

第九章 曲线曲面的插值与拟合

在计算机辅助几何设计中, 曲线曲面的常用设计方法大致可分为逼近 (Approximation)、插值 (Interpolation)、拟合 (Fitting) 这三大类. 所谓逼近即参数化特征造型, 人机交互地改变特征网格, 来得到由网格所控制的理想的曲线曲面. 后两类方法与逼近方法明显不同, 其特征网格并非设计者事先确定, 而是根据从产品模型或仿制样品表面测量所得的三维型值点集 (Data points, 也称为数据点集) 来反求得到的. 这一技术属于反求工程 (Reverse Engineering) 的范畴. 当曲面严格通过型值点, 我们将其称为插值; 当曲面靠近型值点, 我们将其称为拟合. 造船和航空工业中的放样工艺基本上也属于一种光顺性的拟合. 早在 1975 年, 齐东旭教授^[1]等就提出用一种数值磨光的方法进行曲线拟合. 从总体上来看, 插值与拟合的信息不但有曲面上点的位置, 而且可以是曲面的法向、曲率、跨界导矢等. 有关插值与拟合的代表性方法由 Ferguson^[2], Kawabe^[3], Barsky^[4], Choi^[5], Peters^[6], 刘鼎元^[7, 8], Bohm^[9], Farin^[10], Peters^[11] 等人所给出, 其中文献[2][3]通过插值空间点阵生成汽车车身曲面; [4]用均匀三次 B 样条曲面插值空间型值点; [5][6]实现了曲面光顺插值; [7][8]给出了 Bézier 曲面拟合或 B 样条曲线的光顺拟合. [9]给出了三角域上的曲面片插值; [10][11]讨论曲面法向的插值. 但这些方法还不能完全满足实际生产的需要.

1. 在飞机机身的模型设计中, 要求插值曲线夹有角点 (尖点 (cusp)) 和直线, 或插值曲面夹有棱线 (尖边 (crease)), 平面和直纹面. 换言之, 用 B 样条作为工具时要求曲线曲面的连续阶在型值点处是可调的. 那么, 如何选取 B 样条基的重节点? 如何建立与重节点技术相配套的反求顶点方程? 又如何设定与型值点对应的曲线或曲面参数呢?

2. 在汽车车身设计中, 要求曲面拟合油泥模型上的实测数据点, 有时又要求曲面插值车门门框线上的一批数据点. 这种带有严格约束条件的曲线曲面拟合, 不妨称之为准拟合, 它们在与安装、定位、装配、联接相关的精密机械制造中时有发生, 需要数学建模.

3. 实际表明, 仅仅考虑型值点的拟合或插值去反求特征网格, 所得到的曲线曲面往往是不光顺的, 必须把形状弯度与位置偏差一起作为最小二乘的求解目标. 此外, 工程中还常常提出拟合曲面要与已知曲面作光滑拼接的课题. 那么, 既要光顺地拟合三维型值点, 又要插值其中部分点, 还要与已知曲面作光滑拼接的曲面应如何设计呢?

在与我国几家著名的飞机制造公司和航空工业研究所的长期科研合作中, 我们对以上三个方面的实际问题分别设计出复杂曲线曲面的 B 样条重节点插值算法, 复杂曲线曲面的 Bézier 样条插值算法, B 样条曲线曲面的光顺准拟合算法, 以及与已知 Bézier 曲面作 C^1 连续拼接的 Bézier 曲面光顺准拟合算法. 本章系统地介绍这些科研成果. 其中第 1—5 节和第 8 节内容取材于 [XPJ, SXJ, 84], [WGJ, WGZ, 99]; 第 6, 7 节内容取材于 [WGJ, WGZ, 99], [XPJ, WHN, 84]; 第 9, 10 节内容取材于 [WGJ, WZW, SHH, 98]; 第 11 节内容取材于 [SMZ, WGJ, SHH, 98].

9.1 B 样条曲线曲面的节点插值法

问题 9.1.1 给定数据点列 $\{Q_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3$, 要求作一条三次 B 样条曲线

$$p(t) = \sum_j N_{j,4}(t) p_{j+2}, \quad t_0 \leq t \leq t_n, \quad (9.1.1)$$

插值这些数据点, 且使得 $N_{j,4}(t)$ 是定义在节点向量 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 上的 B 样条基. 若要求曲线 C^2 连续, 我们称之为 (a) 简单曲线插值问题; 若要求曲线在某些型值点的连续阶为 0 (这点是角点, 也称之为尖点), 或为 1 (例如这点与直线相连), 而其余为 C^2 连续, 我们称之为 (b) 复杂曲线插值问题.

问题 9.1.2 给定数据点阵 $\{Q_{ij}\}_{i=0, j=0}^{m,n} \in \mathbb{R}^3$, 要求作一张双三次 B 样条曲面

$$p(u, v) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} N_{\alpha,4}(u) N_{\beta,4}(v) p_{\alpha+2, \beta+2}, \quad u_0 \leq u \leq u_m, \quad v_0 \leq v \leq v_n, \quad (9.1.2)$$

插值这些数据点, 且使得 $N_{\alpha,4}(u)$, $N_{\beta,4}(v)$ 分别是定义在 $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ 上的 B 样条基. 若要求曲面夹有棱线(尖边)或平面和直纹面, 我们称其为(b)复杂曲面插值问题; 反之, 称其为(a)简单曲面插值问题.

为便于求解并简化计算, 我们提出节点插值法.

定义 9.1.1 在求解问题 9.1.1 和 9.1.2 时, 假定让型值点 \mathbf{Q}_i 对应的参数 t_i , 型值点 \mathbf{Q}_{ij} 对应的参数 u_i 和 v_j 都作为定义 B 样条基的节点, 则这种求解法称为节点插值法.

由 B 样条基的局部支柱性可知, 在区间 (t_i, t_{i+1}) 上仅有 $j = i-3, i-2, i-1, i$ 这样四个基 $N_{j,4}(t)$ 非零. 但由 de Boor-Cox 公式易知 $N_{i,k}(t_i) = [(t_{i+k} - t_i)/(t_{i+k} - t_{i+1})]N_{i+1,k-1}(t_i) = 0$, $k = 4, 3, 2$, 因而在节点 $t = t_i$ 上其实只有三个基函数非零. 利用这一性质可使反求控制顶点的方程组系数矩阵呈三对角型, 使计算简捷, 并使求导计算简单.

在具体确定参数 t_i, u_i, v_j 之数值的时候, 首先, 我们应用性质 2.6.2, 取

$$t_{-2} = t_{-1} = t_0, \quad t_n = t_{n+1} = t_{n+2}; \quad (9.1.3)$$

$$u_{-2} = u_{-1} = u_0, \quad u_m = u_{m+1} = u_{m+2}; \quad v_{-2} = v_{-1} = v_0, \quad v_n = v_{n+1} = v_{n+2}; \quad (9.1.4)$$

可使插值曲线通过控制多边形的首末端点并切于端边, 使插值曲面通过控制网格的四个角点并切于网格边线. 其次, 为使曲线光顺性较好, 可用型值点间的累加弦长法决定内节点值, 即

$$t_0 = 0, \quad t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{Q}_{i-1}\mathbf{Q}_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.5)$$

对曲面取型值点网格间距之平均值为内节点间距, 即

$$u_i = u_{i-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \|\mathbf{Q}_{i-1,j}\mathbf{Q}_{ij}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad v_j = v_{j-1} + \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \|\mathbf{Q}_{i,j-1}\mathbf{Q}_{ij}\|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.6)$$

或者取某特定型值点网格间距为内节点间距, 即取特定的 j^*, i^* , 有

$$u_i = u_{i-1} + \|\mathbf{Q}_{i-1,j^*}\mathbf{Q}_{ij^*}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad v_j = v_{j-1} + \|\mathbf{Q}_{i^*,j-1}\mathbf{Q}_{i^*j}\|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.7)$$

9.2 C^2 连续的三次 B 样条插值曲线

考察问题 9.1.1 (a). 按插值条件, 在节点 t_i 处可建立对曲线(9.1.1)反求控制顶点的方程

$$\mathbf{p}(t_i) = \sum_{j=i-3}^{i-1} N_{j,4}(t_i) \mathbf{p}_{j+2} = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (9.2.1)$$

这是有 $n+3$ 个未知量, $n+1$ 个方程的方程组, 添加两个端点条件有唯一解. 写为矩阵式即

$$\mathbf{NP} = \mathbf{Q}, \quad (9.2.2)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ N_{-3,4}(t_0) & N_{-2,4}(t_0) & N_{-1,4}(t_0) & \\ & N_{-2,4}(t_1) & N_{-1,4}(t_1) & N_{0,4}(t_1) \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & N_{n-4,4}(t_{n-1}) & N_{n-3,4}(t_{n-1}) & N_{n-2,4}(t_{n-1}) \\ & & & N_{n-3,4}(t_n) & N_{n-2,4}(t_n) & N_{n-1,4}(t_n) \\ & & & & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 \end{pmatrix}, \quad (9.2.3)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_{-1}, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1})^T, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{-1}, \mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_{n+1})^T. \quad (9.2.4)$$

这里 f_k, g_k ($k = 1, 2, 3, 4$), $\mathbf{Q}_{-1}, \mathbf{Q}_{n+1}$ 由端点条件决定, 见表 9.2.1. 又由性质 2.6.2 知

$$N_{-3,4}(t_0) = N_{n-1,4}(t_n) = 1; N_{j,4}(t_0) = 0, j = -2, -1; N_{j,4}(t_n) = 0, j = n-3, n-2. \quad (9.2.5)$$

系数矩阵 \mathbf{N} 中的其余基函数取值可由 de Boor-Cox 公式算出:

$$\begin{cases} N_{i-3,4}(t_i) = (t_{i+1} - t_i)^2 / [(t_{i+1} - t_{i-2})(t_{i+1} - t_{i-1})], \\ N_{i-2,4}(t_i) = \frac{(t_i - t_{i-2})(t_{i+1} - t_i)}{(t_{i+1} - t_{i-2})(t_{i+1} - t_{i-1})} + \frac{(t_{i+2} - t_i)(t_i - t_{i-1})}{(t_{i+2} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})}, \\ N_{i-1,4}(t_i) = (t_i - t_{i-1})^2 / [(t_{i+2} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})], \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (9.2.6)$$

一般对换 \mathbf{N} 中首 2 行并对换 \mathbf{N} 中末 2 行, 能把 \mathbf{N} 化为三对角阵, 从而用追赶法求解. 在抛物端点条件下, 因 f_4 和 $N_{0,4}(t_1)$ 分母相同, 易于化 f_4 为 0, 末端情况类似.

