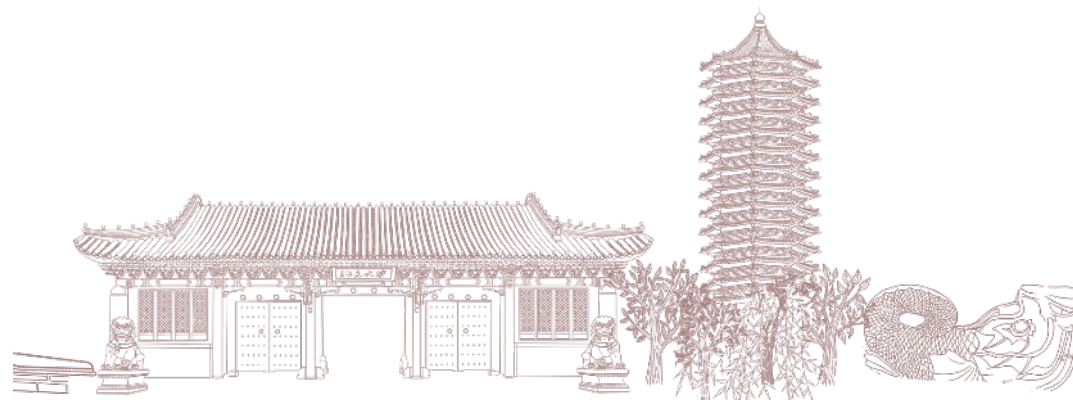


图形学中的数学

GAMES001: Mathematics in Computer Graphics

2024 年春季



指导教师



<http://baoquanchen.info/>

- 陈宝权 教授
 - 北京大学智能学院副院长
 - 研究领域: 计算机图形学、三维视觉与可视化
 - 中国计算机学会会士, 中国图象图形学学会会士, IEEE Fellow, IEEE Visualization Academy
 - 在 ACM SIGGRAPH, IEEE VIS, ACM Transactions on Graphics (TOG), IEEE Transactions on Visualization and Graphics (TVCG) 等国际会议和期刊发表论文 200 余篇

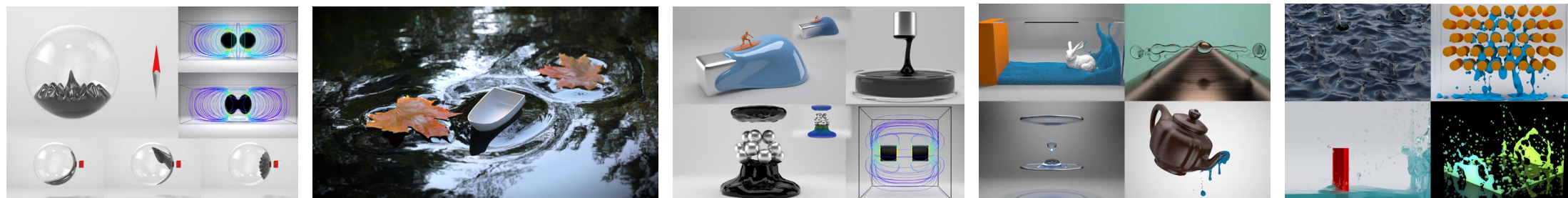
讲者介绍

- 倪星宇

- 北京大学四年级博士生（直博）
- 研究方向: 物理模拟
- 北京大学首届“图灵班” (2020) 毕业生
- 第 32 届 NOI 金牌（国家集训队）

- 阮良旺

- 北京大学三年级博士生（直博）
- 研究方向: 物理模拟
- 北京大学第二届 (2021) “图灵班”毕业生
- 第 33 届 CPhO 金牌（国家集训队）



助教介绍



- 陶凝骁

- 北京大学 2020 级元培学院本科生
- 第 36 届 CPhO 金牌 (国家集训队)
- taoningxiao@gmail.com

- 王瑞诚

- 北京大学 2020 级元培学院本科生
- 第 33 届 CChO 金牌 (国家集训队)
- wrc0326@outlook.com

- 朱岳宸

- 北京大学 2020 级“图灵班”本科生
- 第 36 届 CPhO 金牌 (国家集训队)
- zhuyuechen01@gmail.com

- 于程

- 北京大学 2020 级信息学院本科生
- chengyupku@163.com

课程大纲

- Part I: 几何与代数
 - 1 线性代数基础
 - 2 计算几何
 - 3 旋转变换
 - 4 主成分分析与奇异值分解
- Part II: 数值方法
 - 5 插值、拟合与采样
 - 6 谱分析与傅里叶变换
 - 7 概率论 (I)
 - 8 概率论 (II)
- Part III: 微分方程求解
 - 9 场论初步
 - 10 古典微分几何
 - 11 微分方程
 - 12 线性系统
- Part IV: 优化与拓扑
 - 13 最优化
 - 14 机器学习 (I)
 - 15 机器学习 (II)
 - 16 拓扑

参考书目



- [1] Daniel Cohen-Or, Chen Greif, Tao Ju, Niloy J. Mitra, Ariel Shamir, Olga Sorkine-Hornung, and Hao (Richard) Zhang. 2015. A Sampler of Useful Computational Tools for Applied Geometry, Computer Graphics, and Image Processing (1st. ed.). A. K. Peters, Ltd., USA.
- [2] Eric Lengyel. 2011. Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition (3rd. ed.). Course Technology Press, Boston, MA, USA. (《3D游戏与计算机图形学中的数学方法》，詹海生译，北京：清华大学出版社，2016年。)
- [3] Avrim Blum, John Hopcroft, and Ravindran Kannan. 2020. Foundations of Data Science. Cambridge University Press, UK.

