

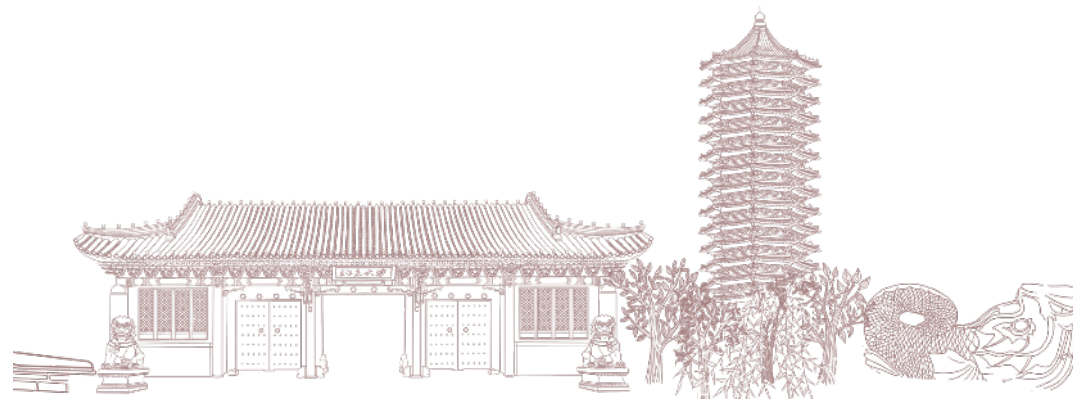


# 微分方程

Differential Equations

主讲人：倪星宇

2024 年 6 月 3 日



# 微分方程的基本概念

- 什么是微分方程
  - 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程
- 微分方程的分类
  - 常微分方程：未知函数是一元函数（导数为全导数）
  - 偏微分方程：未知函数是多元函数（导数为偏导数）
- 微分方程的求解方法
  - 通解法：根据特定微分方程的通解代值求特解
  - 分离变量法、格林函数法
  - .....
  - 数值法（计算机图形学研究的核心之一）

# 可分离变量的微分方程

- 标准形式:  $\psi(y)dy = \phi(x)dx$ 
  - 等式两边积分即得方程的通解  $\int \psi(y)dy = \int \phi(x)dx + C$
  - 例: 求方程  $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$  的通解
    - $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$
    - $\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx + C'$
    - $\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln C$
    - $\ln(1 + y^2) = \ln C(1 + x^2)$
    - $y^2 = C(1 + x^2) - 1$

# 一阶线性微分方程

- 标准形式:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 
  - 若  $Q(x) \equiv 0$ , 方程称为**齐次**的
  - 若  $Q(x) \neq 0$ , 方程称为**非齐次**的
- 线性齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 
  - 解法 (分离变量)
    - $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$
    - $\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1$
    - $y = Ce^{-\int P(x)dx}$  ( $C = \pm e^{C_1}$ )
  - 应用: 体渲染

# 一阶线性微分方程

- 线性非齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 
  - 解法 (待定系数)
    - $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$
    - $y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]$
    - $y' + P(x)y = C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$
    - $\int C'(x)dx = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$
    - $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$
  - $y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right]$ 
    - $Ce^{-\int P(x)dx}$  为齐次方程的通解
    - $e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$  为非齐次方程的特解

# 一阶非线性微分方程

- 伯努利方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  ( $n \neq 0, 1$ )
  - 解法 (变量代换)
    - $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$
    - $\frac{1}{1-n} \frac{d(y^{1-n})}{dx} + P(x)(y^{1-n}) = Q(x)$
    - $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$  ( $z = y^{1-n}$ )
    - $y^{1-n} = z = e^{-(1-n) \int P(x)dx} \left[ (1-n) \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C \right]$

# 高阶微分方程

- 可降阶的高阶微分方程
  - $y^{(n)} = f(x)$ 
    - 连续进行  $n$  次不定积分即得通解
  - $y'' = f(x, y')$ 
    - 设  $p = y'$ , 则有  $p' = f(x, p)$
    - 设一阶方程  $p' = f(x, p)$  有通解  $p = p(x, C_1)$
    - 积分  $y' = p(x, C_1)$  得  $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$
  - $y'' = f(y, y')$ 
    - 设  $p = y'$ , 有  $y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$
    - $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$ , 解得  $y' = p = \phi(y, C_1)$
    - $\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2$

