

GAMES 102 - 作业 6

彭博

December 5, 2020

- 本次作业实现极小曲面的局部迭代法，主要流程包括寻找非封闭三角网格曲面的边界、每个顶点更新坐标、以及迭代给定次数或迭代至收敛等步骤。其中迭代更新顶点坐标公式为：

$$P_{\text{new}} \leftarrow P_{\text{old}} + \lambda H\mathbf{n} \quad (1)$$

$$H\mathbf{n} = \frac{1}{4A_m} \sum_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(P_{\text{old}} - Q_j) \quad (2)$$

其中 P_{old} , P_{new} 为更新前后的网格内部顶点； λ 为迭代步长； $H\mathbf{n}$ 为顶点对应的离散平均曲率向量； Q_j 为 P_{old} 相邻顶点， $P_{\text{old}}, Q_j, \alpha_j, \beta_j$ 关系可参见 Fig.1； A_m 为顶点 P 对应的面积，计算方法可参考 Fig.2[1]。

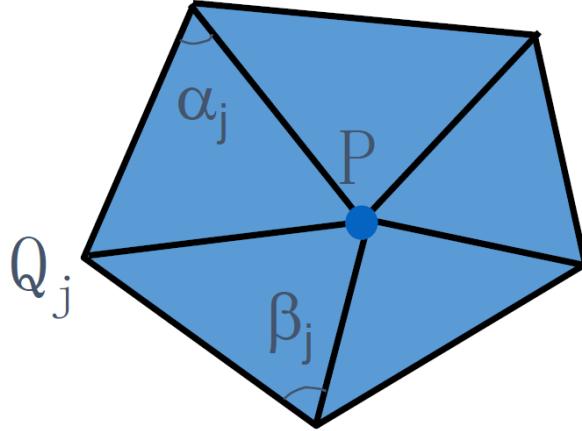


Figure 1: 顶点关系

```
 $\mathcal{A}_{\text{Mixed}} = 0$ 
For each triangle  $T$  from the 1-ring neighborhood of  $\mathbf{x}$ 
    If  $T$  is non-obtuse,      // Voronoi safe
        // Add Voronoi formula (see Section 3.3)
         $\mathcal{A}_{\text{Mixed}} +=$  Voronoi region of  $\mathbf{x}$  in  $T$ 
    Else                      // Voronoi inappropriate
        // Add either  $\text{area}(T)/4$  or  $\text{area}(T)/2$ 
        If the angle of  $T$  at  $\mathbf{x}$  is obtuse
             $\mathcal{A}_{\text{Mixed}} +=$   $\text{area}(T)/2$ 
        Else
             $\mathcal{A}_{\text{Mixed}} +=$   $\text{area}(T)/4$ 
```

Figure 2: Voronoi 面积计算方法

通过调整迭代步长 λ 以及迭代步数可以得到不同的极小曲面如 Fig.3 - Fig.8 所示。从以上极小曲面可以发现随着迭代步长 λ 以及迭代步数的增加原始球面会不断趋近于平面，同时参数选择不合理时可能会导致迭代后曲面上出现一些奇异点。