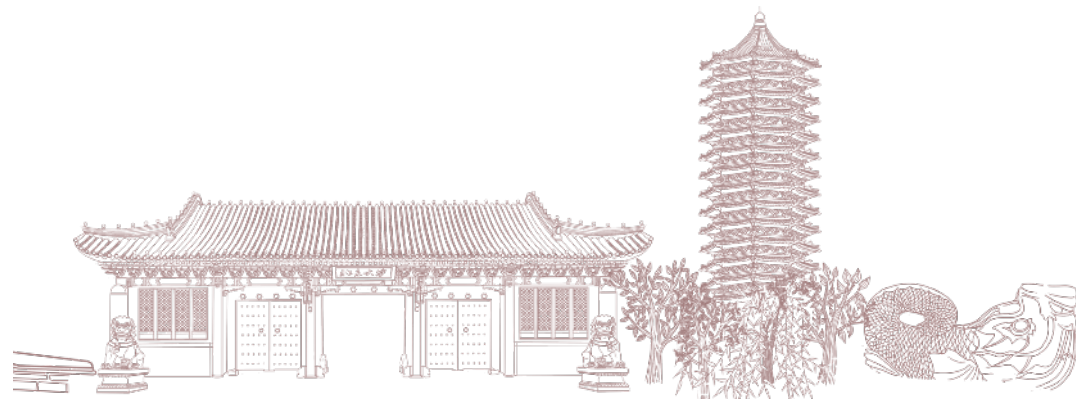


线性代数基础

Fundamentals of Linear Algebra

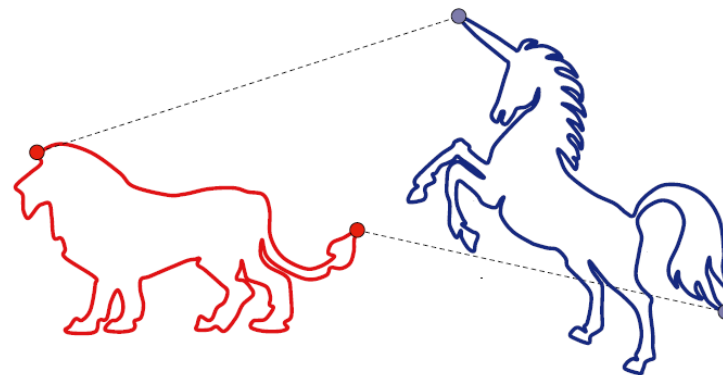
本章主讲：倪星宇

2024 年 3 月 4 日

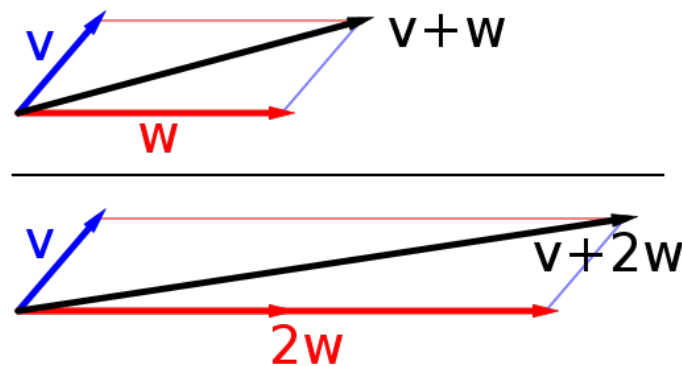


向量 (Vector)

- 图形学的基本研究对象：点的位置、法向.....
 - 从本质上说，均为向量



- 什么是向量
 - 中学数学/物理：既有大小又有方向的量
 - 运算满足平行四边形法则
 - 线性代数：向量空间（线性空间）的元素
 - 运算满足公理化定义



向量空间 (Vector Space)

- 数域 F 上的向量空间：带有向量加法和标量乘法的非空集合 V
 - 向量加法结合律： $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
 - 向量加法交换律： $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
 - 向量加法单位元： $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
 - 向量加法逆元： $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
 - 标量乘法与数域乘法的结合律： $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
 - 标量乘法单位元： $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
 - 标量乘法对向量加法的分配律： $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
 - 标量乘法对数域加法的分配律： $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
- 在图形学应用中，数域 F 一般取为实数域 \mathbb{R} ，其它选择包括复数域 \mathbb{C} 等

线性组合 (Linear Combination)

- 线性相关/无关 (Linearly dependent/independent)
 - 定义在向量集合 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 上
 - 线性相关: 数域 F 中存在不全为 0 的一组数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 使得
 - $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 + \dots + a_n\mathbf{u}_n = 0$
 - $\mathbf{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\mathbf{u}_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{u}_n$ ($a_1 \neq 0$) 说明 \mathbf{u}_1 是 $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ 的线性组合
 - 线性无关: 数域 F 中不存在不全为 0 的这样一组数
- 向量空间的维度
 - 空间内能找出的线性无关的向量的个数的最大值, 记为 $\dim V$
 - $\dim V$ 个线性无关的向量构成空间的一组基矢 (basis vectors)
 - 任意空间中的向量可以**唯一**表示为这组基矢的线性组合 (反证法给出唯一性)
 - 线性组合的系数 (coefficients) 被称为该矢量在这组基下的坐标 (coordinates)

图形学研究的维度

- 低维向量和向量空间 (2D~4D)
 - 物理空间: Mesh、曲线、点云的坐标及导数
 - 欧几里得空间 (x, y, z)
 - 闵可夫斯基空间 (x, y, z, ict)
 - 颜色空间: RGB, CMYK
 - 作业: 为什么颜色空间可以构成向量空间?
- 高维向量和向量空间
 - 灰度数字图像上所有像素值组成的向量
 - 1920×1080 的灰度数字图像维度达到 200 万
 - 二维或三维图形的所有自由度组成的向量
 - 《原神》中纳西妲运动的顶点自由度数为 45459
 - SIGGRAPH 水体模拟求解的向量维度一般在 10^6 至 10^7



线性映射 (Linear Mapping)

- $f: V \rightarrow W$
 - V, W 均为向量空间
 - $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
 - $f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$
 - 推论 (如何证明?)
 - $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
 - $f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$
- 低维空间的线性映射
 - 缩放、旋转是线性映射
 - 平移不是线性映射
 - ** 仿射变换 (affine transformation) = 缩放、旋转 + 平移