# 二阶微分方程

- 标准形式:  $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$ 
  - 若  $f(x) \equiv 0$ , 方程称为**齐次**的
  - 若  $f(x) \neq 0$ , 方程称为**非齐次**的
- 二阶线性齐次方程  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 
  - 定理: 若  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是上述方程的两个线性无关的解
    - 则  $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  是方程的通解
    - 该定理可以拓展到  $n$  阶线性齐次方程中
- 二阶线性非齐次方程  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 
  - 定理: 若  $y^*(x)$  是非齐次方程的特解,  $Y(x)$  是对应齐次方程的通解
    - 则  $y = y^* + Y$  是非齐次方程的通解



# 二阶微分方程

- 二阶**常系数**齐次线性微分方程:  $y'' + py' + qy = 0$ 
  - 解法 (待定系数)
    - 设  $y = e^{rx}$  是方程的解, 则  $(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$
    - $r^2 + pr + q = 0$  为特征方程,  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  为特征根
    - 判别式  $\Delta = p^2 - 4q$ 
      - $> 0$ : 得到两个线性无关的特解  $y_1 = e^{r_1x}$  和  $y_2 = e^{r_2x}$
      - $= 0$ : 得到一个特解  $y_1 = e^{-\frac{px}{2}}$ , 设  $y_2 = u(x)e^{-\frac{px}{2}}$ 
        - $[u(x)r^2 + 2u'(x)r + u''(x)]e^{-\frac{px}{2}} + p[u(x)r + u'(x)]e^{-\frac{px}{2}} + qu(x)e^{-\frac{px}{2}} = 0$
        - $u''(x) + (2r + p)u'(x) + (r^2 + pr + q)u(x) = 0$
        - $u''(x) = 0$ , 取  $u(x) = x$  得  $y_2 = xe^{-\frac{px}{2}}$
      - $< 0$ :  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , 利用欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 
        - $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

# 二阶微分方程

- 高阶常系数齐次线性微分方程:  $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$ 
  - 特征方程  $r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$ 
    - $k$  重根  $r$  对应于通解项  $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$
    - $k$  重共轭复根  $\alpha \pm i\beta$  对应于通解项
      - $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$
- 二阶常系数非齐次线性微分方程:  $y'' + py' + qy = f(x)$ 
  - $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$  ( $P_m(x)$  表示最高  $m$  次的多项式, 下同)
    - $y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$ 
      - $R_m(x)$  为某个  $m$  次多项式,  $k = 0, 1, 2$  ( $\lambda$  不是特征方程的根、是单根、是重根)
  - $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 
    - $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m(x) \cos \omega x + S_m(x) \sin \omega x]$ 
      - $m = \max\{l, n\}$ ,  $k = 0, 1$  ( $\lambda \pm \omega i$  不是特征方程的根、是共轭复根)

# 二阶偏微分方程

- 二元二阶线性偏微分方程

- $$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

- $a, b, c, d, e, g, f$  都是自变量  $x, y$  的函数, 且二阶偏导数连续, 其中  $a, b, c$  不同时为零

- 判别式  $\Delta = b^2 - ac$  在不同点处可能取不同值

- $\Delta > 0 (\forall x, y)$ : 方程为双曲型偏微分方程

- $\Delta = 0 (\forall x, y)$ : 方程为抛物型偏微分方程

- $\Delta < 0 (\forall x, y)$ : 方程为椭圆型偏微分方程

- 多元二阶线性偏微分方程

- $$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

- 构建二次型  $\mathcal{D} = \{a_{ij}\}$ , 标准化后按系数的符号判断偏微分方程的类型

# 二阶偏微分方程

- 双曲型：波动方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  (一维)
  - 受迫振动:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho}$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$  (三维)

- 抛物型：热传导方程

- $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  (一维)

- $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0$  (三维)

- 有源项:  $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = f(x, y, z, t)$

- 椭圆型：拉普拉斯方程

- 可以看成热传导方程的稳定问题

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  (一维)

- $\nabla^2 u = 0$  (三维)

- 泊松方程:  $\nabla^2 u = f(x, y, z, t)$

- 有源项 (如电场方程中的电荷)

- 若波动方程中

- $u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{-i\omega t}$

- 波动方程变为亥姆霍兹方程

- $\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0$

# 分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 
  - 初值条件：  $t = 0$  时  $u = \phi(x)$  且  $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
  - 分离变量： 设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 
    - $X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$
    - $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ 
      - 该式成立当且仅当等式两端均为常数，设为  $-\lambda$
    - $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 
      - $T = A \sin \sqrt{\lambda} a t + B \cos \sqrt{\lambda} a t$
    - $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 
      - $X = C \sin \sqrt{\lambda} x + D \cos \sqrt{\lambda} x$