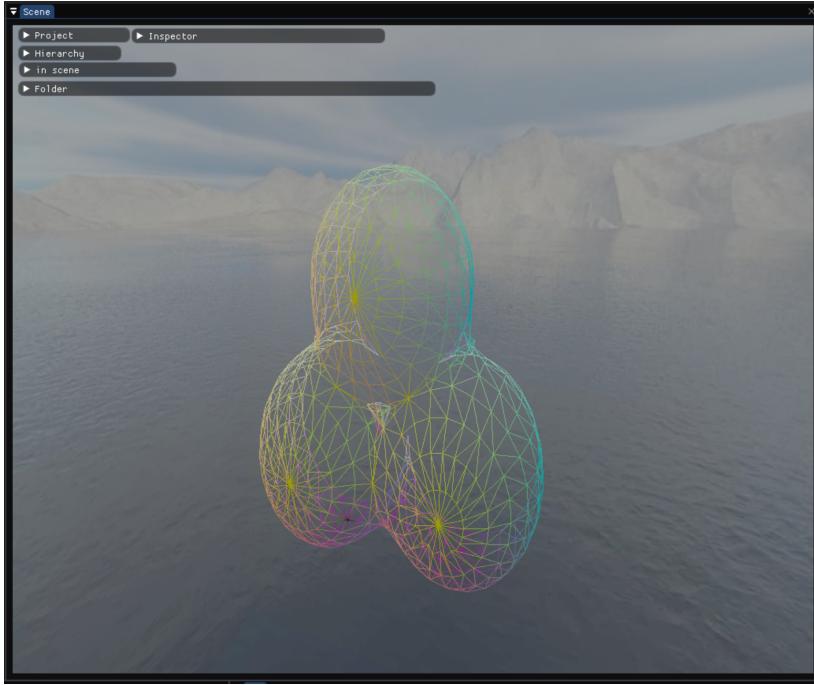


Figure 3: 极小曲面 ($\lambda = 0.1, N = 10$)

此外本次作业还利用离散平均曲率和离散高斯曲率进行了可视化，对应计算公式为：

$$K(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2A_m} \sum_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3)$$

$$\kappa_G(\mathbf{x}_i) = (2\pi - \sum_j \theta_j)/A_m \quad (4)$$

其中 $K(\mathbf{x}_i)$ 为顶点平均曲率， $\kappa_G(\mathbf{x}_i)$ 为顶点高斯曲率。可视化结果可参考 Fig.9 - Fig.10，可视化后颜色越亮的区域表示该处的曲率越大。

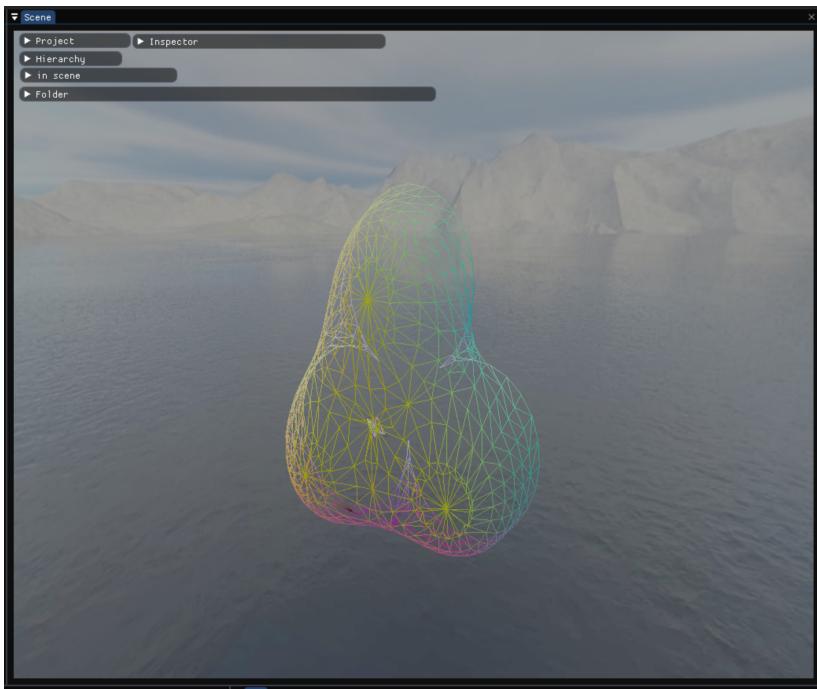


Figure 4: 极小曲面 ($\lambda = 0.1, N = 50$)