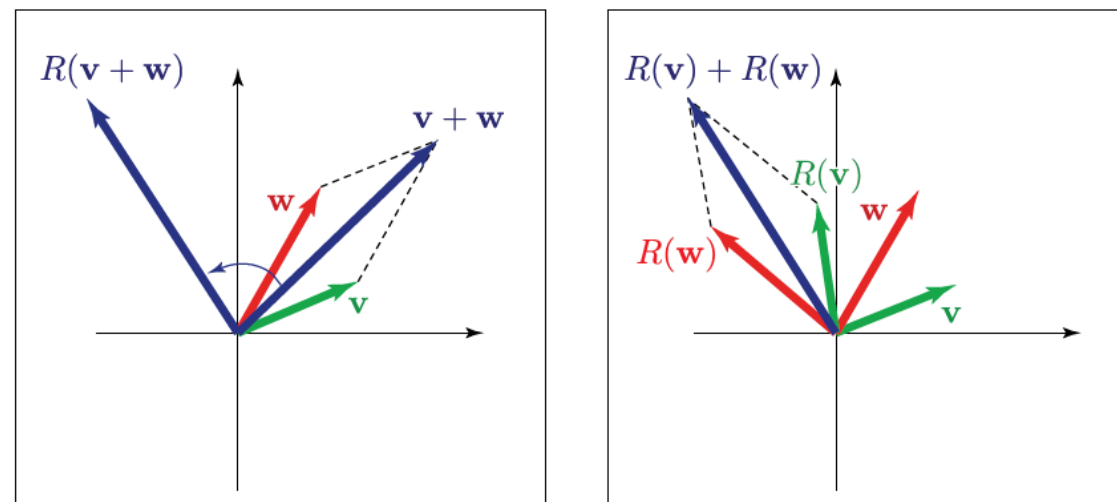


Figure 2.10: Rotation is a linear operator.

矩阵 (Matrix)

- 什么是矩阵
 - X 二维数字阵列 (2D array)
 - ✓ 对线性映射的一种表示
 - <https://www.bilibili.com/video/BV1ys411472E/> (** 强烈推荐)
- 矩阵运算的意义
 - 矩阵与向量的乘法
 - 给出向量在新的空间 (经过矩阵对应的线性变换后的空间) 里的坐标
 - 矩阵的乘法
 - 对空间的多次相继变换的合成
- 方阵
 - $n \times n$ 的矩阵, 暗示变换前与变换后的空间有相同的维度; 单位矩阵 \mathbf{E}

矩阵单目运算

- 转置 (Transpose) A^T : A 的所有元素的下标行、列互换
 - 意义: 矩阵对应的线性变换在对偶空间里的逆变换对应的矩阵
 - 性质: $(AB)^T = B^T A^T$
- 行列式 (Determinant) $\det A = |A|$
 - 意义: 矩阵对应的线性变换对空间的拉伸程度的度量 (物体经过变换前后的体积比)
 - 定义: 在 n 阶方阵中选 n 个元素使得每行每列各有一个元素被选出, 求其乘积
 - 再将不同选择方案的乘积乘以正负 1 (由选择方法的奇偶性决定) 加和
 - 计算方法
 - 低维矩阵: n 条主对角线分别计算乘积的和, 减去 n 条次对角线分别计算乘积的和
 - 高维矩阵: 高斯消元后取对角线元素的积
 - 性质: 转置不变; 交换行 (列) 取反

复数域上的共轭矩阵: 转置 + 共轭
记为 A^H

矩阵单目运算

- 迹 (Trace) $\text{tr } \mathbf{A}$: 矩阵的对角线元素之和
 - 意义: 矩阵的特征值之和
 - 性质: $\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{A}^T)$; $\text{tr } \mathbf{AB} = \text{tr } \mathbf{BA}$; $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} + \mathbf{A})$
- 逆 (Inversed) \mathbf{A}^{-1} : 满足 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ 的矩阵
 - 意义: 矩阵对应的线性变换的逆变换的矩阵; 矩阵的特征值之积
 - 求解: 伴随矩阵法; 高斯消元法
 - 性质: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; $|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| = 1$
- 伴随 (Adjugated) \mathbf{A}^* : 由 \mathbf{A} 的每个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵
 - 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; M_{ij} 为余子式, 即删去第 i 行第 j 列后的行列式值
 - 性质: $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$

特征值 (Eigenvalue)

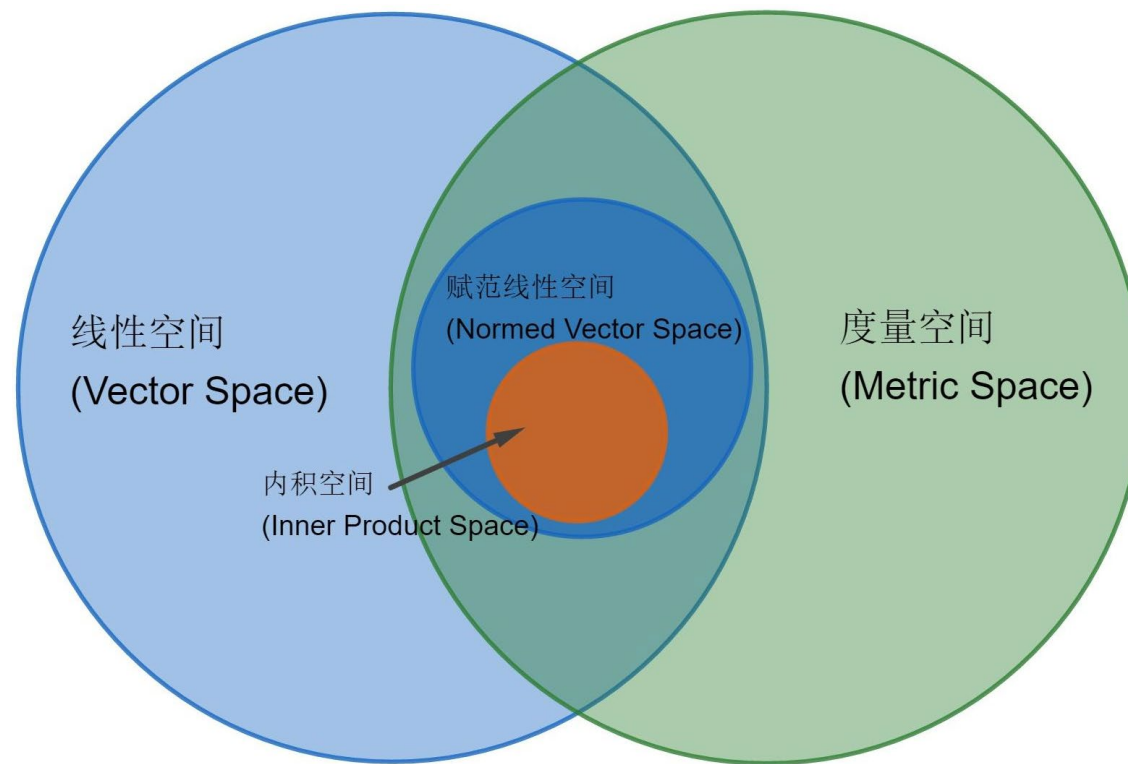
- 对于某些向量 \mathbf{u} 满足 $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}$ 的数 λ 称为特征值 (\mathbf{A} 为 n 阶方阵)
 - 这些向量 \mathbf{u} 称为特征向量, 每个特征值对应的特征向量构成向量子空间
 - $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v} \Rightarrow \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$
 - 求解特征值: $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{u} = 0$
 - 想得到关于 \mathbf{u} 的非零解, 则 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 该行列式对应于一元 n 次方程组
 - 特征值的意义: 对于某些向量, 特定线性变换的作用效果与数乘等价
- 矩阵多项式的特征值
 - $f(\mathbf{A}) = c_k \mathbf{A}^k + c_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \dots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{E}$
 - 若 λ 是 \mathbf{A} 的特征值, 则 $f(\lambda)$ 必为 $f(\mathbf{A})$ 的特征值
 - 设 \mathbf{A} 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$; 则 $f(\mathbf{A})$ 的全部特征值由 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 给出
 - 重要应用: 最大特征值称为谱半径 (spectral radius); 最大最小特征值之比称为条件数

