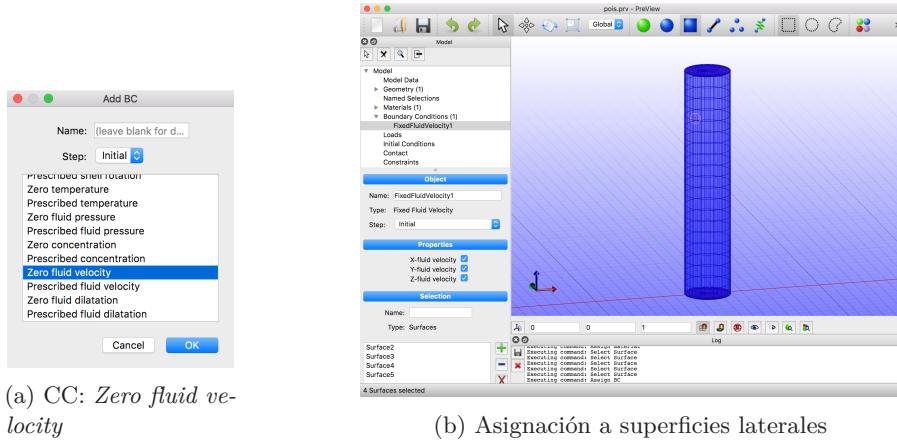


Figura 4.4: Condición de contorno de velocidad nula en superficies laterales del cilindro

A continuación definiremos las condiciones en las secciones inferior y superior del tubo, suponiendo que el flujo entra por la inferior y sale por la superior. Se define la presión nula en la sección superior del tubo, lo que se realiza a partir de la variable *fluid dilatation* ( $e_f = J - 1$ ) empleada por FEBiO. Por ello la condición de contorno es *Zero fluid dilatation* (fig. 4.5a) y se asigna a la superficie superior, de salida del flujo (fig. 4.5b).

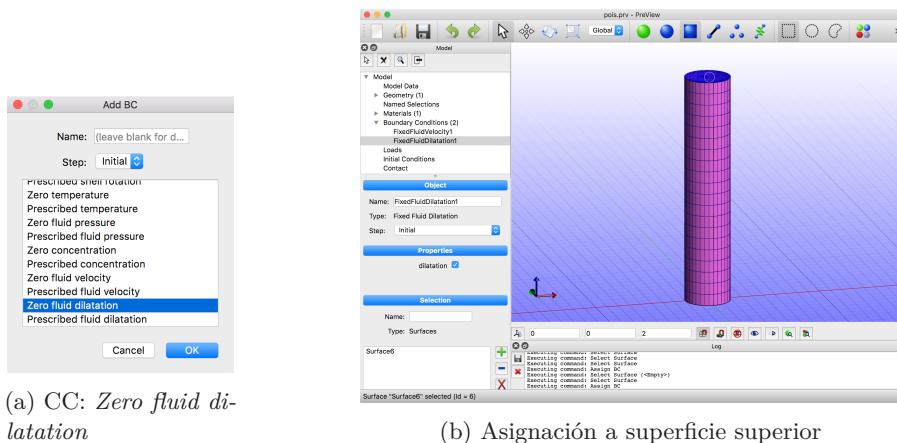


Figura 4.5: Condición de contorno de presión nula (a través de *fluid dilatation*) en superficie superior del cilindro

En la sección inferior, antes de definir la entrada del fluido, es necesario para evitar inestabilidades imponer en el borde de dicha sección una condición de presión nula *Zero fluid dilatation*. Para ello tendremos cuidado en primer lugar de activar la selección de bordes en los iconos de la barra superior, y a continuación seleccionar los cuatro segmentos de la circunferencia exterior de la base (fig. 4.6)

Por último se define la entrada de fluido en la cara de la sección inferior mediante *Add surface load / Fluid normal velocity* (fig. 4.7a) que aplicaremos a la cara de la base inferior (fig. 4.7c). Por otra parte queremos aplicar esta carga durante un periodo de tiempo de 1,5 para lo cual definimos la curva de aplicación correspondiente modificando el valor por defecto de (1,0,1,0) a (1,5,1,0) (fig. 4.7b). En un primer cálculo dejamos sin marcar la casilla *parabolic* (fig. 4.7c), lo que equivale a que la velocidad se aplicará de manera uniforme en la superficie indicada. Una vez completado este primer cálculo, lo repetiremos modificando solo este aspecto, es decir marcando la casilla *parabolic*.

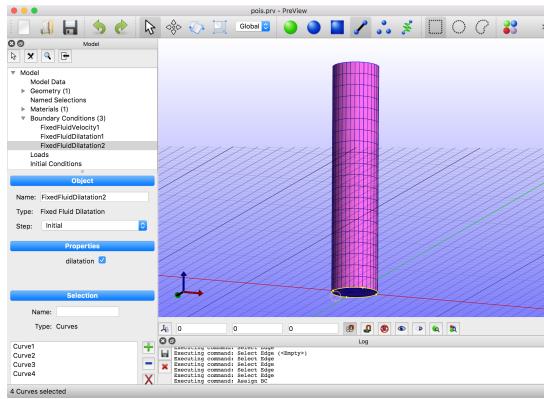


Figura 4.6: Condición de contorno de presión nula (a través de *fluid dilatation*) en el borde de la base inferior

