

## 第十三章 有理 B ézier 曲线曲面的求导和求积

参数曲线与参数曲面的求导在计算机图形和几何造型中具有重要的应用. 在曲线曲面的光滑拼接和凸性分析中必须求导, 在等距曲线、曲面的计算中, 为了求法矢, 首先要求出导矢. 虽然对曲线、曲面上某一点处的导矢, 可以把曲线、曲面在这里离散, 从而利用端点导矢公式较快地求得, 然而许多场合下, 我们关心的是估计导矢的界. 例如为了分析和判别奇点或拐点, 曲线、曲面的导矢范围的分析计算是不可避免的. 导矢与法矢方向的界的估计, 有助于判断曲线或曲面之间是否有交; 导矢大小的界的估计, 有助于提高曲线或曲面各种算法的有效性.

参数曲线的相关积分量, 诸如平面曲线所围区域的面积、重心、旋转体体积等计算在外形设计中也起着重要的作用. 比如管道设计中要计算横截面积, 船体设计中要计算截面重心. 总之, 求导与求积是计算机辅助参数曲线曲面设计的一项重要内容.

对于多项式曲线、曲面而言, 求导求积十分容易. 现在, 我们要研究的是有理多项式曲线曲面的求导求积. 由于 NURBS 的重要地位, 这项研究大有必要. 有理多项式曲线、曲面的许多计算, 象求值、升阶、离散, 都可从多项式曲线、曲面的相应计算公式中类推得到. 但对于求导和求积, 却不能从多项式曲线、曲面的求导求积公式中类推得到了. 它要比后者复杂得多, 仅有 Sederberg<sup>[1]</sup>, Floater<sup>[2]</sup>对曲线的一、二阶求导进行过研究. 本章着重介绍我们在有理参数多项式曲线、曲面的求导与求积方面所研究开发的新技术.

在求导方面, 如果按通常的分式求导公式或 Leibnitz 公式来运算, 有理曲线、曲面上任一点处的导矢必然是控制顶点和权因子混在一起来表达的“一团乱麻”, 既没有几何意义, 又不适合编程应用, 至于导矢界的估计更是无所适从. 我们用齐次坐标来定义直线的方向函数 Dir 和平面的方向函数 Nrm, 又用动曲线轨迹来定义有理曲面, 使速端曲面的导矢和法矢公式推导简捷, 几何意义鲜明, 界的估计容易. 同时, 对繁琐的有理曲线的高阶求导, 提出简单的递推算法, 给出生动的应用实例.

在求积方面, 我们系统地推导了二次有理曲线的一整套精确求积公式, 并以此为基础, 对三次以上的有理曲线, 提出了多项式求积逼近和降阶求积逼近两种新方法.

本章第 1, 2, 4 节内容取材于[ST, WGJ, STW, 95]; 第 3 节内容取材于[WGJ, STW, ST, 97]; 第 5 节内容取材于[WGZ, WGJ, 95]; 第 6, 9 节内容取材于[WGJ, 96]; 第 7 节内容取材于[WGJ, STW, 94]; 第 8 节内容取材于[CGD, WGJ, 2000].

### 13.1 有理 B ézier 倍式化速端曲线

#### 13.1.1 Dir 函数的定义和性质

定义 13.1.1 设点  $R$  的齐次坐标形式是  $\tilde{R} = (X, Y, Z, \omega)$ , 则其 Cartesian (笛卡儿)坐标是  $R = (x, y, z) = (X/\omega, Y/\omega, Z/\omega)$ . 我们称函数

$$\text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \equiv (\omega_1 X_2 - \omega_2 X_1, \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1, \omega_1 Z_2 - \omega_2 Z_1) \quad (13.1.1)$$

为两个齐次坐标点  $\tilde{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) (i = 1, 2)$  之间的 Cartesian 向量的方向.

这一定义的合理性基于下式:

$$\text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \equiv \omega_1 \omega_2 (R_2 - R_1), \quad \omega_1 \omega_2 \neq 0. \quad (13.1.2)$$

设  $k$  为任意实数, 进一步容易验证函数 Dir 具有以下一些性质:

$$\begin{cases} \text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_1) = 0, \quad \text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = -\text{Dir}(\tilde{R}_2, \tilde{R}_1), \\ \text{Dir}(k\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \text{Dir}(\tilde{R}_1, k\tilde{R}_2) = k\text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2), \\ \text{Dir}(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2, \tilde{R}_3) = \text{Dir}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_3) + \text{Dir}(\tilde{R}_2, \tilde{R}_3). \end{cases} \quad (13.1.3)$$

#### 13.1.2 倍式化速端曲线的导出

$n$  次有理 Bézier 曲线(3.2.1)或(3.2.2)的导矢的齐次坐标形式是

$$\tilde{\mathbf{R}}'(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t), \omega'(t)) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\tilde{\mathbf{R}}_{i+1} - \tilde{\mathbf{R}}_i), \quad (13.1.4)$$

相应地, 上式的 Cartesian 形式是

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}(t)/dt &= d(X(t)/\omega(t), Y(t)/\omega(t), Z(t)/\omega(t))/dt \\ &= (\omega(t)X'(t) - \omega'(t)X(t), \omega(t)Y'(t) - \omega'(t)Y(t), \omega(t)Z'(t) - \omega'(t)Z(t)) / (\omega(t))^2 \\ &= \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t)) / (\omega(t))^2. \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

因为 $(\omega(t))^2$ 是纯量函数, 因而 $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t))$ 给出导矢在 Cartesian 坐标中的方向. 粗看一下会认为 $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t))$ 的次数是 $2n-1$ , 但下面将见到次数是 $2n-2$ . 记

$$\tilde{\mathbf{F}}_0(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \tilde{\mathbf{R}}_i, \quad \tilde{\mathbf{F}}_1(t) = \sum_{i=1}^n B_{i-1}^{n-1}(t) \tilde{\mathbf{R}}_i,$$

利用基的递推式 $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$ , 可写出 $\tilde{\mathbf{R}}(t)$ 的凸线性分解式及 $\tilde{\mathbf{R}}'(t)$ 的线性分解式

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = (1-t)\tilde{\mathbf{F}}_0(t) + t\tilde{\mathbf{F}}_1(t), \quad \tilde{\mathbf{R}}'(t) = n(\tilde{\mathbf{F}}_1(t) - \tilde{\mathbf{F}}_0(t)),$$

则应用(13.1.3)得到

$$\begin{aligned} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t)) &= \text{Dir}((1-t)\tilde{\mathbf{F}}_0(t), n\tilde{\mathbf{F}}_1(t)) - \text{Dir}(t\tilde{\mathbf{F}}_1(t), n\tilde{\mathbf{F}}_0(t)) \\ &= n\text{Dir}(\tilde{\mathbf{F}}_0(t), \tilde{\mathbf{F}}_1(t)) = n \sum_{k=0}^{2n-2} (1-t)^{2n-2-k} t^k \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 0 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j-1} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_j). \end{aligned}$$

在上式右端积式的第二个和式因子中, 注意到 $i=j$ 时项值为 $\mathbf{0}$ , 当 $i>j$ 时, 把项中足标 $i, j$ 对换, 则整个和式对 $i < j$ 进行, 通项是

$$\begin{aligned} &\binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j-1} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_j) + \binom{n-1}{j} \binom{n-1}{i-1} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_j, \tilde{\mathbf{R}}_i) \\ &= \left[ \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j-1} - \binom{n-1}{j} \binom{n-1}{i-1} \right] \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_j) = \binom{n}{i} \binom{n}{j} \frac{j-i}{n} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_j). \end{aligned}$$

再在上式中, 用足标 $(i, k)$ 代替足标 $(i, j)$ , 记

$$\mathbf{H}_k = \sum_{i=\max(0, k-n+1)}^{\lfloor k/2 \rfloor} (k-2i+1) \binom{n}{i} \binom{n}{k-i+1} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_{k-i+1}) / \binom{2n-2}{k}, \quad (13.1.6)$$

我们有

$$\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t)) = \sum_{k=0}^{2n-2} B_k^{2n-2}(t) \mathbf{H}_k, \quad (13.1.7)$$

$$d\mathbf{R}(t)/dt = (\omega(t))^{-2} \sum_{k=0}^{2n-2} B_k^{2n-2}(t) \mathbf{H}_k. \quad (13.1.8)$$

CAGD 中通常称导矢为速端曲线(Hodograph). 因此以上两式分别为 $n$ 次有理 Bézier 曲线(3.2.1)或(3.2.2)的倍式化(Scaled)速端曲线和速端曲线. 前者是以 $\mathbf{H}_k$ 为控制顶点的 $2n-2$ 次 Bézier 曲线, 是由后者乘以因子 $(\omega(t))^2$ 而得来的. 例如, 三次有理 Bézier 曲线的倍式化速端曲线为四次 Bézier 曲线, 其控制顶点是 $\mathbf{H}_0 = 3\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_0, \tilde{\mathbf{R}}_1)$ ,  $\mathbf{H}_1 = 3\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_0, \tilde{\mathbf{R}}_2)/2$ ,  $\mathbf{H}_2 = (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_0, \tilde{\mathbf{R}}_3) + 3\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2))/2$ ,  $\mathbf{H}_3 = 3\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_3)/2$ ,  $\mathbf{H}_4 = 3\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3)$ .

### 13.1.3 曲线导矢方向的界

在(13.1.6)中,  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_{k-i+1})$  的系数均为正数, 因而导矢的方向位于向量  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_a, \tilde{\mathbf{R}}_b)$  ( $0 \leq a < b \leq n$ ) 之凸包之中, 又由于  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_a, \tilde{\mathbf{R}}_b) = \omega_a \omega_b (\mathbf{R}_b - \mathbf{R}_a) = \omega_a \omega_b \sum_{i=a}^{b-1} (\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i)$  位于  $b-a$  个向量  $(\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i)$  ( $i = a, a+1, \dots, b-1$ ) 的凸包之中, 最后可知  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t))$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 位于  $n$  个向量  $\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) 的凸包之中. 这一结论普遍地适用于 B ézier 曲线. 当权因子为正时, 这一结论对  $n$  次有理 B ézier 曲线亦成立.

### 13.1.4 曲线导矢大小的界

在(13.1.7)中取  $\tilde{\mathbf{R}}(t) = (t, 0, 0, 1)$ , 易知这时  $\tilde{\mathbf{R}}_i = (i/n, 0, 0, 1)$ ,  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{R}}'(t)) = (1, 0, 0)$ , 于是对  $k = 0, 1, \dots, 2n-2$  有  $\mathbf{H}_k = (1, 0, 0)$  且  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_{k-i+1}) = ((k-2i+1)/n, 0, 0)$ . 把这两式代入(13.1.6), 我们得到恒等式

$$\sum_{i=\max(0, k-n+1)}^{[k/2]} (k-2i+1)^2 \binom{n}{i} \binom{n}{k-i+1} = n \binom{2n-2}{k}. \quad (13.1.9)$$

另一方面当  $0 \leq a < b \leq n$  时, 我们有不等式

$$\|\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_a, \tilde{\mathbf{R}}_b)\| \leq \omega_a \omega_b \sum_{i=a}^{b-1} \|\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i\| \leq (b-a) \left( \max_{0 \leq i \leq n} \omega_i \right)^2 \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1}\|. \quad (13.1.10)$$

利用(13.1.6), (13.1.9)和(13.1.10), 最终得到<sup>[2]</sup>

$$\|\text{d}\mathbf{R}(t)/\text{d}t\| \leq n \left( \max_{0 \leq i \leq n} \omega_i / \min_{0 \leq i \leq n} \omega_i \right)^2 \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1}\|. \quad (13.1.11)$$

总结以上分析的结果, 我们有

**定理 13.1.1** 当方向函数  $\text{Dir}$  如(13.1.1)或(13.1.2)定义时,  $n$  次有理 B ézier 曲线(3.2.2)的倍式化速端曲线是  $2n-2$  次 B ézier 曲线(13.1.7), 其速端曲线如(13.1.8)所示, 其导矢方向界于向量  $\{\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i\}_{i=0}^{n-1}$  的凸包之中, 导矢大小的界如(13.1.11)所示.

