第十四章 Bézier 曲线曲面的降阶逼近

在本书前面几章我们给出了参数曲线曲面的升阶公式，并在第五章推导有理圆锥曲线段的充要条件，第十章推导不同次数的参数曲线曲面几何连续条件，第十二章推导不同次数的 Hybrid 曲线曲面控制顶点之间的递推关系等过程中应用了升阶公式，看到了升阶公式的重要作用．本章考虑其反问题，即已知一条(张)Bézier 曲线(曲面)，要求确定阶数比其低的 Bézier 曲线(曲面)来近似地代替它．我们称这类问题为 Bézier 曲线曲面的降阶(Degree reduction)逼近．

降阶逼近不仅仅是升阶公式在数学上的逆运算，更重要的是它的实际背景．第一，它是 CAD 系统之间数据传递与交换的需要．不同的外形设计系统，其多项式基的最高次数不尽相同，许多系统为了运行的有效性，甚至往往限于低次，这就要求在数据传递之前把曲线曲面的 Bézier 网作近似的降阶变换，以便对方系统能够接受．第二，它是计算机图形系统中分段(片)线性逼近的需要．通过与离散相结合的逐次降阶，把曲线曲面化为直线平面，便于求交和曲面绘制．第三，它是外形信息压缩的需要．一条有理曲线的多项式逼近曲线，一条参数曲线的 offset(等距)逼近曲线或一张曲面的 trimmed(裁剪)边界曲线常常是高次曲线，模型设计或外形仿制中对数据点的拟合也常常产生高次曲线曲面，降阶处理以后可以减少存储的信息量．

由于 Bézier 曲线使用的广泛性和代表性，人们把它作为降阶逼近的研究原型，二十多年来发明了许多降阶方法，大致可分为以下两大类．

(一) 基于控制顶点逼近的几何方法：Forrest[1]考虑了升阶的反过程，取降阶曲线的控制顶点：$\overline{\boldsymbol{P}}_i = \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}, 0 \le i \le \lceil n/2 \rceil - 1$ ；$\overline{\boldsymbol{P}}_i = \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}, \lfloor n/2 \rfloor + 1 \le i \le n$；$\overline{\boldsymbol{P}}_{n/2} = \left(\boldsymbol{P}_{n/2}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{P}_{n/2}^{\mathrm{II}}\right)/2$；其中符号$\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$之意义见 §8.2，点向量 $\overline{\boldsymbol{P}}_i^{\mathrm{I}} = \left((n+1)\boldsymbol{P}_i - i\boldsymbol{P}_{i-1}^{\mathrm{I}}\right)/(n+1-i),\ i = 0,1,\cdots,n$；$\overline{\boldsymbol{P}}_{i-1}^{\mathrm{II}} = \left((n+1)\boldsymbol{P}_i - (n+1-i)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}\right)/i,\quad i = n+1, n, \cdots, 1$；$\{\boldsymbol{P}_i\}_{i=0}^{n+1}$为原曲线的控制顶点，则降阶曲线保持端点$\left[(n-1)/2\right]$阶插值．Farin[2]类似地取$\overline{\boldsymbol{P}}_i = \left((n-i)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}} + i\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}\right)/n$．这两种降阶的误差估计由 Park[3]等给出；但由于降阶精度低，并不实用．Danneberg[4]利用原曲线采样点的位矢和导矢，用分段插值曲线进行降阶逼近．Hoschek[5]用低次样条曲线$\boldsymbol{Y}$插值原曲线$\boldsymbol{X}$，利用$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的一、二阶几何连续条件$\boldsymbol{X}' = \lambda \boldsymbol{Y}'$以及$\boldsymbol{X}'' = \lambda^2 \boldsymbol{Y}'' + \mu \boldsymbol{Y}'$，通过求离散点采样的$\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|$的最小二乘解求得$\lambda, \mu$之值和$\boldsymbol{Y}$的控制顶点．由于逼近曲线段数过多且需递归调整离散点参数，这一方法存储量大又费时．Moore[6]以新旧曲线所用面积极小为条件反求降阶曲线的控制顶点，Lodha[7]以低次 Bézier 单形的凸线性组合来几何逼近高次 Bézier 单形，这两种方法比较繁琐，效率也不高．

(二) 基于基转换的代数方法：利用 Chebyshev 多项式$\{H_i(t)\}_{i=0}^{n}$构成n次多项式空间的基以及n次多项式$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i(t)$的$n-1$次最佳一致逼近恰是$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i H_i(t)$的性质，Watkins 和 Worsey[8]通过把 Bernstein 基变为 Chebyshev 基，降阶，再变为 Bernstein 基，得到高精度降阶逼近算法．但为保端点插值而使用 Lagrange 插值，就失去了最佳逼近性．Lachance[9]提出约束 Chebyshev 多项式的概念来保端点r阶插值，但$r > 0$时无显式解．Eck[10]结合运用 Forrest 和 Lachance 两人的技术，取降阶曲线$\overline{\boldsymbol{P}}(t)$的顶点$\overline{\boldsymbol{P}}_i = (1-\lambda_i)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}} + \lambda_i \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}$，按降阶逼近误差$\boldsymbol{P}(t) - \overline{\boldsymbol{P}}(t) = 2^{-2n-1} H_{n+1}(2t-1) \Delta^{n+1} \boldsymbol{P}_0$来求$\lambda_i$，其中$H_{n+1}(2t-1)$为[0,1]上的$n+1$次 Chebyshev 多项式．Brunnett[11]探讨了这种逼近的几何意义．以上方法都是L_∞空间内最佳一致的逼近．在L_2空间内的研究，有 Eck[12]用约束 Legendre 多项式所给出的最小二乘逼近，但为保端点$r > 0$阶插值仍无显式解．

以上 Bézier 曲线的降阶方法各有长处，但也存在一些局限性．(1)有的计算较繁，有的精度较低，有的缺乏几何直观性，且在与离散法结合时，没有考虑两相邻降阶曲线间的几何连续性．(2)由于多变量 Chebyshev 理论还不完善[13]，这一理论推广到解决参数曲面降阶，尤其

是非张量积曲面降阶有一定的困难．(3)绝大多数降阶方法每次只能降一阶，若需降多阶，则须采用逐次降阶，而且当逼近曲线要满足端点r阶$(r \ge 0)$插值时，均无显式解，只能数值求解．这不仅导致计算耗时，而且误差很大．1995 年，L.Piegl[14]利用升阶的反过程对n次曲线降阶，可保端点$\left(\left[n/2\right]-1\right)$阶插值，但其同样每次只能降一阶且误差较大．同年，Bogacki[15]通过基的转换并舍去 Chebyshev 多项式中多个高次项，终于实现了 Bézier 曲线的一次降多阶逼近，但在端点只能达到位矢插值，无法满足$r>0$ 阶导矢插值．

为克服以上的局限性，我们对 Bézier 曲线曲面的降阶开展研究．本章系统地介绍我们的研究成果．B 网扰动和约束优化法，具有明显的几何直观性，可同时适用于曲线曲面的降阶．用于曲线降阶时，给出显式格式和误差估计，结合离散算法可达到高精度，且保持G^1连续；用于 Bézier 矩形片和三角片降阶时，把降阶问题转化为求解线性方程组，而降阶的误差同样取决于原曲面的一些内在几何不变量．基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线降阶法，将曲线的升阶与广义逆矩阵的最小二乘理论巧妙地结合起来，只要求解一个线性方程组就可一次降多阶，计算简单方便，逼近效果好．带端点插值条件的 Bézier 曲线降多阶法，既可一次降多阶，又可在曲线首末端点分别达到$r,p(r,p\ge 0)$ 阶插值，并实现对原曲线的近似最佳一致逼近，计算简单稳定，易于实现，还可结合分割算法达到更快速的收敛．

至于有理曲线降阶，可以把多项式曲线的降阶方法应用到齐次坐标下来实现．此外，Sederberg 和常庚哲[16]利用最佳线性公因子相当漂亮地给出平面有理 Bézier 曲线的一个降阶方法，陈发来[17]利用移位的 Chebyshev 多项式进一步实现了保端点插值的有理曲线降阶逼近．在 B 样条曲线降阶方面，Piegl 和 Tiller[14]分解原曲线为一系列 Bézier 曲线段，再用升阶反过程来降阶．Wolters[18]运用了基于 B 样条曲线升阶的 Blossoming 法．在参数曲面降阶方面，目前的工作仅限于文献[4], [5], [9], [10]等曲线降阶方法的推广．