由于 $\{N_{j,4}(t)\}_{j=-3}^{n-1}$ 构成参数区间上对于分割 $t_{-3} \leq t_{-2} \leq t_{-1} \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq t_{n+3}$ 的一组 B 样条基, 此样条函数空间的维数是 $n+3$, 因而我们可由 $n+3$ 个条件唯一地决定一个三次样条函数或一条三次样条曲线.

表 9.2.1 中端点条件的计算公式可由 B 样条曲线求导算法 2.4.2 来推导得出. 夹持端情况的端点切矢方向一般由测量得到, 另外也可用抛物线算法得到. 设过三点 \mathbf{Q}_i ($i = 0, 1, 2$) 的首段曲线为抛物线 $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{S}(t)$ 由 $\mathbf{S}(t_i) = \mathbf{Q}_i, i = 0, 1, 2$ 唯一确定, 于是

$$\mathbf{S}'(t_0) / [(t_1 + t_2 - 2t_0)/(t_1 - t_0)] \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 - [(t_1 - t_0)/(t_2 - t_1)] \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2. \quad (9.2.7)$$

切矢长度一般取单位长度, 可使曲线光顺性较好.

表 9.2.1 三次 B 样条曲线插值的端条件计算公式 ($h_i = t_i - t_{i-1}$)

首端条件	f_1	f_2	f_3	f_4	\mathbf{Q}_{-1}
夹持端, $\mathbf{p}'(t_0)$ 已知	$-3h_1^{-1}$	$3h_1^{-1}$	0	0	$\mathbf{p}'(t_0)$
自由端, $\mathbf{p}''(t_0) = \mathbf{0}$	$h_1 + h_2$	$-(2h_1 + h_2)$	h_1	0	$\mathbf{0}$
抛物端, $\mathbf{p}'''(t) \equiv \mathbf{0},$ $t_0 \leq t \leq t_1$	h_1^{-2}	$-h_1^{-2} -$ $h_1^{-1}(h_1 + h_2)^{-1}$ $-(h_1 + h_2)^{-2}$	$h_1^{-1}(h_1 + h_2)^{-1}$ $+(h_1 + h_2)^{-2}$ $+(h_1 + h_2)^{-1}$ $\times (h_1 + h_2 + h_3)^{-1}$	$-(h_1 + h_2)^{-1}$ $\times (h_1 + h_2 + h_3)^{-1}$	$\mathbf{0}$
末端条件	g_1	g_2	g_3	g_4	\mathbf{Q}_{n+1}
夹持端, $\mathbf{p}'(t_n)$ 已知	$3h_n^{-1}$	$-3h_n^{-1}$	0	0	$\mathbf{p}'(t_n)$
自由端, $\mathbf{p}''(t_n) = \mathbf{0}$	$h_{n-1} + h_n$	$-(2h_n + h_{n-1})$	h_n	0	$\mathbf{0}$
抛物端, $\mathbf{p}'''(t) \equiv \mathbf{0},$ $t_{n-1} \leq t \leq t_n$	$-h_n^{-2}$	$h_n^{-2} +$ $h_n^{-1}(h_{n-1} + h_n)^{-1}$ $+(h_{n-1} + h_n)^{-2}$	$-h_n^{-1}(h_{n-1} + h_n)^{-1}$ $-(h_{n-1} + h_n)^{-2}$ $-(h_{n-1} + h_n)^{-1}$ $\times (h_{n-2} + h_{n-1} + h_n)^{-1}$	$(h_{n-1} + h_n)^{-1}$ $\times (h_{n-2} + h_{n-1} + h_n)^{-1}$	$\mathbf{0}$

总结以上的分析过程, 我们得到

算法 9.2.1 (简单曲线三次 B 样条插值)

两端通过首末型值点的 C^2 连续的三次 B 样条插值曲线可由求解方程组(9.2.2)得到, 其中两端各取为三重节点, 各变量如(9.1.3), (9.1.5), (9.2.3) — (9.2.7)所示, 端条件如表 9.2.1 所示.

9.3 C^1 和 C^0 连续的三次 B 样条插值曲线

9.3.1 选取二重节点和三重节点的准则

考察问题 9.1.1(b). 为使曲线在某些型值点上连续阶降为 1 或 0, 由 § 2.6 原理可知, 这只要在我们的节点插值法中, 把这些型值点所对应的参数设为 B 样条基的多重节点. 相应地, 也就是把这些型值点看作多重型值点. 具体来说, 当欲使设计曲线在某个型值点只有切线连

续而曲率不连续时, 可令这点对应的参数是二重节点; 当欲使设计曲线在某个型值点形成角点时, 可令这点对应的参数是三重节点.

先考察二重节点的特例——插值曲线夹有一段直线 AB . 如图 9.3.1, 我们可取点 A, B 各为二重型值点, 即令 $A = Q_{i-1} = Q_i$, $B = Q_{i+1} = Q_{i+2}$, 相应地取 $t_{i-1} = t_i, t_{i+1} = t_{i+2}$, 于是 $N_{i-1,4}(t)$ 与 $N_{i-2,4}(t)$ 的非零域分别是 $(t_i, t_{i+3}), (t_{i-2}, t_{i+1})$, $N_{i-1,4}(t_i) = N_{i-1,4}(t_i-) = 0$, $N_{i-2,4}(t_{i+1}) = 0$ (见图 9.3.2), 同时 $N_{i,3}(t)$ 与 $N_{i-1,3}(t)$ 的非零域分别是 $(t_i, t_{i+3}), (t_i, t_{i+2})$, $N_{j,3}(t_i) = N_{j,3}(t_i-) = 0, j = i-1, i$. 由此, 利用算法 2.4.2 可得曲线(9.1.1)在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内一段的反求方程

$$\begin{cases} p(t_i) = N_{i-3,4}(t_i)p_{i-1} + N_{i-2,4}(t_i)p_i = Q_i, \\ p(t_{i+1}) = N_{i-1,4}(t_{i+1})p_{i+1} + N_{i,4}(t_{i+1})p_{i+2} = Q_{i+1}, \\ p'(t_i) = 3 \sum_{j=i-2}^i N_{j,3}(t_i) \frac{p_{j+2} - p_{j+1}}{t_{j+3} - t_j} = 3N_{i-2,3}(t_i) \frac{p_i - p_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-2}} // p_{i-1}p_i, \\ p'(t_{i+1}) // p_{i+1}p_{i+2}. \end{cases} \quad (9.3.1)$$

显然, 三次多项式曲线 $p(t) (t_i \leq t \leq t_{i+1})$ 可由上式左端四个条件唯一决定. 我们看到, 只要取

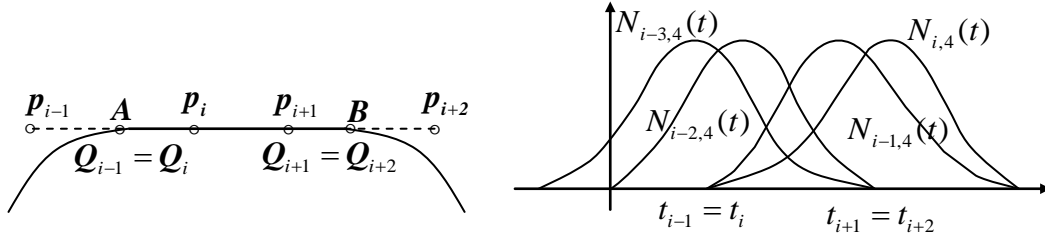


图 9.3.1 夹直线的插值曲线设计

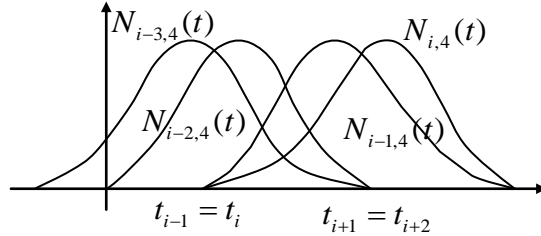


图 9.3.2 两个二重节点的三次 B 样条基

$p'(t_i) // p'(t_{i+1}) // AB$, 则求解所得的曲线段必是以 A, B 两点为端点的直线段, 且 $p_{j+2}, j = i-3, i-2, i-1, i$ 四点共线.

再考察三重节点情形. 如图 9.3.3, 要造成一个角点, 可取三重型值点 $Q_{i-1} = Q_i = Q_{i+1}$, 相应地有 $t_{i-1} = t_i = t_{i+1}$, 由推论 2.6.1 知 $p(t_i) = p_i$ 是曲线的角点.

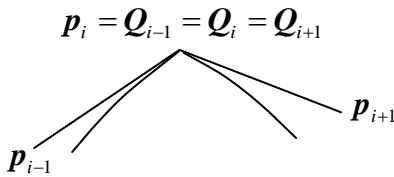


图 9.3.3 夹角点的插值曲线设计

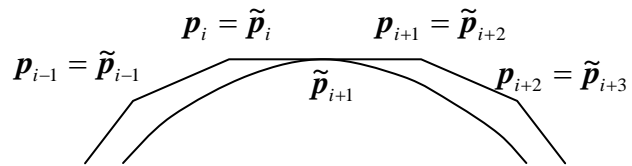


图 9.3.4 二重节点变成三重节点时引起控制顶点的变化

9.3.2 以重节点为界对插值曲线分段反求控制顶点的原理和算法

由定理 2.8.2 可知, 当 $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} < t_{i+2}$, 即 t_i 原为二重节点时, 再在 t_i 上嵌入节点 $t' = t_i = t_{i+1}$, 使 t_i 成为三重节点, 这时曲线形状不变, 但控制顶点变成 \tilde{p}_j ,

$$\begin{cases} \tilde{p}_j = p_j, & j \leq i, \\ \tilde{p}_{i+1} = [(t_i - t_{i-1})/(t_{i+2} - t_{i-1})]p_{i+1} + [(t_{i+2} - t_i)/(t_{i+2} - t_{i-1})]p_i, \\ \tilde{p}_j = p_{j-1}, & j \geq i+2, \end{cases} \quad (9.3.2)$$

(见图 9.3.4). 也就是说, 当把二重节点 $t_i = t_{i+1}$ 变成三重节点时, 控制顶点的改变只是在 p_i 和

p_{i+1} 之间增加了一个新顶点, 此顶点位于 p_i 和 p_{i+1} 的连线上, 且由性质 2.6.2 可知, 曲线过此顶点且在此点与边 $p_i p_{i+1}$ 相切. 可见, 若有二重节点, 只要把这点当作三重节点, 分别作为左右两段曲线的端点去反求控制顶点, 然后在反求得到的顶点集合中去掉这个新顶点(三重节点对应的三重型值点), 节点就回到二重了. 具体做法可归纳为

算法 9.3.1 (二重节点处曲线分段反解算法)

设 $t_i = t_{i+1}$, $Q_i = Q_{i+1}$, 令 $\lambda = \min\{j | t_j < t_{j+1} < \dots < t_i\}$, $\mu = \max\{j | t_{i+1} < \dots < t_{j-1} < t_j\}$, 即 $t_\lambda(t_\mu)$ 或是节点区间的左(右)端点, 或是 $t_i(t_{i+1})$ 左(右)方重节点中序号最大(小)的点.