## 13.2 有理 B ézier 倍式化速端曲面

### 13.2.1 倍式化速端曲面的导出

$m \times n$  次张量积有理 B ézier 曲面(7.4.1)或(7.4.2)在  $u$  方向上偏导矢的 Cartesian 形式是

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{R}(u, v) / \partial u &= \partial (X(u, v) / \omega(u, v), Y(u, v) / \omega(u, v), Z(u, v) / \omega(u, v)) / \partial u \\ &= (\omega(u, v) X_u(u, v) - \omega_u(u, v) X(u, v), \omega(u, v) Y_u(u, v) - \omega_u(u, v) Y(u, v), \\ &\quad \omega(u, v) Z_u(u, v) - \omega_u(u, v) Z(u, v)) / (\omega(u, v))^2 \\ &= \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v)) / (\omega(u, v))^2. \end{aligned} \quad (13.2.1)$$

这里下标  $u$  表示对  $u$  求偏导数,  $\tilde{\mathbf{R}}_u(u, v) = (X_u(u, v), Y_u(u, v), Z_u(u, v), \omega_u(u, v))$ .

现把曲面(7.4.1)表为  $\tilde{\mathbf{R}}(u, v) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \tilde{\mathbf{Q}}_i(v)$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_i(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ . 这表示固定  $v$  时,

$\tilde{\mathbf{R}}(u, v)$  是以  $u$  为参数  $\tilde{\mathbf{Q}}_i(v)$  为控制顶点的  $m$  次有理 B ézier 曲线. 由 §13.1.2 的结论即得

$$\begin{aligned} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v)) &= \sum_{k=0}^{2m-2} (1-u)^{2m-2-k} u^k \sum_{i=\max(0, k-m+1)}^{[k/2]} (k-2i+1) \binom{m}{i} \binom{m}{k-i+1} \\ &\quad \times \text{Dir}(\tilde{\mathbf{Q}}_i(v), \tilde{\mathbf{Q}}_{k-i+1}(v)). \end{aligned} \quad (13.2.2)$$

注意到对于  $0 \leq a < b \leq m$ , 按(13.1.3)有

$$\text{Dir}(\tilde{\mathbf{Q}}_a(v), \tilde{\mathbf{Q}}_b(v)) = \sum_{l=0}^{2n} (1-v)^{2n-l} v^l \sum_{j=\max(0, l-n)}^{\min(l, n)} \binom{n}{j} \binom{n}{l-j} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{aj}, \tilde{\mathbf{R}}_{b, l-j}), \quad (13.2.3)$$

最后我们得到

$$\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v)) = \sum_{k=0}^{2m-2} \sum_{l=0}^{2n} B_k^{2m-2}(u) B_l^{2n}(v) \mathbf{H}_{kl}, \quad (13.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}(u, v) = \frac{1}{(\omega(u, v))^2} \sum_{k=0}^{2m-2} \sum_{l=0}^{2n} B_k^{2m-2}(u) B_l^{2n}(v) \mathbf{H}_{kl}, \quad (13.2.5)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{kl} = & \sum_{i=\max(0, k-m+1)}^{[k/2]} \sum_{j=\max(0, l-n)}^{\min(l, n)} (k-2i+1) \binom{m}{i} \binom{m}{k-i+1} \binom{n}{j} \binom{n}{l-j} \\ & \times \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}, \tilde{\mathbf{R}}_{k-i+1, l-j}) / \binom{2m-2}{k} \binom{2n}{l}. \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

(13.2.4)即曲面(7.4.2)对于 $u$ 的倍式化速端曲面, 它是以 $\mathbf{H}_{kl}$ 为控制顶点的 $(2m-2) \times 2n$ 次 Bézier 曲面; (13.2.5)是曲面(7.4.2)对于 $u$ 的速端曲面.

例如, 有理双线性 Bézier 曲面的倍式化速端曲面是 $0 \times 2$ 次的, 其控制顶点是

$$\mathbf{H}_{00} = \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \quad \mathbf{H}_{01} = (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}))/2, \quad \mathbf{H}_{02} = \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}).$$

有理双二次 Bézier 曲面的倍式化速端曲面是 $2 \times 4$ 次的, 其控制顶点是

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{00} &= 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \quad \mathbf{H}_{01} = \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \\ \mathbf{H}_{02} &= (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}) + 4\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}))/3, \\ \mathbf{H}_{03} &= \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}), \quad \mathbf{H}_{04} = 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}), \\ \mathbf{H}_{10} &= \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \quad \mathbf{H}_{11} = (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}))/2, \\ \mathbf{H}_{12} &= (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + 4\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}))/6, \\ \mathbf{H}_{13} &= (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}))/2, \quad \mathbf{H}_{14} = \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}), \\ \mathbf{H}_{20} &= 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \quad \mathbf{H}_{21} = \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \\ \mathbf{H}_{22} &= (\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + 4\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}))/3, \\ \mathbf{H}_{23} &= \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}), \quad \mathbf{H}_{24} = 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}). \end{aligned}$$

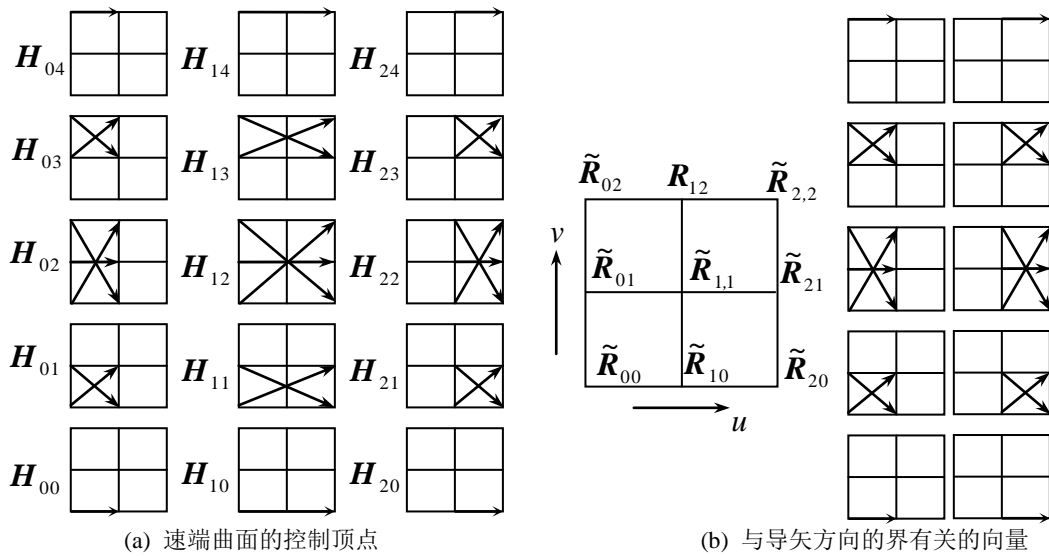


图 13.2.1 有理双二次曲面的 $u$ 向偏导矢

这些顶点的结构分析如图 13.2.1 (a)所示. 另一方向 $v$ 上的偏导矢类似地可得.

### 13.2.2 曲面导矢方向的界

虽然倍式化速端曲面需要  $(2m-1) \times (2n+1)$  个控制顶点来计算, 但是导矢方向的界的估计仅需要较少的向量. 对(13.2.2)应用类似于 §13.1.3 的方法, 可知  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v))$  位于  $m$  个向量  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{Q}}_i(v), \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1}(v)) (i=0, 1, \dots, m-1)$  的凸包之中; 但是对(13.2.3)不能应用类似于 §13.1.3 的方法. 由此可知  $\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v))$  位于  $m(2n+1)$  个向量

$$\mathbf{R}_{il}^* = \sum_{j=\max(0, l-n)}^{\min(l, n)} \binom{n}{j} \binom{n}{l-j} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}, \tilde{\mathbf{R}}_{i+1, l-j}), \quad i=0, 1, \dots, m-1; \quad l=0, 1, \dots, 2n \quad (13.2.7)$$

的凸包之中. 例如, 双二次有理曲面(7.4.2)在  $u$  方向上的导矢位于以下十个向量的凸包之中(参见图 13.2.1 (b)):

$$\begin{aligned} & \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \quad 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \\ & \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}) + 4\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}), \\ & 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{01}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}) + 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}), \quad \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{02}, \tilde{\mathbf{R}}_{12}), \quad \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \\ & 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \quad \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + 4\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}) + \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{20}), \\ & 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}) + 2\text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{21}), \quad \text{Dir}(\tilde{\mathbf{R}}_{12}, \tilde{\mathbf{R}}_{22}). \end{aligned}$$

### 13.2.3 曲面导矢大小的界

应用 §13.1.4 的方法于(13.2.1), (13.2.2), 得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}(u, v) \right\| &= \frac{m}{(\omega(u, v))^2} \left\| \sum_{k=0}^{2m-2} (1-u)^{2m-2-k} u^k \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 0 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m}} \binom{m-1}{i} \binom{m-1}{j-1} \text{Dir}(\tilde{\mathbf{Q}}_i(v), \tilde{\mathbf{Q}}_j(v)) \right\| \\ &\leq (m\omega_{\max}^2 / \omega_{\min}^2) \max_{0 \leq i \leq m-1} \|\mathbf{Q}_{i+1}(v) - \mathbf{Q}_i(v)\|, \end{aligned}$$

这里

$$\omega_{\max} = \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}, \quad \omega_{\min} = \min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}. \quad (13.2.8)$$

引入(13.2.7)中的向量记号  $\mathbf{R}_{il}^*$ , 容易求得

$$\|\mathbf{Q}_{i+1}(v) - \mathbf{Q}_i(v)\| = \frac{\|\text{Dir}(\tilde{\mathbf{Q}}_i(v), \tilde{\mathbf{Q}}_{i+1}(v))\|}{\omega_i(v)\omega_{i+1}(v)} = \frac{1}{\omega_{\min}^2} \left\| \sum_{l=0}^{2n} B_l^{2n}(v) / \binom{2n}{l} \mathbf{R}_{il}^* \right\| \leq \frac{S_{\max}}{\omega_{\min}^2},$$

其中  $\omega_i(v)$  表示  $\tilde{\mathbf{Q}}_i(v)$  的权, 且

$$S_{\max} \equiv \max_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq l \leq 2n}} \left\| \mathbf{R}_{il}^* / \binom{2n}{l} \right\|. \quad (13.2.9)$$

由此可知

$$\|\partial \mathbf{R}(u, v) / \partial u\| \leq (m\omega_{\max}^2 S_{\max}) / \omega_{\min}^4. \quad (13.2.10)$$

注意到  $S_{\max}$  是  $m(2n+1)$  个向量

$$\mathbf{R}_{il}^* / \binom{2n}{l}, \quad i=0, 1, \dots, m-1, \quad l=0, 1, \dots, 2n \quad (13.2.11)$$

的最大模, 这些向量中的每一个与向量集(13.2.7)中的每一个方向相同, 我们可以知道, (13.2.7)构成了导矢方向与导矢大小的界向量集.

总结以上分析的结果, 我们得到

**定理 13.2.1** 当方向函数  $\text{Dir}$  如(13.1.1)或(13.1.2)定义时,  $m \times n$  次有理 Bézier 曲面(7.4.2)对于

参数  $u$  的倍式化速端曲面是  $(2m-2) \times 2n$  次 B ézier 曲面(13.2.4), 速端曲面如(13.2.5)所示, 其导矢方向界于(13.2.7)所示的  $m(2n+1)$  个向量的凸包之中, 其导矢大小的界如(13.2.10)所示.