本章第 1 节内容取材于[HSM, SJG, JTG, WGZ, 98]，[HSM, 96]；第 2 节内容取材于[HSM, SJG, JTG, WGZ, 98]；第 3 节内容取材于[HSM, 96]；第 4 节内容取材于[CGD, WGJ, 2000a]；第 5 节内容取材于[CGD, WGJ, 2000b]．

14.1 Bézier 曲线、Bézier 矩形片与 Bézier 三角片的退化条件

利用n次 Bézier 曲线、矩形域上$m\times n$次 Bézier 曲面和三角域上n次 Bézier 曲面的算子表示(1.3.4), (7.2.3), (7.3.10)，我们可得到

定理 14.1.1 n次 Bézier 曲线(1.3.2)退化到$n-1$次 Bézier 曲线，$m\times n$次 Bézier 矩形片(7.2.1)退化到$(m-1)\times(n-1)$次 Bézier 矩形片，n次 Bézier 三角片(7.3.7)退化到$n-1$次 Bézier 三角片的充要条件分别是以下各式均为零向量：

$$F\left(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n\right)=\Delta^n\boldsymbol{P}_0=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\boldsymbol{P}_i\,, \tag{14.1.1}$$

$$\begin{cases} F\left(\boldsymbol{P}_{0j},\boldsymbol{P}_{1j},\cdots,\boldsymbol{P}_{mj}\right)=\Delta_1^m\boldsymbol{P}_{0j}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\boldsymbol{P}_{ij}, \quad j=0,1,\cdots,n, \\ F\left(\boldsymbol{P}_{i0},\boldsymbol{P}_{i1},\cdots,\boldsymbol{P}_{in}\right)=\Delta_2^n\boldsymbol{P}_{i0}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\boldsymbol{P}_{ij},\ i=0,1,\cdots,m, \end{cases} \tag{14.1.2}$$

$$F_k\left(\boldsymbol{T}_{ij}\right)=\Delta_1^k\Delta_2^{n-k}\boldsymbol{T}_{00}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-i-j}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j}\boldsymbol{T}_{ij},\ k=0,1,\cdots,n\,, \tag{14.1.3}$$

证 曲线(1.3.2)可退化到$n-1$次，当且仅当其幂级数表达式中n次项之系数为零向量，也即

$$\mathrm{d}^n\boldsymbol{P}(t)/\mathrm{d}t^n=\mathrm{d}^n\left(\mathrm{I}+t\Delta\right)^n\boldsymbol{P}_0/\mathrm{d}t^n=n!\Delta^n\boldsymbol{P}_0=n!\left(\mathrm{E}-\mathrm{I}\right)^n\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{0}\,,$$

于是由(1.6.5), 得证(14.1.1)．同理，矩形片(7.2.1)退化到$(m-1)\times(n-1)$次，当且仅当

$$\partial^m\boldsymbol{P}(u,v)/\partial u^m=m!\Delta_1^m\left(\mathrm{I}+v\Delta_2\right)^n\boldsymbol{P}_{00}=m!\sum_{j=0}^{n}B_j^n(v)\Delta_1^m\boldsymbol{P}_{0j}=\boldsymbol{0}\,,$$

$$\partial^n \boldsymbol{P}(u,v)/\partial v^n = n!\Delta_2^n(\mathrm{I}+u\Delta_1)^m \boldsymbol{P}_{00} = n!\sum_{i=0}^m B_i^m(u)\Delta_2^n \boldsymbol{P}_{i0} = \boldsymbol{0}\,.$$

由 Bernstein 基的线性无关性即得(14.1.2)之证．最后，三角片(7.3.7)退化到$n-1$次，当且仅当其幂级数表达式中所有n次项的系数均为零向量，也即当$k=0,1,\cdots,n$时，

$$\partial^n \boldsymbol{T}(u,v)/(\partial u^k \partial v^{n-k}) = n!\Delta_1^k\Delta_2^{n-k}\boldsymbol{T}_{00} = n!(\mathrm{E}_1-\mathrm{I})^k(\mathrm{E}_2-\mathrm{I})^{n-k}\boldsymbol{T}_{00} = \boldsymbol{0}\,,$$

这就证明了(14.1.3)．

14.2 Bézier 曲线降阶的 B 网扰动和约束优化法

14.2.1 降阶的显式算法和误差估计

所谓n次 Bézier 曲线(1.3.2)的降阶，系指寻求一条$d(<n)$次 Bézier 曲线$\overline{\boldsymbol{P}}(t)$，使得

$$\max_{t\in[a,b]}\left\|\boldsymbol{P}(t)-\overline{\boldsymbol{P}}(t)\right\| = \mathrm{MIN}, \tag{14.2.1}$$

这里$\|\cdot\|$是 Euclidean 范数．本节仅考虑$d=n-1$之情形．今对曲线(1.3.2)的每一个控制顶点$\boldsymbol{P}_i=(P_i^x,P_i^y,P_i^z)$作一个小扰动$\boldsymbol{\varepsilon}_i=(\varepsilon_i^x,\varepsilon_i^y,\varepsilon_i^z)$，使新曲线

$$\overline{\boldsymbol{P}}(t)=\sum_{i=0}^n B_i^n(t)\overline{\boldsymbol{P}}_i=\sum_{i=0}^n B_i^n(t)(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i),\qquad 0\le t\le 1 \tag{14.2.2}$$

满足(14.1.1)为零向量的退化条件，即$\Delta^n\overline{\boldsymbol{P}}_0=\boldsymbol{0}$，这时新曲线为$n-1$次 Bézier 曲线$\boldsymbol{Q}(t)$，我们视其为原曲线(1.3.2)的降阶逼近，其控制顶点可由下式求出：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \boldsymbol{Q}_i=(n/(n-i))(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i)-(i/(n-i))\boldsymbol{Q}_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \tag{14.2.3}$$

为求$\boldsymbol{\varepsilon}_i$，可应用约束优化方法，在条件$\Delta^n(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{0}$之下求极值$\sum_{i=0}^n\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\|^2=\mathrm{MIN}$．记$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^x,\lambda^y,\lambda^z)^{\mathrm{T}}$为 Lagrange 乘子，取 Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{\varepsilon}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=0}^n\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\|^2+\left[\sum_{i=0}^n(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i)\right]\boldsymbol{\lambda}\,. \tag{14.2.4}$$

为使降阶逼近曲线保端点位置插值，还须增加两个约束条件$\boldsymbol{\varepsilon}_0=\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,0)$，于是由

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda^x}=\sum_{i=0}^n(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(P_i^x+\varepsilon_i^x)=0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_i^x}=2\varepsilon_i^x+(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\lambda^x=0\,,\quad i=1,2,\cdots,n-1\,,$$

可解出λ^x和ε_i^x，$i=1,2,\cdots,n-1$，同理可得$\varepsilon_i^y,\varepsilon_i^z$，合并得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{cases}\boldsymbol{0}, & i=0,n,\\ -\left[(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\Big/\left(\binom{2n}{n}-2\right)\right]\sum_{i=0}^n(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\boldsymbol{P}_i\,, & i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \tag{14.2.5}$$

这里我们应用了组合恒等式

$$\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}. \tag{14.2.6}$$

根据(1.3.2)，(14.2.2)，(14.1.1)和不等式

$$\left|\sum_{i=0}^n(-1)^{n-i}\binom{n}{i}B_i^n(t)\right|<1,\quad 0\le t\le 1, \tag{14.2.7}$$

我们最后可得到降阶逼近的误差估计式

$$\left\|\boldsymbol{P}(t)-\overline{\boldsymbol{P}}(t)\right\|=\left\|\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{\varepsilon}_i\right\|\le\frac{\left\|\Delta^n\boldsymbol{P}_0\right\|}{\binom{2n}{n}-2}=\frac{\left\|F(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n)\right\|}{\binom{2n}{n}-2},\ n>2\,. \tag{14.2.8}$$

易见$\left\|F(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n)\right\|=\left\|\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\boldsymbol{P}_i\right\|$是与坐标系无关的一个几何不变量，这说明控制顶点扰动和约束优化所产生的降阶逼近误差由曲线(1.3.2)本身的一个内在不变量所界定．图 14.2.1 显示了四次和五次 Bézier 曲线(实线表示)经 B 网优化扰动后得到的降阶 Bézier 曲线(虚线表示).