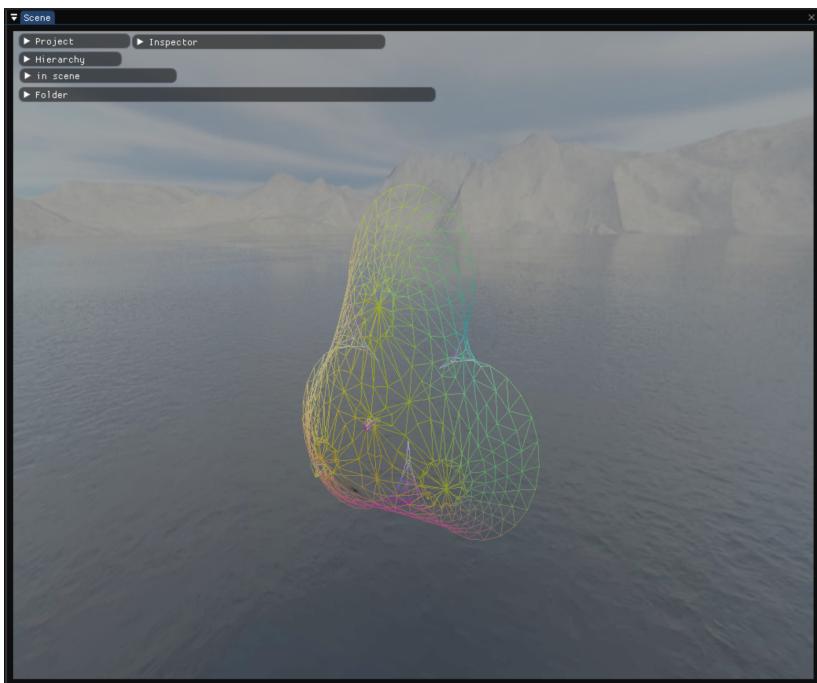


Figure 5: 极小曲面 ($\lambda = 0.1, N = 100$)

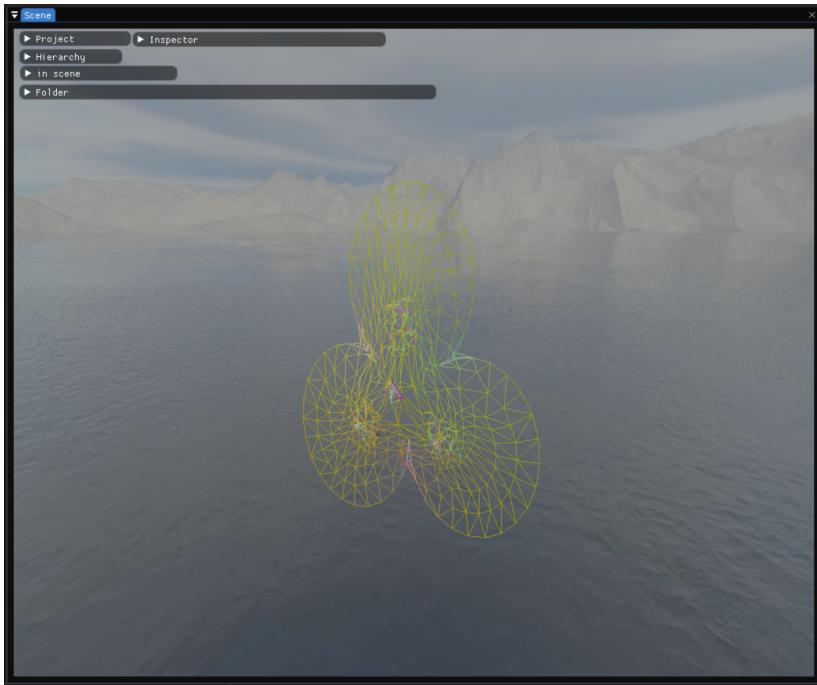


Figure 6: 极小曲面 ($\lambda = 0.1, N = 200$)

