GAMES 102 - 作业 4

彭博

November 14, 2020

1. 本次作业模仿 PowerPoint 编写一个曲线设计与编辑工具，其功能包括：添加曲线顶点生成分段三次样条曲线；拖动曲线顶点并保持曲线 C^2 连续；编辑曲线顶点处的切线信息使得曲线成为 G^0 或 G^1 连续。利用编写的程序可以得到平面曲线如 Fig.1所示。

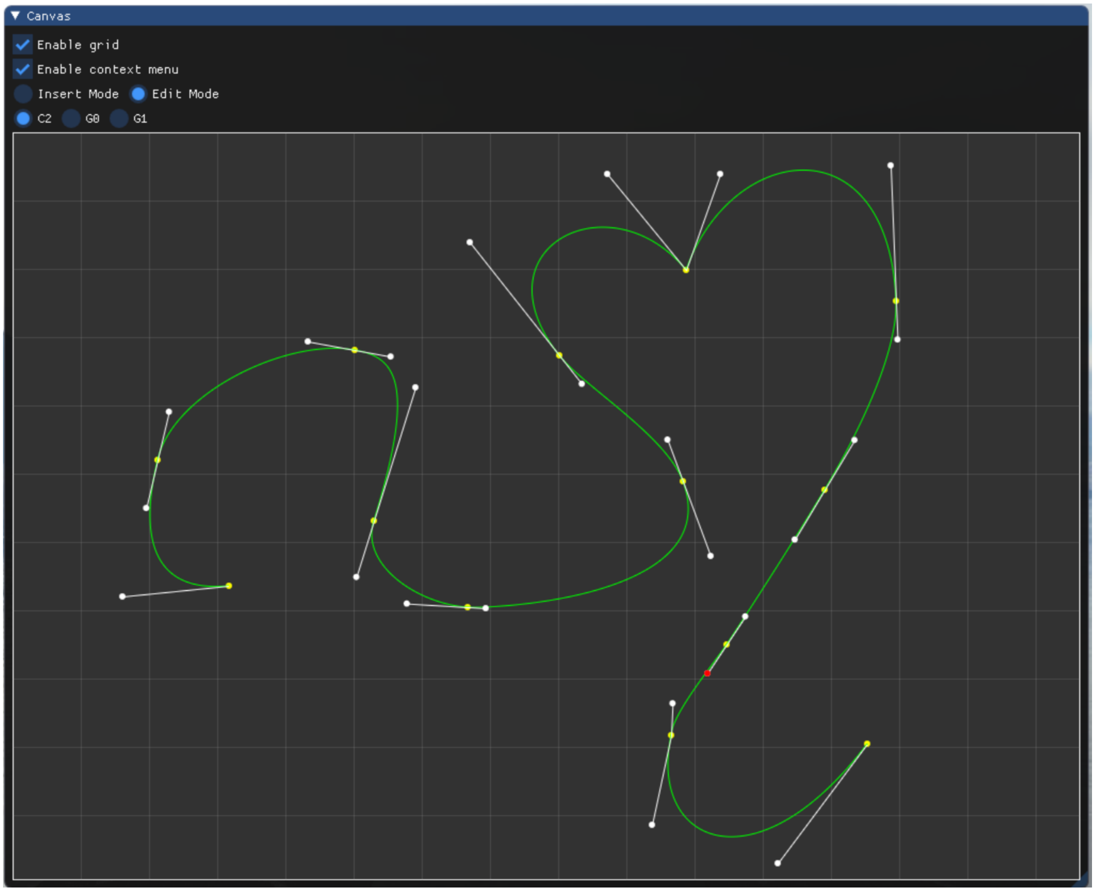

Figure 1: 绘制曲线

主程序逻辑及实现细节如下：

(a) 插入模式（Insert Mode）：
插入模式下允许鼠标左键添加曲线顶点并通过 Chordal Parameterization 方法对曲线进行参数化。求解分段曲线系数时假定分段曲线方程为：

$$f_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3, t \in [0, h_i] \tag{1}$$

其中 $f_i(t)$ 为第 i 段曲线表达式，h_i 为第 i 段曲线对应的参数化间隔，$a_i, b_i, c_i.d_i$ 为待求解系数。带入曲线在端点的位置、导数以及曲率连续性条件得到：

$$f_i(h_i) = f_{i+1}(0) \Rightarrow a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1} \tag{2}$$

$$f_i'(h_i) = f_{i+1}'(0) \Rightarrow b_i h_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{3}$$

$$f_i''(h_i) = f_{i+1}''(0) \Rightarrow c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \tag{4}$$

整理以上方程得到：

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \tag{5}$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) \tag{6}$$