Step 1. 以 $\{Q_\lambda, \dots, Q_i\}$ 为已知型值点, $\{t_\lambda, \dots, t_i\}$ 为相应参数节点, 用算法 9.2.1 反求得到控制顶点 $\{\tilde{p}_{\lambda-1}, \dots, \tilde{p}_{i+1}\}$, 且 $\tilde{p}_{i+1} = Q_i$; 再令 $p_j = \tilde{p}_j, j = \lambda, \lambda+1, \dots, i$ (即去掉 \tilde{p}_{i+1}).

Step 2. 以 $\{Q_{i+1}, \dots, Q_\mu\}$ 为已知型值点, $\{t_{i+1}, \dots, t_\mu\}$ 为相应参数节点, 用算法 9.2.1 反求得到控制顶点 $\{\tilde{p}_i, \dots, \tilde{p}_{\mu+1}\}$, 且 $\tilde{p}_i = Q_{i+1}$; 再令 $p_j = \tilde{p}_j, j = i+1, i+2, \dots, \mu$ (即去掉 \tilde{p}_i).

Step 3. 取 $\{\dots, p_\lambda, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_\mu, \dots\}$ 作为与含有二重节点 $t_i = t_{i+1}$ 的节点区间分割相对应的三次 B 样条插值曲线的顶点.

在三重节点处, 曲线在这点自然地分成两段, 前一段的末顶点与后一段的首顶点相重, 并且就是三重节点对应的曲线上的型值点, 因此无需特殊处理, 分段反解即可.

算法 9.3.2 (三重节点处曲线分段反解算法)

设 $t_{i-1} = t_i = t_{i+1}$, 对应地有 $Q_{i-1} = Q_i = Q_{i+1}$.

Step 1. 以 $\{\dots, Q_{i-1}\}$ 和 $\{\dots, t_{i-1}\}$ 分别作为已知型值点和相应参数节点, 用算法 9.2.1 反解出 $\{\dots, p_{i-1}, p_i\}$, 且 $p_i = Q_{i-1}$.

Step 2. 以 $\{Q_{i+1}, \dots\}$ 和 $\{t_{i+1}, \dots\}$ 分别作为已知型值点和相应参数节点, 用算法 9.2.1 反解出 $\{p_i, p_{i+1}, \dots\}$, 且 $p_i = Q_{i+1}$.

Step 3. 取 $\{\dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots\}$ 作为与含有三重节点 $t_{i-1} = t_i = t_{i+1}$ 的节点区间分割相对应的三次 B 样条插值曲线的顶点.

例 9.3.1

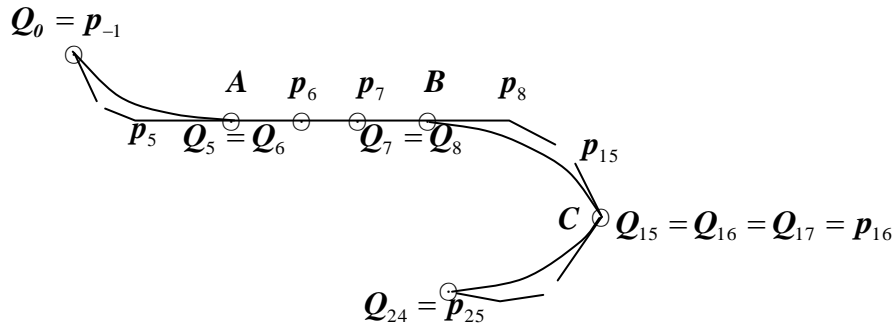


图 9.3.5 复杂曲线三次 B 样条插值

要求作一条三次 B 样条插值曲线, 插值如图 9.3.5 中的 21 个型值点. 夹有一条直线段 AB 并让点 C 成为角点. 我们可引入型值点 $Q_5 = Q_6 = A$, $Q_7 = Q_8 = B$, $Q_{15} = Q_{16} = Q_{17} = C$, 从而使型值点 $\{Q_i\}$ 的个数变为 25 个, 并取节点 $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + \|Q_{i-1}Q_i\|$, $i = 1, 2, \dots, 24$, $t_i \leftrightarrow Q_i$, 则有 $t_5 = t_6$, $t_7 = t_8$, $t_{15} = t_{16} = t_{17}$, 且 $t_{-2} = t_{-1} = t_0$, $t_{24} = t_{25} = t_{26}$, 按照算法 9.3.1 和 9.3.2 知共分四段反解控制顶点. 即对于 $[t_0, t_5]$ 反解出 $p_{-1}, \dots, p_5, \tilde{p}_6$ (“ \sim ”表示以后将舍去不用, 下同); 对于 $[t_6, t_7]$ 反解出

$\tilde{\mathbf{p}}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7, \tilde{\mathbf{p}}_8$; 对于 $[t_8, t_{15}]$ 反解出 $\tilde{\mathbf{p}}_7, \mathbf{p}_8, \dots, \mathbf{p}_{16}$; 对于 $[t_{17}, t_{24}]$ 反解出 $\mathbf{p}_{16}, \dots, \mathbf{p}_{25}$. 最后取 $\{\mathbf{p}_{-1}, \dots, \mathbf{p}_{25}\}$ 为所求的三次 B 样条曲线的控制顶点.

9.4 参数无重节点的双三次 B 样条插值曲面

考察问题 9.1.2(a). 按插值条件, 在节点 (u_i, v_j) 处建立对曲面(9.1.2)反求控制顶点的方程

$$\mathbf{p}(u_i, v_j) = \sum_{\alpha=i-3}^{i-1} \sum_{\beta=j-3}^{j-1} N_{\alpha,4}(u_i) N_{\beta,4}(v_j) \mathbf{p}_{\alpha+2,\beta+2} = \mathbf{Q}_{ij}, \quad i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n. \quad (9.4.1)$$

写为矩阵式即

$$\mathbf{N}_u \mathbf{P} \mathbf{N}_v^T = \mathbf{Q}, \quad (9.4.2)$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{pmatrix} N_{-3,4}(u_0) & N_{-2,4}(u_0) & N_{-1,4}(u_0) & & \\ & N_{-2,4}(u_1) & N_{-1,4}(u_1) & N_{0,4}(u_1) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & N_{m-3,4}(u_m) & N_{m-2,4}(u_m) & N_{m-1,4}(u_m) \end{pmatrix}_{(m+1) \times (m+3)}, \quad (9.4.3)$$

$$\mathbf{N}_v = \begin{pmatrix} N_{-3,4}(v_0) & N_{-2,4}(v_0) & N_{-1,4}(v_0) & & \\ & N_{-2,4}(v_1) & N_{-1,4}(v_1) & N_{0,4}(v_1) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & N_{n-3,4}(v_n) & N_{n-2,4}(v_n) & N_{n-1,4}(v_n) \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+3)}, \quad (9.4.4)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{-1,-1} & \mathbf{p}_{-1,0} & \cdots & \mathbf{p}_{-1,n} & \mathbf{p}_{-1,n+1} \\ \mathbf{p}_{0,-1} & \mathbf{p}_{0,0} & \cdots & \mathbf{p}_{0,n} & \mathbf{p}_{0,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_{m,-1} & \mathbf{p}_{m,0} & \cdots & \mathbf{p}_{m,n} & \mathbf{p}_{m,n+1} \\ \mathbf{p}_{m+1,-1} & \mathbf{p}_{m+1,0} & \cdots & \mathbf{p}_{m+1,n} & \mathbf{p}_{m+1,n+1} \end{pmatrix}_{(m+3) \times (n+3)}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \cdots & \mathbf{Q}_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Q}_{m0} & \cdots & \mathbf{Q}_{mn} \end{pmatrix}_{(m+1) \times (n+1)}. \quad (9.4.5)$$

为使方程组(9.4.2)有唯一解, 需补充边界条件. 即对系数矩阵 \mathbf{N}_u 和 \mathbf{N}_v 各添补首末两行使成为方阵 $\bar{\mathbf{N}}_u$ 和 $\bar{\mathbf{N}}_v$, 对 \mathbf{Q} 添加四周一圈使成为 $(m+3) \times (n+3)$ 阵 $\bar{\mathbf{Q}}$, 我们有

$$\bar{\mathbf{N}}_u = \begin{pmatrix} f_{u1} & f_{u2} & f_{u3} & f_{u4} & & \\ & \text{-----} & & & & \\ & & \mathbf{N}_u & & & \\ & & \text{-----} & & & \\ & g_{u4} & g_{u3} & g_{u2} & g_{u1} & \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{N}}_v = \begin{pmatrix} f_{v1} & f_{v2} & f_{v3} & f_{v4} & & \\ & \text{-----} & & & & \\ & & \mathbf{N}_v & & & \\ & & \text{-----} & & & \\ & g_{v4} & g_{v3} & g_{v2} & g_{v1} & \end{pmatrix}, \quad (9.4.6)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{-1,-1} & \mathbf{Q}_{-1,0} & \cdots & \mathbf{Q}_{-1,n} & \mathbf{Q}_{-1,n+1} \\ \mathbf{Q}_{0,-1} & \text{-----} & & & \mathbf{Q}_{0,n+1} \\ \vdots & | & \mathbf{Q} & | & \vdots \\ \mathbf{Q}_{m,-1} & \text{-----} & & & \mathbf{Q}_{m,n+1} \\ \mathbf{Q}_{m+1,-1} & \mathbf{Q}_{m+1,0} & \cdots & \mathbf{Q}_{m+1,n} & \mathbf{Q}_{m+1,n+1} \end{pmatrix}. \quad (9.4.7)$$

具有边界条件的新方程组及其解可写为

$$\bar{\mathbf{N}}_u \mathbf{P} \bar{\mathbf{N}}_v^T = \bar{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{P} = \bar{\mathbf{N}}_u^{-1} \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{N}}_v^T)^{-1}.$$

上式可分两步求解. 先由 $\mathbf{P}^* \bar{\mathbf{N}}_v^T = \bar{\mathbf{Q}}$ 解出 \mathbf{P}^* , 再由 $\bar{\mathbf{N}}_u \mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ 解出 \mathbf{P} . 这可用以下算法实现.