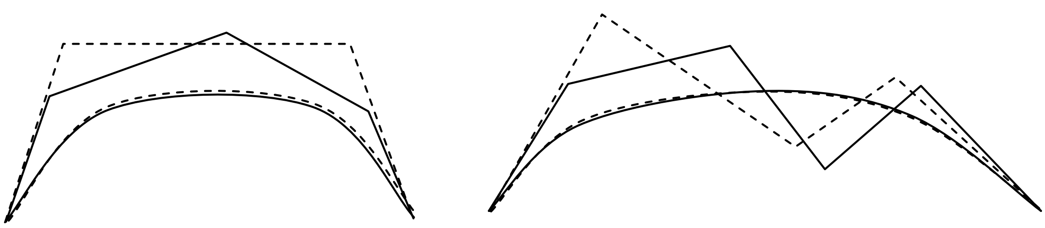

图 14.2.1　四次和五次 Bézier 曲线的降阶

总结以上的推导结果，我们有

定理 14.2.1　n 次 Bézier 曲线(1.3.2)可经施于控制顶点 $\boldsymbol{P}_i$ 如(14.2.5)所示的扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 后，近似地转化为两端点不变的 $n-1$ 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{Q}(t)$，其控制顶点如(14.2.3)所示，降阶逼近的误差上界如(14.2.8)所示.

14.2.2 离散/降阶算法

为使降阶逼近的误差得到高精度的控制，可以把上一小节的算法与离散算法结合起来．这是因为降阶误差取决于曲线的内在不变量 $F(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$．而下面的定理表明，离散可使此不变量按曲线次数 n 的指数律递缩．假设 Bézier 曲线(1.3.2)的两条子曲线为 $\boldsymbol{P}^{(1)}=\boldsymbol{P}^{(1)}(t/c)$ $(0\le t\le c<1)$，$\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{P}^{(2)}((t-c)/(1-c))$ $(c\le t\le 1)$，如(1.4.6)所示，而它们的控制顶点 $\boldsymbol{P}_i^i,\boldsymbol{P}_n^{n-i}(i=0,1,\cdots,n)$ 由 (1.3.11) $(t=c)$ 给出，我们有

定理 14.2.2　n 次 Bézier 曲线(1.3.2)及其两条子曲线(1.4.6)的内在不变量 F 之间存在着关系式

$$F(\boldsymbol{P}_0^0,\boldsymbol{P}_1^1,\cdots,\boldsymbol{P}_n^n)=c^n\cdot F(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n), \tag{14.2.9}$$

$$F(\boldsymbol{P}_n^n,\boldsymbol{P}_n^{n-1},\cdots,\boldsymbol{P}_n^0)=(1-c)^n\cdot F(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_n). \tag{14.2.10}$$

证　仅证(14.2.9)．由(1.4.6) 知 $\boldsymbol{P}^{(1)}(t/c)=\boldsymbol{P}(t),\ 0\le t\le c<1$．用算子来进行表示就是 $(\mathrm{I}+t\Delta/c)^n\boldsymbol{P}_0^0=(\mathrm{I}+t\Delta)^n\boldsymbol{P}_0,\ 0\le t\le c$．今对上式两端求 n 阶导向量，可以得到 $n!\Delta^n\boldsymbol{P}_0^0/c^n=n!\Delta^n\boldsymbol{P}_0$．按照(14.1.1)，上式与(14.2.9)等价．证毕.

推论 14.2.1　对给定的误差精度 δ，只要对曲线(1.3.2)执行中点离散算法(即 $c=1-c=1/2$) N 次，则最终得到的一切 n 次子曲线段，其 $n-1$ 次降阶逼近的误差均小于 δ．这里 N 可由下式先验地确定，记号 $\lceil x\rceil$ 的意义见§8.2：

$$N=\left\lceil\frac{1}{n}\log_2\left\{\left\|F(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_n)\right\|\Big/\left(\binom{2n}{n}-2\right)\right\}\right\rceil, \tag{14.2.11}$$

根据上述推论和(14.2.8)，我们得到

算法 14.2.1　（用离散/降阶法对 n 次 Bézier 曲线(1.3.2)逐次降阶逼近到 $d(<n)$ 次）

Step 1. 初始化，令 $k=n, \boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{P}_i,\ i=0,1,\cdots,n$.

Step 2. 对 k 次 Bézier 曲线，若 $\left\|F\left(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_k\right)\right\|\Big/\left(\binom{2k}{k}-2\right)<\delta/(n-d)$，则按定理 14.2.1 用低一次的逼近曲线代替原曲线；否则，把原曲线递归地在中点离散 K 次，$K=\left\lceil \dfrac{1}{k}\log_2\left\{\left\|F\left(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_k\right)\right\|\Big/\left[\left(\binom{2k}{k}-2\right)\delta\right]\right\}\right\rceil$，再把 2^K 条 k 次 Bézier 子曲线按定理 14.2.1 各降阶一次.

Step 3. 若曲线已为 d 次，则停止；否则，$k=k-1$，对每段子曲线重复 Step 2.

14.2.3 降阶中的 G^1 连续条件

在几何造型系统中，有时要求曲线(1.3.2)降阶一次以后，与相邻曲线不但保持位置连接，而且保持切矢平行．即保持降阶前后的端点和端切向．这时我们只要把约束条件

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0=\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{\varepsilon}_1-l_1\left(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0\right)=\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}-l_2\left(\boldsymbol{P}_{n-1}-\boldsymbol{P}_n\right)=\mathbf{0} \tag{14.2.12}$$

追加到 Lagrange 函数式中即可，这里 l_1,l_2 可任意选取.

14.3 Bézier 矩形片与 Bézier 三角片降阶的 B 网扰动和约束优化法

14.3.1 Bézier 矩形片的降阶

不失一般性，本节仅考虑 $m\times n$ 次曲面(7.2.1)降阶到 $(m-1)\times(n-1)$ 次的情形．今对其每一个控制顶点 $\boldsymbol{P}_{ij}=\left(P_{ij}^x,P_{ij}^y,P_{ij}^z\right)$ 作适当扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\left(\varepsilon_{ij}^x,\varepsilon_{ij}^y,\varepsilon_{ij}^z\right)$，使新曲面

$$\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)\left(\boldsymbol{P}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right),\quad 0\le u,v\le 1 \tag{14.3.1}$$

满足(14.1.2)为零向量的退化条件，即 $\Delta_1^m\overline{\boldsymbol{P}}_{0j}=\mathbf{0}$，$j=0,1,\cdots,n$；$\Delta_2^n\overline{\boldsymbol{P}}_{i0}=\mathbf{0}$，$i=0,1,\cdots,m$. 这时新曲面为 $(m-1)\times(n-1)$ 次 Bézier 曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$，我们视其为原曲面的降阶逼近．为求 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$，应用约束优化法，在上述退化条件下求极值 $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right\|=\mathrm{MIN}$．记 $\boldsymbol{\lambda}_j=\left(\lambda_j^x,\lambda_j^y,\lambda_j^z\right)^{\mathrm{T}}$ $(j=0,1,\cdots,n)$，$\boldsymbol{\mu}_i=\left(\mu_i^x,\mu_i^y,\mu_i^z\right)^{\mathrm{T}}$ $(i=0,1,\cdots,m)$ 为 Lagrange 乘子，取 Lagrange 函数为

$$L=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\right\|^2+\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\left(\boldsymbol{P}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)\right]\boldsymbol{\lambda}_j+\sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\left(\boldsymbol{P}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)\right]\boldsymbol{\mu}_i, \tag{14.3.2}$$

令 $\partial L/\partial\lambda_j^x=0$，$j=0,1,\cdots,n$；$\partial L/\partial\mu_i^x=0$，$i=0,1,\cdots,m$；$\partial L/\partial\varepsilon_{ij}^x=0$，$i=0,1,\cdots,m$；$j=0,1,\cdots,n$；则有

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\left(P_{ij}^x+\varepsilon_{ij}^x\right)=0,\quad \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left(P_{ij}^x+\varepsilon_{ij}^x\right)=0, &(14.3.3)\\ &\varepsilon_{ij}^x=-\frac{1}{2}\left[(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\lambda_j^x+(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\mu_i^x\right]. &(14.3.4)\end{aligned}\right.$$