赋范 (Normed) 向量空间

- 度量空间 vs. 向量空间
 - 向量空间中的元素不能比大小
 - 对于集合 V , 定义度量函数 $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $x, y, z \in V$
 - $d(x, y) \geq 0$ (非负性)
 - $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ (不可区分者的同一性)
 - $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性)
 - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)
 - 定义了度量函数的集合 V 称为度量空间 (metric space), 度量函数 d 又称为“距离”
- 赋范向量空间 = 向量空间 + 度量函数 ($d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$)
 - 定义范数 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
 - $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\|\mathbf{u}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (正定性); $\|a\mathbf{u}\| = |a|\|\mathbf{u}\|$ ($a \in \mathbb{R}$) (正齐次性)
 - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (次可加性, 三角不等式)

内积空间 (Inner Product Space)

- 内积: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 - u 与 v 的内积记作 $\langle u, v \rangle$
 - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
 - $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
 - $\langle u, av \rangle = a\langle u, v \rangle$
 - $\langle u, u \rangle \geq 0$
- 赋范线性空间 vs. 内积空间
 - $d(u, u) = \langle u, u \rangle$
 - 范数只给出了向量的长度
 - 内积还给出了向量的夹角



内积与正交

- 正交 (orthogonal) 与单位正交基底
 - 定义两向量的夹角 $\theta_{uv} = \arccos \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}$, 当 $\cos \theta_{uv} = 0$ 时称为两向量正交
 - 正交基底: 一组两两之间互相正交的向量基底; 单位基底: 模长均为 1 的向量基底
 - 通过施密特正交化加规范化可以使任意一组基底成为单位正交基底
 - 单位正交基底的性质 (设 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$)
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3, v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- 单位正交变换: 不改变任意两个向量的内积的变换 (保持单位正交基底)
 - 单位正交矩阵: 变换对应的矩阵 \mathbf{R} , 满足 $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$; 对应于旋转与镜像空间内的旋转
- 笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinates)
 - 一组 \mathbb{R}^n 中的单位正交基底加上原点构成的坐标系; 成立 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$

么正空间与么正变换

- 么正 (unitary) 空间，数学上又译为酉空间
 - 定义了内积的复数域 \mathbb{C} 上的线性空间，内积通过埃尔米特 (Hermite) 函数给出
- 么正变换，数学上又译为酉变换
 - 将么正空间中的单位正交基底变换为单位正交基底的变换
 - 单位正交基：亦称为规范正交基、标准正交基
 - 单位正交变换可视为么正变换在实数域 \mathbb{R} 上的特例
- 么正空间/变换的应用
 - 量子力学：波函数在复数域上定义
 - 么正性：算子 (operator) 保内积
 - 线性算子：无限维空间（函数空间）上的线性变换，也存在特征值、内积等概念

低维变换矩阵

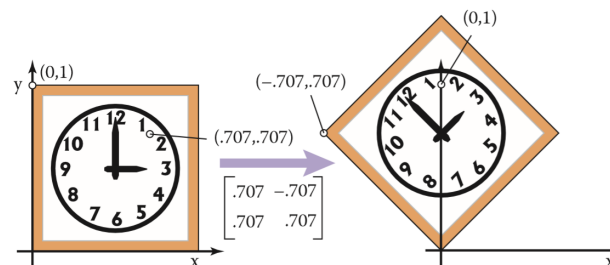
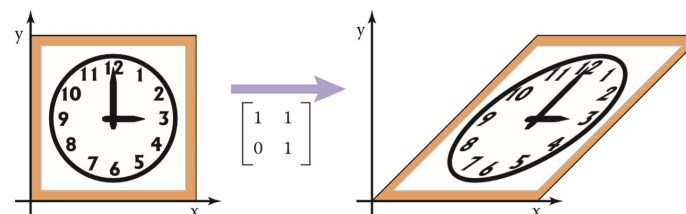
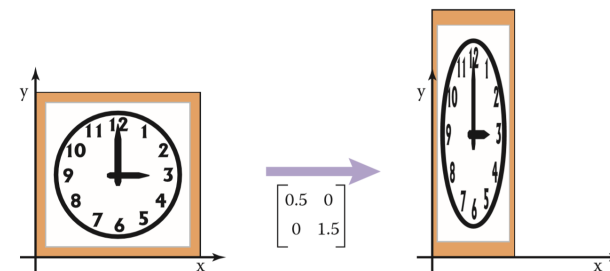
- 2D 线性变换

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$

- $\text{scale}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$

- $\text{shear}_x(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{shear}_y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$

- $\text{rotate}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$



低维变换矩阵

- 3D 线性变换

- $\text{scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$

- $\text{shear}_x(s_y, s_z) = \begin{pmatrix} 1 & s_y & s_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\text{rotate}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 绕任意轴旋转