算法 9.4.1 (简单曲面双三次 B 样条插值)

Step 1. 对 $i = -1, 0, \dots, m+1$, 求解 $\bar{\mathbf{N}}_v \cdot [\mathbf{p}_{i,-1}^*, \mathbf{p}_{i0}^*, \dots, \mathbf{p}_{i,n+1}^*]^T = [\mathbf{Q}_{i,-1}, \mathbf{Q}_{i0}, \dots, \mathbf{Q}_{i,n+1}]^T$, 也就是对每一行, 即 v 方向, 以 $\{\mathbf{Q}_{i,j}\}_{j=-1}^{n+1}$ 为型值点, 应用算法 9.2.1, 反求控制顶点 $\{\mathbf{p}_{ij}^*\}_{j=-1}^{n+1}$, $i = -1, 0, \dots, m+1$, 其中 $i = -1$ 和 $m+1$ 为对边界条件曲线反求控制顶点.

Step 2. 对 $j = -1, 0, \dots, n+1$ 求解 $\bar{\mathbf{N}}_u \cdot [\mathbf{p}_{-1,j}, \mathbf{p}_{0j}, \dots, \mathbf{p}_{m+1,j}]^T = [\mathbf{p}_{-1,j}^*, \mathbf{p}_{0j}^*, \dots, \mathbf{p}_{m+1,j}^*]^T$. 也就是对每一列, 即 u 方向, 以 $\{\mathbf{p}_{ij}^*\}_{i=-1}^{m+1}$ 为型值点, 应用算法 9.2.1, 反求控制顶点 $\{\mathbf{p}_{ij}\}_{i=-1}^{m+1}$, $j = -1, 0, \dots, n+1$. 这样就得到在四个角点插值型值点的 C^2 连续的双三次 B 样条插值曲面(9.1.2).

这样, (9.4.8)的求解被分解为在 v 方向反求 $m+3$ 条曲线的控制顶点(它们有相同的 u 向参数节点), 然后再在 u 方向上反求 $n+3$ 条曲线的控制顶点(它们有相同的 v 向参数节点)来实现, 调用曲线算法 9.2.1 共 $m+n+6$ 次. 因系数矩阵在两个方向分别相同, 程序的运行是经济的.

确定边界条件元素的方法与曲线插值情况相类似. 唯一不同的是还需指定边界条件曲线的边界条件. 我们建议, $\mathbf{Q}_{-1,-1}$, $\mathbf{Q}_{-1,n+1}$, $\mathbf{Q}_{m+1,-1}$, $\mathbf{Q}_{m+1,n+1}$ 在各种端条件下均可取为零矢量. 这是分别假设了 $\partial^{\alpha+\beta} \mathbf{p}(u, v) / \partial u^\alpha \partial v^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) 在插值曲面的四个角点为零矢量的结果. 在抛物端条件的情况, 则是角上的曲面块为双二次多项式.

9.5 参数有重节点的双三次 B 样条插值曲面

由上节可知, 插值曲面的生成归结为两个方向的曲线插值. 因此问题 9.1.2(b)可归结为复杂曲线的插值, 即曲面夹棱线或夹直纹面及平面的情况与曲线夹角点或夹直线的情况完全类似, 只要在某个参数方向, 把节点按需要置为三重或二重, 同时相应地把这些节点所对应的那几排型值点都取为三重或二重即可. 在这个方向分段反求控制顶点以后, 去掉二重节点所对应的那若干排顶点, 再对另一方向反求控制顶点, 对二重节点作同样处理就行了. (参见图 9.5.1)

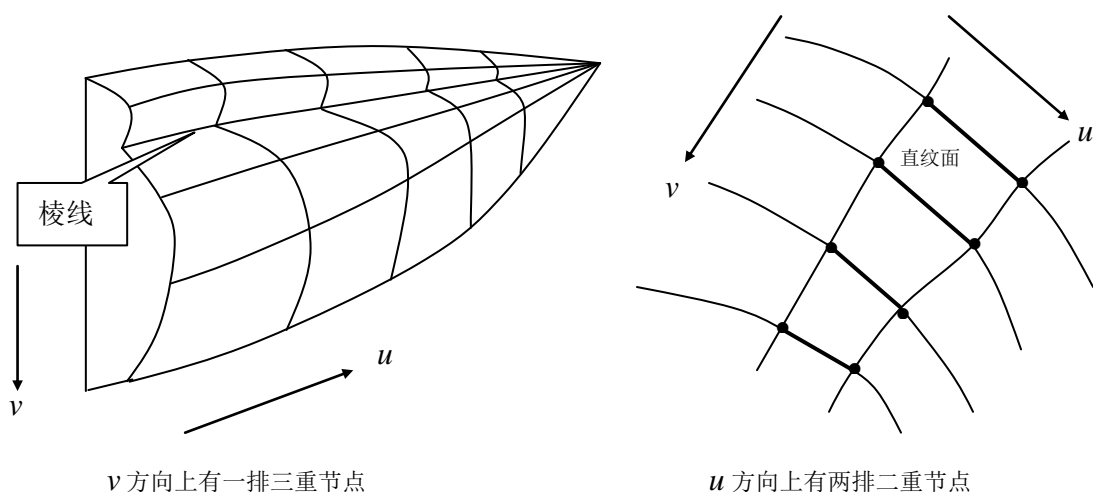


图 9.5.1 夹棱线和夹直纹面的曲面

9.6 C^2, C^1 和 C^0 连续的三次 Bézier 样条插值曲线

由于 Bézier 曲线具有端点插值, 端边相切, 离散简便, 求交快速, 同次曲线逼近特征多边形的程度优于 B 样条等优点, 根据型值点求 Bézier 样条插值曲线的工作是富有实际意义的.

定义 9.6.1 给定区间 $[a, b]$ 的节点分割

$$\Delta: a = t_0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} < t_n = b, \quad (9.6.1)$$

在此分割上保持 s 阶 ($s \leq k-2$) 连续的分段 k 阶 ($k \geq 2$) B ézier 曲线

$$\mathbf{V}(t) = \left\{ \mathbf{P}^i(t) = \sum_{j=0}^{k-1} B_j^{k-1} \left(\frac{t-t_{i-1}}{h_i} \right) \mathbf{P}_j^i \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, h_i = t_i - t_{i-1} \right\}_{i=1}^n \quad (9.6.2)$$

称为 $k-1$ 次 (k 阶) B ézier 样条曲线. 这里 B_j^{k-1} 是 $k-1$ 次 Bernstein 基, $\tilde{\mathbf{P}}_i = \{\mathbf{P}_0^i, \dots, \mathbf{P}_{k-1}^i\}$ 是第 i 段 ($i = 1, 2, \dots, n$) B ézier 曲线 $\mathbf{P}^i(t)$ 的控制多边形, 相应地称 $\mathbf{P} = \{\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n\}$ 为 B ézier 样条曲线 $\mathbf{V}(t)$ 的整体控制多边形. $\mathbf{V}(t)$ 在 r 重节点的连续阶是 $s = k-1-r$.

由此定义可知, B ézier 样条曲线是一般分割 Δ 上的 B 样条曲线的一种离散表示方式. 下面先给出内节点中无重节点的 C^2 连续的三次 B ézier 样条插值曲线算法.

假定型值点列为 $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{R}^3$, 取其对应的节点 t_i 为累加弦长, 则由内节点处曲线 $\mathbf{V}(t)$ 二阶连续的要求及 B ézier 曲线的端点性质得

$$\mathbf{P}^i(t_i-) = \mathbf{P}_3^i = \mathbf{P}_0^{i+1} = \mathbf{P}^{i+1}(t_i+) = \mathbf{Q}_i, \quad (9.6.3)$$

$$\frac{d\mathbf{P}^i(t_i-)}{dt} = \frac{3(\mathbf{P}_3^i - \mathbf{P}_2^i)}{h_i} = \frac{3(\mathbf{P}_1^{i+1} - \mathbf{P}_0^{i+1})}{h_{i+1}} = \frac{d\mathbf{P}^{i+1}(t_i+)}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9.6.4)$$

$$\frac{d^2\mathbf{P}^i(t_i-)}{dt^2} = \frac{6(\mathbf{P}_3^i - 2\mathbf{P}_2^i + \mathbf{P}_1^i)}{h_i^2} = \frac{6(\mathbf{P}_2^{i+1} - 2\mathbf{P}_1^{i+1} + \mathbf{P}_0^{i+1})}{h_{i+1}^2} = \frac{d^2\mathbf{P}^{i+1}(t_i+)}{dt^2}. \quad (9.6.5)$$

记

$$\mathbf{T}_i = (\mathbf{P}_3^i - \mathbf{P}_2^i)/h_i = (\mathbf{P}_1^{i+1} - \mathbf{P}_0^{i+1})/h_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (9.6.6)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_i = (h_{i+1}/h_i)(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) + (h_i/h_{i+1})(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9.6.7)$$

由(9.6.3), (9.6.4), (9.6.6)得 $\mathbf{P}_2^i = \mathbf{Q}_i - h_i \mathbf{T}_i$, $\mathbf{P}_1^{i+1} = \mathbf{Q}_i + h_{i+1} \mathbf{T}_i$, $\mathbf{P}_3^i = \mathbf{P}_0^{i+1} = \mathbf{Q}_i$, 代入(9.6.5)可得

$$h_{i+1} \mathbf{T}_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \mathbf{T}_i + h_i \mathbf{T}_{i+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9.6.8)$$

添加两个端点条件方程

$$F_1 \mathbf{T}_0 + F_2 \mathbf{T}_1 = \tilde{\mathbf{Q}}_0, \quad G_2 \mathbf{T}_{n-1} + G_1 \mathbf{T}_n = \tilde{\mathbf{Q}}_n, \quad (9.6.9)$$

即可求解 \mathbf{T}_i , $i = 0, 1, \dots, n$, 最后得到 \mathbf{P}_j^i , $i = 1, 2, \dots, n$. (9.6.9)中端条件元素如表 9.6.1 所示.

