2.1 Dénombrement
DEF : Si X est un ensemble fini, $|X| := \neq X$ car $|X|$ est le nombre d'élément de X, sa cardinalité
THM 2.1 :
(1) Si $X \cap Y \ = \ \emptyset$, $|X \cup Y| \ = \ |X| + |Y|$
(2) $|X \text{ x } Y| \ = \ |X| * |Y|$
(3) Si $Y \subset X$, $|X \setminus Y| \ = \ |X| - |Y|$

DEF : Une application ***f*** : $X \rightarrow Y$ est une fonction telle que tout élément de X a exactement une image dans Y, càd Df = X, ($\longleftrightarrow$ An1 : ***f*** : $\underset{\text{fonction}}{A \rightarrow B}$, ***f*** : $\underset{\text{application}}{Df \rightarrow B}$)
f est injective, si chaque $y \in Y$ reçoit au plus (au max) une flèche depuis un $x \in X$
f est surjective, si chaque $y \in Y$ reçoit au moins une flèche depuis un $x \in X$
f est bijective, si chaque $y \in Y$ reçoit exactement une flèche depuis un $x \in X$
càd injective et surjective en même temps
DEF :***f***$^{-1}(y) \ = \ \{x \in X \mid$ ***f***$(x) = y\}$ est la préimage de y
Rappel :
f injective $\iff$ $|$***f***$^{-1}(y)| \ = \ 0 \text{ ou } 1 \quad \forall y \in Y$
f bijective $\iff$ $|$***f***$^{-1}(y)| \ = \ 1 \quad \forall y \in Y$
f surjective $\iff$ $|$***f***$^{-1}(y)| \ \geq \ 1 \quad \forall y \in Y$ (***f***$^{-1}(y) \neq \emptyset$)

Rappel : An1: ***f*** injective $\implies$ ***f***$^{-1}$ fonction (car 0 ou 1 image inverse)

THM 2.2 :
(1) ***f*** : $X \rightarrow Y$ application +0 $|$***f***$^{-1}(y)| \ = \ k \quad \forall y \in Y$, $|X| \rightarrow k * |Y|$
(2) Si ***f*** application bijective, alors $|X| \ = \ |Y|$
Remarque : réciproque de (2) est fausse ! Pourquoi ?

THM 2.3 :
Si $|X| \ = \ m$ et $|Y| \ = \ n$, alors il y a exactement n^m applications ***f***: $X \rightarrow Y$ possibles.
$\forall x \in X$, on peut choisir ***f***(x) parmi les n éléments de Y

Corollaires 2.4 :
(1) Le nombre de sous-ensemble de A (càd $|P(A)|$) est 2^n
f: $A \rightarrow \{0,\ 1\}$ avec ***f***$(a) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{prend pas a} \\ 1 & \text{prend a} \end{cases}$ donne toutes les possibilités de prendre ou pas des ensembles. Le THM dit qu'il y a $|\{0,\ 1\}|^{|X|} \ = \ 2^n$
(2) Il y a 2^n possibles jets de n pièces à pile ou face
$X \ = \ \{\text{pièce 1, pièce 2, ..., pièce n}\} \rightarrow \{\text{pile, face}\}$
(3) Il y a 2^n séquences binaires de longueur n.

THM 2.5 : Si $|X| \ = \ m$ et $|Y| \ = \ n$, il y a $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ applications injectives
Il y a n possibilités de choisir une mage pour le 1^{ier} élément de X, ..., $n - m + 1$ pour le

$m^{ième}$.
Rappel : Si $m > n$, alors possibilité d'application injective !!!

Corollaire 2.6 :
le nombre d'applications de $X \in estde\$n!\ (= m!)$.
bijection $\implies |X| = |Y| \implies m = n$ et on construit des injections qui seront forcément bijectives.

THM 2.7 :
Le nombre de choix ordonnés m balles parmi n est $\frac{n!}{(n-m)!}$
$\{\text{position 1, ..., position m}\} \to \{\text{balle 1, ..., balle n}\}$ et on voit une application injective

THM 2.8 :
Le nombre de choix déso. de m balles parmi n est $\frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m} \leftarrow$ coeff binomial
$X = \{\text{choix ordonnés}\},\ Y = \{$choix désordonnés$\}$
f : $X \to Y$ l'application d'oubli (Obliviate) qui prend un choix ordonné et l'envoie sur sa version désordonnée. Chaque choix désordonné provient de $m!$ choix ordonnés (on réarrange les éléments $\to$ bijection) $\implies |\boldsymbol{f}^{-1}(y)| = m! \quad \forall y \in Y$
$\implies |X| = |Y| * m!$ et donc $|Y| = \frac{|X|}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}$