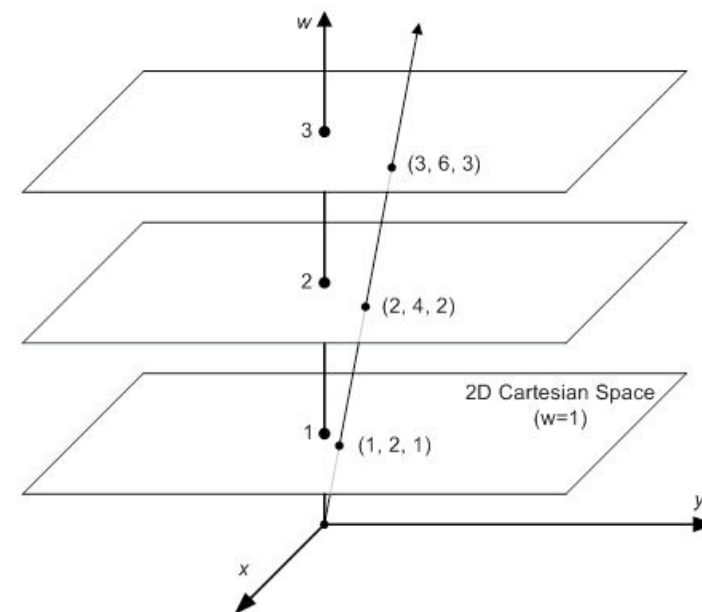
- $R^T \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R$

- R 为将旋转轴转为 z 轴的变换矩阵

- 参见第三讲

齐次 (Homogeneous) 坐标

- 实质：用 $n + 1$ 个数表示 n 维坐标
 - 二维： $(x, y, w) \rightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)$
 - 三维： $(x, y, z, w) \rightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$
 - 齐次坐标等比例放缩不影响其表示的 n 维坐标
 - 二维仿射变换
 - $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + t_x \\ a_{21}x + a_{22}y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$
 - 平移变换是线性变换完成后进行的
 - 默认顺序 (Houdini、Blender 等)：缩放 \rightarrow 旋转 \rightarrow 平移



矩阵的变换

- 矩阵的变换 vs. 线性变换
 - 矩阵就是线性变换的表示，所以矩阵的变换其实是线性变换的“变换”
- 相似变换
 - 存在可逆矩阵 \mathbf{P} 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ ，称为矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 相似，记作 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$
 - 意义： \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 可以看作同一个线性变换在不同基底下的表象
 - 相似对角化：当存在 n 个线性无关的特征向量时，可以将矩阵相似为一个对角矩阵
 - 在某个特殊的基底下，矩阵对应的线性变换等价于纯缩放变换
- 合同变换
 - 存在可逆矩阵 \mathbf{C} 使得 $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}$ ，称为矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 合同，记作 $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$
 - 意义： \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 可以看作同一个二次型在不同基底下的表象

二次型

- 二次型 (quadratic form): n 个变量的二次多项式
 - 示例: 圆锥曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$
 - 矩阵表示 $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
 - 一般形式: $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$
 - 合同变换后: $\mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \Rightarrow (\mathbf{C} \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{x}) = 0$
 - 意义: 变换基底后的二次型系数
 - 应用
 - 将某任意朝向的椭圆方程转换为标准形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

正定矩阵与对称矩阵

- 正定 (positive definite) 矩阵

- 定义：满足 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x} \neq 0$) 的矩阵
- 意义：可以构建恒取正值的二次型

- 二元可微函数 $f(x, y)$, 其二阶微分 $(dx \quad dy) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ 给出沿任意方向的二阶导数

- 性质：正定矩阵的特征值全为正数（逆命题不成立）
- 半正定矩阵：满足 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ ($\mathbf{x} \neq 0$) 的矩阵

- 实对称矩阵

- 定义：实数域上的对称矩阵 ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$)
- 性质：可以被正交矩阵对角化；只要特征值全为正数就是正定的

复数域上的埃尔米特 (Hermitian) 矩阵
满足 $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$

矩阵分解

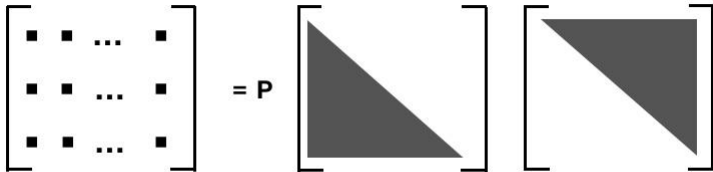
- 矩阵分解 (Decomposition)

- PLU 分解: $A = PLU$

- 要求: 方阵
 - P 为初等变换矩阵, L 为下三角矩阵, U 为上三角矩阵
 - 当 P 取单位矩阵时则退化为 LU 分解
 - 应用: 高斯消元求解矩阵方程

- 乔里斯基 (Cholesky) 分解: $A = LL^H$

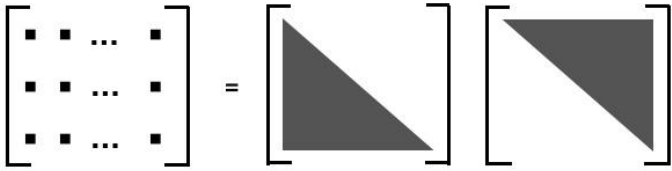
- 要求: 方阵, 正定, 实对称/埃尔米特
 - L 为下三角矩阵
 - 应用: 高效求解 (稀疏) 矩阵方程



$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}$$

A L U

知乎 @二图妹



$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}$$

A L L^H

$A = A^H$
 $x^T A x > 0 \ (x \neq 0)$

知乎 @二图妹

矩阵分解

- 矩阵分解 (Decomposition)

- QR 分解: $A = QR$

- 要求: $A_{m \times n}$ 列满秩, $m \geq n$
- $Q_{m \times m}$ 为幺正矩阵, $R_{m \times n}$ 为上三角矩阵
- 非方阵时 R 的下半部分为零矩阵
- 求解: 施密特正交化、吉文斯变换或豪斯霍尔德变换
- 应用: 高效求解 (稠密) 矩阵方程; 分解形变梯度

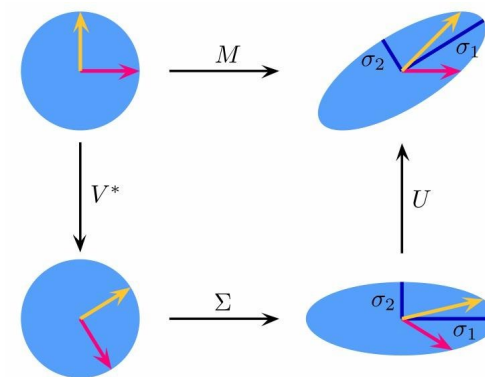
$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \dots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \dots & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \dots & \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & & & \\ & \blacksquare & & \\ & & \blacksquare & \\ & & & \blacksquare \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad Q \qquad \qquad \qquad R$