# 分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < l)$ 
  - 初值条件：  $t = 0$  时  $u = \phi(x)$  且  $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
  - 边界条件：  $u(0, t) = u(l, t) = 0$
  - 分离变量： 设  $u(x, t) = X(x)T(t) = (A \sin \sqrt{\lambda}at + B \cos \sqrt{\lambda}at)(C \sin \sqrt{\lambda}x + D \cos \sqrt{\lambda}x)$ 
    - 定解：  $X(0) = X(l) = 0$ 
      - $C \sin 0 + D \cos 0 = D = 0$
      - $C \sin \sqrt{\lambda}l = 0$
      - $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$
      - $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l}x \left( A_n \sin \frac{an\pi}{l}t + B_n \cos \frac{an\pi}{l}t \right)$
    - $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ 
      - 考虑  $\phi$  与  $\psi$ ，使用傅里叶展开决定  $A_n, B_n$

# 球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程
  - $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$
  - 分离变量:  $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ 
    - $Y \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = 0$
    - $-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -\alpha$
  - 球谐函数方程:  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \alpha Y = 0$ 
    - 分离变量:  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 
      - $\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha \Theta \Phi = 0$
      - $\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha = 0$

# 球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程

- 球谐函数方程:  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \alpha Y = 0$

- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha = -\frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{\beta}{\sin^2 \theta}$

- $\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \beta \Phi = 0$

- $\Phi_1 = \cos \sqrt{\beta} \phi, \quad \Phi_2 = \sin \sqrt{\beta} \phi$

- 由  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$  得  $\beta = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

- $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha = \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$

- $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left( \alpha - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (x = \cos \theta, \quad y = \Phi)$

- $x = \pm 1$  时  $y$  有界 (自然边界条件)

- 通过泰勒展开可解得  $\alpha = l(l+1)$  ( $l \in \mathbb{N}$ )



# 球谐函数

- 球坐标系下拉普拉斯方程的解:  $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 
  - 径向方程:  $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ 
    - $R = A_l^m r^l + B_l^m \frac{1}{r^{l+1}}$
  - $\Phi_1 = \cos m\phi, \quad \Phi_2 = \sin m\phi$
  - 连带勒让德方程:  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$ 
    - $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$
    - 其解记为  $P_l^m$ , 称为连带勒让德多项式
  - 归一化的复数球谐函数 ( $\int Y_l^m Y_k^n d\Omega = \delta_{kl} \delta_{mn}$ )
    - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$

# 球谐函数

- 归一化的球谐函数 ( $\int Y_l^m Y_k^n d\Omega = \delta_{kl} \delta_{mn}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ )
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos \theta) \cos \phi \quad (m > 0)$
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos \theta) \sin \phi \quad (m < 0)$
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos \theta) \quad (m = 0)$
- 勒让德方程:  $m = 0$  的特殊情况 (解函数绕极轴旋转对称)
  - $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l+1)y = 0$ 
    - 其解  $P_l(x)$  称为  $l$  阶勒让德多项式

# 球谐函数

- 勒让德多项式的计算

- 级数表示:  $P_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}$

- 微分表示:  $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$

- 勒让德多项式的性质

- $P_l(x)$  的  $l$  个零点都是实的, 且在  $(-1,1)$  之内;  $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

- $\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = N_l^2 \delta_{nl}; \quad N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

- 球谐函数的应用

- 作为基底展开球面函数 (用若干系数近似表达环境光照贴图)

# 格林函数法

- 例：给定电荷密度分布，求电场强度
  - 电场高斯定理的积分形式： $\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ 
    - $q$  为区域  $V$  中的电荷总量， $\epsilon_0$  是一个物理常量
  - 电场高斯定理的微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 
    - $\rho$  为电荷密度
  - 考虑下列问题：如何求  $\mathbf{r}_0$  处大小为  $q$  的点电荷的电势与电场
    - $E(\mathbf{r}) = k \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$  （高中物理）
    - $\phi(\mathbf{r}) = k \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$  （大学物理）
    - 问题：点电荷处的电荷密度是多少？

# 格林函数法

- 狄拉克函数

- $\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases}$

- $\int_V \delta(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V \\ 0, & \mathbf{r} \notin V \end{cases}$