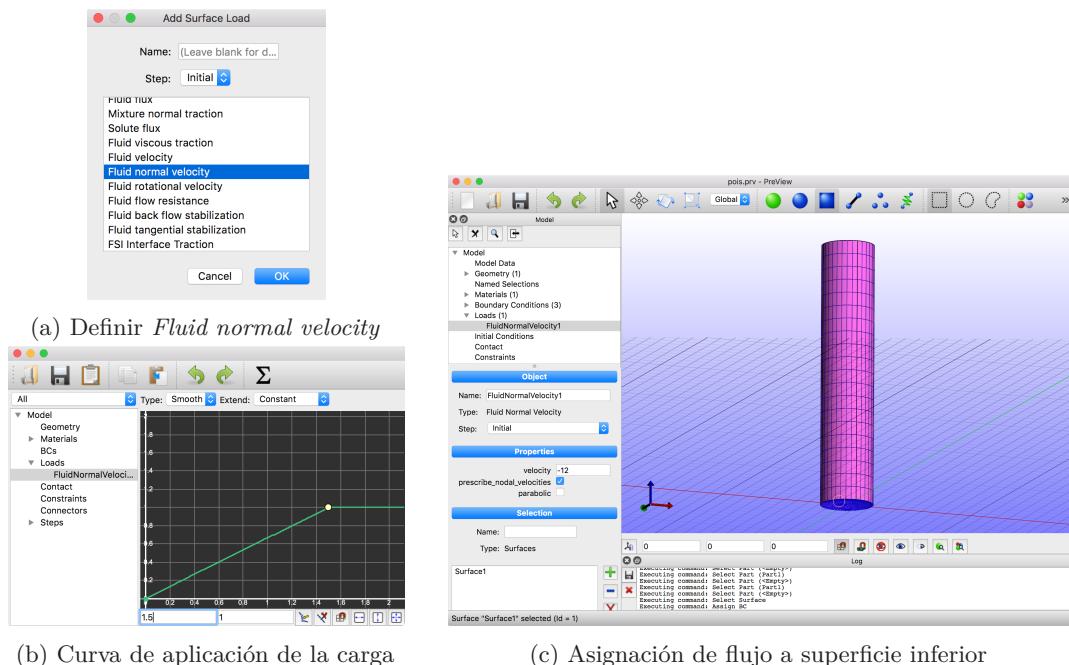


Figura 4.7: Definición de velocidad del fluido de entrada en la sección inferior del tubo

## Caso de cálculo

Por último se agrega y define el *Step* de cálculo, del tipo *Fluid mechanics* (fig. 4.8a), modificando los siguientes parámetros respecto a los que aparecen por defecto (figs. 4.8b, 4.8c):

- Número de pasos (*Time steps*): 25 (tiempo de simulación  $T = 25 \cdot 0,1 = 2,5$ )
- Matriz no simétrica
- Método Quasi-Newton: *Broyden*
- *Residual tolerance*: 0,001
- *Spectral radius*:  $\rho_\infty = 0$
- *Max reformations*: 3
- *Max updates*: 50
- Dejar sin marcar las dos últimas casillas de *Reform on diverge / Reform each timestep*

## 4. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

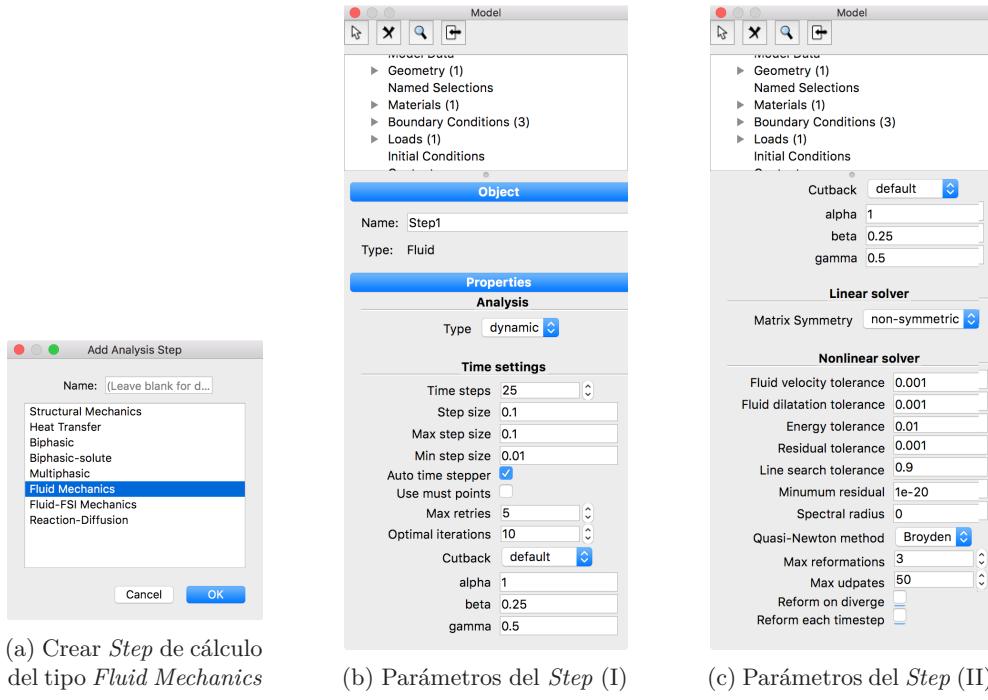


Figura 4.8: Definición del *Step* para el cálculo CFD y parámetros del mismo

Una vez completado y verificado el modelo se salva el (.fsm) y se exporta y corre el fichero para FEBiO (.feb). Una vez finalizada la simulación se genera un fichero de resultados para Postview con la extensión .xplt.

## Resultados

Mediante el programa de postproceso de FEBio Studio se pueden representar diferentes resultados del cálculo. En las figs. 4.9a y 4.9b se muestran dos tipos de representaciones del campo de velocidades en el instante final. En la primera se aprecia mediante los vectores la distribución parabólica de velocidades en la sección de salida, mientras que en la segunda mediante el corte se muestra como en la sección de entrada el perfil de velocidades es uniforme, y se va convirtiendo en parabólico a lo largo de la longitud del tubo.

