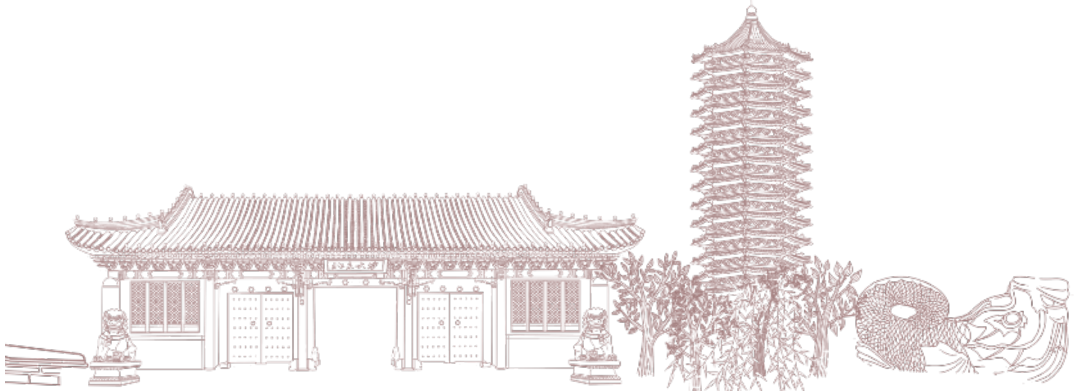
场论初步

Field Theory

主讲人：倪星宇

2024 年 5 月 20 日



什么是“场”

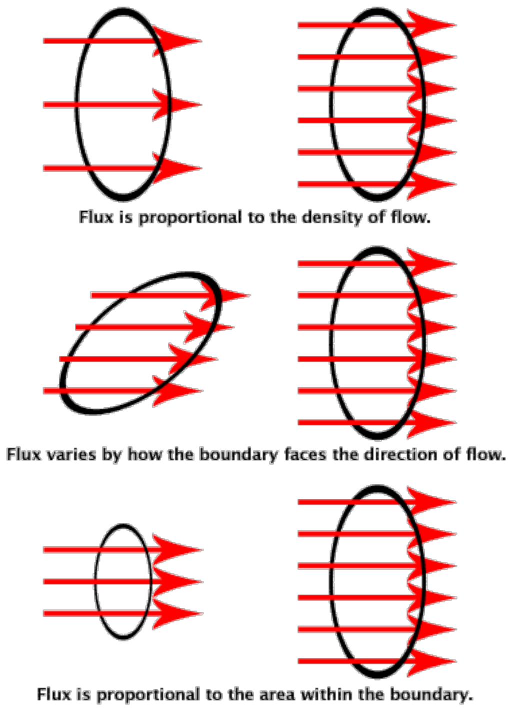
- 场 (Field) 与场函数 (Field function)
  - 场
    - 物理学中把某个**物理量**在空间的一个区域内**的分布**称为场
    - 如温度场、密度场、引力场、电场、磁场等
  - 场函数
    - 一种特殊的多元函数，其自变量为空间中的位置，因变量一般为标量或向量
    - 二维场函数：$f(\boldsymbol{r}) = f(x, y)$
    - 三维场函数：$f(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)$
- 场论初步
  - 更多是一种数学而非物理的概念
  - ≈ 矢量分析

标量场的梯度

- 方向导数与梯度 (Gradient)
  - 考察对象：标量场 $f(x, y, z)$
  - 方向导数
    - 给定某个方向 $\boldsymbol{d} = \left(d_x, d_y, d_z\right)$
    - $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{d}}(x, y, z) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x+td_x, y+td_y, z+td_z\right) - f(x,y,z)}{t} = d_x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + d_y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + d_z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$
    - $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{d}}(x, y, z) = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(x, y, z)$
  - 梯度：$\mathrm{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
    - 性质：沿梯度方向的方向导数最大（梯度方向是导数增长最快的方向）
      - $(a, b, c) \cdot \boldsymbol{\nabla} f \le \frac{(\boldsymbol{\nabla} f)^2}{|\boldsymbol{\nabla} f|} \left(a^2 + b^2 + c^2 = 1\right)$
    - $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ 系向量微分算子，称为劈形算符 (nabla operator 或 del operator)