知乎 @二图妹

- 奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD): $A = U\Sigma V^H$

- 要求: $A_{m \times n}$
- $U_{m \times m}$ 为幺正矩阵, $V_{n \times n}$ 为幺正矩阵, $\Sigma_{m \times n}$ 为对角矩阵
- 对角矩阵中的元素称为奇异值, 均为非负
- 若 $m = n$, 则有 $\sqrt{A^H A} = \sqrt{V \Sigma^2 V^H} = V |\Sigma| V^H$
 - 当 A 为实对称正定矩阵时, 特征值与奇异值重合



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

知乎 @二图妹

向量与矩阵的范数

- 向量范数 (设 \mathbf{x} 维度为 $n \times 1$)
 - L_0 范数: $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{i=1}^n [x_i \neq 0]$
 - L_1 范数: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
 - L_2 范数: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (亦称为 Euclidean/Frobenius 范数)
 - L_p 范数: $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (p \geq 1)$
 - L_∞ 范数: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$
- ** L_0 范数不能满足正定性、正齐次性、三角不等式
 - 不能构成度量函数; 本质上不是范数
 - 不可导; 作为优化目标时性能非常低下

向量与矩阵的范数

- 矩阵范数 (设 \mathbf{A} 维度为 $m \times n$)

- 诱导范数 (induced norm)

- $\|\mathbf{A}\| = \max\{\|\mathbf{Ax}\|: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\} = \max\left\{\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \neq 0\right\}$
 - 由向量的 L_p 范数可以得到矩阵的诱导 L_p 范数 $\|\mathbf{A}\|_p = \max\left\{\frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \neq 0\right\}$
 - 几何意义: \mathbf{A} 作为线性变换所产生的对向量模长的最大放大倍数
 - 诱导范数的相容律: $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$
 - 证明: $\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \max\left\{\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \neq 0\right\} = \|\mathbf{A}\|$
 - $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (\mathbf{A} 的所有列向量的最大绝对值和)
 - $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A})$ (\mathbf{A} 的最大奇异值, 故该范数又称为谱范数)
 - $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (\mathbf{A} 的所有行向量的最大绝对值和)

** 作业: 如何证明?

向量与矩阵的范数

- 矩阵范数 (设 \mathbf{A} 维度为 $m \times n$)
 - 元素形式范数 (entrywise norm)
 - 将矩阵降维成向量并使用向量的 L_p 范数
 - $\|\mathbf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (和范数、 L_1 范数)
 - $\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \text{tr } \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (Frobenius 范数、Euclidean 范数、Schur 范数、 L_2 范数)
 - $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$ (最大范数、 L_∞ 范数)
 - 沙滕 (Schatten) 范数: 一种不随幺正变换而改变的范数
 - $\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\max\{m,n\}} \sigma_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (σ_i 为奇异值)
 - $\|\mathbf{A}\|_1$ 为奇异值之和, 称为核范数 (nuclear norm)
 - $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_F$
 - $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 等价于谱范数

矩阵求导

- 矩阵求导在图形学中的应用
 - 伴随方法中求物理量相对于初始参数的导数（深度学习中求输出相对于输入的导数）
 - 软体仿真中给定势能函数求应力张量（** 作业）

- 分子布局：分母转置

$$\bullet \frac{\partial \mathbf{f}_{2 \times 1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{3 \times 1}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

- 分母布局：分子转置

$$\bullet \frac{\partial \mathbf{f}_{2 \times 1}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{3 \times 1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

从本质上说， m 个变元的矩阵对 n 个变元的矩阵求导，所得结果为 $m \times n$ 个变元
所谓“布局”，决定了结果的变元按什么规则排列

矩阵求导

- 向量变元的实值标量函数 $f(\mathbf{x})$

- $\mathbf{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

- $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{n \times 1}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$

- 运算法则

- $\frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$

- $\frac{\partial [c_1 f(\mathbf{x}) + c_2 g(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = c_1 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + c_2 \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$

- $\frac{\partial [f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$

- $\frac{\partial \left[\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right]}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{g^2(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]$

- 常用公式

- 定义

- $\mathbf{a}_{n \times 1}, \mathbf{b}_{n \times 1}$ 为常数向量

- $\mathbf{A}_{n \times n}$ 为常数矩阵

- $\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$

- $\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$

- $\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x}$

- $\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$

矩阵求导

- 矩阵变元的实值标量函数 $f(\mathbf{X})$

- $\mathbf{X}_{m \times n} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$

- $$\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_{m \times n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}$$

- 运算法则

- $$\frac{\partial [c_1 f(\mathbf{X}) + c_2 g(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} = c_1 \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + c_2 \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

- $$\frac{\partial [f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} g(\mathbf{X}) + f(\mathbf{X}) \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

- $$\frac{\partial \left[\frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} \right]}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{g^2(\mathbf{X})} \left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} g(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]$$

- 常用公式

- $$\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

- $\mathbf{a}_{m \times 1}, \mathbf{b}_{n \times 1}$ 为常数向量

- $$\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T$$

- $\mathbf{a}_{n \times 1}, \mathbf{b}_{m \times 1}$ 为常数向量

- $$\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{X} + \mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{X}$$

- $\mathbf{a}_{m \times 1}, \mathbf{b}_{m \times 1}$ 为常数向量

- $$\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X} \mathbf{b} \mathbf{a}^T + \mathbf{X} \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

- $\mathbf{a}_{n \times 1}, \mathbf{b}_{n \times 1}$ 为常数向量

矩阵求导

- 矩阵函数的微分

- 向量变元的实值标量函数 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

- $$df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \right]$$

- 矩阵变元的实值标量函数 $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}_{m \times n} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$

- $$df(\mathbf{X}) = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}_{n \times m} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} & \cdots & dx_{1n} \\ dx_{21} & dx_{22} & \cdots & dx_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{m1} & dx_{m2} & \cdots & dx_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \right]$$

矩阵求导

- 矩阵函数的微分

- 矩阵变元的实矩阵函数 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}_{p \times q} = (f_{ij})_{i=1, j=1}^{p, q}$, $\mathbf{X}_{m \times n} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$

- $$d\mathbf{F}_{p \times q}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} df_{11}(\mathbf{X}) & df_{12}(\mathbf{X}) & \cdots & dx_{1q}(\mathbf{X}) \\ df_{21}(\mathbf{X}) & df_{22}(\mathbf{X}) & \cdots & dx_{2q}(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ df_{p1}(\mathbf{X}) & df_{p2}(\mathbf{X}) & \cdots & dx_{pq}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}_{p \times q}$$