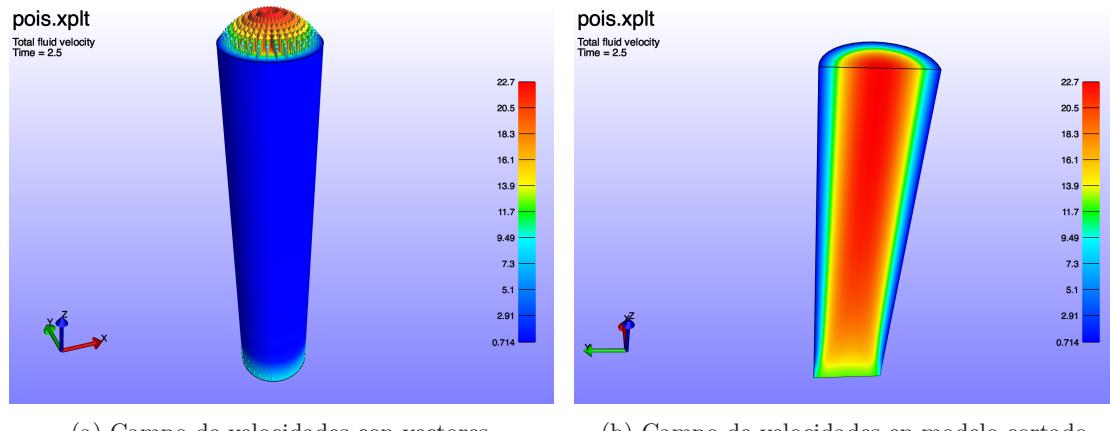


Figura 4.9: Resultados del campo de velocidades en el instante final

También se pueden obtener curvas con perfiles de distintas variables a lo largo de líneas definidas. En la fig. 4.10 se muestra la selección de una línea de nodos diametral y el gráfico con los perfiles de velocidades en los distintos instantes de tiempo, que van aproximándose progresivamente a la

distribución parabólica. Análogamente se pueden obtener en la sección de entrada, en la cual la velocidad impuesta es uniforme, lo que se aprecia en la fig. 4.11.

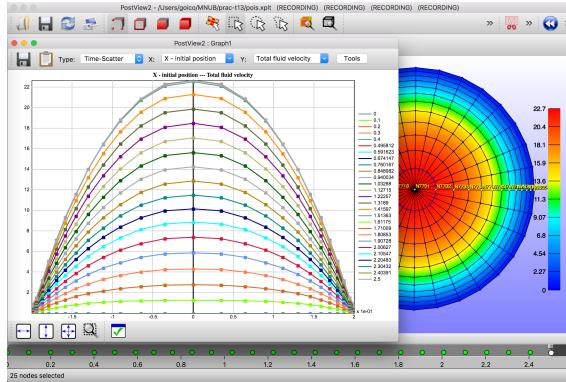


Figura 4.10: Perfil de velocidades a lo largo de una línea diametral de nodos en la sección de salida, en los distintos instantes de tiempo

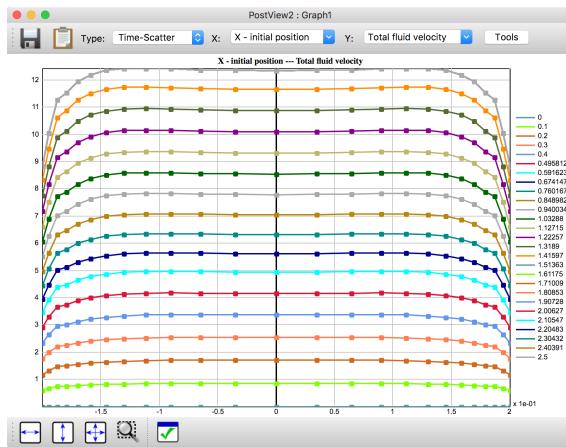


Figura 4.11: Perfil de velocidades a lo largo de una línea diametral de nodos en la sección de entrada, en los distintos instantes de tiempo

Es posible limitar estas curvas para mayor claridad, seleccionando solo un instante de tiempo, mediante las opciones que se ofrecen con el botón *Tools* (figs. 4.12a, 4.12b).

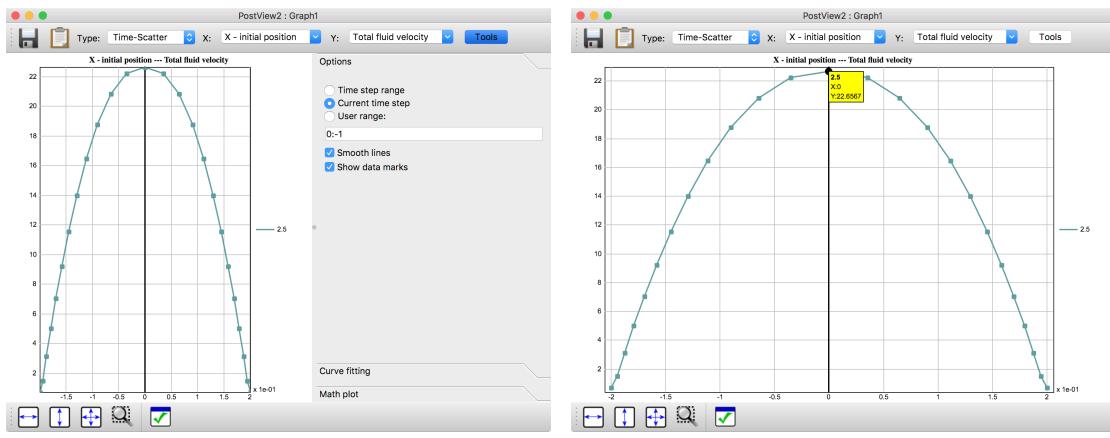


Figura 4.12: Perfil de velocidades

En esta última ventana se puede salvar los resultados numéricos en un fichero de texto, para proceso gráfico o numérico posterior. Eso es lo que se ha realizado en la fig. 4.13, donde se compara

#### 4. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

con la expresión analítica del perfil parabólico teórico de Poiseuille. En este gráfico se ha incluido también el resultado de repetir los cálculos anteriores con un modelo en el que al flujo de entrada se le daba ya un perfil parabólico mediante la activación de la casilla *parabolic* (fig. 4.7c) y repitiendo el cálculo.