应用(13.1.11)和(13.2.10), 我们可估计有理 B ézier 曲线、曲面上两点间距离的上界, 纠正 Rockwood<sup>[3,4]</sup>的两个错误公式.

### 13.3 动曲线轨迹的速端曲线

#### 13.3.1 速端曲面的直接导出

Sederberg<sup>[1]</sup>利用直接算法, 得到了  $n$  次有理 B ézier 曲线(3.2.2)的速端曲线

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \frac{1}{\left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \right)^2} \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{B_k^{2n-2}(t)}{\binom{2n-2}{k}} \sum_{i=\max(0, k-n+1)}^{\lfloor k/2 \rfloor} (k-2i+1) \binom{n}{i} \binom{n}{k-i+1} \mathbf{D}_{i, k-i+1}, \quad (13.3.1)$$

$$\mathbf{D}_{i, k-i+1} = \omega_i \omega_{k-i+1} (\mathbf{R}_{k-i+1} - \mathbf{R}_i). \quad (13.3.2)$$

Floater<sup>[2]</sup>推导了上述速端曲线的两个上界公式, 即(13.1.11)和

$$\|\mathbf{R}'(t)\| \leq n \left( \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \omega_i}{\min_{0 \leq i \leq n} \omega_i} \right) \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j\|. \quad (13.3.3)$$

本节将应用上述结果, 直接导出  $m \times n$  次有理 B ézier 曲面(7.4.2)的速端曲面及其界的公式. 其主要思想是: 把有理 B ézier 曲面看成一条有理 B ézier 曲线在空间运动的轨迹. 这一思想在利用有理曲线的几何性质来研究有理曲面的几何性质时常常显示出积极的作用.

**定义 13.3.1** 假设  $m$  次有理 B ézier 曲线  $\mathbf{R}^m(u) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) \omega_i \mathbf{R}_i$  在空间运动,

再假设这条曲线上每个原始控制顶点  $\mathbf{R}_i$  沿着空间的一条  $n$  次有理 B ézier 曲线的轨道滑动, 且每个权因子  $\omega_i$  也按照相应的 B ézier 函数不断改变其值:  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(v) =$

$\sum_{j=0}^n B_j^n(v) \omega_{ij} \mathbf{R}_{ij} / \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \omega_{ij}$ ,  $\mathbf{R}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ;  $W_i = W_i(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \omega_{ij}$ . 则联合以上三个表

达式所得到的一条动曲线的轨迹称为  $m \times n$  次有理 B ézier 曲面, 可以表为

$$\mathbf{R}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v) \mathbf{R}_i(v) / \sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v), \quad \text{即(7.4.2).}$$

按照这个直观定义, 对任何固定的  $v = v_0 \in [0, 1]$ ,  $m \times n$  次有理 B ézier 曲面  $\mathbf{R}^{m,n}(u, v)$  是一条  $m$  次有理 B ézier 曲线  $\mathbf{R}^{m,n}(u, v_0)$ . 应用(13.3.1)得

$$\frac{\partial \mathbf{R}^{m,n}(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{\left( \sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v) \right)^2} \left\{ \sum_{k=0}^{2m-2} \frac{B_k^{2m-2}(u)}{\binom{2m-2}{k}} \sum_{i=\max(0, k-m+1)}^{\lfloor k/2 \rfloor} (k-2i+1) \binom{m}{i} \binom{m}{k-i+1} \mathbf{D}_{i, k-i+1}(v) \right\},$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i, k-i+1}(v) &= W_i(v) W_{k-i+1}(v) (\mathbf{R}_{k-i+1}(v) - \mathbf{R}_i(v)) \\ &= \left( \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \omega_{ij} \right) \left( \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{k-i+1, h} \mathbf{R}_{k-i+1, h} \right) - \left( \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{k-i+1, h} \right) \left( \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \omega_{ij} \mathbf{R}_{ij} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{2n} \left( B_l^{2n}(v) / \binom{2n}{l} \right) \sum_{j=\max(0, l-n)}^{\min(l, n)} \binom{n}{j} \binom{n}{l-j} \omega_{ij} \omega_{k-i+1, l-j} (\mathbf{R}_{k-i+1, l-j} - \mathbf{R}_{ij}). \end{aligned}$$

这一结果与 §13.2.1 中的结果完全一致.

### 13.3.2 曲面导矢界的估计

应用 Floater 对有理 B ézier 曲线导矢的两个上界公式(13.1.11)和(13.3.3)，我们有

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^{m,n}(u,v)}{\partial u} \right\| \leq m \left( \frac{\max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq v \leq 1}} W_i(v)}{\min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq v \leq 1}} W_i(v)} \right)^2 \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq v \leq 1}} \|\mathbf{R}_{i+1}(v) - \mathbf{R}_i(v)\|,$$

或

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^{m,n}(u,v)}{\partial u} \right\| \leq m \left( \frac{\max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq v \leq 1}} W_i(v)}{\min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq v \leq 1}} W_i(v)} \right) \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \\ 0 \leq v \leq 1}} \|\mathbf{R}_i(v) - \mathbf{R}_j(v)\|.$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1}(v) - \mathbf{R}_i(v) &= \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{i+1,h} \mathbf{R}_{i+1,h} / \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{i+1,h} - \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{ik} \mathbf{R}_{ik} / \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{ik} \\ &= \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) \omega_{i+1,h} \omega_{ik} (\mathbf{R}_{i+1,h} - \mathbf{R}_{ik}) / \left( \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{i+1,h} \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{ik} \right), \\ \mathbf{R}_i(v) - \mathbf{R}_j(v) &= \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{ih} \mathbf{R}_{ih} / \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{ih} - \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{jk} \mathbf{R}_{jk} / \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{jk} \\ &= \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) \omega_{ih} \omega_{jk} (\mathbf{R}_{ih} - \mathbf{R}_{jk}) / \left( \sum_{h=0}^n B_h^n(v) \omega_{ih} \sum_{k=0}^n B_k^n(v) \omega_{jk} \right). \end{aligned}$$

由此得到

**定理 13.3.1** 有理 B ézier 曲面(7.4.2)的导矢具有两个上界公式:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^{m,n}(u,v)}{\partial u} \right\| \leq m \left( \frac{\max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}}{\min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}} \right)^2 \left( \frac{\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}}{\min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}} \right) \left( \frac{\max_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}}{\min_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}} \right) \max_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq h \leq n \\ 0 \leq k \leq n}} \|\mathbf{R}_{i+1,h} - \mathbf{R}_{ik}\|, 0 \leq u, v \leq 1, \quad (13.3.4)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^{m,n}(u,v)}{\partial u} \right\| \leq m \left( \frac{\max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}}{\min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \omega_{ij}} \right)^3 \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m \\ 0 \leq h \leq n \\ 0 \leq k \leq n}} \|\mathbf{R}_{ih} - \mathbf{R}_{jk}\|, \quad 0 \leq u, v \leq 1. \quad (13.3.5)$$

## 13.4 有理 B ézier 曲面的法矢

### 13.4.1 Nrm 函数的定义和性质

$m \times n$  次有理 B ézier 曲面的法矢可由曲面对于  $u, v$  方向的导矢进行叉积运算得到，由此推断法矢曲面是  $(4m-2) \times (4n-2)$  次。加州大学 Berkeley 分校博士 Hohmeyer<sup>[5]</sup>指出法矢曲面其实是  $(3m-1) \times (3n-1)$  次，现在我们指出，这个结论不对。法矢曲面实质上应当是  $(3m-2) \times (3n-2)$  次。在给出法矢的计算方法之前，首先给出

**定义 13.4.1** 由空间三个齐次坐标点  $\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3$  所决定的函数

$$\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & X_1 & X_2 & X_3 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \right) \quad (13.4.1)$$

称为平面  $\{\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3\}$  的 Cartesian 法线方向向量，其中  $\tilde{\mathbf{R}}_i = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i), i = 1, 2, 3$ 。

设  $k$  为任意实数，容易验证函数 Nrm 具有以下一些性质：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_1) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2) = \mathbf{0}, \\ \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_1) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2) = -\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_2) \\ \quad = -\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_3) = -\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_1), \\ \text{Nrm}(k\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, k\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, k\tilde{\mathbf{R}}_3) = k\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3), \\ \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_4) = \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_4) + \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3, \tilde{\mathbf{R}}_4). \end{array} \right. \quad (13.4.2)$$

### 13.4.2 曲面法矢的计算

有理 B ézier 曲面(7.4.1)上点  $\tilde{\mathbf{R}}(u, v)$  处的法矢方向为  $\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_v(u, v))$ . 记

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{00} &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) \tilde{\mathbf{R}}_{ij}, & \tilde{\mathbf{S}}_{01} &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n B_i^{m-1}(u) B_{j-1}^{n-1}(v) \tilde{\mathbf{R}}_{ij}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{10} &\equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} B_{i-1}^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) \tilde{\mathbf{R}}_{ij}, & \tilde{\mathbf{S}}_{11} &\equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{i-1}^{m-1}(u) B_{j-1}^{n-1}(v) \tilde{\mathbf{R}}_{ij}, \end{aligned}$$

再把  $\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_v(u, v)$  分解为  $\tilde{\mathbf{S}}_{ij} (i, j = 0, 1)$  的双线性凸组合或线性组合:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(u, v) &= (1-u)(1-v)\tilde{\mathbf{S}}_{00} + u(1-v)\tilde{\mathbf{S}}_{10} + (1-u)v\tilde{\mathbf{S}}_{01} + uv\tilde{\mathbf{S}}_{11}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v) &= m \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v) (\tilde{\mathbf{R}}_{i+1,j} - \tilde{\mathbf{R}}_{ij}) \\ &= m((1-v)\tilde{\mathbf{S}}_{10} + v\tilde{\mathbf{S}}_{11} - (1-v)\tilde{\mathbf{S}}_{00} - v\tilde{\mathbf{S}}_{01}), \\ \tilde{\mathbf{R}}_v(u, v) &= n((1-u)\tilde{\mathbf{S}}_{01} + u\tilde{\mathbf{S}}_{11} - (1-u)\tilde{\mathbf{S}}_{00} - u\tilde{\mathbf{S}}_{10}). \end{aligned}$$

把以上三式按(13.4.1)进行展开, 我们得到

**定理 13.4.1** 如果按(13.4.1)定义方向函数  $\text{Nrm}$ , 则有有理 B ézier 曲面(7.4.1)的法矢方向是:

$$\begin{aligned} \text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_u(u, v), \tilde{\mathbf{R}}_v(u, v)) &= mn((1-u)(1-v)\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{S}}_{00}, \tilde{\mathbf{S}}_{10}, \tilde{\mathbf{S}}_{01}) \\ &+ u(1-v)\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{S}}_{00}, \tilde{\mathbf{S}}_{10}, \tilde{\mathbf{S}}_{11}) + (1-u)v\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{S}}_{00}, \tilde{\mathbf{S}}_{11}, \tilde{\mathbf{S}}_{01}) + uv\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{S}}_{10}, \tilde{\mathbf{S}}_{11}, \tilde{\mathbf{S}}_{01})). \end{aligned} \quad (13.4.3)$$

根据定理 13.4.1, 易知法矢曲面应当是  $(3m-2) \times (3n-2)$  次. 例如, 双线性有理 B ézier 曲面(7.4.1)的法矢方向曲面是  $(1-u)(1-v)\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{01}) + u(1-v)\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}) + (1-u)v\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_{00}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{01}) + uv\text{Nrm}(\tilde{\mathbf{R}}_{10}, \tilde{\mathbf{R}}_{11}, \tilde{\mathbf{R}}_{01})$ .