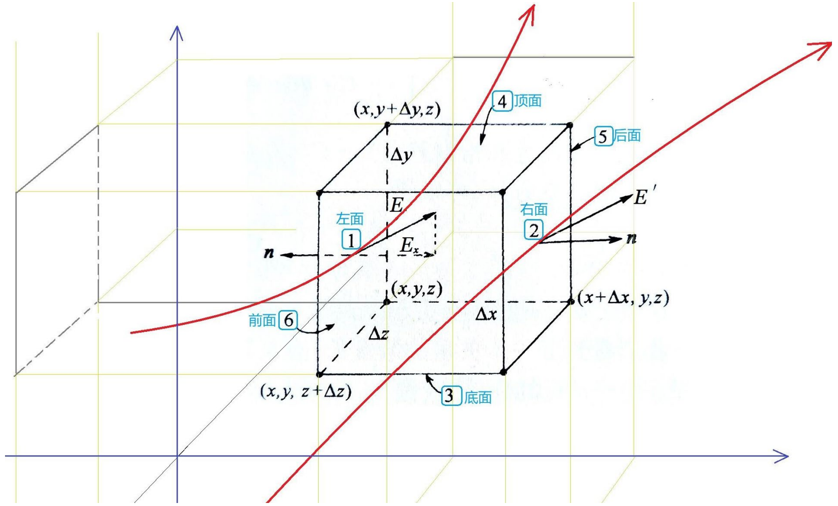
向量场的通量

- 通量 (Flux)
  - 例：在流体速度场中取一有向曲面 S，求单位时间内穿过该曲面的流体体积
    - 如果速度始终垂直于曲面，则 $V=\iint_S |\boldsymbol{u}|\mathrm{d}A$
    - 如果速度与曲面法向之间有夹角，则 $V=\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$
  - 物理中的常见通量
    - 光通量：每单位时间到达、离开或通过曲面的光强度
    - 磁感应强度 (magnetic induction density)
      - 亦称 magnetic flux density
      - 磁感线的"条数"
  - 源 (source) 与汇 (sink)
    - "汇"可视为负"源"
    - 对某物理场给定一闭合曲面，若其中没有"源"，则通量必为零
      - 流进曲面的"水"总是会流出，除非水在该封闭曲面内出现或消失



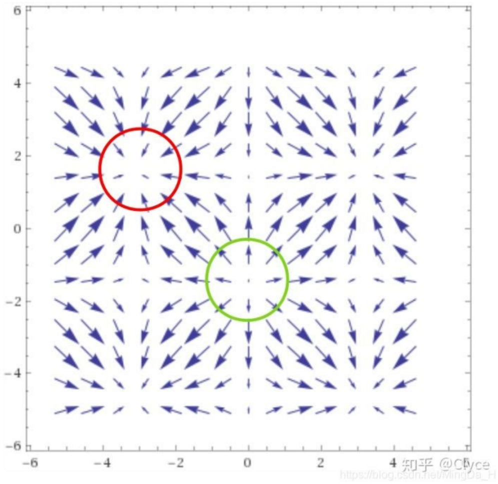
向量场的散度

- 散度 (Divergence)
  - 考察对象：向量场 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\left(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z)\right)$
  - $\operatorname{div}\boldsymbol{f}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\oiint_{\partial V}\boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\Delta V}$
    - ΔV 系封闭曲面所包含的体积，此处体积趋于零要求在任何方向上的直径均一致趋于零
    - 向量场 $\boldsymbol{f}$ 在某点处的散度是该点附近包含该点的无穷小封闭曲面的平均通量
  - $\operatorname{div}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}=\dfrac{\partial f_x}{\partial x}+\dfrac{\partial f_y}{\partial y}+\dfrac{\partial f_z}{\partial z}$
    - 当散度存在时，以任何形状将 ΔV 收缩到 0 是一致的
    - 因此不妨将 ΔV 取为立方体，得到上述等式
    - $\boldsymbol{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$，$\boldsymbol{f}=(f_x,f_y,f_z)$
      - 表现为“点乘”的形式