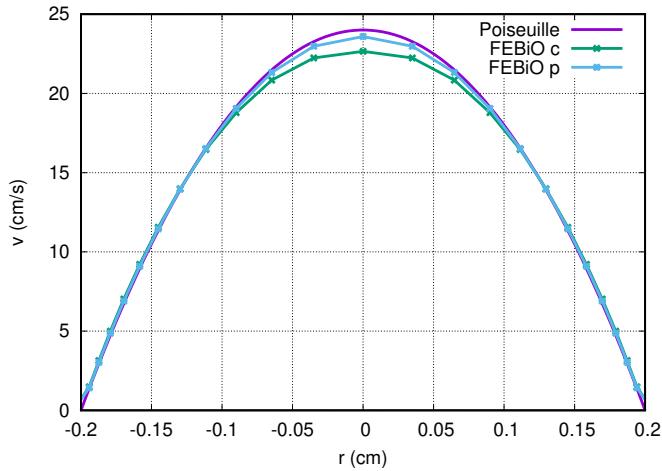


Figura 4.13: Resultados de velocidades en el instante final, obtenidos con FEBiO para los casos de velocidad de entrada uniforme (c) y parabólica (p) y perfil teórico de Poiseuille

## 4.4. CFD en tubo curvo

### Geometría, malla y material

El primer paso es crear el modelo geométrico con el módulo *Build*, en esta ocasión se trata de un toro con el radio de su directriz (*Outer radius*)  $R_o = 1,273$  cm y radio de su sección circular (*inner radius*)  $R_i = 0,2$  cm, como se indica en la fig. 4.14.

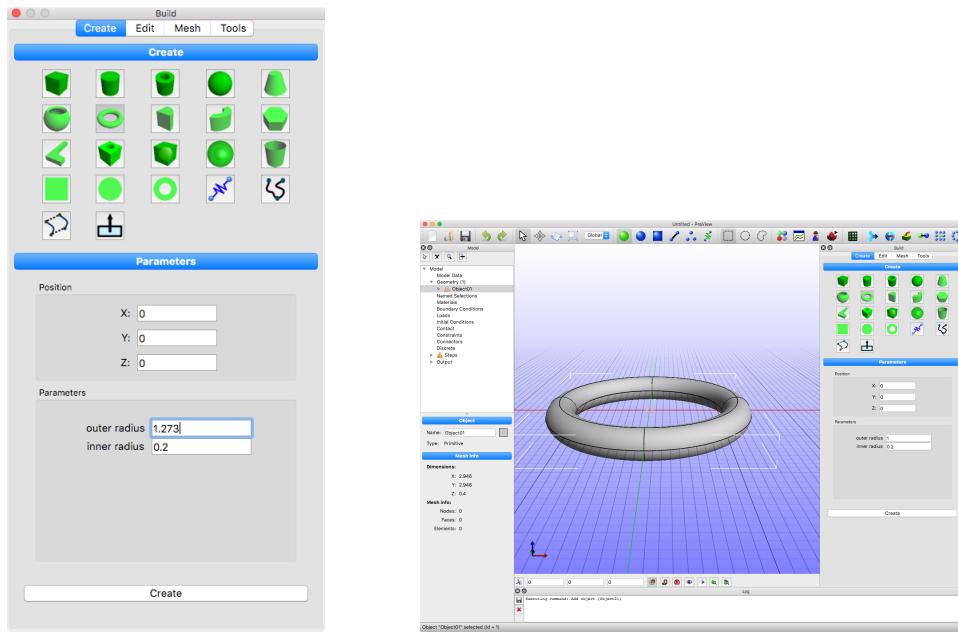


Figura 4.14: Creación de la geometría de un toro

La malla se crea con los parámetros *Divisions=4* y *Segments=16* como se indica en la fig. 4.15a. Ahora realizaremos varios pasos para quedarnos tan solo con 1/4 del toro, eliminando los 3/4 restantes. En la pestaña *Mesh* se define la malla como *Editable Mesh* (fig. 4.15b).



Figura 4.15: Crear malla del toro *Editable*

Para eliminar una parte del toro primero debemos activar en la barra de iconos inferior las opciones *Select elements* y *Select connected*, indicadas en la fig. 4.16. Se seleccionan ahora las partes de los 3 cuartos que se desea borrar, usando el ratón y manteniendo la tecla de mayúsculas presionada (fig. 4.17a). Se separan (*Detach*) marcando la casilla *Repartition selection* (fig. 4.17b). Ahora se puede visualizar el modelo que consta de dos partes (fig. 4.18a). Se selecciona la deseada, con los 3/4 del toro, y se elimina en el módulo *Model* con el botón derecho del ratón (fig. 4.18b), quedando solo la cuarta parte deseada (fig. 4.19a). En esta parte queda a la vista las secciones del toro, pudiéndose representar la malla (tecla **m**), ver fig. 4.19b.