表 9.6.1 三次 B ézier 样条曲线插值的端条件公式

类型	首端条件	F_1	F_2	$\tilde{\mathbf{Q}}_0$	末端条件	G_2	G_1	$\tilde{\mathbf{Q}}_n$
夹持端	$(\mathbf{P}^1)'(t_0)$ 已知	1	0	$(\mathbf{P}^1)'(t_0)/3$	$(\mathbf{P}^n)'(t_n)$ 已知	0	1	$(\mathbf{P}^n)'(t_n)/3$
自由端	$(\mathbf{P}^1)''(t_0)$ $= \mathbf{0}$	2	1	$(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)/h_1$	$(\mathbf{P}^n)''(t_n)$ $= \mathbf{0}$	1	2	$\frac{\mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_{n-1}}{h_n}$
抛物端	$(\mathbf{P}^1)'''(t)$ $\equiv \mathbf{0}$, $t_0 \leq t \leq t_1$	1	1	$\frac{2(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{3h_1}$	$(\mathbf{P}^n)'''(t)$ $\equiv \mathbf{0}$, $t_{n-1} \leq t \leq t_n$	1	1	$\frac{2(\mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_{n-1})}{3h_n}$

当曲线为封闭 ($\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_n$) 时, 不需要端条件方程, 但需要增加两个连续性方程 $(\mathbf{P}^1)'(t_0+) = (\mathbf{P}^n)'(t_n-)$, $(\mathbf{P}^1)''(t_0+) = (\mathbf{P}^n)''(t_n-)$, 即 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_n$, $(\mathbf{P}_2^1 - 2\mathbf{P}_1^1 + \mathbf{P}_0^1)h_1^{-2} = (\mathbf{P}_3^n - 2\mathbf{P}_2^n + \mathbf{P}_1^n)h_n^{-2}$, 这时反求 \mathbf{T}_i 的方程组为

$$\begin{cases} 2(h_1 + h_2)\mathbf{T}_1 + h_1\mathbf{T}_2 + h_2\mathbf{T}_n = \tilde{\mathbf{Q}}_1, \\ h_{i+1}\mathbf{T}_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})\mathbf{T}_i + h_i\mathbf{T}_{i+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ h_n\mathbf{T}_1 + h_1\mathbf{T}_{n-1} + 2(h_1 + h_n)\mathbf{T}_n = (h_n/h_1)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_n) + (h_1/h_n)(\mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_{n-1}). \end{cases} \quad (9.6.10)$$

总结以上分析过程, 我们得到

算法 9.6.1 C^2 连续的插值点列 $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^n$ 的三次 Bézier 样条曲线(9.6.2)的控制顶点可由求解(9.6.8)—(9.6.10)得到, 其中 $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ 如(9.6.7)所示, 端条件由表 9.6.1 所示.

容易看出, 反解控制顶点的系数矩阵比 B 样条曲线的情况简单, 为严格的三对角阵, 对角优势明显, 无需再作处理就可直接用追赶法求解.

下面再给出有重节点时的插值样条曲线算法. 若要求插值曲线在某型值点处为一阶连续, 可取其为二重型值点 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i+1}$, 相应地有二重节点 $t_i = t_{i+1}$. 这时应再添加一个条件才能得解, 建议取 $\mathbf{V}'(t_i-) = \mathbf{V}'(t_{i+1}+)$ 为已知. 我们可将参数区间 $[t_0, t_n]$ 分成两段 $[t_0, t_i], [t_{i+1}, t_n]$, 分别反解求出 Bézier 多边形, 而上述添加条件作为前一段的末端条件及后一段的首端条件. 最后得到的 Bézier 样条曲线在 $t_i = t_{i+1}$ 处为一阶连续, 且第 $i+1$ 段 $\mathbf{P}^{i+1}(t)$ 及其控制多边形 $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1}$ 缩成一点 $\mathbf{P}_0^{i+2} = \mathbf{P}_3^i$ (参见图 9.6.1).

特别地, 若要求插值曲线夹有一直线段 $\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_{i+1}$, 可令其两端分别为二重型值点 $\mathbf{Q}_{i-1} = \mathbf{Q}_i$, $\mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+2}$, 相应地让 $t_{i-1} = t_i$, $t_{i+1} = t_{i+2}$, 然后分三段 $[t_0, t_{i-1}], [t_i, t_{i+1}], [t_{i+2}, t_n]$ 分别反解求出 Bézier 多边形, 这时在点 \mathbf{Q}_i 及 \mathbf{Q}_{i+1} 处的端点条件分别取为 $\mathbf{V}'(t_{i-1}-) = \mathbf{V}'(t_i+) // \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_{i+1}$, $\mathbf{V}'(t_{i+1}-) = \mathbf{V}'(t_{i+2}+) // \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_{i+1}$, 就可保证在 $[t_i, t_{i+1}]$ 内的一段 Bézier 曲线为直线段, 且与左右相邻曲线段一阶连续(参见图 9.6.2).

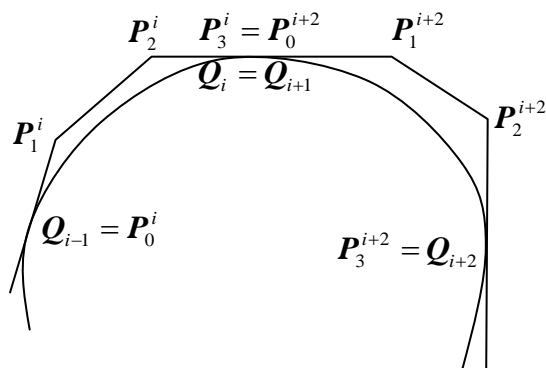


图 9.6.1 C^1 连续的三次 Bézier 样条插值曲线

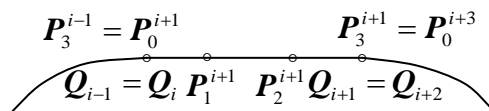


图 9.6.2 夹有直线段的三次 Bézier 样条插值曲线

若要求插值曲线含有角点, 我们只要取这个角点为三重型值点 $\mathbf{Q}_{i-1} = \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i+1}$, 同时相应地有 $t_{i-1} = t_i = t_{i+1}$, 再分区间为两段 $[t_0, t_{i-1}], [t_{i+1}, t_n]$, 分别反解求出 Bézier 多边形, 这时须添加前段的末端条件和后段的首端条件, 易知 $\tilde{\mathbf{P}}_i, \tilde{\mathbf{P}}_{i+1}$ 均缩为一点 $\mathbf{P}_0^{i+2} = \mathbf{P}_3^{i-1}$ (参见图 9.6.3).

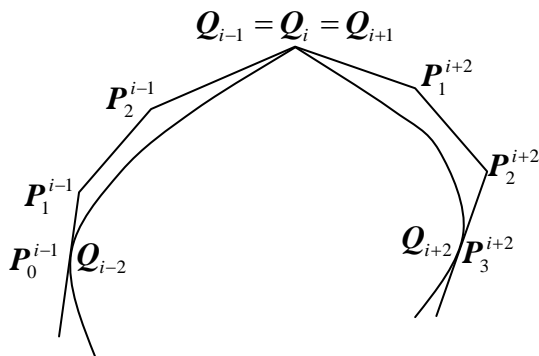


图 9.6.3 C^0 连续的三次 Bézier 样条插值曲线

9.7 C^2, C^1 和 C^0 连续的双三次 B ézier 样条插值曲面

定义 9.7.1 给定 uv 平面上的分割

$$\Delta_u: u_0 < u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{m-1} < u_m; \Delta_v: v_0 < v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_{n-1} < v_n; \quad (9.7.1)$$

在此分割上保持 u 向 r 阶 ($r \leq h-2$), v 向 s 阶 ($s \leq k-2$) 连续的分片 $h \times k$ 阶 B ézier 曲面

$$V(u, v) = \left\{ P^{ij}(u, v) = \sum_{\alpha=0}^{h-1} \sum_{\beta=0}^{k-1} B_{\alpha}^{h-1} \left(\frac{u - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} \right) \times B_{\beta}^{k-1} \left(\frac{v - v_{j-1}}{v_j - v_{j-1}} \right) P_{\alpha\beta}^{ij}, u_{i-1} \leq u \leq u_i, v_{j-1} \leq v \leq v_j \right\}_{i=1, j=1}^{m, n} \quad (9.7.2)$$

称为 $(h-1) \times (k-1)$ 次 ($h \times k$ 阶) B ézier 样条曲面. 这里 B_{α}^{h-1} , B_{β}^{k-1} 分别是 $h-1$ 次和 $k-1$ 次的 Bernstein 基, $\tilde{P}_{ij} = \{P_{\alpha\beta}^{ij} | 0 \leq \alpha \leq h-1, 0 \leq \beta \leq k-1\}$ 是曲面 $V(u, v)$ 的第 (i, j) ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 块子曲面 $P^{ij}(u, v)$ 的控制网格或称为曲面 $V(u, v)$ 的局部 B ézier 网, 满足 $P_{\alpha, k-1}^{ij} = P_{\alpha 0}^{i, j+1}$, $P_{h-1, \beta}^{ij} = P_{0\beta}^{i+1, j}$, 相应地称 $P = \{\tilde{P}_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 为曲面 $V(u, v)$ 的整体 B ézier 网. 本节中讨论 $h = k = 4$ 的情况 (参见图 9.7.1).

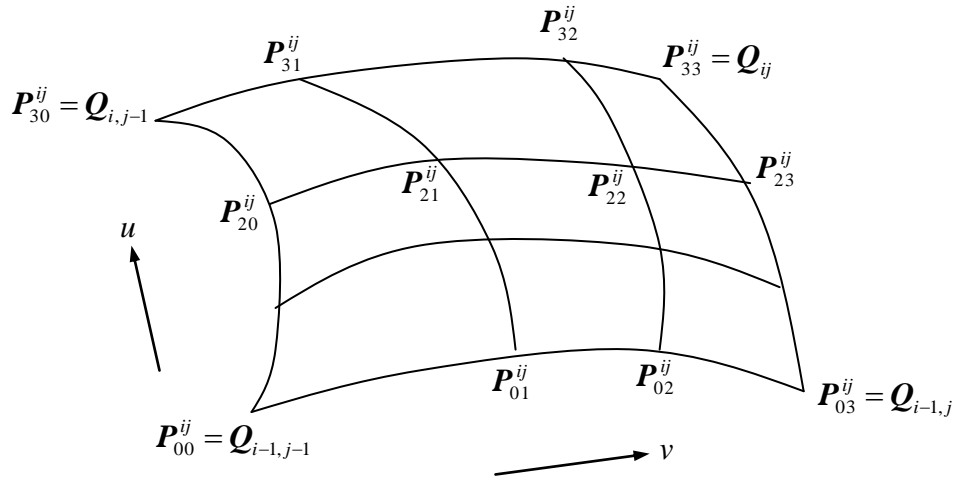


图 9.7.1 双三次 B ézier 样条插值曲面

假设要插值的型值点阵为 $\{Q_{ij}\}_{i=0, j=0}^{m, n} \in \mathbb{R}^3$, 让 $Q_{ij} \leftrightarrow (u_i, v_j)$, 取 $\{u_i\}, \{v_j\}$ 分别为 (9.1.6) 中 u 向和 v 向的平均累加弦长. 首先考察无重节点情况.