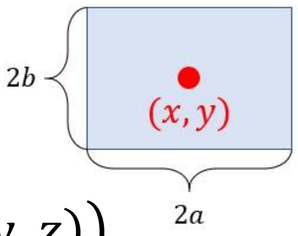
向量场的散度

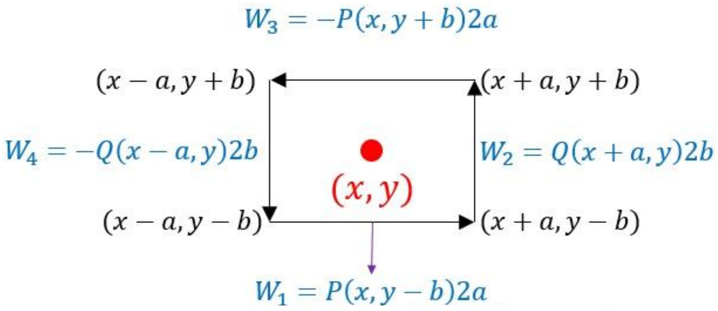
- 散度的相对大小
  - 无散 (divergence free)：所度量的点附近没有源
    - $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$，场线不在该点处产生或消失；对于流场而言意味着体积不变
    - 有散与之相反；对于流场而言意味着该点附近有体积增加或减少
- 高斯散度定理
  - $\oiint_{\partial V} (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}A = \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{f}) \mathrm{d}V$
  - 理解：考虑散度的定义（与通量之间的关系）
  - 案例
    - 静电场、静磁场中的高斯定理
    - 流场不可压条件的推导



向量场的环量

- 环量 (Circulation)
  - 亦称为涡量 (vortex)
  - 例：在流体速度场中取一闭合曲线，求流体沿该曲线旋转的强度
    - 如果速度始终平行于曲线切向，则 $\Gamma = \oint_L |\boldsymbol{u}| \mathrm{d}l$
    - 如果速度与曲线切向之间有夹角，则 $\Gamma = \oint_L (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathrm{d}l = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

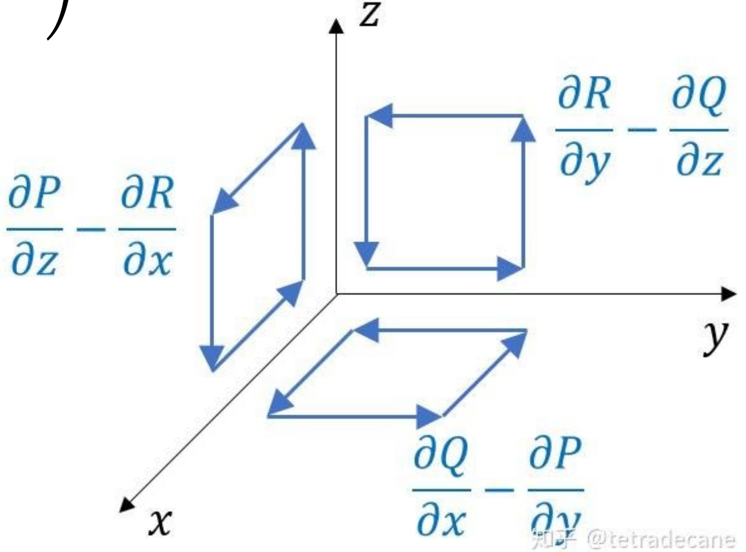




- 二维旋度 (Rotation, Curl)
  - 考察对象：向量场 $\boldsymbol{f}(x, y) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z)\big)$
  - $\operatorname{curl} \boldsymbol{f} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\oint_{\partial S} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\oint_{\partial S} (P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y)}{\Delta S} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$