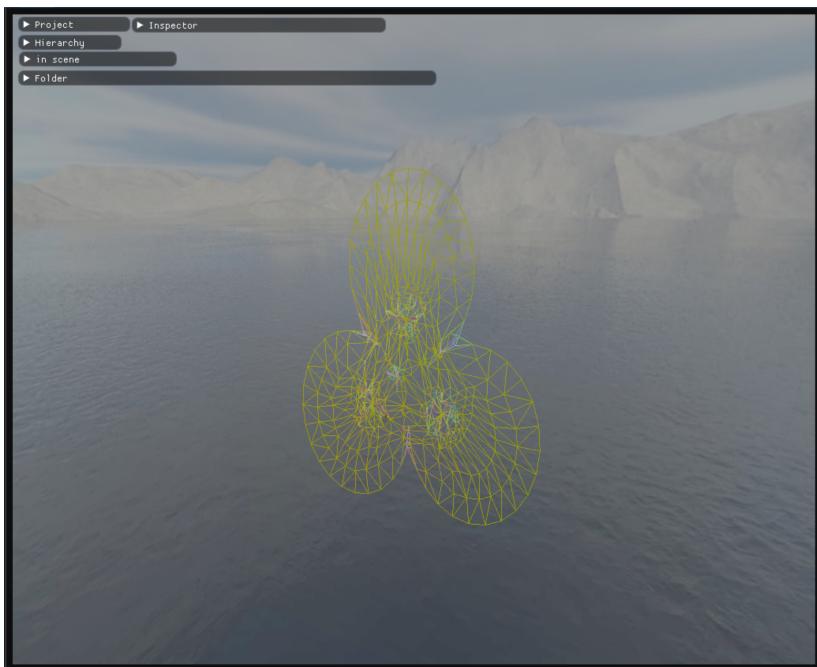


Figure 7: 极小曲面 ($\lambda = 0.1, N = 400$)

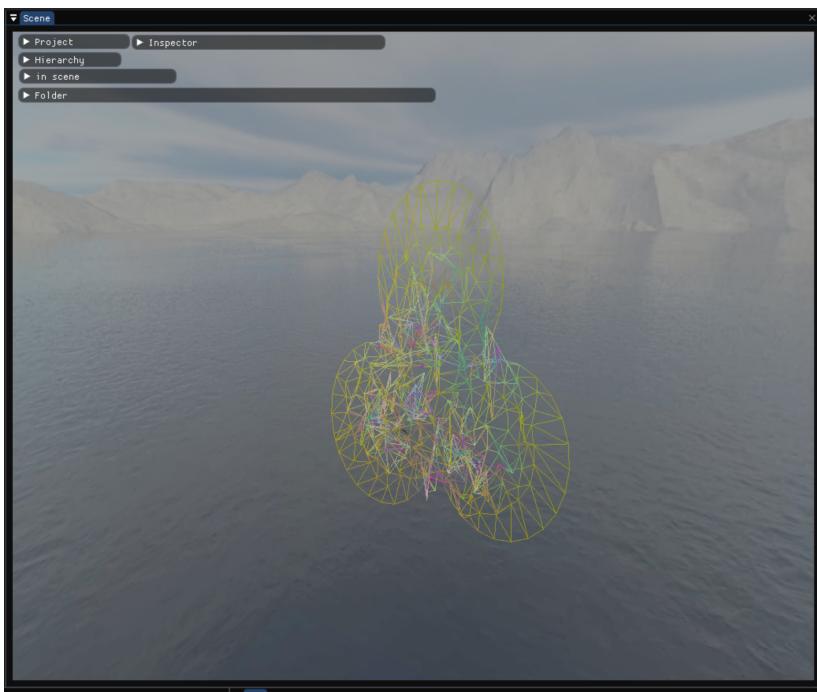


Figure 8: 极小曲面 ($\lambda = 0.5, N = 100$)