#### 4. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

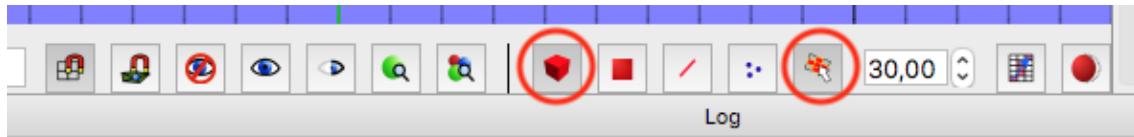


Figura 4.16: Activación de selección de elementos en la barra inferior para cortar el modelo

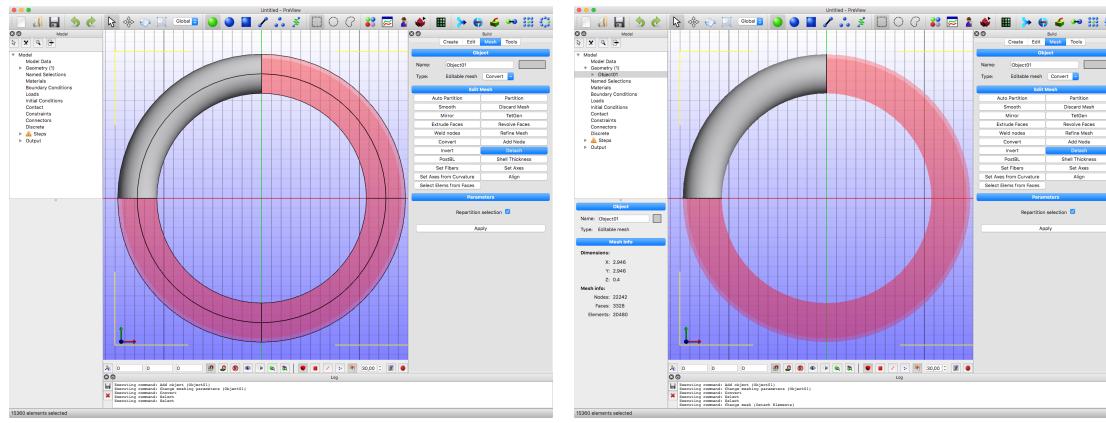


Figura 4.17: Seleccionar y separar 3/4 del toro

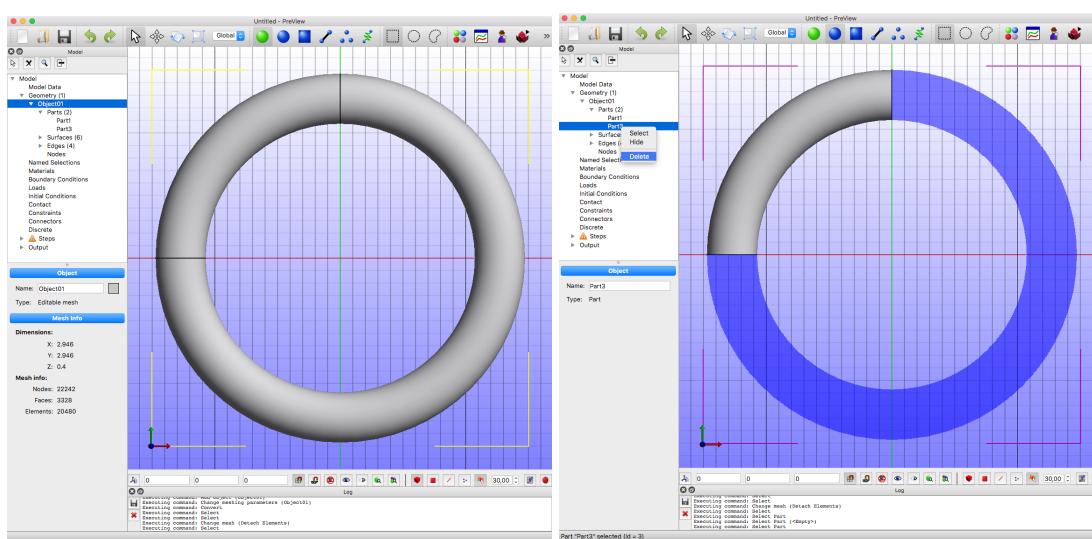
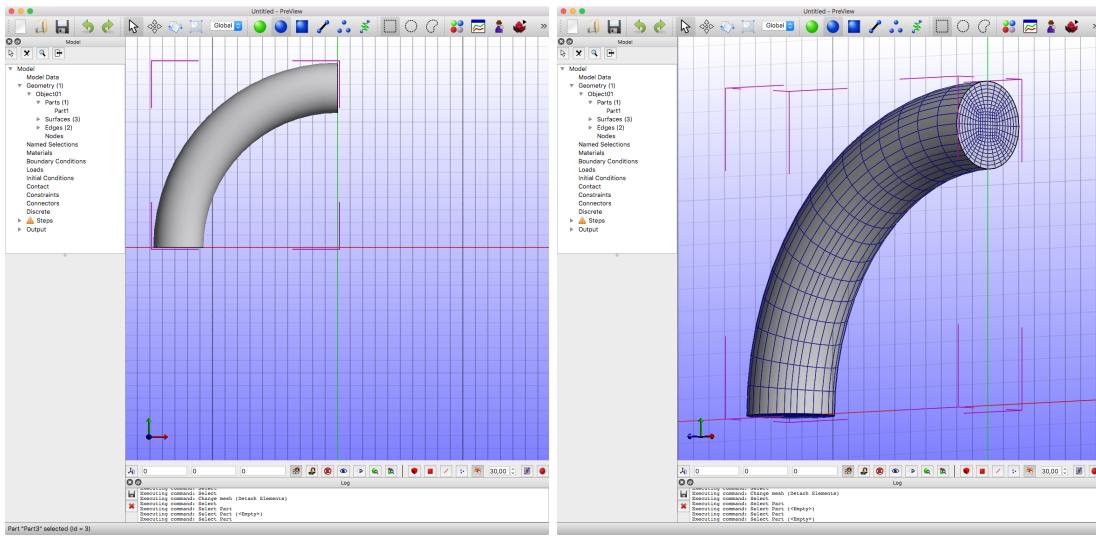