由于系数 a_i 表示各段曲线对应端点的坐标为已知量，上述方程表明只需求解各段曲线对应的二次项系数 c_i 即可反推出其他系数 b_i, d_i，即整个系统只有二次项系数 c_i 为未知量。对于包含 n 段曲线的样条共有 n 个待求解系数，利用式 (6) 共可以构造出 $n-2$ 个方程，故需要额外添加 2 个边界条件来进行求解。若取整条曲线的两个端点处二阶导数为 0，此时求解得到的样条曲线称为“自然样条”(Natural Spline)，具体求解算法可参见文献 [1]ALGORITHM 3.4。添加曲线顶点可以得到 C^2 连续的样条曲线如 Fig.2所示。

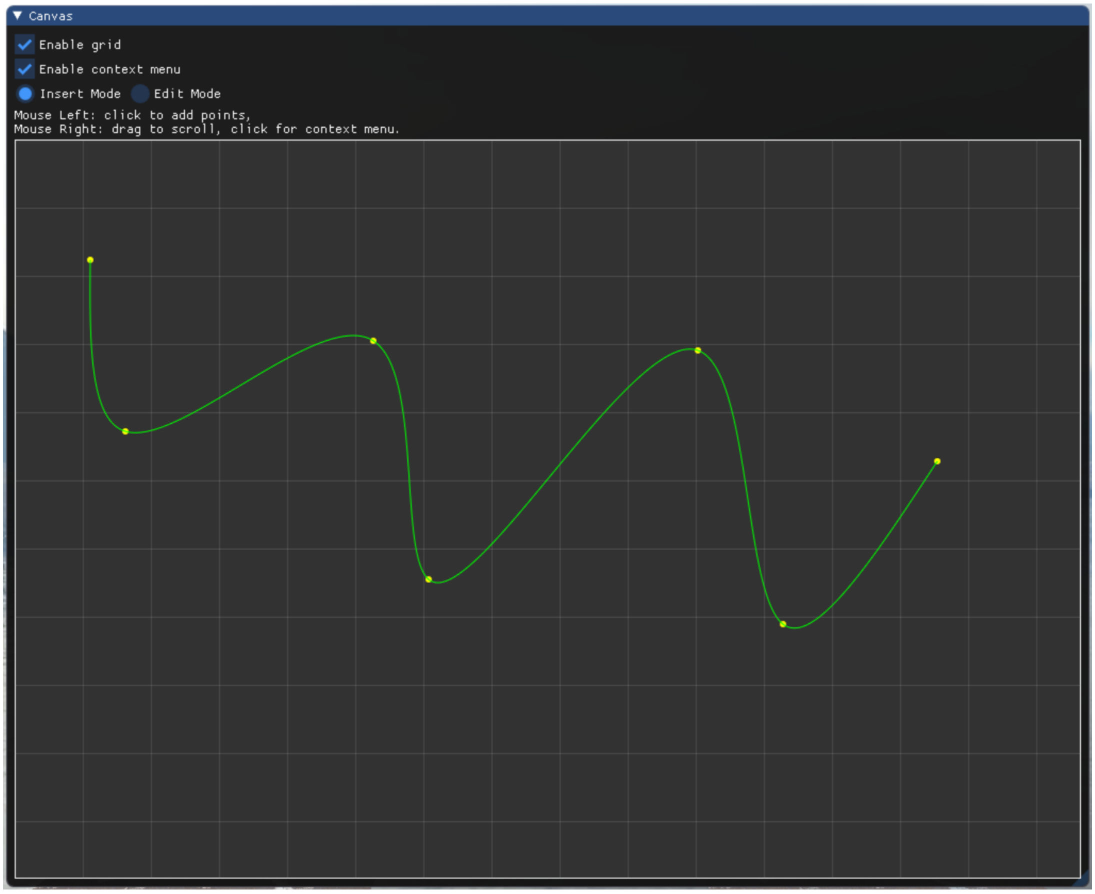

Figure 2: C2 连续

(b) 编辑模式（Edit Mode）：
编辑模式下允许鼠标左键选择曲线顶点或对应顶点的控制点。选中曲线顶点时可按住鼠标左键来移动顶点位置，此时会重新参数化曲线并求解自然样条相应的曲线系数，从而保证整条曲线保持 C^2 连续，移动曲线顶点后得到样条曲线如 Fig.3所示。选中曲线控制点时可以调整对应顶点的连续性约束从而使得曲线转换为 G^0 或 G^1 连续：