### 13.4.3 曲面法矢方向的界

有两种方法可用来计算曲面法矢方向的界. 第一种方法由 Sederberg<sup>[6]</sup>提出, 它原先是就多项式曲面而言的: 先计算对于  $u$  和  $v$  的导矢方向的包围圆锥, 进一步据此计算法矢的包围圆锥. 这一方法对  $m \times n$  次有理多项式曲面也适用. 为此, 首先必须计算(13.2.7)中  $m(2n+1)$  个与  $u$  方向上导矢的界有关的向量, 类似地计算  $(2m+1)n$  个与  $v$  方向上导矢的界有关的向量. 第二种方法是利用 §13.4.2 的方法计算法矢方向曲面的控制顶点集, 它们包围了法矢方向. 这些控制顶点共有  $(3m-1)(3n-1)$  个.

比较以上两种方法可知, 后一方法一般给出一个紧窄的界, 但需要较多的计算量. 对于双二次和双三次曲面而言, 包围法矢所需的点向量数目远大于与  $u$  方向或  $v$  方向上导矢有关的向量总数. 另一方面, 计算“Nrm”远比计算“Dir”花时间. 所以我们建议, 除了双线性有理 B ézier 曲面以外, 法矢方向的界用导矢方向的界来间接推算较为相宜.

为便于比较, 我们列出下面两个表:



表 13.4.1. 倍式化速端曲面与法矢方向曲面的次数

有理曲面	双线性	双二次	双三次	$m \times n$ 次
$u$ 向导矢	$0 \times 2$	$2 \times 4$	$4 \times 6$	$(2m-2) \times 2n$
$v$ 向导矢	$2 \times 0$	$4 \times 2$	$6 \times 4$	$2m \times (2n-2)$
法矢	$1 \times 1$	$4 \times 4$	$7 \times 7$	$(3m-2) \times (3n-2)$

表 13.4.2. 求导矢方向的界或求法矢方向的界所需的向量个数

有理曲面	双线性	双二次	双三次	$m \times n$ 次
$u$ 向导矢	3	10	21	$m(2n+1)$
$v$ 向导矢	3	10	21	$(2m+1)n$
法矢	4	25	64	$(3m-1) \times (3n-1)$

## 13.5 有理 Bézier 曲线的高阶导矢

### 13.5.1 高阶导矢的递推算法

对有理 Bézier 曲线(3.2.2), 设

$$G_i^n = G_i^n(t) = B_i^n(t)\omega_i / \sum_{l=0}^n B_l^n(t)\omega_l, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (13.5.1)$$

$$E_i^{n-1} = E_i^{n-1}(t) = \begin{cases} 0, & i = -1, \\ -\sum_{j=0}^i (G_j^n)', & i = 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (13.5.2)$$

则

$$R(t) = \sum_{i=0}^n G_i^n R_i, \quad E_{i-1}^{n-1} - E_i^{n-1} = (G_i^n)', \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad E_{n-1}^{n-1} = 0. \quad (13.5.3)$$

因而

$$R'(t) = \sum_{i=0}^n (E_{i-1}^{n-1} - E_i^{n-1}) R_i = \sum_{i=0}^{n-1} E_i^{n-1} \Delta R_i, \quad \Delta R_i = R_{i+1} - R_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13.5.4)$$

$$\frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} R(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{d^s E_i^{n-1}}{dt^s} \right) \Delta R_i, \quad s = 0, 1, \dots. \quad (13.5.5)$$

下面分析函数族  $\{E_i^{n-1}(t)\}_{i=0}^{n-1}$  的性质. 由(13.5.2)有

$$E_i^{n-1} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=i+1}^n B_j^n(t)\omega_j / \sum_{l=0}^n B_l^n(t)\omega_l \right), \quad (13.5.6)$$

于是立即得到

$$\int_0^1 E_i^{n-1} dt = 1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13.5.7)$$

应用恒等式

$$B_k^n(B_j^n)' - B_j^n(B_k^n)' = (j-k) \left[ \binom{n}{k} \binom{n}{j} / \binom{2n-2}{k+j-1} \right] B_{k+j-1}^{2n-2} \quad (13.5.8)$$

(其中  $B_k^n = B_k^n(t)$  是 Bernstein 基), 我们有

$$E_i^{n-1} = \left( \sum_{l=0}^n B_l^n \omega_l \right)^{-2} \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^n (j-k) \left[ \binom{n}{k} \binom{n}{j} / \binom{2n-2}{k+j-1} \right] B_{k+j-1}^{2n-2} \omega_k \omega_j. \quad (13.5.9)$$

按 §3.2 中  $\omega_i, \omega_l > 0$  的规定可知

$$E_i^{n-1} > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13.5.10)$$

这样我们就得到

**定理 13.5.1** 有理 B 曲线(3.2.2)的导矢可表为(13.5.4), 其中函数族  $\{E_i^{n-1}(t)\}_{i=0}^{n-1}$  可表为(13.5.6)或(13.5.9), 它具有两个优良的性质, 如(13.5.7)和(13.5.10)所示.

下面先给出一个引理, 进而给出计算  $\{E_i^{n-1}\}_{i=0}^{n-1}$  的高阶导数的公式.

**引理 13.5.1**

$$\begin{aligned} f_{lh}^{nm} &= B_l^n (B_h^{m(n-1)})' - m B_h^{m(n-1)} (B_l^n)' \\ &= \binom{n}{l} \binom{m(n-1)}{h} \left[ \frac{h-ml}{\binom{(m+1)(n-1)}{l+h-1}} B_{l+h-1}^{(m+1)(n-1)} + \frac{h-ml+m}{\binom{(m+1)(n-1)}{l+h}} B_{l+h}^{(m+1)(n-1)} \right], \end{aligned} \quad (13.5.11)$$

这里  $B_l^n (l = 0, 1, \dots, n)$  和  $B_h^{m(n-1)} (h = 0, 1, \dots, m(n-1))$  均是 Bernstein 基.

证 置  $f_{lh}^{nm} = F_1 - F_2$ ,

$$F_1 = m(n-1) B_l^n B_{h-1}^{m(n-1)-1} - mn B_h^{m(n-1)} B_{l-1}^{n-1}, \quad F_2 = m(n-1) B_l^n B_h^{m(n-1)-1} - mn B_h^{m(n-1)} B_l^{n-1},$$

应用恒等式

$$B_i^a B_j^b = \left[ \binom{i+j}{i} \binom{a+b-i-j}{a-i} \right] / \binom{a+b}{a} B_{i+j}^{a+b}, \quad (13.5.12)$$

可得下面两式, 从而引理得到证明:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{n(h-ml)}{h} \left[ \binom{l+h-1}{l} \binom{(m+1)n-l-h-m}{n-l} \right] / \binom{(m+1)(n-1)}{n-1} B_{l+h-1}^{(m+1)(n-1)}, \\ F_2 &= \frac{-m(n-1)(h-ml+m)}{m(n-1)-h} \left[ \binom{l+h}{l} \binom{(m+1)(n-1)-l-h}{n-l} \right] / \binom{(m+1)(n-1)}{n} B_{l+h}^{(m+1)(n-1)}. \end{aligned}$$

**定理 13.5.2**

$$\begin{aligned} \frac{d^s(E_i^{n-1})}{dt^s} &= \left( \sum_{l=0}^n B_l^n \omega_l \right)^{-(s+2)} \left\{ \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^n \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_s \leq n} (j-k) \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{l_1} \cdots \binom{n}{l_s} \omega_k \omega_j \omega_{l_1} \cdots \omega_{l_s} \right. \\ &\quad \times \sum_{p=0}^s \left( a_p^{[s]} B_{k+j+l_1+\dots+l_s-1-s+p}^{(s+2)(n-1)} \right) / \binom{(s+2)(n-1)}{k+j+l_1+\dots+l_s-1-s+p} \Bigg\}, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13.5.13)$$

这里  $\{a_p^{[s]}\}_{p=0}^s$  由下列递推公式给出:

$$\begin{cases} a_p^{[s]} = \begin{cases} 1, & s = p = 0, \\ a_{p-1}^{[s-1]}(A_s + p) + a_p^{[s-1]}(A_s - s + p), & s = 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, \dots, s, \end{cases} \\ a_{-1}^{[s-1]} = a_s^{[s-1]} = 0, \\ A_s = \begin{cases} k + j - 2l_1, & s = 1, \\ k + j + l_1 + \dots + l_{s-1} - (s+1)l_s, & s = 2, 3, \dots, \end{cases} \end{cases} \quad (13.5.14)$$

又若  $k + j + l_1 + \dots + l_s - 1 - s + p \notin [0, (s+2)(n-1)]$ , 则假设  $B_{k+j+l_1+\dots+l_s-1-s+p}^{(s+2)(n-1)} = 0$ .

证 由引理 13.5.1 可得

$$f_{l_1, k+j-1}^{n2} = \binom{n}{l_1} \binom{2n-2}{k+j-1} \left( \frac{A_1-1}{\binom{3n-3}{k+j+l_1-2}} B_{k+j+l_1-2}^{3n-3} + \frac{A_1+1}{\binom{3n-3}{k+j+l_1-1}} B_{k+j+l_1-1}^{3n-3} \right),$$

利用(13.5.9)易知定理当  $s=1$  时成立. 今设定理当  $s=r$  时成立. 取  $m=r+2, l=l_{r+1}$ ,  $h=k+l_1+\cdots+l_r-1-r+p$ , 由引理 13.5.1 得到

$$\begin{aligned} & f_{l_{r+1}, k+j+l_1+\cdots+l_r-1-r+p}^{n, r+2} \\ &= \binom{n}{l_{r+1}} \binom{(r+2)(n-1)}{k+j+l_1+\cdots+l_r-1-r+p} \left\{ \frac{A_{r+1}-r-1+p}{\binom{(r+3)(n-1)}{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-(r+1)+p}} \right. \\ & \quad \left. \times B_{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-(r+1)+p}^{(r+3)(n-1)} + \frac{A_{r+1}+1+p}{\binom{(r+3)(n-1)}{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-r+p}} B_{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-r+p}^{(r+3)(n-1)} \right\}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} E_i^{n-1} &= \left( \sum_{l=0}^n B_l^n \omega_l \right)^{-(r+3)} \left\{ \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^n \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_{r+1} \leq n} \omega_k \omega_j \omega_{l_1} \cdots \omega_{l_{r+1}} (j-k) \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{l_1} \cdots \binom{n}{l_r} \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{p=0}^r \left( a_p^{[r]} f_{l_{r+1}, k+j+l_1+\cdots+l_r-1-r+p}^{n, r+2} / \binom{(r+2)(n-1)}{k+j+l_1+\cdots+l_r-1-r+p} \right) \right\} \\ &= \left( \sum_{l=0}^n B_l^n \omega_l \right)^{-(r+3)} \left\{ \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^n \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_{r+1} \leq n} \omega_k \omega_j \omega_{l_1} \cdots \omega_{l_{r+1}} (j-k) \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{l_1} \cdots \binom{n}{l_{r+1}} \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{p=0}^{r+1} \left( a_p^{[r+1]} B_{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-(r+1)+p}^{(r+3)(n-1)} / \binom{(r+3)(n-1)}{k+j+l_1+\cdots+l_{r+1}-1-(r+1)+p} \right) \right\}. \end{aligned}$$

这表明当  $s=r+1$  时定理成立. 由归纳法知定理成立. 证毕.

由(13.5.5)和(13.5.13)知道, 有理 Bézier 曲线  $\mathbf{R}(t)$  的  $s$  阶 ( $s=1, 2, \dots$ ) 导矢能表为一个分式, 其分母是  $(s+1)n$  次多项式, 分子是以  $\Delta \mathbf{R}_i$  为系数的  $(s+1)(n-1)$  次多项式. 必须指出, 当  $s \geq 2$ ,  $\mathbf{R}^{(s)}(t)$  不能象 Bézier 曲线的  $s$  阶导矢那样表为  $\Delta^s \mathbf{R}_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-s$ ) 的线性组合.

