1.1 Ensembles rappel

DEF : $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ un ensemble ici discret, a_i éléments de A $\forall i = 1, 2, \ldots$

$A \subset B$ si ($a \in A => a \in B$) (inclusion)
P(A) := $\{B \ \mid B \subseteq \ A\}$ l'ensembles des parties de A
$\emptyset \ := \ \{ \ \}$ l'ensemble vide ($\emptyset \ \subset \ A \ \ \forall A, \emptyset \ \in \ P(A) \ \forall A$)
$A \cup B \ := \ \{c \mid c \ \in \ A \ ou \ c \ \in \ B\}$ UNION
$A \cap B \ := \ \{c \mid c \ \in \ A \ et \ c \ \in \ B\}$ INTERSECTION
$A \ / \ B \ := \ \{c \ \in A \mid c \ \notin \ B\}$ DIFFERENCE

Propriétés :
$A \cup B \ = \ B \cup A$, $A \cap B \ = \ B \cap A$
$\emptyset \cup A \ = \ A$, $\emptyset \cap A \ = \ \emptyset$
$A \cup (B \cup C) \ = \ (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) \ = \ (A \cap B) \cap C$
$A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) \ = \ (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \subseteq B \ \implies \ A \cap B \ = \ A, \ A \cup B \ = \ A$

DEF : $A \ \times \ B \ := \ \{(a, \ b) \mid a \in A, \ b \in B\}$ le produit cartésien de A par B

1.2 Base de logique

DEF : Une proposition est un énoncé affirmatif ou négatif, mais pas interrogatif.
Rappel : Une proposition peut être vraie ou fausse, ou ni l'un ni l'autre ("Je suis en train de mentir")

DEF : P et Q sont deux propositions
$P \wedge Q$ (CONJONCTION), $P \vee Q$ (DISJONCTION), $\neg P$ (NEGATION) sont de nouvelles propositions (table de vérités)
$(P \implies Q) \ := \ (\neg P \vee Q)$ (IMPLICATION)
$(P \iff Q) \ := \ (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ (EQUIVALENCE)
$Q \implies P$ est la (RECIPROQUE) de $P \implies Q$
Rappel : $(Q \implies P) \not\Leftrightarrow (P \implies Q)$
$\neg Q \implies \neg P$ est la contraposé de $P \implies Q$
Rappel : $(\neg Q \implies \neg P) \iff (P \implies Q)$

1.3 Type de preuves

Preuve indirecte (par contraposition)
Idée : Pour prouver que $P \implies Q$, on prouve que $\neg Q \implies \neg P$,
c'est à dire qu'on suppose que Q est fausse et on montre que ça
implique que P est fausse aussi.
Pour prouver que A est vraie, on suppose $\neg A$ et on montre une contradiction

Preuve directe
Idée : on part de P et on établit Q par une chaine d'implications

Exemple : $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$

$\neg P$ suppose $\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}$, c'est à dire que $\sqrt{2} \ = \dfrac{m}{n}, m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0$, et disons $\dfrac{m}{n}$ réduite, c'est à dire m, n n'ont aucun diviseur commun autre que 1

$$\sqrt{2} \ = \ \frac{m}{n} \implies 2 \ = \ \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 \ = \ m^2 \implies m^2 \text{ est pair} \implies m \text{ est pair}$$
$$\implies m^2 \text{ divisible par } 4 \implies m^2 \ = \ 4 * M^2 \quad \forall M \in \boldsymbol{Z}$$
$$\implies n^2 \ = \ 2M^2 \implies n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$$
$$\implies \text{m et n divisible par 2} \implies \frac{m}{n} \text{ pas réduite, ce qui est impossible}$$

Preuve par induction

Utilisé pour prouvé un énoncé qui dépend/"duplique" un nombre entier $n \in \boldsymbol{Z}^*$

Idée :

(1) Montré que l'énoncé est vrai si $n \ = \ 1 \quad (\text{ou } n \ = \ 0, \text{etc})$

(2) Montré le mécanisme d'implication suivant : si vrai pour un n fixé (hypothèse d'induction), alors aussi pour le "n suivant" càd n + 1 : "$n \to n+1$" $\longleftrightarrow$ Pas d'induction

Exemple : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \ = \ \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}^*$

(1) Ancrage : si $n = 1, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{1} i \ = \ 1 \iff \frac{1*2}{2} \ = \ 1$

(2) Pas d'induction : suppose $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \ = \ \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{pour un } n \in \boldsymbol{N}^* \text{ fixé}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i \ = \ \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$ faire apparaitre l'hypothèse initiale

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \ = \ \frac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse initiale

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \ = \ \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \ = \ (n+1)(\frac{n}{2}+1) \ = \ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ = \ \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

on peut voir qu'on a validé notre hypothèse en remplaçant n par n+1