

## Homework #2

Due: 2024-4-30 00:00 | 4 Questions, 100 Pts

Name: 彭博

**说明:** 只需完成 60 分的内容即可满足本次作业的要求。

**Question 1 (20') (欧拉角表示).** 试证明内旋效果等价于颠倒顺序后的外旋效果（课件第 29 页）。具体地，试证明按照  $x - y' - z''$  依次转动  $\alpha, \beta, \gamma$  的内旋效果与按照  $z - y - x$  依次转动  $\gamma, \beta, \alpha$  的外旋效果等价。 ◀

记使用内旋得到的旋转矩阵为  $R_{in}$ ，外旋对应的旋转矩阵为  $R_{ex}$ 。首先考虑内旋的情况：初始状态局部坐标系与世界坐标系重合，此时空间中一点  $p$  经过绕  $x$  轴旋转  $\alpha$  角度后在世界坐标系下的坐标为：

$$p_w = R_X(\alpha)p_l^1 \quad (1)$$

其中， $p_w$  为点  $p$  在世界坐标系下的坐标； $p_l^1$  为第一次旋转后的局部坐标。接下来考虑第二次旋转：

$$p_l^1 = R_Y(\beta)p_l^2 \quad (2)$$

类似地，第三次旋转的坐标变换关系为：

$$p_l^2 = R_Z(\gamma)p_l^3 \quad (3)$$

在局部坐标系下， $p$  点的坐标保持不变，即  $p_l^3 = p$ 。将上面三个式子结合起来可以得到：

$$\begin{aligned} p_w &= R_X(\alpha)p_l^1 \\ &= R_X(\alpha)R_Y(\beta)p_l^2 \\ &= R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)p_l^3 \\ &= R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)p \end{aligned} \quad (4)$$

因此使用内旋进行旋转时，每次旋转相当于右乘一个旋转矩阵，这样得到内旋对应的旋转矩阵为：

$$R_{in} = R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma) \quad (5)$$

而在使用外旋进行旋转时，由于旋转轴是固定的，每次旋转都是在旋转后的位置重新绕世界坐标轴旋转。因此每次旋转相当于左乘一个旋转矩阵，这样得到外旋的旋转矩阵为：

$$R_{ex} = R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma) \quad (6)$$

显然这两个矩阵是相等的，因此内旋效果等价于颠倒顺序后的外旋效果。

**Question 2 (20')** (轴角表示、四元数表示). 试证明轴角表示下的相对旋转插值（课件第 37 页）与四元数表示的 Slerp 插值（课件第 52 页）等价。具体来说，你需要推导出两种插值方法在  $t$  时刻的旋转轴  $\mathbf{u}_t$  和旋转角度  $\theta_t$  是相同的，从而得到二者的旋转矩阵  $\mathbf{R}_t$  相同。 ◀

设相对旋转为  $R$ ，则根据 Rodrigues 公式可以得到旋转轴  $\mathbf{u}$  和角度  $\theta$ 。使用轴角表示下的相对旋转插值时，旋转轴  $\mathbf{u}$  保持不变，而  $t \in [0, 1]$  时刻的旋转角度为：

$$\theta_t = t \cdot \theta \quad (7)$$

它对应的四元数表示为：

$$q_t = \left( \cos \frac{t\theta}{2}, \sin \frac{t\theta}{2} \mathbf{u} \right) \quad (8)$$

根据 Slerp 插值公式， $t$  时刻对应的旋转四元数为：

$$\begin{aligned} q'_t &= \frac{\sin \frac{(1-t)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} q_0 + \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} q_1 \\ &= \left( \frac{\sin \frac{(1-t)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \frac{\sin \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u} \right) \\ &= \left( \frac{\sin (1-t) \frac{\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \sin \frac{t\theta}{2} \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

对其中实部进行化简得到：

$$\begin{aligned} \frac{\sin (1-t) \frac{\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{t\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{t\theta}{2} + \sin \frac{t\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{t\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \cos \frac{t\theta}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

因此

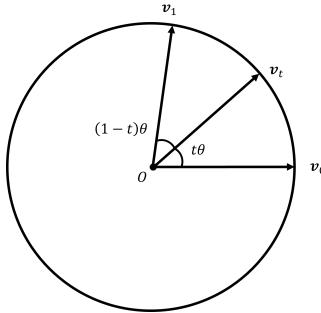
$$q'_t = \left( \cos \frac{t\theta}{2}, \sin \frac{t\theta}{2} \mathbf{u} \right) = q_t \quad (11)$$

这说明两种插值方法在  $t$  时刻会得到相同的四元数，即相同的旋转。

**Question 3 (20') (四元数表示).** 试证明四元数的 Slerp 公式 (课件第 52 页)。具体地, 已知如下图所示, 四元数  $v_0$  与  $v_1$  的夹角为  $\theta$ , 我们希望用  $v_0$  和  $v_1$  线性插值出四元数  $v_t$ , 即:

$$v_t = \alpha v_0 + \beta v_1$$

使得  $v_0$  与  $v_t$  的夹角为  $t\theta$ , 请证明  $\alpha = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}$ ,  $\beta = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$ 。



在  $t$  时刻  $v_t$  与  $v_0$  的夹角为  $t\theta$ , 与  $v_1$  的夹角为  $(1-t)\theta$ 。对  $v_t$  的表达式两边同时和  $v_0$  作内积得到:

$$\begin{aligned} \langle v_t, v_0 \rangle &= \langle \alpha v_0 + \beta v_1, v_0 \rangle \\ &= \alpha + \beta \langle v_0, v_1 \rangle \\ &= \alpha + \beta \cos \theta \\ &= \cos t\theta \end{aligned} \tag{12}$$

类似地, 对  $v_t$  的表达式两边同时和  $v_1$  作内积得到:

$$\begin{aligned} \langle v_t, v_1 \rangle &= \alpha \cos \theta + \beta \\ &= \cos(1-t)\theta \end{aligned} \tag{13}$$

这样, 得到了关于系数  $\alpha$  和  $\beta$  的线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha + \cos \theta \beta = \cos t\theta \\ \cos \theta \alpha + \beta = \cos(1-t)\theta \end{cases} \tag{14}$$

通过消元可以先解出系数  $\beta$ :

$$\cos \theta (\cos t\theta - \cos \theta \beta) + \beta = \cos(1-t)\theta \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\cos(1-t)\theta - \cos \theta \cos t\theta}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \sin t\theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \end{aligned} \tag{16}$$

最后代回方程组第一式可以解出系数  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos t\theta - \cos \theta \beta \\ &= \cos t\theta - \cos \theta \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \cos t\theta - \cos \theta \sin t\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \end{aligned} \tag{17}$$

**Question 4 (40') (代码题).** 请按照代码文件夹中的 README 的要求完成代码填空。 ◀