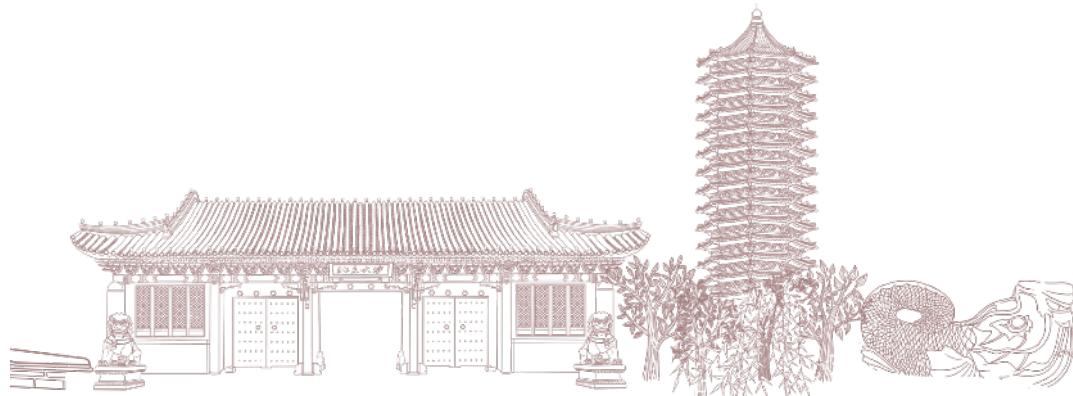




微分方程

Differential Equations

主讲人：倪星宇
2024 年 6 月 3 日



微分方程的基本概念



- 什么是微分方程
 - 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程
- 微分方程的分类
 - 常微分方程：未知函数是一元函数（导数为全导数）
 - 偏微分方程：未知函数是多元函数（导数为偏导数）
- 微分方程的求解方法
 - 通解法：根据特定微分方程的通解代值求特解
 - 分离变量法、格林函数法
 -
 - 数值法（计算机图形学研究的核心之一）

可分离变量的微分方程



- 标准形式: $\psi(y)dy = \phi(x)dx$
 - 等式两边积分即得方程的通解 $\int \psi(y)dy = \int \phi(x)dx + C$
 - 例: 求方程 $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$ 的通解
 - $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$
 - $\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx + C'$
 - $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln C$
 - $\ln(1+y^2) = \ln C(1+x^2)$
 - $y^2 = C(1+x^2) - 1$

一阶线性微分方程

- 标准形式: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
 - 若 $Q(x) \equiv 0$, 方程称为**齐次**的
 - 若 $Q(x) \neq 0$, 方程称为**非齐次**的
- 线性齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$
 - 解法 (分离变量)
 - $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$
 - $\ln|y| = - \int P(x)dx + C_1$
 - $y = C e^{- \int P(x)dx}$ ($C = \pm e^{C_1}$)
 - 应用: 体渲染

一阶线性微分方程

- 线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
 - 解法 (待定系数)
 - $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$
 - $y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]$
 - $y' + P(x)y = C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$
 - $\int C'(x)dx = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$
 - $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$
 - $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right]$
 - $Ce^{-\int P(x)dx}$ 为齐次方程的通解
 - $e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 为非齐次方程的特解

一阶非线性微分方程



- 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \ (n \neq 0, 1)$
 - 解法 (变量代换)
 - $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$
 - $\frac{1}{1-n} \frac{d(y^{1-n})}{dx} + P(x)(y^{1-n}) = Q(x)$
 - $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \ (z = y^{1-n})$
 - $y^{1-n} = z = e^{-(1-n) \int P(x)dx} \left[(1-n) \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C \right]$

高阶微分方程



- 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$

- 连续进行 n 次不定积分即得通解

- $y'' = f(x, y')$

- 设 $p = y'$, 则有 $p' = f(x, p)$

- 设一阶方程 $p' = f(x, p)$ 有通解 $p = p(x, C_1)$

- 积分 $y' = p(x, C_1)$ 得 $y = \int p(x, C_1) dx + C_2$

- $y'' = f(y, y')$

- 设 $p = y'$, 有 $y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

- $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$, 解得 $y' = p = \phi(y, C_1)$

- $\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2$

二阶微分方程

- 标准形式: $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$
 - 若 $f(x) \equiv 0$, 方程称为**齐次**的
 - 若 $f(x) \neq 0$, 方程称为**非齐次**的
- 二阶线性齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
 - 定理: 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是上述方程的两个线性无关的解
 - 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程的通解
 - 该定理可以拓展到 n 阶线性齐次方程中
- 二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
 - 定理: 若 $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, $Y(x)$ 是对应齐次方程的通解
 - 则 $y = y^* + Y$ 是非齐次方程的通解