- 常数微分法则 $d\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{0}_{m \times n}$
- 微分线性法则 $d(c_1\mathbf{F}(\mathbf{X}) + c_2\mathbf{G}(\mathbf{X})) = c_1d\mathbf{F}(\mathbf{X}) + c_2d\mathbf{G}(\mathbf{X})$
- 微分乘积法则 $d[\mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{G}(\mathbf{X})] = [d\mathbf{F}(\mathbf{X})]\mathbf{G}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}(\mathbf{X})[d\mathbf{G}(\mathbf{X})]$ (** 乘子顺序不能交换)
 - $d[\mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{G}(\mathbf{X})\mathbf{H}(\mathbf{X})] = [d\mathbf{F}(\mathbf{X})]\mathbf{G}(\mathbf{X})\mathbf{H}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}(\mathbf{X})[d\mathbf{G}(\mathbf{X})]\mathbf{H}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{G}(\mathbf{X})[d\mathbf{H}(\mathbf{X})]$
- 微分转置法则 $d\mathbf{F}_{p \times q}^T(\mathbf{X}) = [d\mathbf{F}_{p \times q}(\mathbf{X})]^T$

矩阵求导

- 利用矩阵微分求导

- $f(\mathbf{X}), \mathbf{X}_{m \times n} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$

- $$d\mathbf{X}_{m \times n} = \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} & \cdots & dx_{1n} \\ dx_{21} & dx_{22} & \cdots & dx_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{m1} & dx_{m2} & \cdots & dx_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- $$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}_{m \times n}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

- 分子布局

- $d(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}) = \mathbf{A}(d\mathbf{X})\mathbf{B}$

- $\mathbf{A}_{p \times m}, \mathbf{B}_{n \times q}$ 为常数矩阵

$$df(\mathbf{X}) = \text{tr} \left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} d\mathbf{X} \right]$$

矩阵求导

- 利用矩阵微分求导

- $f(\mathbf{X}), \mathbf{X}_{n \times n} = (x_{ij})_{i=1, j=1}^{n, n}$

- $|\mathbf{X}| = x_{i1}A_{i1} + x_{i2}A_{i2} + \cdots + x_{in}A_{in} \ (\forall i, A_{ij} \text{ 为代数余子式}) \Rightarrow \frac{\partial |\mathbf{X}|}{\partial x_{ij}} = A_{ij}$

- $\frac{\partial |\mathbf{X}|}{\partial \mathbf{X}^T} = \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (\mathbf{X}^* \text{ 即伴随矩阵, } \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^* / |\mathbf{X}|)$

- $df(\mathbf{X}) = \text{tr} \left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} d\mathbf{X} \right]$ 中代入 $f(\mathbf{X}) = |\mathbf{X}| \Rightarrow d|\mathbf{X}| = \text{tr}(|\mathbf{X}|\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X}) = |\mathbf{X}| \text{tr}(\mathbf{X}^{-1}d\mathbf{X})$

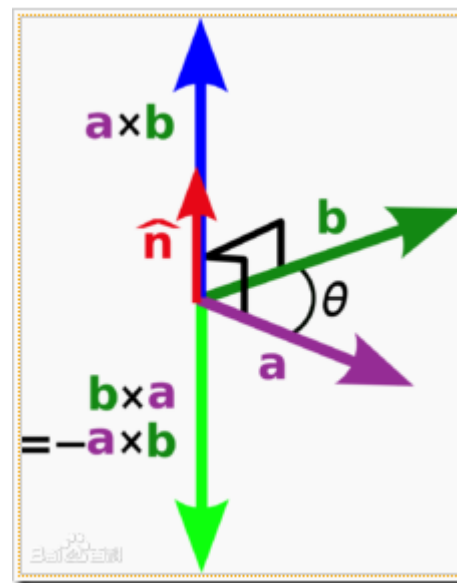
- $\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{E} \Rightarrow (d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}d(\mathbf{X}^{-1}) = \mathbf{0} \Rightarrow d(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}(d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$

- 例: 证明 $\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}$

- $d \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \text{tr}[(d\mathbf{X})^T \mathbf{X}] + \text{tr}[\mathbf{X}^T (d\mathbf{X})] = 2 \text{tr}[\mathbf{X}^T (d\mathbf{X})] = \text{tr}[(2\mathbf{X}^T) d\mathbf{X}]$

内积、外积、向量积

- 内积 (标量积)
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$
 - 向量的内积得到一个标量, 其值为向量模长之积乘以夹角余弦
- 叉积 (向量积)
 - $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
 - 向量的叉积得到一个向量
 - 方向垂直于原来的两个向量, 正反由右手螺旋定则确定
 - 大小为向量模长之积乘以夹角正弦
 - 二维 (伪): $(a_x, a_y) \times (b_x, b_y) = a_x b_y - b_x a_y$
 - 三维: $(a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$



内积、外积、向量积

- 叉积 (向量积)

- 叉乘矩阵

- 反对称矩阵 ($\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$)

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

- 外积 (张量积)

- $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^H$

- $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$ (实数域上的矩阵表示)

- 性质: $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

克罗内克 (Kronecker) 积

$$\mathbf{A}_{m \times n} \otimes \mathbf{B}_{p \times q} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

张量 (Tensor)

- 协变 (covariant) 与逆变 (contravariant)
 - 在向量空间中, 基底是人为给定的, 本质的东西是向量本身; 协/逆变是对分量而言的
 - 例: 三维欧氏空间中的位移 $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$
 - 如果 \mathbf{e}_i 的模长增大, 则坐标 x^i 将相应减小, 因此称 x^i 是“逆变”的
 - 如果 \mathbf{e}_i 的模长增大, 则 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ 的模长也会增大, 因此 $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ 是“协变”的
 - 在一般情况下 $x_i \neq x^i$, 可以定义一组新的基底 $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ 使得 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$
 - 克罗内克符号 $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$
 - 位移也可以用逆变基底展开: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3$
 - 爱因斯坦求和记号: $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i = x^i \mathbf{e}_i$
 - 逆变与协变分量的关系
 - $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i, x^j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow x_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^j) \cdot \mathbf{e}_i = x^j (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i) = x^j g_{ij}$
 - $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ 称为度规张量

张量 (Tensor)