把(14.3.4)代入(14.3.3)，得出方程组

$$\left\{\begin{aligned}&H_m\lambda_j^x+\sum_{i=0}^{m}D_{ij}\mu_i^x=2F_j,\quad j=0,1,\cdots,n, &(14.3.5)\\ &\sum_{j=0}^{n}D_{ij}\lambda_j^x+H_n\mu_i^x=2G_i,\quad i=0,1,\cdots,m, &(14.3.6)\end{aligned}\right.$$

这里

$$H_m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}^2=\binom{2m}{m},\quad D_{ij}=(-1)^{m+n-i-j}\binom{m}{i}\binom{n}{j},$$

$$F_j=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}P_{ij}^x,\quad G_i=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}P_{ij}^x.$$

由(14.3.5)解出 λ_j^x，代入(14.3.6)可得

$$H_m\mu_i^x-\sum_{k=0}^{m}(-1)^{i+k}\binom{m}{i}\binom{m}{k}\mu_k^x=2\left(H_mG_i-\sum_{j=0}^{n}D_{ij}F_j\right)\Big/H_n,\quad i=0,1,\cdots,m,\quad (14.3.7)$$

解此方程组可得 μ_i^x，从而由(14.3.5)又得 λ_j^x，把它们代入(14.3.4)可确定 ε_{ij}^x，同理求得 $\varepsilon_{ij}^y,\varepsilon_{ij}^z$，于是降阶逼近曲面 $\boldsymbol{Q}(u,v)$ 可由下列算法给出.

算法 14.3.1 (由 $m\times n$ 次 Bézier 曲面求其 $(m-1)\times(n-1)$ 次降阶逼近曲面的控制顶点 $\boldsymbol{Q}_{ij}$)

令 $\boldsymbol{Q}_{i,-1}=\boldsymbol{Q}_{-1,j}=\boldsymbol{0}$，$i=-1,0,\cdots,m;\ j=-1,0,\cdots,n$；

对于 $i=0,1,\cdots,m-1$； $j=0,1,\cdots,n-1$；计算

$$\boldsymbol{Q}_{ij}=\frac{mn}{(m-i)(n-j)}\left(\boldsymbol{P}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)-\frac{i}{m-i}\boldsymbol{Q}_{i-1,j}-\frac{j}{n-j}\boldsymbol{Q}_{i,j-1}-\frac{ij}{(m-i)(n-j)}\boldsymbol{Q}_{i-1,j-1}.$$

容易知道，降阶逼近误差 $\left\|\boldsymbol{P}(u,v)-\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)\right\|=\left\|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right\|$ 取决于两组几何不变量 $\left\|\Delta_1^m\boldsymbol{P}_{0j}\right\|$ 和 $\left\|\Delta_2^n\boldsymbol{P}_{i0}\right\|$，同时也可建立类似于曲线的离散/降阶算法以缩减降阶误差.

14.3.2 Bézier 三角片的降阶

不失一般性，本节仅考虑 n 次曲面(7.3.7)的一次降阶. 对其每一个顶点 $\boldsymbol{T}_{ij}=\left(T_{ij}^x,T_{ij}^y,T_{ij}^z\right)$ 作适当扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\left(\varepsilon_{ij}^x,\varepsilon_{ij}^y,\varepsilon_{ij}^z\right)$，使新曲面

$$\overline{\boldsymbol{T}}(u,v)=\sum_{i+j=0}^{n}B_{ij}^n(u,v)\overline{\boldsymbol{T}}_{ij}=\sum_{i+j=0}^{n}B_{ij}^n(u,v)\left(\boldsymbol{T}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)\quad (14.3.8)$$

满足(14.1.3)为零向量的退化条件，即 $\Delta_1^k\Delta_2^{n-k}\overline{\boldsymbol{T}}_{ij}=\boldsymbol{0}$，$k=0,1,\cdots,n$. 我们取 $n-1$ 次退化曲面为原曲面的降阶逼近. 应用约束优化法，取 Lagrange 函数为

$$L=\sum_{i+j=0}^{n}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\right\|^2+\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-i-j}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j}\left(\boldsymbol{T}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)\right]\boldsymbol{\lambda}_k,\quad (14.3.9)$$

令 $\partial L/\partial\lambda_k^x=0$，$k=0,1,\cdots,n$；$\partial L/\partial\varepsilon_{ij}^x=0$，$i+j=0,1,\cdots,n$，则有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-i-j}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j}\left(T_{ij}^x+\varepsilon_{ij}^x\right)=0, & k=0,1,\cdots,n, \quad (14.3.10)\\ \displaystyle\varepsilon_{ij}^x=-\frac{1}{2}\sum_{m=i}^{n-j}(-1)^{n-i-j}\binom{m}{i}\binom{n-m}{j}\lambda_m^x, & i+j=0,1,\cdots,n. \quad (14.3.11)\end{cases}$$

把(14.3.11)代入(14.3.10)即得关于 λ_m^x 的方程组

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{m=i}^{n-j}\phi(i,j,k,m)\lambda_m^x=2\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-i-j}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j}T_{ij}^x,\quad k=0,1,\cdots,n,\quad (14.3.12)$$

这里

$$\phi(i,j,k,m)=\binom{k}{i}\binom{n-k}{j}\binom{m}{i}\binom{n-m}{j}. \tag{14.3.13}$$

利用恒等式

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=i}^{k-1}A_{im}=\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{m}A_{im},\ \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{m=k}^{n-j}A_{mj}=\sum_{m=k}^{n}\sum_{j=0}^{n-m}A_{mj},$$

(14.3.12)左端可化为

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{m=i}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}\phi(i,j,k,m)\lambda_m^x+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{m=k}^{n-j}\phi(i,j,k,m)\lambda_m^x=\sum_{m=0}^{n}B_{km}\lambda_m^x, \tag{14.3.14}$$

其中

$$B_{km}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-k}\phi(i,j,k,m), & m\le k-1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-m}\phi(i,j,k,m), & m\ge k.\end{cases} \tag{14.3.15}$$

于是引用(14.1.3)的记号，可知$\lambda_m^x(m=0,1,\cdots,n)$可由方程组

$$(B_{km})_{(n+1)\times(n+1)}(\lambda_0^x,\lambda_1^x,\cdots,\lambda_n^x)^{\mathrm{T}}=2\left(F_0(T_{ij}^x),F_1(T_{ij}^x),\cdots,F_n(T_{ij}^x)\right)^{\mathrm{T}} \tag{14.3.16}$$

求解得出，再由(14.3.11)可得ε_{ij}^x，同理得到$\varepsilon_{ij}^y,\varepsilon_{ij}^z$，最后降阶逼近曲面可由下列算法给出.

算法 14.3.2 (由n次 Bézier 三角片求其$n-1$次降阶逼近曲面的控制顶点$\boldsymbol{Q}_{ij}$)

令$\boldsymbol{Q}_{i,-1}=\boldsymbol{Q}_{-1,i}=\boldsymbol{0}$，$i=0,1,\cdots,n-1$；对于$i=0,1,\cdots,n-1$；$j=0,1,\cdots,n-1$；计算

$$\boldsymbol{Q}_{ij}=\frac{n}{n-i-j}(\boldsymbol{T}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})-\frac{i}{n-i-j}\boldsymbol{Q}_{i-1,j}-\frac{j}{n-i-j}\boldsymbol{Q}_{i,j-1}.$$

容易知道，降阶逼近误差为$\left\|\boldsymbol{T}(u,v)-\overline{\boldsymbol{T}}(u,v)\right\|=\left\|\sum_{i+j=0}^{m}B_{ij}(u,v)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right\|$，由(14.3.11)可以知道$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$取决于$\boldsymbol{\lambda}_m$，其中$m=0,1,\cdots,n$；但是按照(14.3.16)，$\left\|(\lambda_0^x,\lambda_1^x,\cdots,\lambda_n^x)^{\mathrm{T}}\right\|\le 2\left\|(B_{km})_{(n+1)\times(n+1)}^{-1}\right\|\times\left\|\left(F_0(T_{ij}^x),F_1(T_{ij}^x),\cdots,F_n(T_{ij}^x)\right)^{\mathrm{T}}\right\|$，因此降阶误差由三角曲面片(7.3.7)本身的一组内在不变量$\left\|F_m(\boldsymbol{T}_{ij})\right\|\ (m=0,1,\cdots,n)$所界定．运用离散/降阶算法可使此不变量依曲面次数$n$的指数律递缩，其理由基于

定理 14.3.1 n次 Bézier 三角片$\boldsymbol{T}(u,v)$及其按标准离散/降阶算法得到的四块n次 Bézier 子三角片$\boldsymbol{T}^{(l)}(u^{(l)},v^{(l)}),(l=1,2,3,4)$的内在不变量之间，存在着关系式$\left\|F_k(\boldsymbol{T}_{ij}^{(l)})\right\|=2^{-n}\left\|F_k(\boldsymbol{T}_{ij})\right\|$，$k=0,1,\cdots,n$；$l=1,2,3,4$.