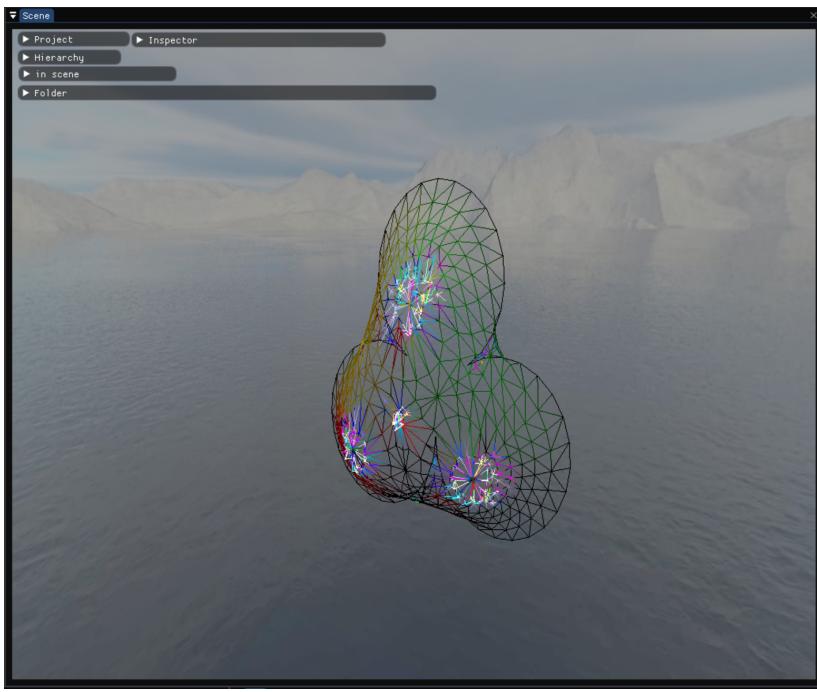


Figure 9: 平均曲率可视化

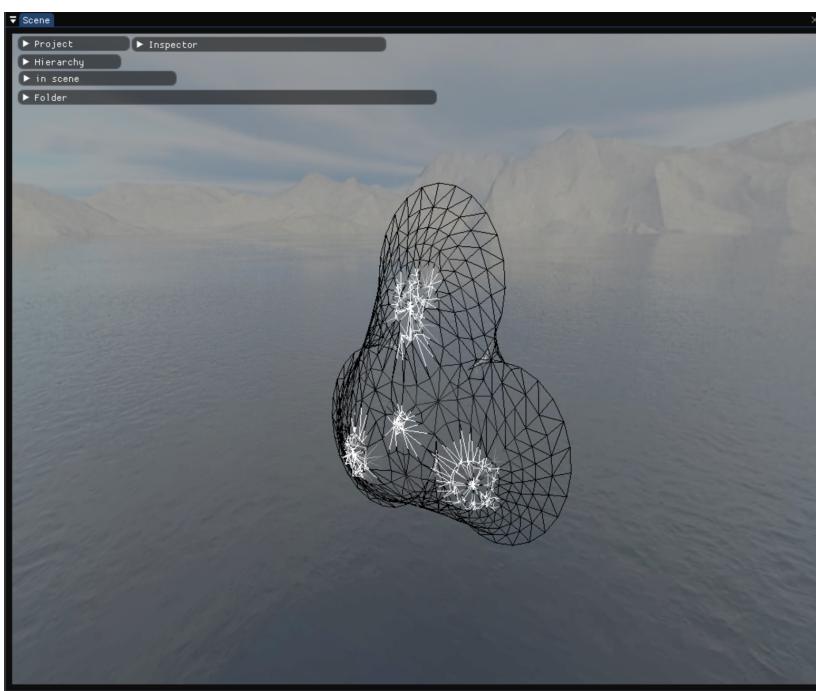


Figure 10: 高斯曲率可视化

References

- [1] Hans-Christian Hege and Konrad Polthier. *Visualization and mathematics III*. Springer Science & Business Media, 2013.