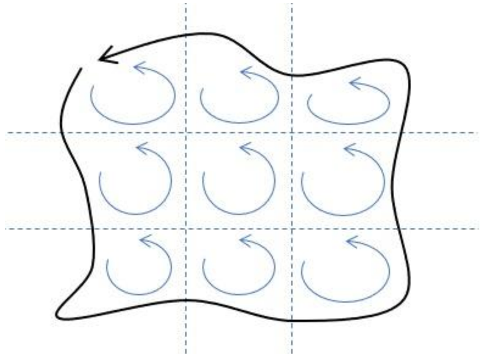
向量场的旋度

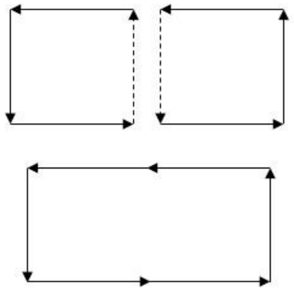
- 旋度 (Rotation, Curl)
  - 考察对象：向量场 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$
  - $\operatorname{curl}\boldsymbol{f}=\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\left(\lim_{\Delta S_x\to 0}\frac{\oint_{\partial S_x}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_x},\lim_{\Delta S_y\to 0}\frac{\oint_{\partial S_y}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_y},\lim_{\Delta S_z\to 0}\frac{\oint_{\partial S_z}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_z}\right)$
    - S_x,S_y,S_z 分别表示法向量沿 x,y,z 方向的面元
  - $\operatorname{curl}\boldsymbol{f}=\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$
    - $\boldsymbol{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$
    - 形如 $\operatorname{curl}\boldsymbol{f}=\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f}$



向量场的旋度

- 格林公式（二维）
  - $\oint_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - 理解：考虑二维旋度的定义（与环量之间的关系）
  - “格林公式”
    - 注意与微分方程中的格林公式/恒等式相区分
- 斯托克斯旋度定理（三维）
  - $\oint_{\partial S}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}l=\iint_S\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}A$
  - 系格林公式在三维中的推广
    - 将斯托克斯公式在 xoy 平面投影即得格林公式





矢量微分恒等式

- 补充定义
  - 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$
    - 标量场：$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$
    - 向量场：$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}$（注意向量的梯度是二阶张量）
    - 直角坐标系下 $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$
- 单一场函数恒等式
  - $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi})$
  - $\nabla \times \nabla \phi = 0$
  - $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = 0$

矢量微分恒等式

- 多场函数恒等式
  - $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
  - $\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g} \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f}$
  - $\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{f}) = \phi(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f} \cdot \nabla\phi$
  - $\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g})$
  - $\nabla \times (\phi\boldsymbol{f}) = \phi(\nabla \times \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f} \times \nabla\phi$
  - $\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{g}(\nabla \cdot \boldsymbol{f})$

位矢：特殊的场函数

- 位置矢量 (Position vector)
  - $\vec{r}(x,y,z)=\boldsymbol{r}(x,y,z)=(x,y,z)$
  - 位矢场的微分运算
    - $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3,\ \ \vec{\nabla}r=\frac{\vec{r}}{r},\ \ \vec{\nabla}\times\vec{r}=\vec{0}$
    - $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3},\ \ \vec{\nabla}f(r)=f'(r)\frac{\vec{r}}{r},\ \ \vec{\nabla}^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(r)$
    - $\vec{\nabla}\times(f(r)\vec{r})=0,\ \ \vec{\nabla}\vec{r}=\vec{\vec{I}},\ \ \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\vec{a}$
    - $\vec{\nabla}\mathrm{e}^{i\vec{a}\cdot\vec{r}}=i\vec{a}\mathrm{e}^{i\vec{a}\cdot\vec{r}}$