证　仅证$l=1$之情形．如图 14.3.1，按离散算法，容易知道第一块子曲面$\boldsymbol{T}^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)})=\boldsymbol{T}(u,v)$，$0\le u,v\le 1/2,u^{(1)}=2u,v^{(1)}=2v$．用算子表示就是

$$(\mathrm{I}+2u\Delta_1+2v\Delta_2)^n\boldsymbol{T}_{00}^{(1)}=(\mathrm{I}+u\Delta_1+v\Delta_2)^n\boldsymbol{T}_{00},$$

由上式两端对u求k阶，对v求$n-k$阶导向量可得$2^n\Delta_1^k\Delta_2^{n-k}\boldsymbol{T}_{00}^{(1)}=\Delta_1^k\Delta_2^{n-k}\boldsymbol{T}_{00}$，$k=0,1,\cdots,n$．按(14.1.3)得证本定理.

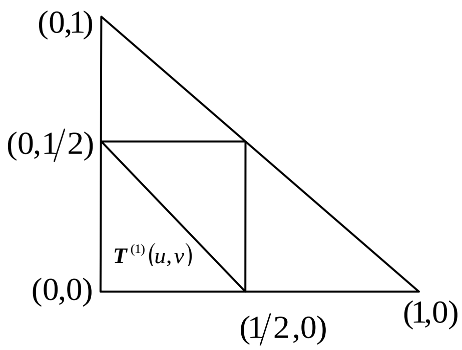

图 14.3.1 Bézier 子三角片$\boldsymbol{T}^{(1)}(u,v)$的位置

14.4 基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线一次性降多阶逼近

14.4.1 端点不保插值的降多阶逼近

这一节需要应用广义逆矩阵的理论. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵，$m\ge n$，记 $r=rank(\mathbf{A})$. 计算广义逆矩阵 $\mathbf{A}^+$ 的一个基本原则[19]是利用矩阵 $\mathbf{A}$ 的满秩分解 $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$，其中 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别为 $m\times r$ 阶列满秩和 $r\times n$ 阶行满秩矩阵．此时 $\mathbf{A}$ 的广义逆矩阵 $\mathbf{A}^+=\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+$．因 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 为列满秩或行满秩的矩阵，所以 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}$ 为 $r\times r$ 阶对称正定方阵，于是 $\mathbf{A}^+=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{CC}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$．这时，超定线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的最小二乘解为 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ $=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{CC}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$．特别，若矩阵 $\mathbf{A}$ 为列满秩，即 $rank(\mathbf{A})=n$，则 $\mathbf{A}^+$ 可简化为 $\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$．相应地，上述超定线性方程组的最小二乘解就可以简化为 $\mathbf{x}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

下面构造降阶逼近的广义逆矩阵方程组．已知欲降阶的曲线是 n 次 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{P}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{P}_{in}\ . \tag{14.4.1}$$

从升阶的反过程考虑，设 $n-1$ 次 Bézier 曲线 $\overline{\boldsymbol{P}}_{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(t)\overline{\boldsymbol{P}}_{i,n-1}$ 经过一次升阶后得(14.4.1)，则由(1.3.8)知 $\mathbf{P}_n=\mathbf{A}_n\overline{\mathbf{P}}_{n-1}$．其中 $\mathbf{A}_n$ 为 $(n+1)\times n$ 阶列满秩矩阵，

$$\mathbf{A}_n=\left(a_{i,j,n}\right)_{\substack{i=0,\cdots,n\\ j=0,\cdots,n-1}}\,,\qquad a_{i,j,n}=\begin{cases}(n-i)/n, & i=j\\ i/n, & i=j+1\,,\\ 0, & 其他,\end{cases} \tag{14.4.2}$$

$$\mathbf{P}_n=(\boldsymbol{P}_{0n},\boldsymbol{P}_{1n},\cdots,\boldsymbol{P}_{nn})^{\mathrm{T}},\quad \overline{\mathbf{P}}_{n-1}=(\overline{\boldsymbol{P}}_{0,n-1},\overline{\boldsymbol{P}}_{1,n-1},\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{n-1,n-1})^{\mathrm{T}}\,. \tag{14.4.3}$$

类似地，设 m 次 Bézier 曲线 $\overline{\boldsymbol{P}}_m(t)=\sum_{i=0}^{m}B_i^m(t)\overline{\boldsymbol{P}}_{i,m}$ 经 $n-m$ 次 $((n-m)\ge 2)$ 升阶得到 n 次 Bézier 曲线(14.4.1)，则有 $(k+1)\times k$ 阶列满秩矩阵 $\mathbf{A}_k$，$k=n,n-1,\cdots,m+1$，使得

$$\mathbf{P}_n=\mathbf{A}_n\overline{\mathbf{P}}_{n-1}=\mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n-1}\overline{\mathbf{P}}_{n-2}=\cdots=\mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n-1}\cdots\mathbf{A}_{m+2}\mathbf{A}_{m+1}\overline{\mathbf{P}}_m\,.$$

记

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n-1}\cdots\mathbf{A}_{m+1}=(a_{ij})_{\substack{i=0,\cdots,n\\ j=0,\cdots,m}}\,, \tag{14.4.4}$$

易知 $\mathbf{A}$ 为 $(n+1)\times(m+1)$ 阶列满秩矩阵，且 $a_{00}=a_{nm}=1,\ a_{0j}=a_{nk}=0,$ $j=1,2,\cdots,m,\ k=0,1,\cdots,m-1$．我们欲求 $\overline{\mathbf{P}}_m=(\overline{\boldsymbol{P}}_{0m},\overline{\boldsymbol{P}}_{1m},\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{mm})^{\mathrm{T}}$，使得

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}_m=\mathbf{P}_n\,. \tag{14.4.5}$$

由广义逆矩阵理论可知，上述超定线性方程组的最小二乘解可表为

$$\overline{\mathbf{P}}_m^*=(\overline{\boldsymbol{P}}_{0m}^*,\overline{\boldsymbol{P}}_{1m}^*,\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{mm}^*)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^+\mathbf{P}_n=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_n\,. \tag{14.4.6}$$

从而可得原 n 次曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 的降 $n-m$ 阶的逼近曲线

$$\overline{\boldsymbol{P}}_m^*(t)=\sum_{i=0}^{m}B_i^m(t)\overline{\boldsymbol{P}}_{im}^*\ . \tag{14.4.7}$$

综合以上分析的结果，我们有

定理 14.4.1 n 次 Bézier 曲线(14.4.1)可一次性地降 $n-m(n-m\ge 2)$ 阶而得到逼近曲线(14.4.7)，其控制顶点为超定线性方程组(14.4.5)的最小二乘解(14.4.6)，其中 $\mathbf{A}$ 如(14.4.2)，(14.4.4)所示，$\mathbf{P}_n$ 如(14.4.3)所示.