- 从标量、矢量到张量
 - 已知：协变/逆变的概念是由于基底的选取而产生的
 - 标量 (0 阶张量) 没有“分量”的概念，因此是无所谓协变/逆变的
 - 矢量 (1 阶张量) 是协变/逆变基底的线性组合，因此只有一个“指标”决定协/逆变
 - 张量 (2 阶张量) 有两个指标
 - 克罗内克符号 δ_i^j 是 2 阶张量，1 阶逆变，1 阶协变，又称为 (1, 1) 阶混合张量
 - (2, 0) 张量满足 $T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{T}^{\alpha\beta}$
 - (1, 1) 张量满足 $T_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} \bar{T}_\beta^\alpha$ (指标运算的规律?)
 - 问题：矩阵是如何表示线性变换的？
 - 基底不变，更改坐标：矩阵元构成 (2, 0) 阶张量
 - 坐标不变，更改基底：矩阵元构成 (0, 2) 阶张量

张量的运算

- 并矢 (dyadic tensor)
 - 物理上对于两向量张量积的直观理解
 - 例: $\mathbf{x} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $\mathbf{y} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, 其并矢为 $\mathbf{xy} = ac\mathbf{ii} + ad\mathbf{ij} + bc\mathbf{ji} + bd\mathbf{jj}$
 - 与点积的结合律: $\mathbf{xy} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{yz} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$
 - 可以用张量积的矩阵形式证明
 - 分量形式: $t^{ij} = x^i y^j$, 是一个 $(2, 0)$ 阶张量
- 张量的并乘
 - (m, n) 阶张量与 (p, q) 阶张量并乘得到 $(m+p, n+q)$ 阶张量
 - 例: $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$
 - $t^{ij} = x^i y^j$
 - $\mathbf{T} = \mathbf{xy} = x^i \mathbf{e}_i y^j \mathbf{e}_j = x^i y^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ (不能交换基底顺序!)

张量的运算

- 张量的缩并

- 例: $\mathbf{T} = x^i y^j z_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k$

- 缩并 \mathbf{e}_j 和 \mathbf{e}^k : $x^i y^j z_k \mathbf{e}_i \delta_j^k = x^i y^j z_j \mathbf{e}_i$

- 缩并一般在一对协/逆基矢间展开, 利用克罗内克符号, 使张量阶数降低 2

- 缩并后的张量与被缩并基矢独立

- 三维空间中 $a_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j$ 的缩并结果为 0 阶张量 $a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$, 这是一个与基底选取无关的量 (迹、特征值)

- 张量的点积

- 两个张量 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的点积等于它们先联立再缩并的结果

- 显然对于高阶张量来说, 点积的形式有多种

- 当选择缩并 \mathbf{T} 的最后一个基矢和 \mathbf{S} 的第一个基矢时, 可以记为 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$

张量的运算

- 张量的点积

- 双点积：两个张量 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的双点积等于它们先联立再缩并两对基矢量的结果

- 并联式：先缩并 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的倒数第一个基矢；先缩并 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的倒数第二个基矢

- $\mathbf{T}:\mathbf{S} = (t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j):(s_{kl}\mathbf{e}^k\mathbf{e}^l) = t^{ij}s_{kl}\delta_i^k\delta_j^l$

- 串联式：先缩并 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的中间第一个基矢；先缩并 \mathbf{T}, \mathbf{S} 的中间第二个基矢

- $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot (s_{kl}\mathbf{e}^k\mathbf{e}^l) = t^{ij}s_{kl}\delta_j^k\delta_i^l$

- 实例

- $\mathbf{x}\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (x^i y^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (z_k \mathbf{e}^k) = x^i y^j z_k \mathbf{e}_i \delta_j^k = x^i y^j z_j \mathbf{e}_i = \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$

- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (u_i \mathbf{e}^i) \cdot \left(\left(\mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (u^k \mathbf{e}_k) \right) = u_i \delta_j^i \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \mathbf{e}_k = \left(u_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (u^k \mathbf{e}_k) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

- 当 \mathbf{u} 为速度时，上式是随体导数的重要部分

- $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 可以简记为 ∂_j , $\frac{\partial u^k}{\partial x^j}$ 可以记为 $u^{k,j}$

张量的运算

- 用张量表示叉积
 - 列维—奇维塔 (Levi-Civita) 符号 ϵ_{ijk}
 - $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = 1$; $\epsilon_{kji} = \epsilon_{ikj} = \epsilon_{jik} = -1$; 下标有重复时为 0
 - 性质: $\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m$; $\epsilon_{jmn}\epsilon^{imn} = 2\delta_j^i$; $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6$
 - 一般意义下该符号表达各指标的排列的奇偶性, 因此可用来定义行列式
 - $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x^i \mathbf{e}_i) \times (y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j \epsilon_{ij}^{k} \mathbf{e}_k$
 - 在单位正交基底底下可以忽略协/逆变, 记为 $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k = x_i y_j \epsilon_{ijk}$
 - 示例: 证明 $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$
 - $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = x^j y^k \epsilon_{jk}^{i} x_m y_n \epsilon_i^{mn} = x^j y^k x_m y_n (\delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m) = x^j y^k x_j y_k - x^j y^k x_k y_j$
 - $x^j y^k x_j y_k - x^j y^k x_k y_j = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$
- ** 张量的本质: 对偶线性空间 (略)

拓展阅读

- 教科书
 - Sheldon Axler. Linear Algebra Done Right. 2015.
 - Kaare Petersen and Michael Pedersen. The Matrix Cookbook. 2012.
 - 张贤达. 矩阵分析与应用 (第2版).清华大学出版社. 2013.
 - 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析 (第3版). 清华大学出版社. 2020.
 - T. 弗兰克尔. 物理几何学导论.世界图书出版公司. 2016. (The Geometry of Physics: An Introduction)
- 网站
 - <https://www.3blue1brown.com/>
 - <https://www.matrixcalculus.org/>

作业

- 作业概述
 - 7 道在图形学中有所应用的线性代数证明/计算题
- 作业要求
 - 用 LaTeX/Word 等工具以规范的公式排版书写
 - 字号、字体等格式不限
 - 导出为 PDF 文档
 - 满分为 100 分，达到 60 分为本次作业通过
 - 全部课程作业中通过 80% 者可获得结业认证（优秀者或许会有奖励）
- 作业提交
 - 注册在线课程系统
 - <http://cn.ces-alpha.org/course/register/GAMES001/>
 - 在 2024 年 4 月 16 日 00:00 前提交作业
 - 每次作业时限为五周