### 13.5.2 导矢 $E_i^{n-1}$ 表示的应用 I: 有理 Bézier 曲线的弧长估计

应用(13.5.4), (13.5.7), (13.5.10), 立刻得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\mathbf{R}'(t)\| dt &= \int_0^1 \left\| \sum_{i=0}^{n-1} E_i^{n-1} \Delta \mathbf{R}_i \right\| dt \leq \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \|E_i^{n-1} \Delta \mathbf{R}_i\| \right) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 \|E_i^{n-1} \Delta \mathbf{R}_i\| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 E_i^{n-1} \|\Delta \mathbf{R}_i\| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta \mathbf{R}_i\| \int_0^1 E_i^{n-1} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta \mathbf{R}_i\|. \quad (13.5.15) \end{aligned}$$

这表明成立着下面的

**定理 13.5.3**  $n$  次有理 Bézier 曲线的弧长不大于其相应的控制多边形之周长.

### 13.5.3 导矢 $E_i^{n-1}$ 表示的应用 II: 有理 Bézier 曲线端点处的三阶导矢的计算

由(13.5.14)容易算出

$$\begin{cases} a_0^{[1]} = A_1 - 1, a_1^{[1]} = A_1 + 1, \\ a_0^{[2]} = (A_1 - 1)(A_2 - 2), a_1^{[2]} = 2A_1A_2 - 2, a_2^{[2]} = (A_1 + 1)(A_2 + 2), \\ a_0^{[3]} = (A_1 - 1)(A_2 - 2)(A_3 - 3), \\ a_1^{[3]} = (A_1 - 1)(A_2 - 2)(A_3 + 1) + 2(A_1A_2 - 1)(A_3 - 2), \\ a_2^{[3]} = (A_1 + 1)(A_2 + 2)(A_3 - 1) + 2(A_1A_2 - 1)(A_3 + 2), \\ a_3^{[3]} = (A_1 + 1)(A_2 + 2)(A_3 + 3), \end{cases} \quad (13.5.16)$$

由此, 得出

$$E_i^{n-1}(0) = \begin{cases} n\omega_1/\omega_0, & i=0, \\ 0, & 1 \leq i \leq n-1, \end{cases} \quad (13.5.17)$$

$$\frac{dE_i^{n-1}(0)}{dt} = \begin{cases} n(n-1)\omega_2/\omega_0 + 2n(\omega_1/\omega_0)(1 - n\omega_1/\omega_0), & i=0, \\ n(n-1)\omega_2/\omega_0, & i=1, \\ 0, & 2 \leq i \leq n-1, \end{cases} \quad (13.5.18)$$

$$\frac{d^2E_i^{n-1}(0)}{dt^2} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\frac{\omega_3}{\omega_0} + 6n(n-1)\frac{\omega_2}{\omega_0}\left(1 - n\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) + 6n\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1 - 2n\frac{\omega_1}{\omega_0} + n^2\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right), & i=0, \\ n(n-1)(n-2)\omega_3/\omega_0 + 3n(n-1)(\omega_2/\omega_0)(2 - n\omega_1/\omega_0), & i=1, \\ n(n-1)(n-2)\omega_3/\omega_0, & i=2, \\ 0, & 3 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (13.5.19)$$

于是我们求得  $n$  次有理 Bézier 曲线(3.2.2)在端点  $t=0$  处的三阶导矢

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'''(0) &= \left[ n(n-1)(n-2)\frac{\omega_3}{\omega_0} + 6n(n-1)\frac{\omega_2}{\omega_0}\left(1 - n\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) + 6n\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1 - 2n\frac{\omega_1}{\omega_0} + n^2\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) \right] \Delta \mathbf{R}_0 \\ &+ \left[ n(n-1)(n-2)\frac{\omega_3}{\omega_0} + 3n(n-1)\frac{\omega_2}{\omega_0}\left(2 - n\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \right] \Delta \mathbf{R}_1 + \left[ n(n-1)(n-2)\frac{\omega_3}{\omega_0} \right] \Delta \mathbf{R}_2. \end{aligned} \quad (13.5.20)$$

根据曲线关于参数  $t$  和  $(1-t)$  的对称性可写出  $\mathbf{R}'''(1)$  的表达式, 同时得到

$$\mathbf{R}'(0) \times \mathbf{R}''(0) = n^2(n-1)(\omega_1\omega_2/\omega_0^2)(\Delta \mathbf{R}_0 \times \Delta \mathbf{R}_1), \quad (13.5.21)$$

$$(\mathbf{R}'(0), \mathbf{R}''(0), \mathbf{R}'''(0)) = n^3(n-1)^2(n-2)(\omega_1\omega_2\omega_3/\omega_0^3)(\Delta \mathbf{R}_0, \Delta \mathbf{R}_1, \Delta \mathbf{R}_2). \quad (13.5.22)$$

由此可求出曲线的端点曲率和挠率公式(3.2.5), (3.2.6).

#### 13.5.4 导矢 $E_i^{n-1}$ 表示的应用 III: 有理 Bézier 曲线的导矢界的估计

由(13.5.4), (13.5.8), (13.5.9)和恒等式

$$\begin{aligned} B_k^n(B_j^n)' - B_j^n(B_k^n)' &= n((1-t)B_k^{n-1} + tB_{k-1}^{n-1})(B_{j-1}^{n-1} - B_j^{n-1}) - n((1-t)B_j^{n-1} + tB_{j-1}^{n-1})(B_{k-1}^{n-1} - B_k^{n-1}) \\ &= n(B_k^{n-1}B_{j-1}^{n-1} - B_{k-1}^{n-1}B_j^{n-1}), \end{aligned} \quad (13.5.23)$$

我们可得  $\|\mathbf{R}'(t)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} E_i^{n-1} \|\Delta \mathbf{R}_i\| \leq \left( \max_{0 \leq i \leq n} \omega_i / \min_{0 \leq i \leq n} \omega_i \right)^2 \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\Delta \mathbf{R}_i\| \cdot A$ . 记  $B_{-1}^{n-1} = 0$ , 则

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^n \left[ B_k^n(B_j^n)' - B_j^n(B_k^n)' \right] = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i \sum_{j=i+1}^{n-1} (B_k^{n-1}B_{j-1}^{n-1} - B_{k-1}^{n-1}B_j^{n-1})$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^{n-1} (B_k^{n-1} B_{j-1}^{n-1} - B_{k-1}^{n-1} B_j^{n-1}) = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i (B_k^{n-1} - B_{k-1}^{n-1}) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} = n.$$

所以得出(13.1.11). 本方法无疑比 Floater<sup>[2]</sup>花好几页篇幅的推导方法简单得多.

## 13.6 二次有理 Bézier 曲线的精确求积

### 13.6.1 求积问题的提法与积分模型的简化

问题 13.6.1 已知一条二次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \omega_i \mathbf{R}_i / \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \omega_i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \omega_i > 0. \quad (13.6.1)$$

设  $\mathbf{AB}$  为  $\mathbf{R}(t)$  所在平面上与  $\mathbf{R}(t)$  不相交的一条直线, 直线  $\mathbf{AR}_0, \mathbf{AR}_2$  与曲线  $\mathbf{R}(t)$  围成区域  $G$ ; 由点  $\mathbf{R}_0$  和  $\mathbf{R}_2$  向直线  $\mathbf{AB}$  作垂线, 与  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{AB}$  围成区域  $D$ .

- 求区域  $G$  的面积  $S(G)$ , 区域  $D$  的面积  $S(D)$  (图 13.6.1);
- 求区域  $D$  关于某坐标轴  $x$  和  $y$  的面积矩  $I_x(D), I_y(D)$ ;
- 求区域  $D$  绕某坐标轴  $x$  和  $y$  旋转所产生的旋转体体积  $V_x(D), V_y(D)$ .

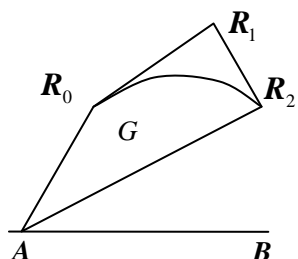


图 13.6.1 曲线(13.6.1)的相关区域

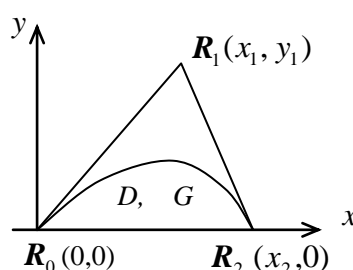
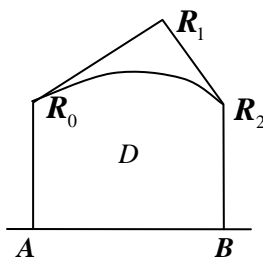


图 13.6.2 积分表达式的简化

一般情况下, 问题 13.6.1(a)涉及到六次的有理分式积分, 问题 13.6.1(b)涉及到八次的有理分式积分, 而被积表达式含有控制顶点坐标  $(x_i, y_i)$  及权因子  $\omega_i (i = 0, 1, 2)$  这样九个参变量, 其计算复杂性可想而知. 为此, 我们先对积分模型作简化. 引入分式线性变换(3.5.1)于曲线(13.6.1), 则其转化成控制顶点相同, 权因子为  $(1, \omega, 1)$  的二次有理 Bézier 曲线  $\mathbf{R}^*(u)$ . 按定理 3.2.1, 新旧曲线形状相同. 不妨仍记  $\mathbf{R}^*(u)$  为  $\mathbf{R}(t)$ , 则曲线(13.6.1)的求积就转化为曲线

$$\mathbf{R}(t) = (x(t), y(t)) = (X(t)/\omega(t), Y(t)/\omega(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (13.6.2)$$

的求积. 为进一步简化计算, 不妨假设直线  $\mathbf{AB}$  与直线  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2$  相重合, 再取  $\mathbf{AB}$  为坐标系的  $x$  轴,  $\mathbf{A}$  为原点(图 13.6.2), 于是

$$\mathbf{R}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{R}_1 = (x_1, y_1), \quad \mathbf{R}_2 = (x_2, 0). \quad (13.6.3)$$

所以积分表达式中的参变量由九个减少到  $x_1, y_1, x_2, \omega$  这样四个.

### 13.6.2 精确求积公式的导出

我们采用分解基本积分元和分离系数法展开部分分式来求得积分精确解.