14.4.2 保端点插值的降多阶逼近

上一小节所得降阶曲线一般不保持与原曲线有相同的端点值．为插值原端点，可规定

$$\overline{\boldsymbol{P}}_{0m}^{*}=\overline{\boldsymbol{P}}_{0m}=\boldsymbol{P}_{0n}\,,\quad \overline{\boldsymbol{P}}_{mm}^{*}=\overline{\boldsymbol{P}}_{mm}=\boldsymbol{P}_{nn}\,. \tag{14.4.8}$$

这时超定线性方程组(14.4.5)有所变化．为得其表达式，可引入矩阵分块方法，记

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{(n+1)\times(m+1)}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0} & 0\\ \mathbf{A}^{\mathrm{L}} & \mathbf{A}^{\mathrm{C}} & \mathbf{A}^{\mathrm{R}}\\ 0 & \mathbf{0} & 1\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{P}}_m=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{0m}\\ \overline{\mathbf{P}}_m^{\mathrm{c}}\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{mm}\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{0n}\\ \mathbf{P}_n^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{P}_{nn}\end{pmatrix}. \tag{14.4.9}$$

这里 $\mathbf{A}^{\mathrm{L}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{R}}$ 为 $(n-1)\times 1$ 阶矩阵， $\mathbf{A}^{\mathrm{C}}$ 为 $(n-1)\times(m-1)$ 阶列满秩矩阵，其元素均由升阶系数按(14.4.4)计算可得，且

$$\mathbf{P}_n^{\mathrm{c}}=\left(\boldsymbol{P}_{1n},\boldsymbol{P}_{2n},\cdots,\boldsymbol{P}_{n-1,n}\right)^{\mathrm{T}},\quad \overline{\mathbf{P}}_m^{\mathrm{c}}=\left(\overline{\boldsymbol{P}}_{1m},\overline{\boldsymbol{P}}_{2m},\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{m-1,m}\right)^{\mathrm{T}} \tag{14.4.10}$$

分别为 $(n-1)\times 1$ 阶和 $(m-1)\times 1$ 阶矩阵．由分块矩阵乘法，易知现在(14.4.5)变为

$$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\overline{\mathbf{P}}_m^{\mathrm{C}}=\mathbf{P}_n^{\mathrm{C}}-\mathbf{A}^{\mathrm{L}}\boldsymbol{P}_{0n}-\mathbf{A}^{\mathrm{R}}\boldsymbol{P}_{nn}\,. \tag{14.4.11}$$

因 $\mathbf{A}^{\mathrm{C}}$ 列满秩，存在 $(m-1)\times(n-1)$ 阶广义逆矩阵

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}=\left(\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{14.4.12}$$

使上面这一超定线性方程组的最小二乘解可表为

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{P}}_m^{*\mathrm{c}}&=\left(\overline{\boldsymbol{P}}_{1m}^{*},\overline{\boldsymbol{P}}_{2m}^{*},\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{m-1,m}^{*}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}\left(\mathbf{P}_n^{\mathrm{C}}-\mathbf{A}^{\mathrm{L}}\boldsymbol{P}_{0n}-\mathbf{A}^{\mathrm{R}}\boldsymbol{P}_{nn}\right)\\ &=\begin{pmatrix}-\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{L}} & \left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+} & -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{R}}\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{P}_{0n},\mathbf{P}_n^{\mathrm{c}},\boldsymbol{P}_{nn}\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{14.4.13}$$

把端点条件式(14.4.8)与(14.4.13)合并，可写为

$$\overline{\mathbf{P}}_m^{*}=(\overline{\boldsymbol{P}}_{0m}^{*},\overline{\boldsymbol{P}}_{1m}^{*},\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_{mm}^{*})^{\mathrm{T}}=\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\mathbf{P}_n\,, \tag{14.4.14}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{+}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0} & 0\\ -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{L}} & \left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+} & -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{R}}\\ 0 & \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}. \tag{14.4.15}$$

对于需满足端点 C^1或C^2 连续条件的降多阶逼近算法可类似推出．

综合以上分析的结果，我们有

定理 14.4.2 n 次 Bézier 曲线(14.4.1)可一次性地保端点插值降 $n-m(n-m\ge 2)$ 阶而得到逼近曲线(14.4.7)，其控制顶点可由(14.4.14)，(14.4.15)计算得到，其中 $\mathbf{A}^{\mathrm{L}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{R}}$，$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\right)^{+}$ 如(14.4.9)，(14.4.12)所示； $\mathbf{A}$ 如(14.4.2)，(14.4.5)所示； $\mathbf{P}_n$ 如(14.4.3)所示．

14.4.3 误差分析及实例

对于一般的 Bézier 曲线的降多阶逼近，可结合自适应分割算法进行降阶．即若降多阶后所得 m 次曲线 $\overline{\boldsymbol{P}}_m^{*}(t)$ 与原曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 的误差 ε 大于给定公差，则可将其分割，再对每段子曲线分别降阶．误差上界的计算方法如下：将 $\overline{\boldsymbol{P}}_m^{*}(t)$ 经 $n-m$ 次升阶得曲线 $\boldsymbol{Q}_n(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{Q}_i$，则 $\mathbf{Q}_n=(\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}_m^{*}$． 于是

$$\varepsilon=\left\|\boldsymbol{P}_n(t)-\overline{\boldsymbol{P}}_m^{*}(t)\right\|=\left\|\boldsymbol{P}_n(t)-\boldsymbol{Q}_n(t)\right\|=\left\|\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i-\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{Q}_i\right\|\le\max_{i=0,\cdots,n}\left\|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{Q}_i\right\|.$$

下列两图是两条十次 Bézier 曲线用本节算法降阶的情形．图 14.4.1、图 14.4.2 中的逼近曲线分别不插值或插值原曲线两端点．实线(虚线)表示原曲线(逼近曲线)及其控制多边形．

图 14.4.1 十次 Bézier 曲线的降阶(未插值端点)

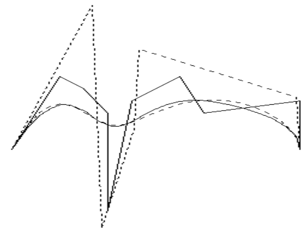

图 14.4.2 十次 Bézier 曲线的降阶(插值端点)

14.5 保端点高阶插值的 Bézier 曲线一次性降多阶逼近

首先我们不加证明地给出三个引理，再由引理 14.5.1 得出定理 14.5.1.

引理 14.5.1 m 次 Bernstein 基 $B_i^m(t)$ $(0 \le t \le 1)$ 可表示为

$$B_i^m(t) = \sum_{j=i}^{n+i-m} B_j^n(t) b_{i,j}, \qquad n > m,\ i = 0,1,\cdots,m, \tag{14.5.1}$$

$$b_{ij} = \binom{m}{i}\binom{n-m}{j-i}\Big/\binom{n}{j},\ \ i = 0,1,\cdots,m;\ \ j = 0,1,\cdots,n. \tag{14.5.2}$$

引理 14.5.2 设 $r + p + 1 < n,\quad N = n - (r + p + 2)$，则

$$\sum_{i=r+1}^{n-p-1} B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i = (1-t)^{p+1} t^{r+1} \sum_{i=0}^{N} B_i^N(t)\widetilde{\boldsymbol{P}}_i, \tag{14.5.3}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_i = \boldsymbol{P}_{r+i+1}\binom{n}{r+i+1}\Big/\binom{N}{i}, \qquad i = 0,1,\cdots,N, \tag{14.5.4}$$

$$\boldsymbol{P}_i = \widetilde{\boldsymbol{P}}_{i-r-1}\binom{N}{i-r-1}\Big/\binom{n}{i}, \qquad i = r+1, r+2,\cdots,n-p-1. \tag{14.5.5}$$

引理 14.5.3 设 b_{ij} 由(14.5.2)定义，记 $H_k(t) = \cos(k \arccos t)(-1 \le t \le 1)$ 为 k 次 Chebyshev 多项式，$k = 0,1,\cdots,n$，则它们与 n 次 Bernstein 基的相互线性表示可写成矩阵式

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{B}_n, \qquad \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_{n\times n}^{-1}\mathbf{H}_n = \mathbf{C}_{n\times n}\mathbf{H}_n, \tag{14.5.6}$$

$$\mathbf{H}_n = \left(H_0(2t-1), H_1(2t-1),\cdots,H_n(2t-1)\right)^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{B}_n = \left(B_0^n(t), B_1^n(t),\cdots,B_n^n(t)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{14.5.7}$$

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \left(A_{kj}\right)_{n\times n},\ \ A_{kj} = \sum_{i=\max(0,\,j+k-n)}^{\min(j,k)} (-1)^{k+i} b_{ij}\binom{2k}{2i}\Big/\binom{k}{i}. \tag{14.5.8}$$

定理 14.5.1 设 $r + p < m < n$，n 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 即(1.3.2)表为