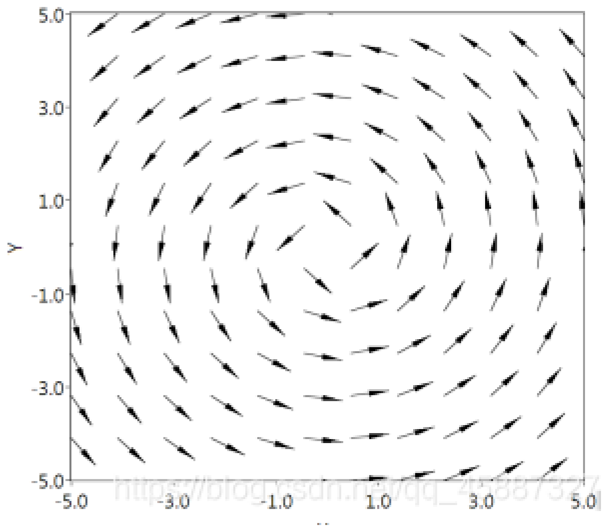
亥姆霍兹分解

- 矢量场的亥姆霍兹分解 (Helmholtz decomposition)
  - 引理 1：无源场（无散场）
    - 有势必无散：若存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使 $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$，则 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$
    - 无散必有势：若 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，则必存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使 $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$（如何证明？）
      - $\boldsymbol{\psi}$ 不唯一，所有满足条件的 $\boldsymbol{\psi}$ 之间相差 $\nabla\phi$（ϕ 为任意标量场）

(a) The field $\mathbf{F} = -y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}}$ is plotted on the right.
Simple calculations reveal:

Curling Nature:	$\nabla \times \mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{k}}$
Diverging Nature:	$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$
Laplacian Nature:	$\Phi = \text{undefined}$

This is a transverse (curling) field.



亥姆霍兹分解

- 矢量场的亥姆霍兹分解 (Helmholtz decomposition)
  - 引理 2：无旋场
    - 有势必无旋：若存在标量势函数 ϕ 使 $\boldsymbol{A}=\nabla\phi$，则 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$
    - 无旋必有势：若 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，则必存在标量势函数 ϕ 使 $\boldsymbol{A}=\nabla\phi$（如何证明？）
      - ϕ 不唯一，所有满足条件的 ϕ 之间相差常数

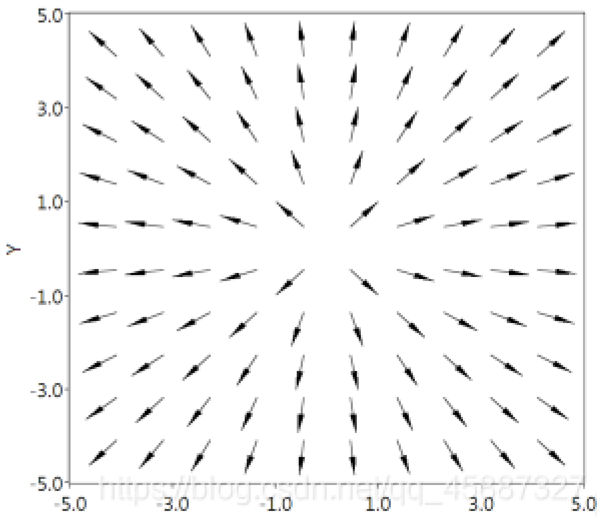
(b) The field $\mathbf{F}=x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}$ is plotted on the right.
Simple calculations reveal:

Curling Nature: $\nabla\times\mathbf{F}=0$

Diverging Nature: $\nabla\cdot\mathbf{F}=2$

Laplacian Nature: $\Phi=$ undefined

This is a longitudinal (diverging) field.