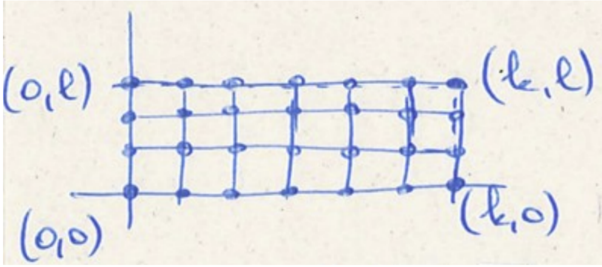
Corollaire 2.9 :
$\binom{n}{m}$ est le nombre de sous-ensembles de m éléments d'un ensemble de n éléments

2.2 Coefficient binomial reloaded

THM 2.10 :
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
On peut le calculer (impossible à lire) par calcul direct, mais voyons un argument de décompte : Soit $X > 0 \quad |X| = n$.
f : $\{\, A \subset X \mid |A| = k \,\} \to \{\, B \subset X \mid |B| = n-k \,\}$
$A \longmapsto X \backslash A$
est une bijection

THM 2.11 : $\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
Avec binôme de Newton (Au 1), ou alors : si $|X| = n$, Corollaire 2.4 (1) : $|P(X)| = 2^n$
et Corollaire 2.9 : $|\{A \in P(X) \mid |A| = k| = \binom{n}{k}$

Exemple : Il y a $\binom{k+l}{k} \begin{matrix}\text{chemins monotones} \\ \text{(seulement} \to \text{ ou } \uparrow)\end{matrix}$ (seulement $\to$ ou $\uparrow$)
de $(0, 0)$ à (k, l) $\forall k, l \in \boldsymbol{N}^+$



Car il faut faire $k+l$ déplacement (k à droite et l en haut)
$\rightarrow$ on doit répartir $k\ ''\!\rightarrow\!''$ et $l\ ''\!\uparrow\!''$

On peut dire : parmi les $k+l$ flèches, on en choisit $k\ ''\!\rightarrow\!''$ et $l\ ''\!\uparrow\!''$
$\implies$ THM 2.8 dit qu'il y a $\binom{k+l}{k}$ manière de le faire
Avec ces instruments, on peut revisiter le triangle de Pascal et le binôme de Newton.

THM 2.12 : $0 \leq k \leq n \implies \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Il y a $\binom{n}{k}$ mots binaires avec $k\ ''0''$ (CF Ex précédent)
Prend un tel mot :

$$\nearrow 1\ldots \text{ mot avec } \begin{matrix} k\ ''0'' \\ n-k-1\ ''1'' \end{matrix} \rightarrow \binom{n-1}{k}$$

$$\searrow 0\ldots \text{ mot avec } \begin{matrix} k-1\ ''0'' \\ n-k+1\ ''1'' \end{matrix} \rightarrow \binom{n-1}{k-1}$$

$\rightarrow$ permet de construire le triangle de Pascal.

THM 2.13 : (Binôme de Newton)
$(a+b)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$a^k b^{n-k} \longleftrightarrow$ produit de $k\ ''a''$ et $n-k\ ''b'' \rightarrow \binom{n}{k}$ choix
$(a+b)^n = \begin{matrix} (a+b) * \cdots * (a+b) \\ n \text{ facteurs} \end{matrix} \implies$ on doit choisir le nombre k de $''a''$

THM 2.14 : $\sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
$(1+(-1))^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = 0$

DEF : Une partition de $n \in \boldsymbol{N}$ est une écriture de n comme somme d'entier positif. L'ordre compte $(1+2\ ''\!\neq\!''\ 2+1)$.

THM 2.15 : # {partitions de n en k entiers} = $\binom{n-1}{k-1}$
$\begin{matrix} 1\ 1\ \ldots\ 1\ 1 \\ n\ ''1'' \end{matrix}$ veut décomposer en k, donc on doit placer $k-1$ séparations

Combien de positions possible pour les séparations ? $\to n-1$

Corollaire 2.16 : L'équation $n = x_1 + \dots + x_k \quad , \quad n \in \boldsymbol{N*}, k \leq n$, a exactement $\binom{n-1}{k-1}$ solutions sur $(\boldsymbol{N*})^k$.