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i \equiv \boldsymbol{Q}(t) = \sum_{i=0}^{r} B_i^m(t)\boldsymbol{Q}_i + \sum_{i=r+1}^{n-p-1} B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}} + \sum_{i=m-p}^{m} B_i^m(t)\boldsymbol{Q}_i \tag{14.5.9}$$

的充要条件是(14.5.10)—(14.5.12)同时成立：

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_0 = \dfrac{1}{b_{0,0}}\boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{Q}_j = \dfrac{1}{b_{j,j}}\left(\boldsymbol{P}_j - \displaystyle\sum_{i=\max(0,\,j-(n-m))}^{j-1} b_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\right), & j = 1,2,\cdots,r, \\ \boldsymbol{Q}_m = \dfrac{1}{b_{m,n}}\boldsymbol{P}_n,\ \boldsymbol{Q}_{m-j} = \dfrac{1}{b_{m-j,n-j}}\left(\boldsymbol{P}_{n-j} - \displaystyle\sum_{i=\max(0,\,j-(n-m))}^{j-1} b_{m-i,n-j}\boldsymbol{Q}_{m-i}\right), & j = 1,2,\cdots,p, \end{cases} \tag{14.5.10}$$

当 $m - p > n + r - m$ 时

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j - \sum_{i=0}^{r} b_{i,j}\boldsymbol{Q}_i, & j = r+1, r+2, \cdots, n+r-m, \\ \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j, & j = n+r-m+1, n+r-m+2, \cdots, \max(m-p-1, n+r-m+1), \\ \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j - \sum_{i=0}^{p} b_{m-i,j}\boldsymbol{Q}_{m-i}, & j = m-p, m-p+1, \cdots, n-p-1, \end{cases} \tag{14.5.11}$$

当 $m-p \le n+r-m$ 时

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j - \sum_{i=0}^{r} b_{i,j}\boldsymbol{Q}_i, & j = r+1, r+2, \cdots, \max(m-p-1, r+1), \\ \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j - \sum_{i=0}^{r} b_{i,j}\boldsymbol{Q}_i - \sum_{i=0}^{p} b_{m-i,j}\boldsymbol{Q}_{m-i}, & j = m-p, m-p+1, \cdots, n+r-m, \\ \boldsymbol{P}_j^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{P}_j - \sum_{i=0}^{p} b_{m-i,j}\boldsymbol{Q}_{m-i}, & j = \min(n+r-m+1, n-p-1), n+r-m+2, \cdots, n-p-1. \end{cases} \tag{14.5.12}$$

这里 $n-p-1$ 与 m 之间无大小限制，$\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^{r}, \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=m-p}^{m}$ 为对于曲线 $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{P}_n(t)$ 作降阶逼近的 m 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{Q}_m(t) = \sum_{i=0}^{m} B_i^n(t)\boldsymbol{Q}_i$ 在首末端点附近的部分控制顶点，$\{\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}\}_{i=r+1}^{n-p-1}$ 为待变动的辅助控制顶点，且必有

$$\frac{\mathrm{d}^{\lambda}\boldsymbol{Q}_m(0)}{\mathrm{d}t^{\lambda}} = \frac{\mathrm{d}^{\lambda}\boldsymbol{P}_n(0)}{\mathrm{d}t^{\lambda}},\ \lambda = 0,1,\cdots,r;\quad \frac{\mathrm{d}^{\mu}\boldsymbol{Q}_m(1)}{\mathrm{d}t^{\mu}} = \frac{\mathrm{d}^{\mu}\boldsymbol{P}_n(1)}{\mathrm{d}t^{\mu}},\ \mu = 0,1,\cdots,p. \tag{14.5.13}$$

即曲线 $\boldsymbol{Q}_m(t)$ 对于曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 保首末端点 (r, p) 阶插值.

证 把(14.5.1)代入(14.5.9)的右端，改写为矩阵形式，记 $b_{ij} = 0$ ($j < i$ 或 $j - i > n - m$)，得

$$\left(\boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_r\right)\begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-m} & & & \\ & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-m} & b_{1,n-m+1} & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & b_{r,r} & b_{r,r+1} & & \cdots & b_{r,n-m+r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0^n \\ B_1^n \\ \vdots \\ B_{n+r-m}^n \end{pmatrix} + \left(\boldsymbol{P}_{r+1}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{P}_{r+2}^{\mathrm{I}}, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-p-1}^{\mathrm{I}}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} B_{r+1}^n \\ B_{r+2}^n \\ \vdots \\ B_{n-p-1}^n \end{pmatrix} + \left(\boldsymbol{Q}_{m-p}, \cdots, \boldsymbol{Q}_{m-1}, \boldsymbol{Q}_m\right)\begin{pmatrix} b_{m-p,m-p} & \cdots & & b_{m-p,n-p} & & \\ & & & \cdots & & \\ & b_{m-1,m-1} & & \cdots & b_{m-1,n-1} & \\ & & b_{m,m} & \cdots & b_{m,n-1} & b_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{m-p}^n \\ \vdots \\ B_{n-1}^n \\ B_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_r, \boldsymbol{P}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{P}_{n-p-1}, \boldsymbol{P}_{n-p}, \cdots, \boldsymbol{P}_n\right)\left(B_0^n \quad \cdots \quad B_{n-1}^n \quad B_n^n\right)^{\mathrm{T}},$$

从而由 Bernstein 基的线性无关性，即可推知(14.5.10)—(14.5.12)的必要性和充分性.

其次由(14.5.1)和(14.5.10)有

$$\boldsymbol{Q}_m(t) = \sum_{j=0}^{r} B_j^n(t)\boldsymbol{P}_j + \sum_{j=r+1}^{n-p-1} B_j^n(t)\left(\sum_{i=\max(0, j-(n-m))}^{\min(j,m)} b_{i,j}\boldsymbol{Q}_i\right) + \sum_{j=n-p}^{n} B_j^n(t)\boldsymbol{P}_j\ .$$

可见(14.5.13)成立．证毕.

推论 14.5.1 若 $m = n-1,\ r = p = \left[(m-1)/2\right]$，且当 m 为奇数时，取 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^{m}$ 如(14.5.10)所示；当 m 为偶数时，取 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^{m/2-1}, \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=m/2+1}^{m}$ 如(14.5.10)所示，且取 $\boldsymbol{Q}_{m/2} = (\hat{\boldsymbol{Q}}^L + \hat{\boldsymbol{Q}}^R)/2$，其中 $\hat{\boldsymbol{Q}}^L = \left(n\boldsymbol{P}_{r+1} - (r+1)\boldsymbol{Q}_r\right)/\left(n-(r+1)\right)$，$\hat{\boldsymbol{Q}}^R = \left(n\boldsymbol{P}_{m-p} - (n-m+p)\boldsymbol{Q}_{m-p}\right)/\left(m-p\right)$．则以

$\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^m$ 作为控制顶点的 m 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{Q}_m(t)$，即为 L.Piegl 在文献[14]中所得的对于曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 降阶一次的曲线，此时 $\boldsymbol{Q}_m(t)$ 在首末端点各插值原曲线的 $[(m-1)/2]$ 阶导矢，且 m 为奇数时逼近误差恰为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{I}}_{n/2}B^n_{n/2}(t)$.

推论 14.5.2 若 $m=r+p+1$，且取 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^m$ 如(14.5.10)式所示，则以 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^m$ 为控制顶点的 m 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{Q}_m(t)$ 是对于曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 的最简单的保首末端点 (r,p) 阶插值的降阶逼近，且是 Hermite 插值曲线，即 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^m$ 均可由 Hermite 插值条件求出，而降阶逼近误差为 $\sum_{i=r+1}^{n-p-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}B_i^n(t)$.

因 $m=r+p+1$ 的情形是平凡的，$m<r+p+1$ 时不存在满足所给端点插值条件的降阶逼近，所以我们只对 $m>r+p+1$ 的情形构造降阶逼近曲线．由定理 14.5.1 可求得 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^r$，$\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=m-p}^m$，$\{\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}\}_{i=r+1}^{n-p-1}$，下面我们利用 Chebyshev 多项式逼近，用 $\sum_{i=r+1}^{m-p-1}B_i^m(t)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{IV}}$ 对 $\sum_{i=r+1}^{n-p-1}B_i^n(t)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}$ 进行端点不插值的降阶逼近，这里 $\{\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{IV}}\}_{i=r+1}^{m-p-1}$ 是待求的控制顶点.