亥姆霍兹分解

- 矢量场的亥姆霍兹分解 (Helmholtz decomposition)
  - 推论：无旋无源场
    - 若 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$，则既存在标量势函数 ϕ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\phi$ 也存在矢量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi}$
    - 故显然有以下恒等式
      - $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi=0$ (拉普拉斯方程), $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0}$ (双旋度方程), 以及 $\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi}$

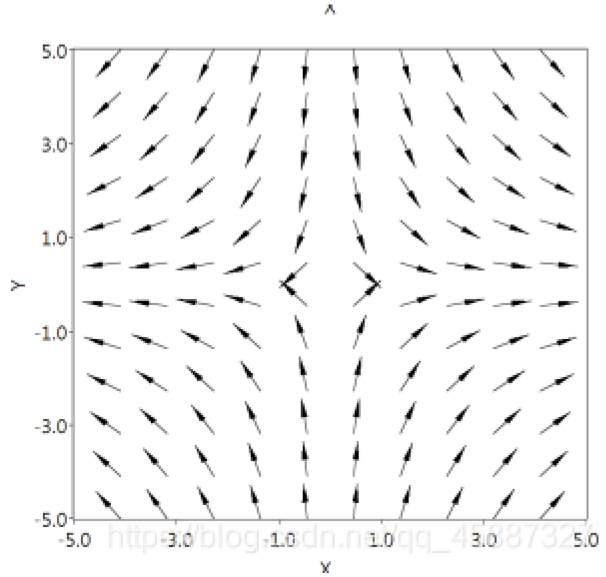
(c) The field $\mathbf{F}=x\,\hat{\mathbf{i}}-y\,\hat{\mathbf{j}}$ is plotted on the right.
Simple calculations reveal:

Curling Nature: $\nabla\times\mathbf{F}=0$

Diverging Nature: $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$

Laplacian Nature: $\Phi=-\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$

This is a purely Laplacian field.



亥姆霍兹分解

- 矢量场的亥姆霍兹分解 (Helmholtz decomposition)
  - 结论：有旋有源场
    - 对于一般的矢量场，其有可能既有旋又有源，此时可以将其分解为无旋场与无源场的叠加
    - $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_P + \boldsymbol{A}_R = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$
      - $\nabla\times\boldsymbol{A}_P = \mathbf{0},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}_R = 0$

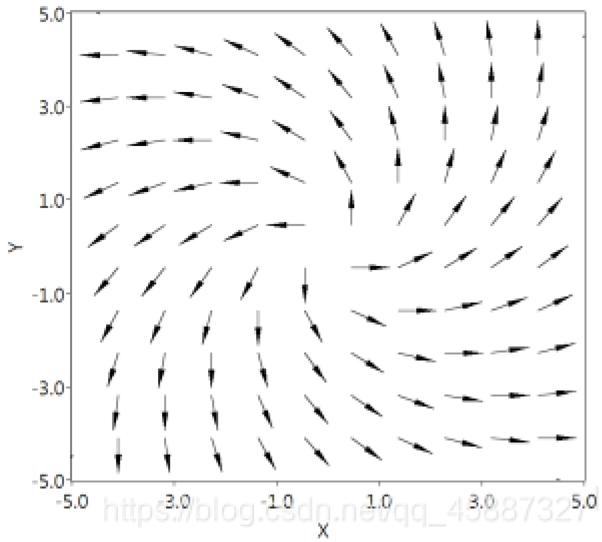
(d) The field $\mathbf{F}=(x-y)\hat{\mathbf{i}}+(x+y)\hat{\mathbf{j}}$ is plotted on the right. Simple calculations reveal:

Curling Nature: $\nabla\times\mathbf{F}=2\hat{\mathbf{k}}$

Diverging Nature: $\nabla\cdot\mathbf{F}=2$

Laplacian Nature: $\Phi=$ undefined

This is a transverse *and* longitudinal field.



亥姆霍兹分解

- 矢量场的亥姆霍兹分解 (Helmholtz decomposition)
  - 存在性证明
    - 方程 $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 有解，即 $\nabla\cdot(\nabla\phi - \boldsymbol{A}) = 0$
    - 由引理 1 知存在 $\boldsymbol{\psi}$ 使 $\nabla\phi - \boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$，证毕
  - 唯一性证明
    - 若 $\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$，则 $\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0$，即 $\phi_1 - \phi_2 = c$ (f 为任意常数)
      - $\boldsymbol{A}_P = \nabla\phi_1 = \nabla\phi_2$，是唯一的
    - 由 $\boldsymbol{A}_R = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_P$ 得分解唯一
      - 但由引理 1 知 $\boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_2 = \nabla f$ (f 为任意标量场)
  - 分解的规范化
    - 令 $\nabla^2 f = \nabla\cdot\boldsymbol{\psi} - g$，解得 f
      - g 取 0 时称为洛伦兹规范
    - $\boldsymbol{\psi} \leftarrow \boldsymbol{\psi} - \nabla f$