二阶微分方程

- 二阶**常系数**齐次线性微分方程: $y'' + py' + qy = 0$

- 解法 (待定系数)

- 设 $y = e^{rx}$ 是方程的解, 则 $(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$
- $r^2 + pr + q = 0$ 为特征方程, $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 为特征根
- 判别式 $\Delta = p^2 - 4q$
 - > 0 : 得到两个线性无关的特解 $y_1 = e^{r_1 x}$ 和 $y_2 = e^{r_2 x}$
 - $= 0$: 得到一个特解 $y_1 = e^{-\frac{px}{2}}$, 设 $y_2 = u(x)e^{-\frac{px}{2}}$
 - $[u(x)r^2 + 2u'(x)r + u''(x)]e^{-\frac{px}{2}} + p[u(x)r + u'(x)]e^{-\frac{px}{2}} + qu(x)e^{-\frac{px}{2}} = 0$
 - $u''(x) + (2r + p)u'(x) + (r^2 + pr + q)u(x) = 0$
 - $u''(x) = 0$, 取 $u(x) = x$ 得 $y_2 = xe^{-\frac{px}{2}}$
 - < 0 : $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
 - $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

二阶微分方程

- 高阶常系数齐次线性微分方程: $y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}y' + P_ny = 0$
 - 特征方程 $r^n + P_1r^{n-1} + \cdots + P_{n-1}r + P_n = 0$
 - k 重根 r 对应于通解项 $(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})e^{rx}$
 - k 重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$ 对应于通解项
 - $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2x + \cdots + D_kx^{k-1}) \sin \beta x]$
- 二阶常系数非齐次线性微分方程: $y'' + py' + qy = f(x)$
 - $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ ($P_m(x)$ 表示最高 m 次的多项式, 下同)
 - $y^* = x^k R_m(x)e^{\lambda x}$
 - $R_m(x)$ 为某个 m 次多项式, $k = 0, 1, 2$ (λ 不是特征方程的根、是单根、是重根)
 - $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$
 - $y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x) \cos \omega x + S_m(x) \sin \omega x]$
 - $m = \max\{l, n\}, k = 0, 1$ ($\lambda \pm \omega i$ 不是特征方程的根、是共轭复根)

二阶偏微分方程

- 二元二阶线性偏微分方程

- $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$

- a, b, c, d, e, g, f 都是自变量 x, y 的函数，且二阶偏导数连续，其中 a, b, c 不同时为零

- 判别式 $\Delta = b^2 - ac$ 在不同点处可能取不同值

- $\Delta > 0 (\forall x, y)$: 方程为双曲型偏微分方程

- $\Delta = 0 (\forall x, y)$: 方程为抛物型偏微分方程

- $\Delta < 0 (\forall x, y)$: 方程为椭圆型偏微分方程

- 多元二阶线性偏微分方程

- $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$

- 构建二次型 $\mathcal{D} = \{a_{ij}\}$, 标准化后按系数的符号判断偏微分方程的类型

二阶偏微分方程



- 双曲型：波动方程

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (一维)

- 受迫振动: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho}$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$ (三维)

- 抛物型：热传导方程

- $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (一维)

- $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0$ (三维)

- 有源项: $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = f(x, y, z, t)$

- 椭圆型：拉普拉斯方程

- 可以看成热传导方程的稳定问题

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (一维)

- $\nabla^2 u = 0$ (三维)

- 泊松方程: $\nabla^2 u = f(x, y, z, t)$

- 有源项 (如电场方程中的电荷)

- 若波动方程中

- $u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{-i\omega t}$

- 波动方程变为亥姆霍兹方程

- $\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0$

分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
 - 初值条件： $t = 0$ 时 $u = \phi(x)$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
 - 分离变量：设 $u(x, t) = X(x)T(t)$
 - $X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) = 0$
 - $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$
 - 该式成立当且仅当等式两端均为常数，设为 $-\lambda$
 - $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
 - $T = A \sin \sqrt{\lambda} at + B \cos \sqrt{\lambda} at$
 - $X''(x) + \lambda X(x) = 0$
 - $X = C \sin \sqrt{\lambda} x + D \cos \sqrt{\lambda} x$