分解(13.6.2)的分式里的分母为

$$\omega(t) = \begin{cases} 2(1-\omega)(t^2 - t + a) = 2(1-\omega)\left((t-1/2)^2 + (1/(2b))^2\right), & 0 < \omega < 1, \\ 1, & \omega = 1, \\ 2(1-\omega)(t-c)(t-d), & \omega > 1. \end{cases} \quad (13.6.4)$$

这里

$$a = \frac{1}{2(1-\omega)}, \quad b = \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}}, \quad c = \frac{1+e}{2}, \quad d = \frac{1-e}{2}, \quad e = \sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}. \quad (13.6.5)$$

在图 13.6.2 的坐标系下, 首先按照向量楔积运算得到有向面积

$$\begin{aligned} S(G) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathbf{R}(t) \wedge \mathbf{R}'(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (|X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t)|/\omega^2(t)) dt = \omega x_2 y_1 \int_0^1 (t^2/\omega^2(t)) dt, \end{aligned} \quad (13.6.6)$$

其次有

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^{x_2} y dx = \int_0^1 y(t)x'(t) dt \\ &= 4\omega y_1 \int_0^1 \frac{(1-\omega)x_2 t^4 + (2\omega x_1 + (\omega-2)x_2)t^3 + (x_2 - 3\omega x_1)t^2 + \omega x_1 t}{\omega^3(t)} dt, \end{aligned} \quad (13.6.7)$$

$$I_x(D) = \int_0^{x_2} (y^2/2) dx = (\omega^2 y_1^2 / (4(1-\omega)^4)) \int_0^1 F(I_x, t) f^4(t) dt, \quad \omega \neq 1, \quad (13.6.8)$$

$$I_y(D) = \int_0^{x_2} xy dx = (\omega y_1 / (4(1-\omega)^4)) \int_0^1 F(I_y, t) f^4(t) dt, \quad \omega \neq 1, \quad (13.6.9)$$

$$\begin{aligned} F(I_x, t) &= (\omega-1)x_2 t^6 + ((3-2\omega)x_2 - 2\omega x_1)t^5 + (5\omega x_1 + (\omega-3)x_2)t^4 \\ &\quad + (x_2 - 4\omega x_1)t^3 + \omega x_1 t^2, \end{aligned} \quad (13.6.10)$$

$$\begin{aligned} F(I_y, t) &= ((1-\omega)x_2^2 + 2\omega(\omega-1)x_1 x_2)t^6 + ((\omega-2)x_2^2 - 4\omega(\omega-2)x_1 x_2 - 4\omega^2 x_1^2)t^5 \\ &\quad + (10\omega^2 x_1^2 + \omega(2\omega-9)x_1 x_2 + x_2^2)t^4 + (3\omega x_1 x_2 - 8\omega^2 x_1^2)t^3 + 2\omega^2 x_1^2 t^2, \end{aligned} \quad (13.6.11)$$

$$f(t) = 1/(t^2 - t + a) = 1/((t-c)(t-d)). \quad (13.6.12)$$

注意到

$$S(D) = S(G), \quad V_x(D) = 2\pi I_x(D), \quad V_y(D) = 2\pi I_y(D), \quad (13.6.13)$$

因此  $S(D), V_x(D), V_y(D)$  无须计算. 下面, 先令  $0 < \omega < 1$ . 假设

$$A_{ij} = \int_0^1 t^i f^j(t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.6.14)$$

由有理函数积分可算出积分基本元

$$\begin{cases} A_{01} = 2A_{11} = 4b \tan^{-1} b, \quad A_{02} = 2A_{12} = 8b^3 \tan^{-1} b + 4(1-\omega)^2/(1+\omega), \\ A_{03} = 2A_{13} = 24b^5 \tan^{-1} b + 4(\omega+4)(1-\omega)^3/(1+\omega)^2, \\ A_{04} = 2A_{14} = 80b^7 \tan^{-1} b + 8(2\omega^2 + 9\omega + 22)(1-\omega)^4/(3(1+\omega)^3), \end{cases} \quad (13.6.15)$$

进一步可算出

$$\begin{cases} A_{22} = A_{01} + A_{12} - aA_{02}, \\ A_{i+2,3} = A_{i2} + A_{i+1,3} - aA_{i3}, \quad i = 0, 1, 2, \\ A_{i+2,4} = A_{i3} + A_{i+1,4} - aA_{i4}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (13.6.16)$$

由以上递推公式最终可求出

$$I_x(D, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega^2 x_2 y_1^2}{(1-\omega^2)^2} \left( \frac{-\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} + \frac{2+\omega^2}{6} \right), \quad (13.6.17)$$

$$I_y(D, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{2(1-\omega^2)^2} \left( \frac{x_2 - 2\omega^2 x_1}{\sqrt{1-\omega^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} + \frac{\omega(2(2+\omega^2)x_1 - (5-2\omega^2)x_2)}{6} \right). \quad (13.6.18)$$

再令  $\omega > 1$ . 假设

$$F(I_x, t)f^4(t) = \sum_{i=1}^4 l_i / (t-c)^i + \sum_{i=1}^4 s_i / (t-d)^i, \quad (13.6.19)$$

其中  $l_i, s_i$  是待定常数,  $i=1,2,3,4$ . 在(13.6.19)两端同乘以  $(t-c)^4$ , 再置  $t=c, d$ , 可求出

$$(l_4, s_4) = \frac{x_2}{8(\omega+1)} \pm \frac{\omega(x_2-2x_1)}{8(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}. \quad (13.6.20)$$

在(13.6.19) 两端同乘以  $(t-c)^4(t-d)^4$ , 再对  $t$  求导后, 置  $t=c, d$ , 利用上式, 可求出

$$(l_3, s_3) = \frac{\omega(2\omega+1)(x_2-2x_1)}{4(\omega+1)^2} \pm \frac{(2\omega+1)x_2}{4(\omega+1)} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}. \quad (13.6.21)$$

为了求  $l_1, l_2, s_1, s_2$ , 可对(13.6.19)通分并比较  $t^i (i=7,6,5,4)$  之系数, 按线性方程组求出

$$(l_1, s_1) = \pm \frac{\omega(\omega-1)x_2}{(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}, \quad (13.6.22)$$

$$(l_2, s_2) = \frac{(\omega^3-1)x_2}{2(\omega+1)^2} \pm \frac{\omega(2\omega^2+2\omega+1)(x_2-2x_1)}{4(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}, \quad (13.6.23)$$

因而最终得到

$$I_x(D, \omega > 1) = \frac{\omega^2 x_2 y_1^2}{2(\omega^2-1)^2} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-1}} \ln(\omega - \sqrt{\omega^2-1}) + \frac{\omega^2+2}{3} \right). \quad (13.6.24)$$

类似地, 假设

$$F(I_y, t)f^4(t) = \sum_{i=1}^4 l_i / (t-c)^i + \sum_{i=1}^4 s_i / (t-d)^i, \quad (13.6.25)$$

可得

$$(l_1, s_1) = \pm \frac{(\omega-1)(2\omega^2 x_1 - x_2)x_2}{2(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}, \quad (13.6.26)$$

$$(l_2, s_2) = \frac{(\omega-1)(2\omega(2\omega^2+3\omega+2)x_1 - (2\omega^2+4\omega+1)x_2)x_2}{4(\omega+1)^2} \pm \left( \frac{-4\omega^2(2\omega^2+2\omega+1)x_1^2}{4(\omega+1)^2} + \frac{2\omega(2\omega^3+3\omega^2+4\omega+1)x_1 x_2 - (2\omega^3+4\omega^2-1)x_2^2}{4(\omega+1)^2} \right) \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}, \quad (13.6.27)$$

$$(l_3, s_3) = \frac{(-2\omega^3-2\omega^2+1)x_2^2 + 2\omega(3\omega^2+2\omega+1)x_1 x_2 - 4\omega^2(1+2\omega)x_1^2}{4(\omega+1)^2} \pm \frac{2\omega(3\omega+2)x_1 x_2 - (2\omega^2+2\omega+1)x_2^2}{4(\omega+1)} \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}, \quad (13.6.28)$$

$$(l_4, s_4) = \frac{\omega(2x_1-x_2)x_2}{4(\omega+1)} \pm \frac{-4\omega^2 x_1^2 + 4\omega^2 x_1 x_2 - 2\omega^2 x_2^2 + x_2^2}{8(\omega+1)^2} \sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}. \quad (13.6.29)$$

因而最终得到

$$I_y(D, \omega > 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{4(\omega^2-1)^2} \left( \frac{x_2-2\omega^2 x_1}{\sqrt{\omega^2-1}} \ln(\omega + \sqrt{\omega^2-1}) + \frac{\omega(2(2+\omega^2)x_1 - (5-2\omega^2)x_2)}{3} \right). \quad (13.6.30)$$

至于  $\omega=1$  的情形易算出

$$I_x(D, \omega=1) = x_2 y_1^2 / 15, \quad I_y(D, \omega=1) = x_2 y_1 (x_1 + 2x_2) / 15. \quad (13.6.31)$$

最后来考察  $S(G)$ , 易得

$$S(G, 0 < \omega < 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{1 - \omega^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} \arctan \sqrt{\frac{1 - \omega}{1 + \omega}} - \frac{\omega}{2} \right), \quad (13.6.32)$$

$$S(G, \omega > 1) = \frac{\omega x_2 y_1}{2(\omega^2 - 1)} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \ln(\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}) + \omega \right), \quad (13.6.33)$$

$$S(G, \omega = 1) = x_2 y_1 / 3 = 2S(\Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) / 3. \quad (13.6.34)$$

总结以上分析的结果, 我们得到

**算法 13.6.1** (求二次有理 Bézier 曲线的相关积分量)

Step 1. 把二次有理 Bézier 曲线(13.6.1)转化成权因子为  $(1, \omega, 1)$  的曲线(13.6.2).

Step 2. 按图 13.6.2 取坐标系, 使曲线(13.6.2)的控制顶点如(13.6.3)所示.

Step 3. 按(13.6.32) – (13.6.34)和(13.6.13)计算  $S(G), S(D), V_x(D), V_y(D)$ .

Step 4. 按(13.6.17), (13.6.18), (13.6.24), (13.6.30), (13.6.31)计算  $I_x(D), I_y(D)$ .

## 13.7 平面有理 Bézier 曲线求积的多项式逼近

### 13.7.1 平面 Bézier 曲线求积

设平面  $n$  次 Bézier 曲线是

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i = (x_P(t), y_P(t)), \quad \mathbf{P}_i = (x_i^P, y_i^P), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13.7.1)$$

首先可求出积分量

$$C_{i,j}^{(n)} = \int_0^1 B_i^n(t) B_j^{n-1}(t) dt, \quad (13.7.2)$$

$$C_{i,j,k}^{(n)} = \int_0^1 B_i^n(t) B_j^n(t) B_k^{n-1}(t) dt, \quad (13.7.3)$$

$$D_{i,j}^{(n)} = C_{i,j-1}^{(n)} - C_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} -1/(2n), & (i,j) = (0,0), \\ 1/(2n), & (i,j) = (n,n), \\ (j-i) \binom{n}{i} \binom{n}{j} / \left[ (i+j)(2n-i-j) \binom{2n}{i+j} \right], & 0 \leq i, j \leq n, \\ & (i,j) \neq (0,0), (n,n). \end{cases} \quad (13.7.4)$$

$$D_{i,j,k}^{(n)} = C_{i,j,k-1}^{(n)} - C_{i,j,k}^{(n)} = \begin{cases} -1/(3n), & (i,j,k) = (0,0,0), \\ 1/(3n), & (i,j,k) = (n,n,n), \\ (2k-i-j) \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k} / \left[ (i+j+k)(3n-i-j-k) \binom{3n}{i+j+k} \right], & 0 \leq i, j, k \leq n, \\ & (i,j,k) \neq (0,0,0), (n,n,n). \end{cases} \quad (13.7.5)$$

则如图 13.7.1 所示的面积

$$S = \int_{x_0}^{x_n} y_P dx_P = n \sum_{i,j=0}^n D_{i,j}^{(n)} y_i^P x_j^P, \quad \frac{dx_P(t)}{dt} \neq 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13.7.6)$$

上述面积关于  $x$  轴和  $y$  轴的惯性矩

$$I_x = \int_{x_0}^{x_n} \frac{1}{2} y_P^2 dx_P = \frac{n}{2} \sum_{i,j,k=0}^n D_{i,j,k}^{(n)} y_i^P y_j^P x_k^P, \quad I_y = \int_{x_0}^{x_n} x_P y_P dx_P = n \sum_{i,j,k=0}^n D_{i,j,k}^{(n)} x_i^P y_j^P x_k^P. \quad (13.7.7)$$

上述区域绕  $x$  轴旋转所产生的旋转体体积



$$V = \int_{x_0}^{x_n} \pi y_p^2 dx_p = 2\pi I_x. \quad (13.7.8)$$

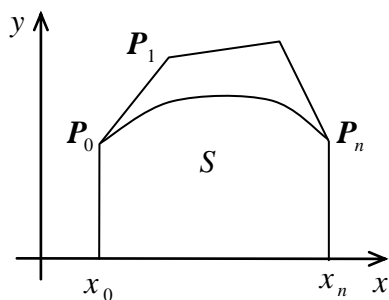


图 13.7.1 曲线(13.7.1)的相应区域  $S$

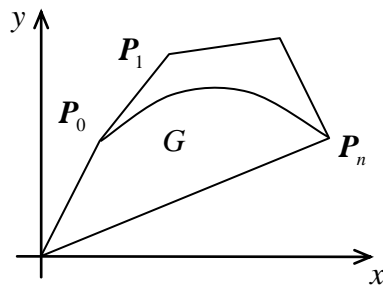


图 13.7.2 曲线(13.7.1)的相应区域  $G$

此外, 如图 13.7.2 所示的有向面积

$$G_{\text{向}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{P}(t) \wedge \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} dt = n \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n D_{i,j}^{(n)} (\mathbf{P}_i \wedge \mathbf{P}_j), \quad \mathbf{P}(t) \wedge \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \neq 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13.7.9)$$

以上积分值均可精确地求得. 这些公式由文献[7]给出, 不过我们在(13.7.4)和(13.7.5)中纠正了两个小错误. 由此, 我们可用第十二章方法建立有理 Bézier 曲线求积的多项式逼近.