Figura 4.18: Eliminación de partición con 3/4 del modelo

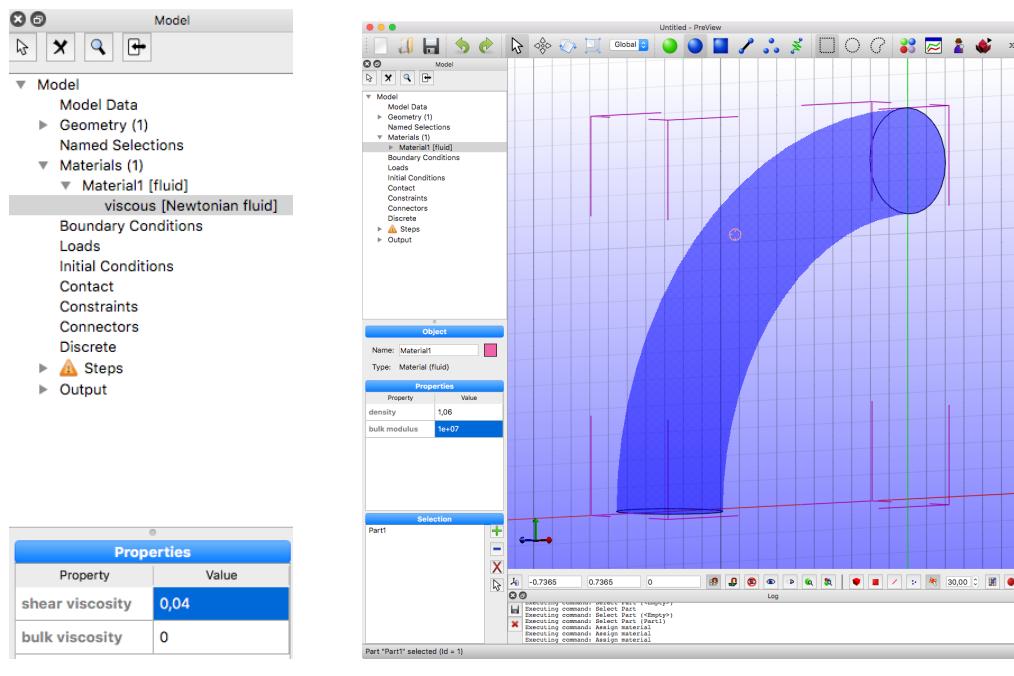
El material se define con los mismos parámetros e idéntico procedimiento al empleado en la sección 4.3 para el tubo recto, fig. 4.20.



(a) Partición borrada

(b) Malla del cuarto de toro resultante

Figura 4.19: Modelo del tubo curvo resultante



(a) Datos de viscosidad

(b) Asignación de material

Figura 4.20: Asignación de material fluido y propiedades

## Condiciones de contorno y cargas

El proceso para definir las condiciones de contorno es también el mismo que el empleado para el tubo recto en la sección 4.3. Se indican las condiciones de contorno y la velocidad normal aplicada en las figs. 4.21a, 4.21b, 4.22a y 4.22b. Al flujo de entrada (velocidad impuesta) se le aplica una curva que alcanza el 100 % del valor en el tiempo  $t = 1,5$  (fig. 4.23).

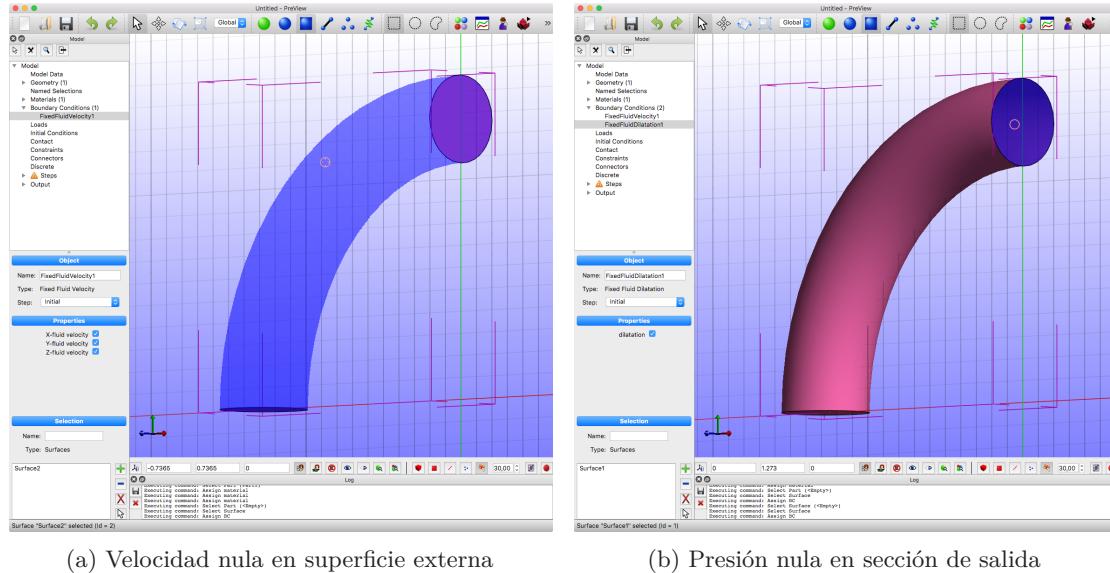


Figura 4.21: Condiciones de contorno (1)