算法 9.7.1 (C^2 连续的双三次 B ézier 样条曲面插值)

Step 1. 对 $i = 0, 1, \dots, m$, 以 Q_{ij} 为插值点, v_j 为参数节点, $j = 0, 1, \dots, n$, 用算法 9.6.1 在 v 方向反解, 求出 $m+1$ 条三次 B ézier 样条曲线 $P^i(v), v_{j-1} \leq v \leq v_j$, 其控制顶点为 $\bar{P}_{\beta}^{ij}, \beta = 0, 1, 2, 3$; 且 $P^i(v_j) = \bar{P}_{\beta}^{ij} = \bar{P}_{\beta 0}^{i, j+1} = Q_{ij}$.

Step 2. 对 $j = 1, 2, \dots, n$, 再对 $\beta = 0, 1, 2, 3$, 以 \bar{P}_{β}^{ij} 为插值点, u_i 为参数节点, $i = 0, 1, \dots, m$, 用算法 9.6.1 在 u 方向反解, 求出 $3n+1$ 条三次 B ézier 样条曲线 $P_{\beta}^j(u), u_{i-1} \leq u \leq u_i$ (注意 $P_3^j(u) = P_0^{j+1}(u)$), 其控制顶点为 $P_{\alpha\beta}^{ij}, \alpha = 0, 1, 2, 3$; 且 $P_{\beta}^j(u_i) = P_{\alpha\beta}^{ij} = P_{\alpha\beta}^{i+1, j} = \bar{P}_{\beta}^{ij}$, 则此 $P_{\alpha\beta}^{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ 即为所求的 B ézier 网格顶点.

在 Step2 中所用到的首端条件与表 9.6.1 类似, 只要把 $(\mathbf{P}^1)'(t_0)$ 换作 $(\mathbf{P}_\beta^j)'(u_0)$, \mathbf{Q}_i 换作 $\bar{\mathbf{P}}_\beta^{ij}, i=0,1$, h_1 换作 $u_1 - u_0$ 即可. 由于一般只知道曲面 $\mathbf{V}(u, v)$ 在 $u = u_0$ 的边条件, 所以要用公式 $\partial^a \mathbf{V}(u, v_j) / \partial u^a = d^a \mathbf{P}_3^j(u) / du^a, a=1,2,3$ 把它转化到上式右端.

对复杂曲面插值, 可把相应型值点及对应参数值取为二重或三重, 这时曲面以重型值点为界进行分块反求, 但须注意相邻两块子曲面在边界网格点上要规定有相同的跨界导矢.

9.8 构造插值样条曲面时型值点不一致分布的均匀性检查

在 § 9.4, § 9.5, § 9.7 构造插值曲面时, 型值点对应的节点参数的选取, 采用了两个方向的近似累加弦长, 即应用了(9.1.6)或(9.1.7). 这就要求在同一个方向上, 前后两排型值点的间距必须相对均匀, 或者说, 型值点阵的不一致必须相对均匀. 为刻画这一几何特性, 我们作出

定义 9.8.1 对型值点阵 $\{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n} \in \mathbb{R}^3$, 记 $l_u(i, j) = \|\mathbf{Q}_{i-1,j} - \mathbf{Q}_{ij}\|$, $l_v(i, j) = \|\mathbf{Q}_{i,j-1} - \mathbf{Q}_{ij}\|$, $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$, 则称

$$\lambda_u = \max_{\substack{1 \leq i_1, i_2 \leq m \\ 0 \leq j_1, j_2 \leq n}} \left(\frac{l_u(i_1, j_1)}{l_u(i_2, j_1)} : \frac{l_u(i_1, j_2)}{l_u(i_2, j_2)} \right), \quad \lambda_v = \max_{\substack{0 \leq i_1, i_2 \leq m \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq n}} \left(\frac{l_v(i_1, j_1)}{l_v(i_1, j_2)} : \frac{l_v(i_2, j_1)}{l_v(i_2, j_2)} \right)$$

分别为此型值点阵在 u, v 方向的非一致不均匀因子, 它们反映了弦长非一致的不均匀程度.

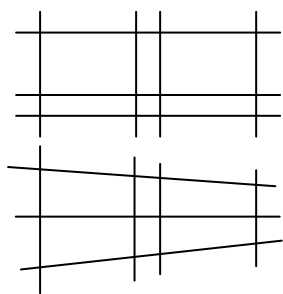


图 9.8.1 型值点非一致分布较均匀

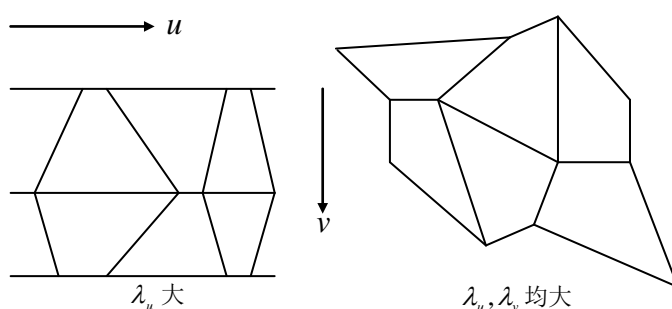


图 9.8.2 型值点非一致分布不均匀

试验表明, 当 λ_u, λ_v 接近于 1 时, 插值曲面较光顺; λ_u, λ_v 越大, 插值曲面光顺性越差, 这时应该对型值点阵作均匀化处理, 使 λ_u, λ_v 尽量接近于 1. 如图 9.8.1, 当型值点分布接近于矩形或扇形时, λ_u, λ_v 接近于 1; 如图 9.8.2, 型值点分布的非一致不均匀程度就较大.

9.9 带插值条件的 B 样条曲线光顺拟合

问题 9.9.1 给定数据点列 $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3$, 要求作一条段数为 m 且整体光顺的三次均匀 B 样条曲线

$\mathbf{p}(t) = \sum_{h=0}^{m+2} M_h(t) \mathbf{p}_h, 0 \leq t \leq 1$, 拟合 $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^n$ 且插值 $\{\mathbf{Q}_k\}_{k=0}^l$, 这里 $\{\mathbf{Q}_k\}_{k=0}^l \subset \{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^n, l \leq n$.

我们引入子曲线参数 $u = mt - [mt] \in [0, 1]$, 段序号 $j = [mt] + 1 \in [1, m]$, 就可得到基函数

$$M_h(t) = \begin{cases} 0, & h < j-1, \text{ 或 } h > j+2, \\ (u^3, u^2, u^1, 1) \mathbf{M}_{4 \times 4} / 6, & h = j-1, j, j+1, j+2. \end{cases}$$

这里矩阵 $\mathbf{M}_{4 \times 4}$ 如(2.5.1)所示. 用累加弦长法取型值点 \mathbf{Q}_i 的对应参数 t_i , 并取点 \mathbf{Q}_i 处的位置偏离权为 ξ_i , 曲线光顺权为 η_i , 则本问题的数学描述为: 在条件 $\mathbf{p}(t_k) = \mathbf{Q}_k (k=0, 1, \dots, l)$ 之下, 求 $\{\mathbf{p}_h\}_{h=0}^{m+2}$ 使得

$$I = \sum_{i=0}^n \xi_i [\mathbf{p}(t_i) - \mathbf{Q}_i]^2 + \sum_{i=0}^n \eta_i \|\mathbf{p}''(t_i)\|^2 = \text{MIN}$$

为简单计, 取 $\xi_i \equiv \xi$, $\eta_i \equiv \eta$, $\xi + \eta = 1$, $i = 0, 1, \dots, n$. 应用 Lagrange 乘子法, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l)^T, \quad \lambda_k = (\lambda_k^x, \lambda_k^y, \lambda_k^z), k = 0, 1, \dots, l; \\ \mathbf{N}_{n\alpha} &= (M_\alpha(t_0), M_\alpha(t_1), \dots, M_\alpha(t_n))^T, \alpha = 0, 1, \dots, m+2, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{N}_{n0}, \mathbf{N}_{n1}, \dots, \mathbf{N}_{n,m+2}); \\ \mathbf{N}_{n\alpha}'' &= (M_\alpha''(t_0), M_\alpha''(t_1), \dots, M_\alpha''(t_n))^T, \alpha = 0, 1, \dots, m+2, \quad \mathbf{M}'' = (\mathbf{N}_{n0}'', \mathbf{N}_{n1}'', \dots, \mathbf{N}_{n,m+2}''); \\ \bar{\mathbf{N}}_{l\alpha} &= (M_\alpha(t_{i_0}), M_\alpha(t_{i_1}), \dots, M_\alpha(t_{i_l}))^T, \alpha = 0, 1, \dots, m+2, \quad \bar{\mathbf{M}} = (\bar{\mathbf{N}}_{l0}, \bar{\mathbf{N}}_{l1}, \dots, \bar{\mathbf{N}}_{l,m+2}); \\ \mathbf{P} &= (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m+2})^T; \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n)^T; \quad \bar{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_{i_0}, \mathbf{Q}_{i_1}, \dots, \mathbf{Q}_{i_l})^T. \end{aligned}$$

则曲线光顺拟合问题转化为求合适的 \mathbf{P} 和 \mathbf{A} , 使得

$$G = \xi(\mathbf{MP} - \mathbf{Q})^T(\mathbf{MP} - \mathbf{Q}) + \eta(\mathbf{M}''\mathbf{P})^T(\mathbf{M}''\mathbf{P}) + 2(\bar{\mathbf{M}}\mathbf{P} - \bar{\mathbf{Q}})^T\mathbf{A}$$

取极小值. 易知最小二乘解的法方程为 $\partial G / \partial \mathbf{P} = \partial G / \partial \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 这里

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{P}} = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_0}, \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_{m+2}} \right)^T, \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_h} = \left(\frac{\partial G}{\partial p_h^x}, \frac{\partial G}{\partial p_h^y}, \frac{\partial G}{\partial p_h^z} \right), \quad h = 0, 1, \dots, m+2;$$

$\partial G / \partial \mathbf{A}$ 类似. 因此法方程的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta (\mathbf{M}'')^T \mathbf{M}'' & (\bar{\mathbf{M}})^T \\ \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \\ \bar{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}.$$

用选主元的 LU 三角分解法求解上述方程组, 可保证数值计算的稳定性和较少的机时.

9.10 带插值条件的 B 样条曲面光顺拟合

问题 9.10.1 给定数据点阵 $\{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{r,s} \in \mathbb{R}^3$, 要求作一张块数为 $m \times n$ 且整体光顺的双三次均匀 B 样条曲面 $\mathbf{p}(u, v) = \sum_{\alpha=0}^{m+2} \sum_{\beta=0}^{n+2} M_\alpha(u) M_\beta(v) \mathbf{p}_{\alpha\beta}$, $0 \leq u, v \leq 1$, 拟合 $\{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{r,s}$ 且插值

$\{\mathbf{Q}_{i_k j_k}\}_{k=0}^l$, 这里 $\{\mathbf{Q}_{i_k j_k}\}_{k=0}^l \subset \{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0,j=0}^{r,s}$, $l \leq (r+1)(s+1)$.