首先取引理 14.5.2 中的 $\boldsymbol{P}_i$ 为 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{I}}$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_i$ 为 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}$，则

$$\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{II}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{I}}_{r+1+i}\cdot\binom{n}{r+1+i}\Big/\binom{N}{i},\quad i=0,1,\cdots,N . \tag{14.5.14}$$

记 $\mathbf{P}_N^{\mathrm{II}}=\left(\boldsymbol{P}_0^{\mathrm{II}},\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{II}},\cdots,\boldsymbol{P}_N^{\mathrm{II}}\right)$，则由引理 14.5.3 知

$$\mathbf{P}_N^{\mathrm{II}}\mathbf{B}_N=\mathbf{P}_N^{\mathrm{II}}\mathbf{C}_{N\times N}\mathbf{H}_N=\mathbf{P}_N^{\mathrm{III}}\mathbf{H}_N . \tag{14.5.15}$$

设 $\mathbf{P}_N^{\mathrm{III}}=\mathbf{P}_N^{\mathrm{II}}\mathbf{C}_{N\times N}=\left(\boldsymbol{P}_0^{\mathrm{III}},\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{III}},\cdots,\boldsymbol{P}_N^{\mathrm{III}}\right)$，$M=m-(r+p+2)$，取 $\mathbf{P}_N^{\mathrm{III}}$ 的前 M 个元素来产生 M 次 Chebyshev 多项式曲线，则由 Chebyshev 多项式逼近理论[20]，此时 $\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{H}_M$ 为逼近多项式 $\mathbf{P}_N^{\mathrm{II}}\mathbf{B}_N$ 的所有 M 次多项式中的近似最佳一致逼近，又因 $\max\limits_{0\le t\le 1}\|H_i(2t-1)\|\le 1$，此时的逼近误差为 $\Delta(\mathbf{H},\mathbf{B})=\left(\|\boldsymbol{P}_{M+1}^{\mathrm{III}}\|+\|\boldsymbol{P}_{M+2}^{\mathrm{III}}\|+\cdots+\|\boldsymbol{P}_N^{\mathrm{III}}\|\right)$.

下面将 $\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{H}_M$ 返回到 Bernstein 基下的对应 Bézier 表示．由引理 14.5.3 可知

$$(1-t)^{p+1}t^{r+1}\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{H}_M=(1-t)^{p+1}t^{r+1}\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{A}_{M\times M}\mathbf{B}_M ,$$

$$\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{A}_{M\times M}=\left(\sum_{j=0}^M\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{III}}A_{j,0},\sum_{j=0}^M\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{III}}A_{j,1},\cdots,\sum_{j=0}^M\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{III}}A_{j,M}\right).$$

但由引理 14.5.2 得

$$(1-t)^{p+1}t^{r+1}\mathbf{P}_M^{\mathrm{III}}\mathbf{A}_{M\times M}\mathbf{B}_M=\sum_{i=r+1}^{m-p-1}B_i^m(t)\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{IV}} ,$$

$$\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{IV}}=\sum_{j=0}^M\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{III}}A_{j,i-r-1}\binom{M}{i-r-1}\Big/\binom{m}{i},\quad \begin{array}{l} i=r+1,r+2,\cdots,m-p-1,\\ M=m-(r+p+2), \end{array} \tag{14.5.16}$$

这样我们可得如下的

定理 14.5.2 给定以 $\{\boldsymbol{P}_i\}_{i=0}^n$ 为控制顶点的一条 n 次 Bézier 多项式曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$，设 $r+p+1<m<n$，若分别取 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^r$，$\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=m-p}^m$ 如(14.5.10)式所示，取 $\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{IV}}$，$i=r+1,r+2,\cdots,m-p-1$，由(14.5.11)，(14.5.12)，(14.5.14)—(14.5.16)所决定，则由 $\{\boldsymbol{Q}_i\}_{i=0}^m$ 作为控制顶点所生成的 m 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{Q}_m(t)$ 为保首末端点 (r,p) 阶插值的对曲线 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 的近似最佳一致降阶逼近，其降阶逼近误差为

$$\varepsilon = d\left(\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{Q}_m\right) = \max_{0\le t\le 1}((1-t)^{p+1}t^{r+1})\sum_{i=M+1}^{N}\left\|\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{III}}\right\| = \frac{(p+1)^{p+1}(r+1)^{r+1}}{(p+r+2)^{p+r+2}}\sum_{i=M+1}^{N}\left\|\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{III}}\right\|.$$

例 14.5.1 如图 14.5.1, 14.5.2 中实线所示为一条十五次 Bézier 曲线，应用定理 14.5.2 一次性地对其降五阶后所得保端点(r, p)阶插值的十次 Bézier 逼近曲线分别如图中虚线所示. 将其与分割算法相结合，获得了快速的收敛效果.

图 14.5.1 十五次 Bézier 曲线降五阶, (r, p)=(1,1)

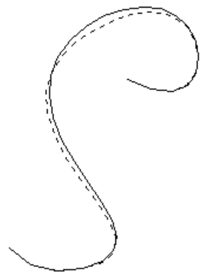

图 14.5.2 十五次 Bézier 曲线降五阶, (r, p)=(2,2)

主要文献

[HSM, SJG, JTG, WGZ, 98] Hu Shimin, Sun Jiaguang, Jin Tongguang, Wang Guozhao, Approximate degree reduction of Bézier curves, Tsinghua Science and Technology, 1998, 3(2): 997-1000

[HSM, 96] 胡事民，CAD 系统数据通讯中若干问题的研究, 浙江大学博士学位论文，1996 年 4 月，杭州

[CGD, WGJ, 2000a] 陈国栋，王国瑾，基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线降阶逼近，软件学报，即将发表

[CGD, WGJ, 2000b] 陈国栋，王国瑾，带端点插值条件的 Bézier 曲线降多阶逼近, 软件学报，2000，11(9): 1202-1206

参考文献

1 Forrest, A.R., Interactive interpolation and approximation by Bézier curve, The Computer Journal, 1972, 15(1): 71-79

2 Farin, G., Algorithms for rational Bézier curves, Computer Aided Design, 1983, 15(2): 73-77

3 Park, Y., Choi, U.J., The error analysis for degree reduction of Bézier curves, An international Journal of Computers and Mathematics with Application, 1994, 27(12): 1-6

4 Danneberg, L., Nowacki, H., Approximate conversion of surface representations with polynomial bases, Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(2): 123-131

5 Hoschek, J., Approximate conversion of spline curves, Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1): 59-66

6 Moore, D., Warren, J., Least-square approximation to Bézier curves and surfaces, in: James Arvo ed., *Computer Gemes (II)*, Academic Press, New York, 1991

7 Lodha, S., Warren, J., Degree reduction of Bézier simplexes, Computer Aided Design, 1994, 26(10): 735-746

8 Watkins, M., Worsey, A., Degree reduction for Bézier curves, Computer Aided Design, 1988, 20(7): 398-405

9 Lachance, M.A., Chebyshev economization for parametric surfaces, Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(3): 195-208

10 Eck, M., Degree reduction of Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(4): 237-251

11 Brunnett, G., Schreiber, T., Braun, J., The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(8): 773-788

12 Eck, M., Least squares degree reduction of Bézier curves, Computer Aided Design, 1995, 27(11): 845-851

13 王仁宏，梁学章，多元函数逼近，科学出版社，1988

14 Piegl, L., Tiller, W., Algorithm for degree reduction of B-spline curves. Computer Aided Design, 1995, 27(2): 101-110

15 Bogacki, P., Weinstein, S., Xu, Y., Degree redution of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation, Computer Aided Design, 1995, 27(9): 651-661

16 Sederberg, T.W., Chang, G.Z., Best linear common divisors for approximation degree reduction, Computer Aided Design, 1993, 25(3): 163-168

17 陈发来，带约束的最佳线性公因子及有理曲线的降阶逼近，高等学校计算数学学报，计算几何专辑，1993, 14-21

18 Wolters, H.J., Wu, G., Farin, G., Degree reduction of B-Spline curves, Computing, 1998, Supplement 13: 235-241

19 何旭初, 广义逆矩阵的基本理论和计算方法, 上海科学技术出版社，1985

20 Fox, L., Parker, I.B., *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford University Press, London, 1968