DEF : Un multiensemble est un ensemble non ordonné d'éléments, avec répétition possible. $(n - \text{multiensemble} = \text{multiensemble } \emptyset \cup \text{ éléments})$

THM 2.17 : le nombre de $n -$ multiensembles sur $\{1, \dots, k\}$ est $\binom{n+k+1}{k-1}$

Il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ partitions faibles de n en k nombres non négatifs (donc 0 possible)

$\to$ **THM 2.15** $\implies$ il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ partitions de $n+k$ en k (fortes)

Prend une telle partition et fait -1 aux k nombres $\to$ on obtient une partition faible de n en k nombres ≥ 0

Similaire : prend une partition faible de n en k nombres ≥ 0 et fait $+1$ à tous

$\to$ partition forte de $n+k$ en k nombres $\geq 0 \implies$ bijection entre les 2 ensembles

Cela construit une bijection entre {partitions faibles de n en $k \geq 0$} et {n $-$ multiensemble sur k éléments}

$n = x_1 + \dots + x_k$, $x_i \geq 0 \longrightarrow$ {x_1 fois éléments $1, \dots, x_k$ fois éléments k}

DEF : Prend une $m -$ partition faible de n, càd $n = k_1 + \dots + k_m, \ k_i \geq 0$. Le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, \dots, k_m}$ est donné par $\binom{n}{k_1, \dots, k_m} := \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$

Rappel coeff binomial est multinomial avec $m = 2$

THM 2.18 : Il y a $\binom{n}{k_1, \dots, k_m}$ manières différentes d'arranger n balles de m couleurs différentes (k_i de la couleur i)

Il y a n! arrangements distincts (si numérote les balles de couleur i de 1 à k_i).

$X :=$ {arrangements numérotés} $\to$ {arrangements sans numéros} $=: Y$

une application d'oubli

$|f^{-1}(y)| = k_1! * \dots * k_m!$ car chaque ensemble de balles de la couleur i peut être permuté de k_i! manières

$\to$ **THM 2.2 (1)** $\implies |Y| = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$

THM 2.19 : (Théorème multinomial)

$$(a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} a_1^{k_1} * \dots * a_m^{k_m}$$

$a_1^{k_1} * \dots * a_m^{k_m} \longleftrightarrow$ choix de k_1 fois $a_1, \dots, k_m$ fois a_m

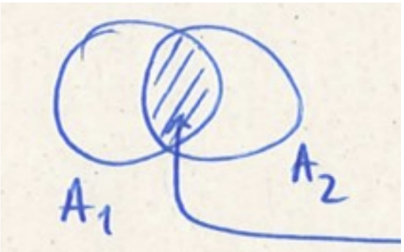
$\to$ **THM 2.18** $\implies$ il y a $\binom{n}{k_1, \dots, k_m}$ manière de le faire

$\underbrace{(a_1 + \dots + a_m) * \dots * (a_1 + \dots + a_m)}_{n \text{ fois}} \implies$ doit choisir les nombres k_1 de $a_1, \dots, k_m$ de a_m

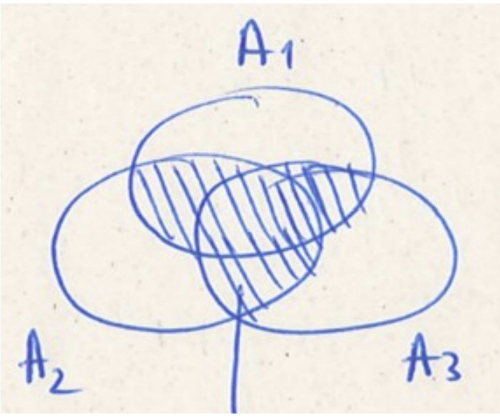
Rappel : on peut généraliser l'exemple des chemins monotones de $\boldsymbol{N^2}$ à des chemins

monotones de $\boldsymbol{N}^m$
Prend le parallélotope de sommets $(0, \ldots, 0)$ et $(k_1, \ldots, k_m)$ opposés
Monotone $\implies$ ne peut qu'augmenter les coordonnées, pas les diminuer
Il y en a $\binom{k_1 + \cdots + k_m}{k_1, \ldots, k_m}$ car il faut choisir les k_1 fois "+1 en position 1", $\ldots,$ k_m "+1 en position m".