分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 (0 < x < l)$
 - 初值条件： $t = 0$ 时 $u = \phi(x)$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
 - 边界条件： $u(0, t) = u(l, t) = 0$
 - 分离变量：设 $u(x, t) = X(x)T(t) = (A \sin \sqrt{\lambda}at + B \cos \sqrt{\lambda}at)(C \sin \sqrt{\lambda}x + D \cos \sqrt{\lambda}x)$
 - 定解： $X(0) = X(l) = 0$
 - $C \sin 0 + D \cos 0 = D = 0$
 - $C \sin \sqrt{\lambda}l = 0$
 - $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$
 - $u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l}x \left(A_n \sin \frac{an\pi}{l}t + B_n \cos \frac{an\pi}{l}t\right)$
 - $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$
 - 考虑 ϕ 与 ψ , 使用傅里叶展开决定 A_n, B_n

球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程

- $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$
- 分离变量: $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$
 - $Y \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = 0$
 - $-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -\alpha$
- 球谐函数方程: $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \alpha Y = 0$
 - 分离变量: $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$
 - $\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha \Theta \Phi = 0$
 - $\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \alpha = 0$

球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程

- 球谐函数方程: $\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \alpha Y = 0$
- $\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha = -\frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{\beta}{\sin^2 \theta}$
 - $\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \beta \Phi = 0$
 - $\Phi_1 = \cos \sqrt{\beta} \phi, \quad \Phi_2 = \sin \sqrt{\beta} \phi$
 - 由 $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ 得 $\beta = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)
 - $\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \alpha = \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$
 - $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (x = \cos \theta, \quad y = \Phi)$
 - $x = \pm 1$ 时 y 有界 (自然边界条件)
 - 通过泰勒展开可解得 $\alpha = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$)

球谐函数

- 球坐标系下拉普拉斯方程的解: $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$
 - 径向方程: $r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$
 - $R = A_l^m r^l + B_l^m \frac{1}{r^{l+1}}$
 - $\Phi_1 = \cos m\phi, \quad \Phi_2 = \sin m\phi$
 - 连带勒让德方程: $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$
 - $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$
 - 其解记为 P_l^m , 称为连带勒让德多项式
 - 归一化的复数球谐函数 ($\int Y_l^m Y_k^n d\Omega = \delta_{kl} \delta_{mn}$)
 - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$

球谐函数



- 归一化的球谐函数 ($\int Y_l^m Y_k^n d\Omega = \delta_{kl} \delta_{mn}, m, n \in \mathbb{Z}$)

- $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos \theta) \cos \phi \quad (m > 0)$

- $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos \theta) \sin \phi \quad (m < 0)$

- $Y_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos \theta) \quad (m = 0)$

- 勒让德方程: $m = 0$ 的特殊情况 (解函数绕极轴旋转对称)

- $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l+1)y = 0$

- 其解 $P_l(x)$ 称为 l 阶勒让德多项式

球谐函数

- 勒让德多项式的计算

- 级数表示: $P_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$
- 微分表示: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$

- 勒让德多项式的性质

- $P_l(x)$ 的 l 个零点都是实的, 且在 $(-1,1)$ 之内; $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$
- $\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = N_l^2 \delta_{nl}; N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

- 球谐函数的应用

- 作为基底展开球面函数 (用若干系数近似表达环境光照射图)

格林函数法

- 例：给定电荷密度分布，求电场强度
 - 电场高斯定理的积分形式： $\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$
 - q 为区域 V 中的电荷总量， ϵ_0 是一个物理常量
 - 电场高斯定理的微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 - ρ 为电荷密度
 - 考虑下列问题：如何求 \mathbf{r}_0 处大小为 q 的点电荷的电势与电场
 - $E(\mathbf{r}) = k \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$ (高中物理)
 - $\phi(\mathbf{r}) = k \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ (大学物理)
 - 问题：点电荷处的电荷密度是多少？

格林函数法

- 狄拉克函数

- $\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases}$

- $\int_V \delta(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V \\ 0, & \mathbf{r} \notin V \end{cases}$