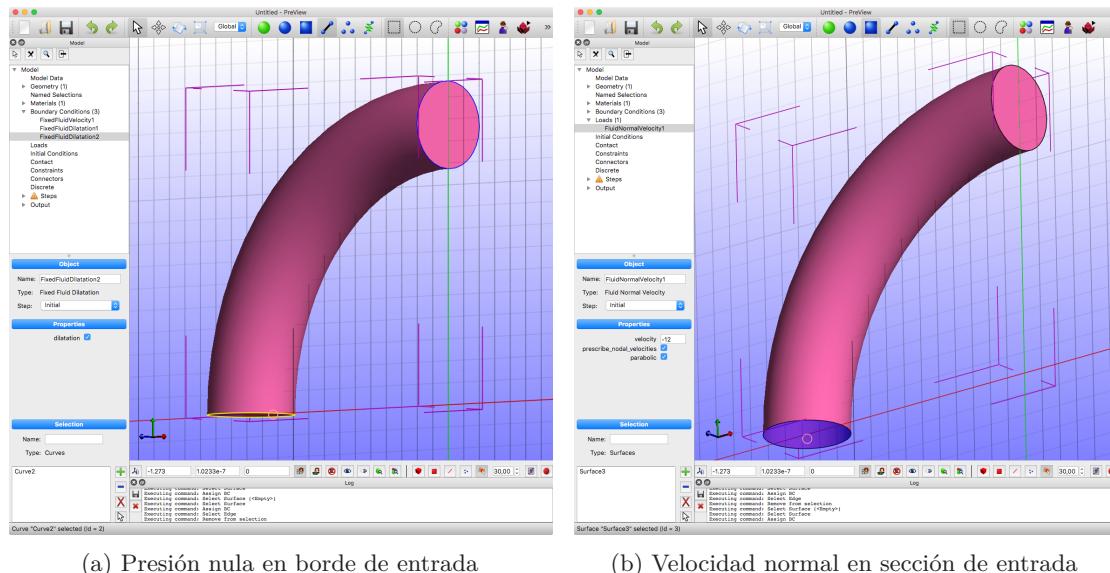


Figura 4.22: Condiciones de contorno (2)

## Caso de cálculo

Por último, se añade un Step de cálculo, con los mismos parámetros que se emplearon en la sección 4.3 (fig. 4.24). Una vez completado el modelo, se salva el fichero **.prv** y se exporta el **.feb** para realizar el cálculo con FEBiO.

## Resultados

Una vez ejecutado con éxito el cálculo, mediante el programa *Postview* se pueden visualizar los distintos campos, como por ejemplo las velocidades del fluido, para lo que hemos realizado el corte

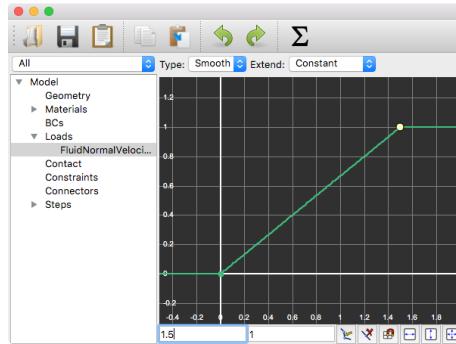
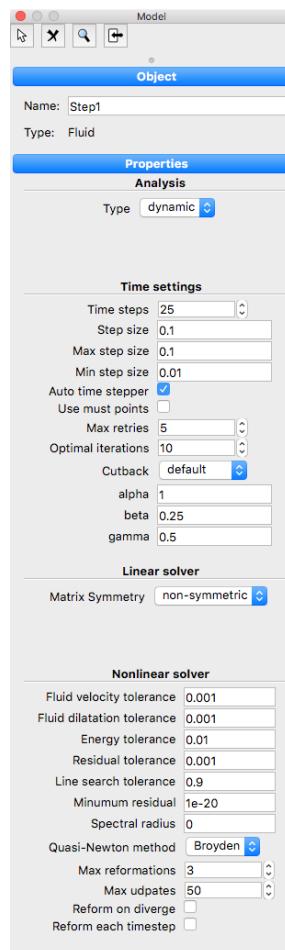


Figura 4.23: Curva de aplicación del flujo de entrada

Figura 4.24: Parámetros del *Step* de cálculo

por un plano perpendicular a  $z$  (fig. 4.25).

Se seleccionan los perfiles de velocidades, tanto en la sección de salida (fig. 4.26) como en la entrada (fig. 4.27). También se pueden guardar los datos en ficheros de texto y dibujar los gráficos comparativos (fig. 4.28). En estos gráficos se observa claramente la distorsión que produce la curvatura del tubo respecto al flujo de Poiseuille.