类似于曲线场合, 我们可引入子曲面块参数 (μ, ν) , $\mu = mu - [mu] \in [0, 1]$, $\nu = nv - [nv] \in [0, 1]$, 块序号 (ρ, θ) , $\rho = [mu] + 1 \in [1, m]$, $\theta = [nv] + 1 \in [1, n]$, 从而得到基函数 $M_\alpha(u), M_\beta(v)$. 再用两个方向上的累加弦长法取得型值点 \mathbf{Q}_{ij} 的对应参数 (u_{ij}, v_{ij}) .

注意到反映曲面弯曲度的曲面第二基本量 $\{L, M, N\}$ 和曲面单位法矢 \mathbf{n} 之间有关系式

$$L = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{n}, \quad L^2 + M^2 + N^2 \leq \|\mathbf{p}_{uu}\|^2 + \|\mathbf{p}_{uv}\|^2 + \|\mathbf{p}_{vv}\|^2,$$

因而最小二乘光顺拟合的目标函数可取为

$$I = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \xi_{ij} \|\mathbf{p}(u_{ij}, v_{ij}) - \mathbf{Q}_{ij}\|^2 + \sum_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \eta_{ij} \|\mathbf{p}_{pq}(u_{ij}, v_{ij})\|^2.$$

这里 ξ_{ij}, η_{ij} 分别代表点 \mathbf{Q}_{ij} 的偏离权和光顺权. 为简单计, 不妨取 $\xi_{ij} \equiv \xi, \eta_{ij} \equiv \eta, \xi + \eta = 1$.

与此同时, 严格约束条件是 $\mathbf{p}(u_{i_k}, v_{j_k}) = \mathbf{Q}_{i_k j_k}, k = 0, 1, \dots, l$.

为把条件极值问题化为无条件极值, 引入与曲线场合类似的 Lagrange 乘子矩阵 \mathbf{A} , 再令

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{is}^{\alpha\beta} &= (M_\alpha(u_{i0})M_\beta(v_{i0}), M_\alpha(u_{i1})M_\beta(v_{i1}), \dots, M_\alpha(u_{is})M_\beta(v_{is}))^T, \\ i &= 0, 1, \dots, r; \alpha = 0, 1, \dots, m+2; \beta = 0, 1, \dots, n+2; \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha\beta}^{(1)} = (\mathbf{N}_{0s}^{\alpha\beta}, \mathbf{N}_{1s}^{\alpha\beta}, \dots, \mathbf{N}_{rs}^{\alpha\beta})^T, \alpha = 0, 1, \dots, m+2; \beta = 0, 1, \dots, n+2;$$

$\mathbf{N}_{\alpha,n+2}^{(2)} = (N_{\alpha 0}^{(1)}, N_{\alpha 1}^{(1)}, \dots, N_{\alpha, n+2}^{(1)})$, $\alpha = 0, 1, \dots, m+2$; $\mathbf{M} = (\mathbf{N}_{0, n+2}^{(2)}, \mathbf{N}_{1, n+2}^{(2)}, \dots, \mathbf{N}_{m+2, n+2}^{(2)})$.
类似地, 用 $\mathbf{M}_{uu}, \mathbf{M}_{uv}, \mathbf{M}_{vv}$ 表示对 \mathbf{M} 矩阵内各元素求 (u, v) 二阶混合偏导数所产生的矩阵; 令

$$\bar{\mathbf{N}}_{\alpha\beta}^{(1)} = (M_{\alpha}(u_{i_0 j_0})M_{\beta}(v_{i_0 j_0}), M_{\alpha}(u_{i_1 j_1})M_{\beta}(v_{i_1 j_1}), \dots, M_{\alpha}(u_{i_l j_l})M_{\beta}(v_{i_l j_l}))^T,$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, m+2; \beta = 0, 1, \dots, n+2;$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{\alpha, n+2}^{(2)} = (\bar{\mathbf{N}}_{\alpha 0}^{(1)}, \bar{\mathbf{N}}_{\alpha 1}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{N}}_{\alpha, n+2}^{(1)}), \alpha = 0, 1, \dots, m+2; \bar{\mathbf{M}} = (\bar{\mathbf{N}}_{0, n+2}^{(2)}, \bar{\mathbf{N}}_{1, n+2}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{N}}_{m+2, n+2}^{(2)});$$

$$\mathbf{P} = (p_{00}, \dots, p_{0, n+2}, p_{10}, \dots, p_{m+2, n+2})^T; \mathbf{Q} = (Q_{00}, \dots, Q_{0s}, Q_{10}, \dots, Q_{rs})^T;$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = (Q_{i_0 j_0}, Q_{i_1 j_1}, \dots, Q_{i_l j_l})^T.$$

于是曲面光顺准拟合问题就转化为求合适的 \mathbf{P} 和 \mathbf{A} , 使得

$$G = \xi(\mathbf{M}\mathbf{P} - \mathbf{Q})^T(\mathbf{M}\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + \eta \sum_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)} (\mathbf{M}_{pq}\mathbf{P})^T(\mathbf{M}_{pq}\mathbf{P}) + 2(\bar{\mathbf{M}}\mathbf{P} - \bar{\mathbf{Q}})^T \mathbf{A}$$

取极小值. 法方程组 $\partial G / \partial \mathbf{P} = \mathbf{0}, \partial G / \partial \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbf{M}^T \mathbf{M} + \eta \cdot \sum_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)} \mathbf{M}_{pq}^T \mathbf{M}_{pq} & \bar{\mathbf{M}}^T \\ \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \\ \bar{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}.$$

我们也可选用主元的 **LU** 分解法求解上述方程组.

9.11 带插值条件且与已知曲面作 C^1 连续拼接的 B ézier 曲面光顺拟合

问题 9.11.1 给定已知的 $m_1 \times n$ 次 B ézier 曲面 E , 其特征网格为 $\{\mathbf{E}_{\delta\beta}\}_{\delta=0, \beta=0}^{m_1, n}$; 给定数据点阵 $\{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0, j=0}^{r, s}$, 要求作一张光顺的 $m \times n$ 次 B ézier 曲面片 F , 使得 F 和 E 具有 C^1 连续的公共边界, F 拟合 $\{\mathbf{Q}_{ij}\}_{i=0, j=0}^{r, s}$ 且插值 $\{\mathbf{Q}_{i_k j_k}\}_{k=0}^l \subset \{\mathbf{Q}_{ij}\}$, $l < (m-1)(n+1)$, $m \leq r, n \leq s$.

分析 假设曲面 F 的特征网格是 $\{\mathbf{P}_{\alpha\beta}\}_{\alpha=0, \beta=0}^{m, n} \in \mathfrak{R}^3$, F 与 E 有 C^1 连续的公共边界的充要条件是存在常数 μ , 使得 $\mathbf{P}_{0\beta} = \mathbf{E}_{m_1\beta}$, $\mathbf{P}_{1\beta} = \mathbf{E}_{m_1\beta} + \mu(\mathbf{E}_{m_1\beta} - \mathbf{E}_{m_1-1, \beta})$, $\beta = 0, 1, \dots, n$.

注意到 $\mathbf{P}(u_{ij}, v_{ij}) = \mathbf{R}_{ij} + \mathbf{H}_{ij} + \sum_{\alpha=2}^m \sum_{\beta=0}^n B_{\alpha}^m(u_{ij})B_{\beta}^n(v_{ij})\mathbf{P}_{\alpha\beta}$, 其中

$$\mathbf{R}_{ij} = \sum_{\beta=0}^n (B_0^m(u_{ij}) + B_1^m(u_{ij}))B_{\beta}^n(v_{ij})\mathbf{E}_{m_1\beta}, \mathbf{H}_{ij} = \sum_{\beta=0}^n B_1^m(u_{ij})B_{\beta}^n(v_{ij})(\mathbf{E}_{m_1\beta} - \mathbf{E}_{m_1-1, \beta}), \text{ 令}$$

$$\mathbf{b}_{is}^{\alpha\beta} = (B_{\alpha}^m(u_{i0})B_{\beta}^n(v_{i0}), B_{\alpha}^m(u_{i1})B_{\beta}^n(v_{i1}), \dots, B_{\alpha}^m(u_{is})B_{\beta}^n(v_{is}))^T,$$

$$i = 0, 1, \dots, r; \alpha = 2, 3, \dots, m; \beta = 0, 1, \dots, n;$$

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{(1)} = (\mathbf{b}_{0s}^{\alpha\beta}, \mathbf{b}_{1s}^{\alpha\beta}, \dots, \mathbf{b}_{rs}^{\alpha\beta})^T, \alpha = 2, 3, \dots, m; \beta = 0, 1, \dots, n;$$

$$\mathbf{b}_{cn}^{(2)} = (\mathbf{b}_{\alpha 0}^{(1)}, \mathbf{b}_{\alpha 1}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{\alpha n}^{(1)}), \alpha = 2, 3, \dots, m; \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{2n}^{(2)}, \mathbf{b}_{3n}^{(2)}, \dots, \mathbf{b}_{mn}^{(2)});$$

$$\mathbf{p}_{cn} = (\mathbf{P}_{\alpha 0}, \mathbf{P}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{P}_{\alpha n})^T, \alpha = 2, 3, \dots, m, \mathbf{P} = (\mathbf{p}_{2n}, \mathbf{p}_{3n}, \dots, \mathbf{p}_{mn})^T;$$

$$\mathbf{r}_{is} = (\mathbf{R}_{i0}, \mathbf{R}_{i1}, \dots, \mathbf{R}_{is})^T, i = 0, 1, \dots, r, \mathbf{R} = (\mathbf{r}_{0s}, \mathbf{r}_{1s}, \dots, \mathbf{r}_{rs})^T;$$

$$\mathbf{h}_{is} = (\mathbf{H}_{i0}, \mathbf{H}_{i1}, \dots, \mathbf{H}_{is})^T, i = 0, 1, \dots, r, \mathbf{H} = (\mathbf{h}_{0s}, \mathbf{h}_{1s}, \dots, \mathbf{h}_{rs})^T;$$

$$\mathbf{q}_{is} = (\mathbf{Q}_{i0}, \mathbf{Q}_{i1}, \dots, \mathbf{Q}_{is})^T, i = 0, 1, \dots, r, \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{0s}, \mathbf{q}_{1s}, \dots, \mathbf{q}_{rs})^T;$$

并记 $\mathbf{B}_{uu}, \mathbf{R}_{uu}, \mathbf{H}_{uu}$ 分别是 $\mathbf{B}, \mathbf{R}, \mathbf{H}$ 中每一元素改为它对 u 的二阶偏导数所得的矩阵, 则有