### 13.7.2 平面有理 Bézier 曲线求积的多项式逼近的误差界及其算法

假设平面  $n$  次有理 Bézier 曲线是

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \mathbf{R}_i / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i = (x_R(t), y_R(t)), \quad \mathbf{R}_i = (x_i^R, y_i^R), \quad (13.7.10)$$

按照第十二章的方法引入  $r+p$  次混合曲线  $\mathbf{H}(t)$ , 使得

$$\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{H}(t) = \sum_{i=0, i \neq r}^{r+p} B_i^{r+p}(t) \mathbf{H}_i(t) + B_r^{r+p}(t) \mathbf{H}_r(t) = (x_H(t), y_H(t)), \quad (13.7.11)$$

当用  $n$  次有理 Bézier 曲线  $\mathbf{H}_r(t)$  的包围盒的中心点  $\mathbf{H}_r$  来代替  $\mathbf{H}_r(t)$  时, 就实现了如(13.7.1)所示的  $n = r+p$  次多项式曲线  $\mathbf{P}(t)$  对  $\mathbf{R}(t)$  的逼近. 本节研究用  $\mathbf{P}(t)$  的积分量来代替  $\mathbf{R}(t)$  的相应积分量时所产生的误差.

要进行这种积分量近似代替的原因在于  $\mathbf{R}(t)$  的次数大于 2 时, 其积分是相当复杂的. 而应用 Simpson 法等数值积分法, 必须求  $x_R'(t)y_R(t)$  (对于求面积) 或  $\pi x_R'(t)y_R^2(t)$  (对于求体积) 这种被积表达式的四阶导函数的界, 这种导函数是  $48n$  次或  $64n$  次的有理函数, 这里  $n$  是曲线  $\mathbf{R}(t)$  的次数. 可见用数值积分法不易控制误差.

下面展开多项式求积逼近的讨论. 首先, 以  $\Delta$  表示对顶点的向前差分, 对  $n$  次有理多项式曲线  $\mathbf{R}(t)$  和  $r+p$  次多项式曲线  $\mathbf{P}(t)$ , 有:

$$|x_P'(t)| \leq B_{xP} = (r+p) \max_{0 \leq i \leq r+p-1} |\Delta x_i^P|, \quad |y_P'(t)| \leq B_{yP} = (r+p) \max_{0 \leq i \leq r+p-1} |\Delta y_i^P|, \quad (13.7.12)$$

$$|x_R'(t)| \leq B_{xR} = n \left( \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \omega_i}{\min_{0 \leq i \leq n} \omega_i} \right)^2 \max_{0 \leq i \leq n-1} |\Delta x_i^R|, \quad |y_R'(t)| \leq B_{yR} = n \left( \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \omega_i}{\min_{0 \leq i \leq n} \omega_i} \right)^2 \max_{0 \leq i \leq n-1} |\Delta y_i^R|, \quad (13.7.13)$$

$$|x_P(t)| \leq B_{xP} = \max_{0 \leq i \leq r+p} |x_i^P|, \quad |y_P(t)| \leq B_{yP} = \max_{0 \leq i \leq r+p} |y_i^P|, \quad (13.7.14)$$

$$|x_R(t)| \leq B_{xR} = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i^R|, \quad |y_R(t)| \leq B_{yR} = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i^R|. \quad (13.7.15)$$

其次, 估计用  $\mathbf{P}(t)$  求积代替  $\mathbf{R}(t)$  求积而引起的误差:

$$\begin{aligned} \int_{x_0^R}^{x_n^R} y_R dx_R - \int_{x_0^P}^{x_n^P} y_P dx_P &= \int_0^1 y_H x'_H dt - \int_0^1 y_P x'_P dt = \int_0^1 (y_H x'_H - y_H x'_P + y_H x'_P - y_P x'_P) dt \\ &= \int_0^1 y_H d(x_H - x_P) + \int_0^1 (y_H - y_P) x'_P dt = - \int_0^1 (x_H - x_P) y'_H dt + \int_0^1 (y_H - y_P) x'_P dt, \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0^R}^{x_n^R} y_R dx_R - \int_{x_0^P}^{x_n^P} y_P dx_P \right| &\leq \int_0^1 |x_H - x_P| \cdot |y'_H| dt + \int_0^1 |y_H - y_P| \cdot |x'_P| dt \\ &\leq B_{xPH} \cdot B_{y'R} + B_{yPH} \cdot B_{x'P}. \end{aligned} \quad (13.7.16)$$

这里  $B_{xPH}$  的意义如下所示,  $\Delta x$  是  $\mathbf{H}_r(t)$  的包围盒的宽度之半,  $n$  为偶数,  $B_{yPH}$  与其类似:

$$|x_P(t) - x_H(t)| \leq B_{xPH} = |\Delta x| \binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n}. \quad (13.7.17)$$

类似地可得到

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \mathbf{R}(t) \Lambda \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} dt - \int_0^1 \mathbf{P}(t) \Lambda \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} dt \right| &= \left| \int_0^1 \mathbf{H} \Lambda \frac{d\mathbf{H}}{dt} dt + \int_0^1 \mathbf{P} \Lambda \frac{d\mathbf{P}}{dt} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left\{ \mathbf{H} \Lambda \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right) \right\} dt + \int_0^1 \left\{ (\mathbf{H} - \mathbf{P}) \Lambda \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \begin{vmatrix} x_H & y_H \\ x'_H - x'_P & y'_H - y'_P \end{vmatrix} dt + \int_0^1 \begin{vmatrix} x_H - x_P & y_H - y_P \\ x'_P & y'_P \end{vmatrix} dt \right| \\ &= \left| - \int_0^1 (y_H - y_P) x'_H dt + \int_0^1 (x_H - x_P) y'_H dt + \int_0^1 (x_H - x_P) y'_P dt - \int_0^1 (y_H - y_P) x'_P dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |x_H - x_P| (|y'_H| + |y'_P|) dt + \int_0^1 |y_H - y_P| (|x'_H| + |x'_P|) dt \\ &\leq B_{xPH} \cdot (B_{y'R} + B_{y'P}) + B_{yPH} \cdot (B_{x'R} + B_{x'P}). \end{aligned} \quad (13.7.18)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0^R}^{x_n^R} y_R^2 dx_R - \int_{x_0^P}^{x_n^P} y_P^2 dx_P \right| &= \left| \int_0^1 y_H^2 x'_H dt - \int_0^1 y_P^2 x'_P dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 y_H^2 (x'_H - x'_P) dt + \int_0^1 y_H (y_H - y_P) x'_P dt + \int_0^1 y_P (y_H - y_P) x'_P dt \right| \\ &\leq 2 \int_0^1 |x_H - x_P| \cdot |y_H| \cdot |y'_H| dt + \int_0^1 |y_H - y_P| (|y_H| + |y_P|) |x'_P| dt \\ &\leq 2(B_{xPH} \cdot B_{yR} \cdot B_{y'R}) + B_{yPH} \cdot B_{x'P} (B_{yR} + B_{yP}). \end{aligned} \quad (13.7.19)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0^R}^{x_n^R} x_R y_R dx_R - \int_{x_0^P}^{x_n^P} x_P y_P dx_P \right| &= \left| \int_0^1 x_H y_H x'_H dt - \int_0^1 x_P y_P x'_P dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 x_H y_H (x'_H - x'_P) dt + \int_0^1 x_H (y_H - y_P) x'_P dt + \int_0^1 (x_H - x_P) y_P x'_P dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |x_H - x_P| (|x'_H| \cdot |y_H| + |x_H| \cdot |y'_H| + |x'_P| \cdot |y_P|) dt + \int_0^1 |y_H - y_P| \cdot |x_H| \cdot |x'_P| dt \\ &\leq B_{xPH} \cdot (B_{x'R} \cdot B_{yR} + B_{y'R} \cdot B_{xR} + B_{x'P} \cdot B_{yP}) + B_{yPH} \cdot B_{x'P} \cdot B_{xR}. \end{aligned} \quad (13.7.20)$$

总结以上分析的结果, 我们得到

**定理 13.7.1** 当用多项式曲线积分代替有理多项式曲线积分时, 如图 13.7.1 和 13.7.2 所示的面积  $S$  和  $G$  的误差, 区域  $S$  的惯性矩误差分别如(13.7.16), (13.7.18)–(13.7.20)所示, 不等号右端各量含义如(13.7.12)–(13.7.15), (13.7.17)所示.

多项式求积逼近常与细分技术相结合. 当上述误差大于公差时, 可把曲线一分为二, 然后对每一段子曲线实行多项式求积逼近, 计算相应的积分误差; 若积分总误差仍大于公差, 可继续细分, 否则, 各子曲线上的相应积分之和就是所求的积分值. 大量实例表明, 用这种多项式求积逼近来计算有理曲线积分在高精度下收敛得很快.

## 13.8 平面有理 Bézier 曲线求积的降阶逼近

有理 Bézier 曲线求积的另一种途径, 是把高次曲线近似地化为保端点插值的低次曲线, 直至化为二次有理 Bézier 曲线, 然后利用 § 13.6 的结果求积. 因此, 问题归结为当高次有理 Bézier 曲线用低次有理 Bézier 曲线来代替时, 相应的积分量的误差是多少.

### 13.8.1 降阶求积的误差估计

首先论述保端点插值的有理曲线的降阶.  $n$  次平面有理曲线是

$$\mathbf{R}^{(n)}(t) = (X^{(n)}(t)/\omega^{(n)}(t), Y^{(n)}(t)/\omega^{(n)}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad (13.8.1)$$

其齐次坐标形式是

$$\mathbf{f}^{(n)}(t) = \{X^{(n)}(t), Y^{(n)}(t), \omega^{(n)}(t) \mid a \leq t \leq b\}. \quad (13.8.2)$$

应用 Chebyshev 多项式理论, Sederberg 和常庚哲<sup>[8]</sup>找到了最高次数为  $n$  的摄动多项式集

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t) = \{\varepsilon_X^{(n)}(t), \varepsilon_Y^{(n)}(t), \varepsilon_\omega^{(n)}(t) \mid a \leq t \leq b\}, \quad (13.8.3)$$

使得

$$\{G^{(n)}(t) + \varepsilon_G^{(n)}(t), G = X, Y, \omega\}, \quad (13.8.4)$$

有一个线性公因子, 且

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t)\|_{[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} \left( \sum_{G=X,Y,\omega} (\varepsilon_G^{(n)}(t))^2 \right)^{1/2}. \quad (13.8.5)$$

进一步, 陈发来<sup>[9]</sup>考虑了带约束的最佳线性公因子问题. 其结论是:

若  $\mathbf{f}^{(n)}(t)$  给定, 且  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t)$  是满足下列条件的摄动多项式集:

$$(i) \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(a) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(b) = \mathbf{0}; \quad (13.8.6)$$

$$(ii) \text{ 对所有合适的函数 } \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t), \text{ 其模极小: } \min_{\forall \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t)} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t)\|_{[a,b]}; \quad (13.8.7)$$

$$(iii) \alpha^{(n)} \notin [a, b], \text{ 且 } G^{(n)}(\alpha^{(n)}) + \varepsilon_G^{(n)}(\alpha^{(n)}) = 0, G = X, Y, \omega; \quad (13.8.8)$$

则必有

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(t) = -(\mathbf{f}(\alpha^{(n)})/T_e^{(n)}(\alpha^{(n)})) \cdot T_e^{(n)}(t), \quad (13.8.9)$$

这里

$$T_e^{(n)}(t) = T^{(n)}\{((2t - a - b)/(b - a))\cos \pi/(2n)\} \quad (13.8.10)$$

是  $n$  次移位的 Chebyshev 多项式, 其中

$$T^{(n)}(t) = \cos(n \arccos t) \quad (13.8.11)$$

是  $n$  次 Chebyshev 多项式.