外微分

- 积分的定向
  - 线积分的定向
    - $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
  - 面积分的定向
    - $\iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{S'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
    - $\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \frac{\partial(x,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$
    - $\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - 微分的乘积
    - 普通的微分乘积应具有交换律，而在重积分中，积分交换会改变符号

外微分

- 外积运算（积分中的微分乘积）
  - $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$，$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$，$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$
  - $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$
  - $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$
- 使用外积运算导出面积分定向
  - $\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$
  - $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

外微分

- 考察 $\mathbb{R}^3$ 中的被积项（外微分形式）
  - 0 次形式：$\omega^0 = f(x, y, z)$
  - 1 次形式：$\omega^1 = X(x, y, z)\mathrm{d}x + Y(x, y, z)\mathrm{d}y + Z(x, y, z)\mathrm{d}z$
    - 例：环量积分 $\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$
  - 2 次形式：$\omega^2 = P(x, y, z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
    - 例：通量积分 $\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$
  - 3 次形式：$\omega^3 = \rho(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$
    - 例：体积分 $f\mathrm{d}V$
  - 向量的外微分形式：$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$，$\boldsymbol{B} = \left(B_x, B_y, B_z\right)$
    - $\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z$
    - $\omega_{\boldsymbol{A}}^2 = A_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
    - $\omega_{\boldsymbol{A}}^1 \wedge \omega_{\boldsymbol{B}}^1 = \omega_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}^2$ (cross product)，$\omega_{\boldsymbol{A}}^1 \wedge \omega_{\boldsymbol{B}}^2 = \omega_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}^3$ (dot product)

外微分

- 外微分形式的外微分
  - $\mathrm{d}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$
    - 0 次形式的外微分产生 1 次形式（与高等数学中的定义相同）
    - 此处的 1 次形式是向量 ∇f 生成的 1 次形式，即 $\mathrm{d}\omega_f^0=\omega_{\nabla f}^1$
  - $\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{A}}^1=\mathrm{d}\left[A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z\right]=\mathrm{d}A_x\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}A_y\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}A_z\wedge\mathrm{d}z=\omega_{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}}^2$
    - 1 次形式的外微分产生对应向量场之旋度的 2 次形式
    - 注意此处的分配律与结合律
  - $\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{A}}^2=\mathrm{d}\left[A_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+A_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+A_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right]=\omega_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}}^3$
    - 2 次形式的外微分产生对应向量场之散度的 3 次形式
  - Poincaré 引理：对于任意形式的外微分，有 $\mathrm{d}^2\omega=0$
    - 逆定理：对于 p 次形式 ω，若 $\mathrm{d}\omega=0$，则必存在 $p-1$ 次形式 α 使得 $\mathrm{d}\alpha=\omega$

外微分

- 利用外微分证明矢量分析恒等式
  - $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) = 0$
    - $\mathrm{d}^2 = 0$
  - $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{g})$
    - $\omega^2_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{g}}$
    - $\mathrm{d}\left(\omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{g}}\right) = \mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{g}} + \omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{g}} = \omega^2_{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f}} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{g}} + \omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \omega^2_{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}}$
    - $\omega^3_{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})} = \mathrm{d}\omega^2_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \omega^2_{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f}} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{g}} + \omega^1_{\boldsymbol{f}} \wedge \omega^2_{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}} = \omega^3_{\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{f})} - \omega^3_{\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g})}$
- 外微分形式的斯托克斯公式
  - $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$
    - 牛顿—莱布尼茨公式、高斯公式、格林公式、斯托克斯公式的统一形式