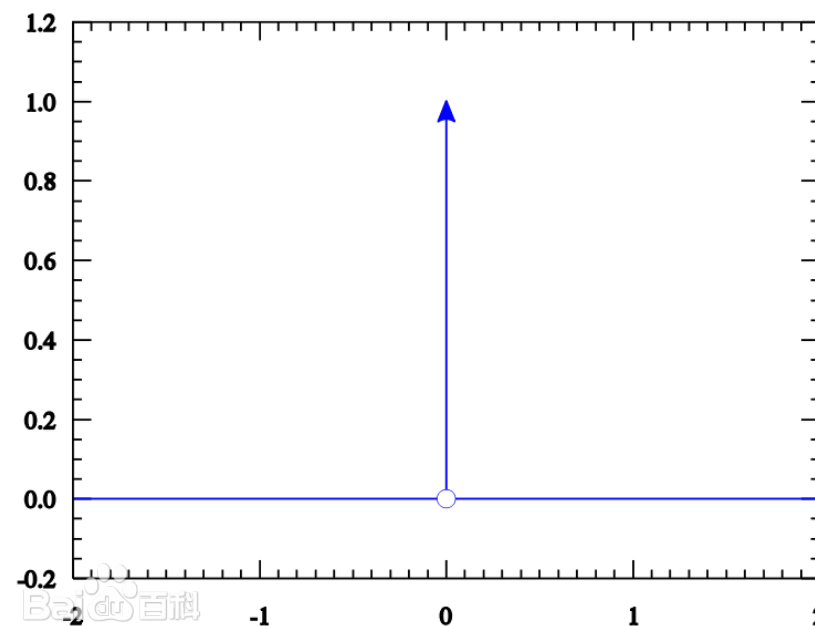
- 点电荷的密度:  $q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$

- $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

- $\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$

- 系拉普拉斯方程



# 格林函数法

- 泊松方程的格林函数解

- $\nabla^2 \phi = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

- $\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$

- $\nabla^2 \phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$

- $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

- $u = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$  是泊松方程  $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  在无穷远边界条件下的格林函数解

- 又称为泊松方程的基本解

- 无穷远边界条件:  $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} u = 0$

- 由叠加原理得无穷远边界条件下  $\nabla^2 u = f$  的解 (联想: 给定电荷密度分布求电势)

- $u = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$

# 格林函数法

- 非无穷远边界条件的格林函数

- 静电学中的电像法

- 例：空间中有无穷大平面满足电势为零，左端有一点电荷

- $\nabla^2 \phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}, \quad \phi|_{x=0} = 0$

- 上述方程的格林函数解为  $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-(x_0, y_0, z_0)|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-(-x_0, y_0, z_0)|}$

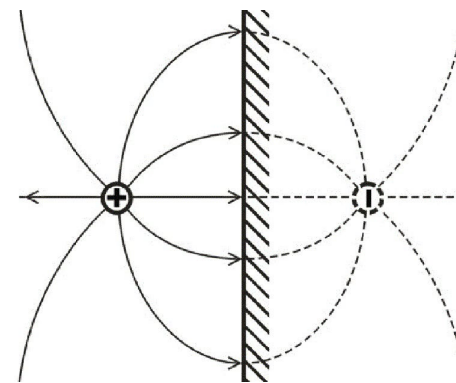
- 等同于电荷的电势加上右侧镜像位置的异号电荷产生的电势

- 类似地，可以利用格林函数+叠加原理求解方程

- 二维情形下的泊松方程基本解

- 注意上述形式只适用于三维

- 在二维中  $u = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  是泊松方程  $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  的无穷远边界条件解



# 格林函数法

- 格林恒等式

- 设区域  $V$  内有连续可微的标量函数场  $\phi, \psi$

- 格林第一恒等式

- $\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dA$

- 格林第二恒等式

- $\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dA$

- 格林第三恒等式

- 设  $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  是泊松方程的基本解,  $\psi(\mathbf{r})$  在区域内满足拉普拉斯方程

- $\psi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \left( \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dA'$

- 该方程构成了边界元法的基础



# 微分方程的数值解

- 常微分方程  $y'(x) = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$

- 欧拉法  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

- $h = x_{i+1} - x_i$

- 一阶精度

- 高阶方法：隆格-库塔法等

- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例

- $$(\nabla^2 u)_{i,j} = \frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{\Delta x^2}$$

- $$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{\Delta x^2} = 0$$

- $$u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4}$$

# 微分方程的数值解

- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例
  - $u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4}$
  - 雅可比迭代
    - $u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n}{4}$
  - 高斯-赛德尔迭代
    - $u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{4}$
  - 上述解法的分类：有限差分离散化下的点迭代法
  - 其它离散化方式：有限体积法、有限元法、边界元法
  - 其它线性系统求解方法：共轭梯度下降法、多重网格法