THM 2.20 (Inclusion - Exclusion)
$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$
Exemple : $n = 2$:



La zone en tré tillée est compté deux fois
$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ (on retire le milieu car comté deux fois)
Exemple : $n = 3$:



$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 + A_3|$
#TODO entre A_2 et A_3 $\cap$ ou + ?
Exemple : Problème de De Montmort (chapeaux)
Des invités quittent une soirée et vont prendre leur chapeaux dans le garde-robe. Dans la pénombre, ils n'arrivent pas à distinguer leur chapeau, donc tout le monde prend un chapeau au hasard.
Quelle est la probabilité que personne n'ait son chapeau ?
f : $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \implies$ application bijective
(permutation) (la personne i prend le chapeau j)
Si ***f***$(k) = k$, x est un point fixe de la permutation,
on veut donc calculer $\frac{\# \{\text{permutations sous point fixe}\}}{\# \{\text{permutations}\}}$
$\# \{\text{permutations}\} = n \implies$ il reste à calculer $\# \{\text{permutations sous point fixe}\}$

THM 2.21 : le nombre de permutations sous point fixe de n éléments est
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$

$A_i :=$ {permutations qui fixent i, càd $\boldsymbol{f}(i) \;=\; i$} alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \;=$ {toutes les permutations avec points fixes}

On veut utiliser l'inclusion exclusion; donc on doit calculer $|A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik}| \quad \forall k$

$A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik} \;=\;$ {permutations avec $\boldsymbol{f}(i_1) = i_1, \ldots, \boldsymbol{f}(i_k) \;=\; i_k$}

$\Longrightarrow$ il y a k éléments fixés à coup sûr !!!, et les $n-k$ autres sont permutés (avec ou sans point fixe !)

$\Longrightarrow \quad A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik} \;=\; (n-k)!$

On peut choisir k indices parmi $\{1, \ldots,\; n\}$ de $\binom{n}{k}$ façons différentes

$\Longrightarrow \quad A_1 \cup \cdots \cup A_n \;=\; \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0!$

$\Longrightarrow$ sous point fixe $= \; n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$

$= \; n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)! \quad | \quad n! \;=\; (-1)^0\binom{n}{0}(n-0)!$

$= \; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! \quad | \quad \binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$= \; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!} * (n-k)!$

$= \; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$

$$\Longrightarrow P(\text{personne n'a son chapeau}) \;=\; \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}}{n!} \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

An2 verra que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \;=\; e^x \;\Longrightarrow\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!} \approx \frac{1}{e} \approx 0.37$ (si n grand)

DEF : $m,\; n \in \boldsymbol{N}^*$ sont premiers entre eux si leur pgdc est 1
$\varphi(u) := \neq \{m \in \{1, \ldots,\; n\} | m,\; n \text{ premiers entre eux}\}$ est la fonction indicative d'Euler
Rappel : Si n est premier, $\varphi(u) \;=\; n-1$ (et vice-versa)

THM 2.22 : $n \in \boldsymbol{N}^* \quad ; \quad n \;=\; p_1^{\alpha_1} * \cdots * p_m^{\alpha_m}$ la décomposition de m en facteurs premiers, càd $p_1, \ldots, p_m$ premiers ($p_i \neq p_j$) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \boldsymbol{N}^*$.

Alors $\varphi(n) \;=\; n * (1 - \frac{1}{p_1}) * \cdots * (1 - \frac{1}{p_m}) \;=\; p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) * \cdots * p_m^{\alpha_m - 1}(p_m - 1)$

$A_i \;=\; \{x \in \{1, \ldots,\; n\} \big| p_i \text{ divise } x\}$

$\Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_m \;=\; \{k \in \{1, \ldots,\; n\} \big| \text{pgdc}(k, n) \neq 1\}$

et donc $\varphi(n) \;=\; n - |A_1 \cup \cdots \cup A_m| \quad \big| \quad n \;=\; |\{1, \ldots,\; n\}|$

On utilise l'inclusion exclusion pour calculer $|A_1 \cup \cdots \cup A_m|$

$A_i \;=\; \{p_i,\; 2p_i, \ldots,\; \frac{n}{p_i}p_i\} \quad (\frac{n}{p_i} \in \boldsymbol{N} \text{ car } p_i \text{ diviseur de } n)$

$\Longrightarrow |A_i| \;=\; \frac{n}{p_i}$

Similaire : $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \;=\; \frac{n}{p_{i_1} * \cdots * p_{i_k}}$

$$
\begin{aligned}
&= \{p_{i_1} * \cdots * p_{i_k},\ 2p_{i_1} * \cdots * p_{i_k}, \ldots,\ \frac{n}{p_{i_1} * \cdots * p_{i_k}} * p_{i_1} * \cdots * p_{i_k}\} \\
&\implies |A_1 \cup \cdots \cup A_m| \ = \ \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{n}{p_1 * \cdots * p_m} \\
&\implies \varphi(n) \ = \ n - |A_1 \cup \cdots \cup A_m| \\
&= n(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} + \cdots + (-1)^m \frac{n}{p_1 * \cdots * p_m})
\end{aligned}
$$