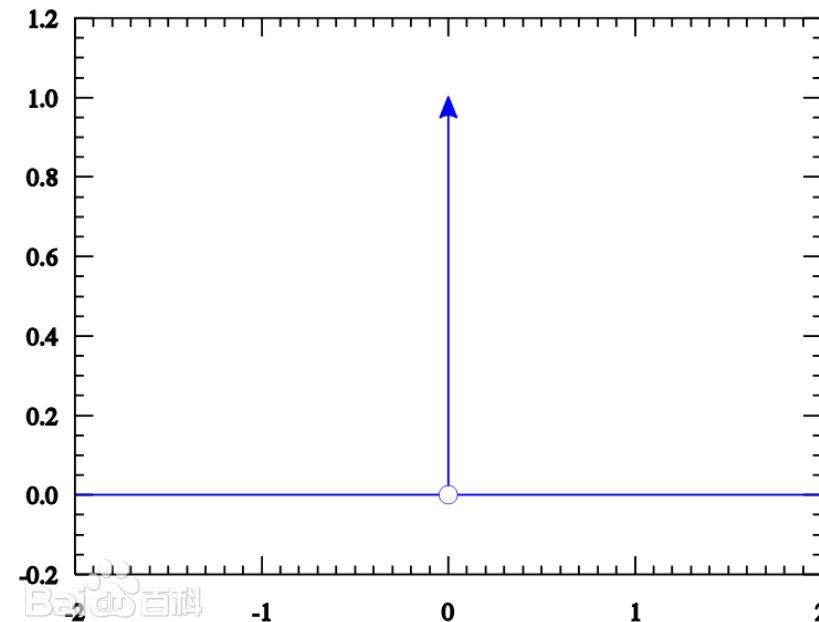
- 点电荷的密度: $q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$

- $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

- $\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$

- 系拉普拉斯方程



格林函数法

- 泊松方程的格林函数解

- $\nabla^2 \phi = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$
- $\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$

- $\nabla^2 \phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$
- $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

- $u = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ 是泊松方程 $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 在无穷远边界条件下的格林函数解

- 又称为泊松方程的基本解

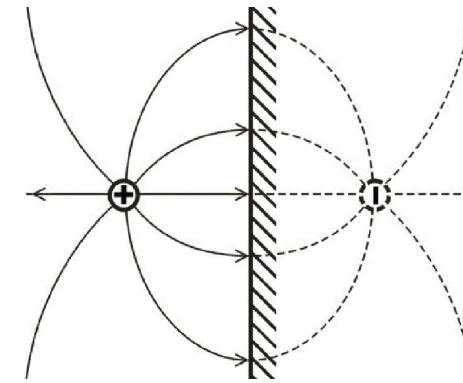
- 无穷远边界条件: $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} u = 0$

- 由叠加原理得无穷远边界条件下 $\nabla^2 u = f$ 的解 (联想: 给定电荷密度分布求电势)

- $u = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$

格林函数法

- 非无穷远边界条件的格林函数
 - 静电学中的电像法
 - 例：空间中有无穷大平面满足电势为零，左端有一点电荷
 - $\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\varepsilon_0}$, $\phi|_{x=0} = 0$
 - 上述方程的格林函数解为 $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-(x_0,y_0,z_0)|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-(-x_0,y_0,z_0)|}$
 - 等同于电荷的电势加上右侧镜像位置的异号电荷产生的电势
 - 类似地，可以利用格林函数+叠加原理求解方程
 - 二维情形下的泊松方程基本解
 - 注意上述形式只适用于三维
 - 在二维中 $u = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 是泊松方程 $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 的无穷远边界条件解



格林函数法

- 格林恒等式

- 设区域 V 内有连续可微的标量函数场 ϕ, ψ
- 格林第一恒等式

- $\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dA$

- 格林第二恒等式

- $\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dA$

- 格林第三恒等式

- 设 $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 是泊松方程的基本解, $\psi(\mathbf{r})$ 在区域内满足拉普拉斯方程

- $\psi(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \left(\psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dA'$

- 该方程构成了边界元法的基础

微分方程的数值解

- 常微分方程 $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
 - 欧拉法 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
 - $h = x_{i+1} - x_i$
 - 一阶精度
 - 高阶方法：隆格—库塔法等
- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例

$$\begin{aligned} \bullet \quad & (\nabla^2 u)_{i,j} = \frac{\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{\Delta x^2} \\ \bullet \quad & \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{\Delta x^2} = 0 \\ \bullet \quad & u_{ij} = \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}}{4} \end{aligned}$$

微分方程的数值解

- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例

- $$u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{4}$$

- 雅可比迭代

- $$u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n}{4}$$

- 高斯—赛德尔迭代

- $$u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{4}$$

- 上述解法的分类：有限差分离散化下的点迭代法
- 其它离散化方式：有限体积法、有限元法、边界元法
- 其它线性系统求解方法：共轭梯度下降法、多重网格法