而为了计算  $\alpha^{(n)}$ , 仅需计算  $3n - 2$  次多项式

$$h(t) = \sum_{G=X,Y,\omega} G^{(n)}(t) \left( T_e^{(n)}(t) \frac{d(G^{(n)}(t))}{dt} - \frac{d(T_e^{(n)}(t))}{dt} \cdot G^{(n)}(t) \right) \quad (13.8.12)$$

的所有零点, 从中找出使

$$J(t) = \left( \sum_{G=X,Y,\omega} G^2(t) / T_e^{(n)}(t) \right)^2 \quad (13.8.13)$$

达到最小者, 最后有

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_G^{(n)}(t)\|_{[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |\varepsilon_G^{(n)}(t)| = |G^{(n)}(\alpha^{(n)})| / |T_e^{(n)}(\alpha^{(n)})|, \quad G = X, Y, \omega. \quad (13.8.14)$$

下面讨论降阶求积逼近的误差. 以  $B_{g'}^{(n)}, B_g^{(n)} (g = x, y)$  表示 § 13.7.2 中有理曲线  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  的相应误差界, 假设  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  经摄动后产生了线性公因子  $(t - \alpha^{(n)})$ , 使得

$$\left( \frac{X^{(n)}(t) + \varepsilon_X^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t) + \varepsilon_\omega^{(n)}(t)}, \frac{Y^{(n)}(t) + \varepsilon_Y^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t) + \varepsilon_\omega^{(n)}(t)} \right) = \left( \frac{X^{(n-1)}(t)}{\omega^{(n-1)}(t)}, \frac{Y^{(n-1)}(t)}{\omega^{(n-1)}(t)} \right) = \mathbf{R}^{(n-1)}(t),$$

则  $n$  次有理曲线  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  被  $n-1$  次有理曲线  $\mathbf{R}^{(n-1)}(t)$  来逼近.

设

$$\mathbf{P}^{(n)}(t) = (X^{(n)}(t), Y^{(n)}(t)), \quad \varepsilon_P^{(n)}(t) = (\varepsilon_X^{(n)}(t), \varepsilon_Y^{(n)}(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(n)}(t) - \mathbf{R}^{(n-1)}(t) &= \frac{\mathbf{P}^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t)} - \frac{\mathbf{P}^{(n-1)}(t)}{\omega^{(n-1)}(t)} = \frac{\mathbf{P}^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t)} - \omega \frac{\mathbf{P}^{(n)}(t) + \varepsilon_P^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t) + \varepsilon_\omega^{(n)}(t)} = \frac{\varepsilon_\omega^{(n)}(t) \cdot \frac{\mathbf{P}^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t)} - \varepsilon_P^{(n)}(t)}{\omega^{(n)}(t) + \varepsilon_\omega^{(n)}(t)}, \\ \min_{0 \leq t \leq 1} \omega^{(n)}(t) &> \max_{0 \leq t \leq 1} |\varepsilon_\omega^{(n)}(t)|, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}^{(n)}(t) - \mathbf{R}^{(n-1)}(t)\|_{[0,1]} &\leq \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} |\varepsilon_\omega^{(n)}(t)| \cdot \|\mathbf{P}^{(n)}(t)/\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]} + \|\varepsilon_P^{(n)}(t)\|_{[0,1]}}{\min_{0 \leq t \leq 1} (\omega^{(n)}(t) + \varepsilon_\omega^{(n)}(t))} \\ &\leq \frac{\|\varepsilon_\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]} \left( \max_{0 \leq i \leq n}^2 |x_i^{(n)}| + \max_{0 \leq i \leq n}^2 |y_i^{(n)}| \right)^{1/2} + \left( \|\varepsilon_X^{(n)}(t)\|_{[0,1]}^2 + \|\varepsilon_Y^{(n)}(t)\|_{[0,1]}^2 \right)^{1/2}}{\min_{0 \leq t \leq 1} \omega^{(n)}(t) - \max_{0 \leq t \leq 1} |\varepsilon_\omega^{(n)}(t)|} \\ &= B_R^{(n-1,n)} = \frac{\|\varepsilon_\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]} \left( (B_x^{(n)})^2 + (B_y^{(n)})^2 \right)^{1/2} + \left( \|\varepsilon_X^{(n)}(t)\|_{[0,1]}^2 + \|\varepsilon_Y^{(n)}(t)\|_{[0,1]}^2 \right)^{1/2}}{\min_{0 \leq i \leq n} \omega_i^{(n)}(t) - \|\varepsilon_\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]}}. \quad (13.8.15) \end{aligned}$$

类似地, 对曲线分量有

$$|g^{(n)}(t) - g^{(n-1)}(t)| \leq B_g^{(n-1,n)} = \frac{\|\varepsilon_\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]} \cdot B_g^{(n)} + \|\varepsilon_G^{(n)}(t)\|_{[0,1]}}{\min_{0 \leq i \leq n} \omega_i^{(n)}(t) - \|\varepsilon_\omega^{(n)}(t)\|_{[0,1]}}, \quad \begin{aligned} G &= X, Y, \\ g &= x, y. \end{aligned} \quad (13.8.16)$$

进行与 § 13.7.2 中类似的分析, 记  $\mathbf{R}^{(n)}(t)$  的控制顶点为  $\mathbf{R}_i^{(n)} = (x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 以  $n = 3$  为例, 我们最后可得:

$$\left| \int_{x_0^{(3)}}^{x_3^{(3)}} y^{(3)} dx^{(3)} - \int_{x_0^{(2)}}^{x_2^{(2)}} y^{(2)} dx^{(2)} \right| \leq B_x^{(2,3)} \cdot B_{y'}^{(3)} + B_y^{(2,3)} \cdot B_{x'}^{(2)}, \quad (13.8.17)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left( \mathbf{R}^{(3)} \wedge \frac{d\mathbf{R}^{(3)}}{dt} \right) dt - \int_0^1 \left( \mathbf{R}^{(2)} \wedge \frac{d\mathbf{R}^{(2)}}{dt} \right) dt \right| \\ \leq B_x^{(2,3)} \cdot (B_{y'}^{(3)} + B_{y'}^{(2)}) + B_y^{(2,3)} \cdot (B_{x'}^{(3)} + B_{x'}^{(2)}), \quad (13.8.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0^{(3)}}^{x_3^{(3)}} [y^{(3)}]^2 dx^{(3)} - \int_{x_0^{(2)}}^{x_2^{(2)}} [y^{(2)}]^2 dx^{(2)} \right| \\ \leq 2 \cdot (B_x^{(2,3)} \cdot B_y^{(3)} \cdot B_{y'}^{(3)}) + B_y^{(2,3)} \cdot B_{x'}^{(2)} \cdot (B_y^{(3)} + B_y^{(2)}), \quad (13.8.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0^{(3)}}^{x_3^{(3)}} x^{(3)} y^{(3)} dx^{(3)} - \int_{x_0^{(2)}}^{x_2^{(2)}} x^{(2)} y^{(2)} dx^{(2)} \right| \\ \leq B_x^{(2,3)} (B_{x'}^{(3)} \cdot B_{y'}^{(3)} + B_x^{(3)} \cdot B_{y'}^{(3)} + B_{x'}^{(2)} \cdot B_y^{(2)} + B_x^{(2)} \cdot B_y^{(2)}) + B_y^{(2,3)} \cdot B_x^{(3)} \cdot B_{x'}^{(2)}. \quad (13.8.20) \end{aligned}$$

---

总结以上分析的结果, 我们得到

**定理 13.8.1** 有理曲线降阶的误差如(13.8.15)所示, 而当用有理二次降阶曲线积分代替原有理三次多项式曲线积分时, 相应于定理 13.7.1 的各种积分误差分别如(13.8.17)–(13.8.20)所示, 不等号右端各量含义如(13.8.16)和(13.7.13), (13.7.15)所示.

### 13.8.2 降阶求积的算法

降阶求积逼近的做法与多项式曲线求积逼近十分相似, 它也可与曲线的细分技术相结合, 来达到十分满意的效果. 实例表明, 当精度较高时, 它比一般的梯形法或 Simpson 法等数值积分法的收敛速度快得多.

## 13.9 二次和三次 NURBS 曲线求积

按照前面三节的论述, 二次有理 B ézier 曲线可以精确求积; 而三次有理 B ézier 曲线的相关积分量, 可以用多项式求积逼近或降阶求积逼近来实现, 所以低次 NURBS 曲线的求积, 只要把它转化为同次有理 B ézier 曲线就可顺利进行了. 这个转化方法, 可参见 § 15.3.

三次有理参数曲线在 CAGD 中占有重要地位, 但它的求积却不能与二次有理参数一样地有精确公式, 只能得到近似值. 这说明量变产生了质变.

### 主要文献

- [ST, WGJ, STW, 95] Saito T., Wang Guojin, Sederberg T.W., Hodographs and normals of rational curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(4): 417-430  
[WGJ, STW, ST, 97] Wang Guojin, Sederberg T.W., Saito T., Partial derivatives of rational B ézier surfaces, Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(4): 377-381  
[WGZ, WGJ, 95] Wang Guozhao, Wang Guojin, Higher order derivatives of a rational B ézier curve, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1995, 57(3): 246-253  
[WGJ, 96] 王国瑾, NURBS 曲线相关积分量的计算方法, 软件学报, 1996, 7(9): 542-546  
[WGJ, STW, 94] Wang Guojin, Sederberg T.W., Computing areas bounded by rational B ézier curves, Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing, 1994, 4(2): 18-27  
[CGD, WGJ, 2000] Chen Guodong, Wang Guojin, Integral computation relating to rational curves with approximate degree reduction, Progress in Natural Science, 2000, 10(11): 851-858

### 参考文献

- 1 Sederberg, T.W., Wang, X.G., Rational hodographs, Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 333-335
- 2 Floater, M. S., Derivatives of rational B ézier curves, Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(3): 161-174
- 3 Rockwood, A., A generalized scanning technique for display of parametrically defined surfaces, IEEE Computer Graphics and Applications, 1987, 7(8): 15-26
- 4 Rockwood, A., Heaton, K., Davis, T., Real-time rendering of trimmed surfaces, Computer Graphics, 1989, 3 (23): 107-116
- 5 Hohmeyer, M., Robust and efficient surface intersection for solid modeling, Ph.D. Thesis, University of California, Berkely, 1992
- 6 Sederberg, T.W., Meyers, R.J., Loop detection in surface path intersections, Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(2): 161-171
- 7 刘鼎元, B ézier 曲线曲面包围的面积与体积的计算, 计算数学, 1987, 9(3): 327-336
- 8 Sederberg, T.W., Chang, G.Z., Best linear common divisors for approximate degree reduction, Computer Aided Design, 1993, 25(3): 163-168
- 9 陈发来, 带约束的最佳线性公因子及有理曲线的降阶逼近, 高等学校计算数学学报, 计算几何专辑, 1993: 14-21