#### 4. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

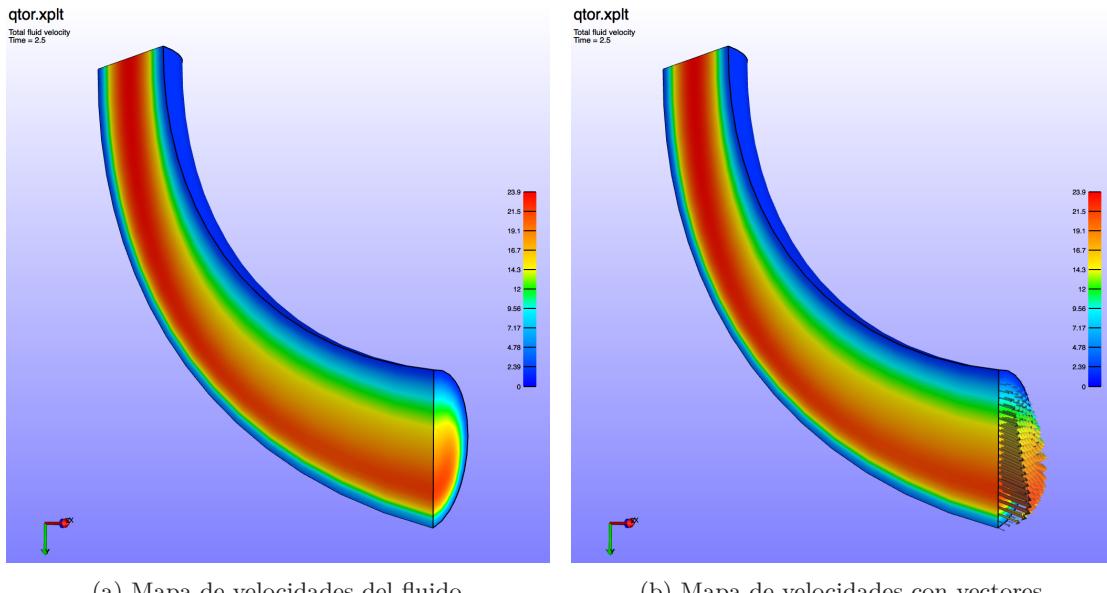


Figura 4.25: Campo de velocidades del fluido

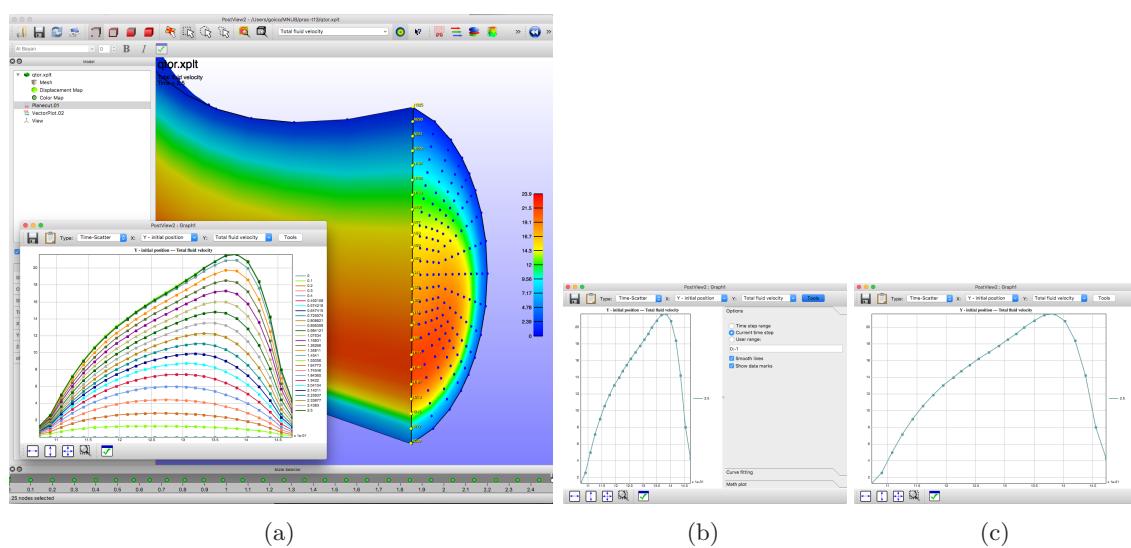


Figura 4.26: Selección de perfil de velocidades en la sección de salida

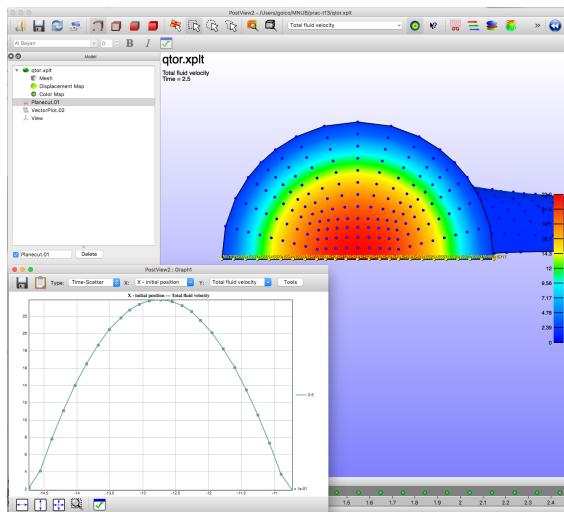


Figura 4.27: Selección de perfil de velocidades en la sección de entrada

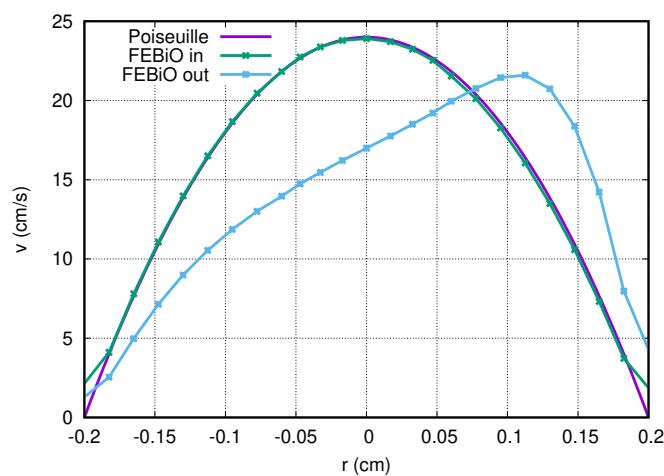


Figura 4.28: Comparación de perfiles de velocidades de entrada y salida con el modelo teórico de Poiseuille

#### **4.5. Tareas para entregar**

Deberán obtenerse y presentarse los siguientes resultados:

1. Perfil de velocidades en un diámetro de la sección de salida del tubo recto (sección 4.3) en el instante final, mediante copia de pantalla del gráfico.
2. Perfil de velocidades en un diámetro de la sección de salida del tubo curvo (sección 4.4) en el instante final, mediante copia de pantalla del gráfico.

---

## Bibliografía

---

- [Wei18a] Weiss, J. *FEBiO Software suite*. 2018. URL: <https://febio.org>.
- [Wei18b] Weiss, J. *FEBiO Theory Manual Version 2.7*. Musculoskeletal Research Laboratories, University of Utah, 2018.