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \|\mathbf{p}_{uu}(u_{ij}, v_{ij})\|^2 = (\mathbf{B}_{uu}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}_{uu} + \mathbf{R}_{uu})^T (\mathbf{B}_{uu}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}_{uu} + \mathbf{R}_{uu}).$$

对 $\mathbf{p}_{uv}, \mathbf{p}_{vv}$ 有类似的等式. 又记

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta}^{*(1)} = (B_{\alpha}^m(u_{i_0j_0})B_{\beta}^n(v_{i_0j_0}), B_{\alpha}^m(u_{i_1j_1})B_{\beta}^n(v_{i_1j_1}), \dots, B_{\alpha}^m(u_{i_lj_l})B_{\beta}^n(v_{i_lj_l}))^T, \\ \alpha = 2, 3, \dots, m; \beta = 0, 1, \dots, n;$$

$$\mathbf{b}_{\alpha n}^{*(2)} = (\mathbf{b}_{\alpha 0}^{*(1)}, \mathbf{b}_{\alpha 1}^{*(1)}, \dots, \mathbf{b}_{\alpha n}^{*(1)}), \alpha = 2, 3, \dots, m; \mathbf{B}^* = (\mathbf{b}_{2n}^{*(2)}, \mathbf{b}_{3n}^{*(2)}, \dots, \mathbf{b}_{mn}^{*(2)});$$

$$\mathbf{R}^* = (\mathbf{R}_{i_0j_0}, \mathbf{R}_{i_1j_1}, \dots, \mathbf{R}_{i_lj_l})^T; \mathbf{H}^* = (\mathbf{H}_{i_0j_0}, \mathbf{H}_{i_1j_1}, \dots, \mathbf{H}_{i_lj_l})^T; \mathbf{Q}^* = (\mathbf{Q}_{i_0j_0}, \mathbf{Q}_{i_1j_1}, \dots, \mathbf{Q}_{i_lj_l})^T;$$

则本问题就是在条件 $\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}^* + \mathbf{R}^* = \mathbf{Q}^*$ 之下, 求

$$I = \xi(\mathbf{B}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H} + \mathbf{R} - \mathbf{Q})^T(\mathbf{B}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H} + \mathbf{R} - \mathbf{Q}) \\ + \eta \sum_{(p,q)=(u,v),(u,v),(v,v)} (\mathbf{B}_{pq}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}_{pq} + \mathbf{R}_{pq})^T(\mathbf{B}_{pq}\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}_{pq} + \mathbf{R}_{pq}).$$

的极小值. 这里 ξ, η 分别为型值点的偏移权和光顺权. 应用 Lagrange 乘子法, 引入 § 9.9 中的矩阵 \mathbf{A} , 则上述问题转化为求 $G = I + 2(\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mu\mathbf{H}^* + \mathbf{R}^* - \mathbf{Q}^*)^T\mathbf{A}$ 的极小值. 这里最小二乘解的法方程组 $\partial G/\partial \mathbf{P} = \mathbf{0}, \partial G/\partial \mathbf{A} = \mathbf{0}, \partial G/\partial \mu = 0$ 并不能写成在 (x, y, z) 三个方向上互相独立的三个方程组, 因为它们公用同一个参数 μ . 为此, 我们考虑一个等价的极值问题, 即求 (x, y, z) 三个分量上最小二乘偏差之和的条件极小值. 定义

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta} = (P_{\alpha\beta}^x, P_{\alpha\beta}^y, P_{\alpha\beta}^z), \mathbf{Q}_{ij} = (Q_{ij}^x, Q_{ij}^y, Q_{ij}^z), \mathbf{Q}_{i_kj_k} = (Q_{i_kj_k}^x, Q_{i_kj_k}^y, Q_{i_kj_k}^z); \\ \mathbf{p}_{\alpha n}^x = (P_{\alpha 0}^x, P_{\alpha 1}^x, \dots, P_{\alpha n}^x), \alpha = 2, 3, \dots, m, \mathbf{P}^x = (p_{2n}^x, p_{3n}^x, \dots, p_{mn}^x)^T; \\ \mathbf{a}^g = (\lambda_0^g, \lambda_1^g, \dots, \lambda_l^g)^T, g = x, y, z, \mathbf{A} = (\mathbf{a}^x, \mathbf{a}^y, \mathbf{a}^z),$$

类似地定义 $\mathbf{P}^g, \mathbf{Q}^g, \mathbf{Q}^{*g}, \mathbf{R}^g, \mathbf{R}^{*g}, \mathbf{H}^g, \mathbf{H}^{*g}, \mathbf{R}_{uu}^g, \mathbf{R}_{uv}^g, \mathbf{R}_{vv}^g, \mathbf{H}_{uu}^g, \mathbf{H}_{uv}^g, \mathbf{H}_{vv}^g, g = x, y, z$, 再令

$$\mathbf{M} = \xi \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \eta \mathbf{B}_{uu}^T \mathbf{B}_{uu} + \eta \mathbf{B}_{uv}^T \mathbf{B}_{uv} + \eta \mathbf{B}_{vv}^T \mathbf{B}_{vv}, \\ \mathbf{E}^x = \xi \mathbf{B}^T (\mathbf{R}^x - \mathbf{Q}^x) + \eta \mathbf{B}_{uu}^T \mathbf{R}_{uu}^x + \eta \mathbf{B}_{uv}^T \mathbf{R}_{uv}^x + \eta \mathbf{B}_{vv}^T \mathbf{R}_{vv}^x, \\ \mathbf{F}^x = \xi \mathbf{B}^T \mathbf{H}^x + \eta \mathbf{B}_{uu}^T \mathbf{H}_{uu}^x + \eta \mathbf{B}_{uv}^T \mathbf{H}_{uv}^x + \eta \mathbf{B}_{vv}^T \mathbf{H}_{vv}^x. \\ \mathbf{U} = \sum_{g=x,y,z} \xi (\mathbf{H}^g)^T \mathbf{H}^g + \eta (\mathbf{H}_{uu}^g)^T \mathbf{H}_{uu}^g + \eta (\mathbf{H}_{uv}^g)^T \mathbf{H}_{uv}^g + \eta (\mathbf{H}_{vv}^g)^T \mathbf{H}_{vv}^g, \\ \mathbf{V} = \sum_{g=x,y,z} \xi (\mathbf{H}^g)^T (\mathbf{R}^g - \mathbf{Q}^g) + \eta (\mathbf{H}_{uu}^g)^T \mathbf{R}_{uu}^g + \eta (\mathbf{H}_{uv}^g)^T \mathbf{R}_{uv}^g + \eta (\mathbf{H}_{vv}^g)^T \mathbf{R}_{vv}^g.$$

并类似地定义 $\mathbf{E}^y, \mathbf{E}^z, \mathbf{F}^y, \mathbf{F}^z$. 最终我们可得出最小二乘法方程

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D}.$$

这里

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & & & \mathbf{F}^x & (\mathbf{B}^*)^T & & \\ & \mathbf{M} & & \mathbf{F}^y & & (\mathbf{B}^*)^T & \\ & & \mathbf{M} & \mathbf{F}^z & & & (\mathbf{B}^*)^T \\ (\mathbf{F}^x)^T & (\mathbf{F}^y)^T & (\mathbf{F}^z)^T & \mathbf{U} & (\mathbf{H}^{*x})^T & (\mathbf{H}^{*y})^T & (\mathbf{H}^{*z})^T \\ \mathbf{B}^* & & & \mathbf{H}^{*x} & & & \\ & \mathbf{B}^* & & \mathbf{H}^{*y} & & & \\ & & \mathbf{B}^* & \mathbf{H}^{*z} & & & \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{P}^x, \mathbf{P}^y, \mathbf{P}^z, \mu, \mathbf{A}^x, \mathbf{A}^y, \mathbf{A}^z)^T,$$

$$\mathbf{D} = (-\mathbf{E}^x, -\mathbf{E}^y, -\mathbf{E}^z, -\mathbf{V}, \mathbf{Q}^{*x} - \mathbf{R}^{*x}, \mathbf{Q}^{*y} - \mathbf{R}^{*y}, \mathbf{Q}^{*z} - \mathbf{R}^{*z})^T,$$

用选主元的 LU 分解法可以解出此方程组.

主要文献

-
- [XPJ, SXJ, 84] 徐佩君, 司徒学军, 复杂曲线曲面的三次 B 样条插值(浙江大学数学系与西安 172 厂合作计算机辅助飞机外形设计课题总结之一), 浙江大学学报, 计算几何专辑, 1984: 120-133
- [WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学数学系研究生学位课程讲义, 1999
- [XPJ, WHN, 84] 徐佩君, 吴鹤年, 三次 B ézier 样条曲线(面)插值及与 B 样条曲线(面)的互化, 浙江大学学报, 计算几何专辑, 1984: 150-165
- [WGJ, WZW, SHH, 98] 王国瑾, 王振武, 寿华好, B 样条曲面在严格约束状态下的光顺拟合, 软件学报, 1998, 9(9): 696-698
- [ZMZ, WGJ, SHH, 2000] Zhao Minzi, Wang Guojin, Shou Huahao, Fair Fitting of B ézier surface with interpolation condition, submitted

参考文献

- 1 齐东旭, 田自贤, 张玉心, 冯家斌, 曲线拟合的数值磨光方法, 数学学报, 1975, 18(3):
- 2 Ferguson, J.C., Multivariate curve interpolation, Journal of Association for Computing Machinery, 1964, 11(2): 221-228
- 3 Kawabe, S., Kimura, F., Sala, T., Generation of NC commands for sculptured surface machining from 3D-coordinate measuring data, Annual of CIPP, 1980, 29: 369-372
- 4 Barsky, B., Greenberg, D. P., Determining a set of B-spline control vertices to generate an interpolating surface, Computer Graphics and Image Processing, 1980, 14(3): 203-226
- 5 Choi, B.K., Shin, H.Y., Yoo, W.S., Visually smooth composite surfaces for an unevenly spaced 3D data array, Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(2): 157-171
- 6 Peters, J., Local smooth surface interpolation: a classification, Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4): 191-195
- 7 刘鼎元, 赵玉琦, 詹廷雄, 肖宏恩, B ézier 曲线和 B 样条曲线光顺拟合法, 计算数学, 1984, 6(4): 360-365
- 8 刘鼎元, 胡康生, B ézier 曲面拟合, 应用数学学报, 1984, 7(2): 250-256
- 9 Bohm, W., Farin, G., Kahmann, J., A survey of curve and surface methods in CAGD, Computer Aided Geometric Design, 1984, 1(1): 1-60
- 10 Farin, G., *Curves and surfaces for computer Aided Geometric Design*, 4th Edition, Academic Press, London, 1997
- 11 Peters, J., Local cubic and bicubic C^1 surface interpolation with linearly varying boundary normal, Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4): 499-516