i. G^0 连续:
G^0 连续要求曲线顶点两侧位置连续。以第 i 段曲线的左侧顶点右导数为例，假设曲线方程为 $f_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$，左顶点导数更新后为 b_i'，则可以根据曲线左右两侧顶点的连续性条件构造方程：

$$a_i' = a_i \tag{7}$$

$$a_i' + b_i'h_i + c_i'h_i^2 + d_i'h_i^3 = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \tag{8}$$

$$b_i'h_i + 2c_i'h_i + 3d_i'h_i^2 = b_i h_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \tag{9}$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 为曲线原始系数，而 a_i', b_i', c_i', d_i' 为曲线更新后的系数，且 b_i' 为已知量。因此只需重新求解线性方程组即可完成对曲线系数的更新。类似地，更新左导数所需求解的方程组为：

$$a_{i-1}' = a_{i-1} \tag{10}$$

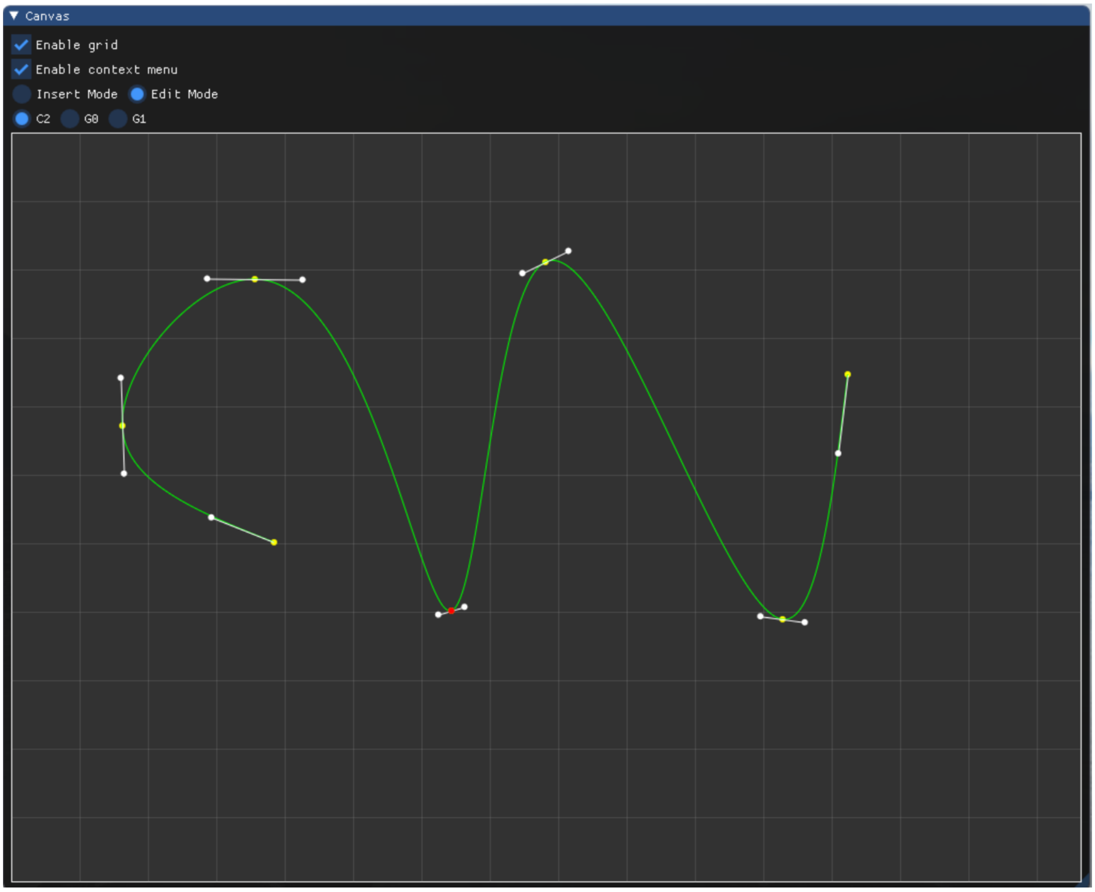

Figure 3: 移动顶点

$$b'_{i-1} = b_{i-1} \tag{11}$$

$$a'_{i-1} + b'_{i-1}h_{i-1} + c'_{i-1}h_{i-1}^2 + d'_{i-1}h_{i-1}^3 = a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3 \tag{12}$$

$$b'_{i-1}h_{i-1} + 2c'_{i-1}h_{i-1} + 3d'_{i-1}h_{i-1}^2 = f'(h_{i-1}) \tag{13}$$

其中 $a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, d_{i-1}$ 为第 $i-1$ 段曲线原始系数，而 $a'_{i-1}, b'_{i-1}, c'_{i-1}, d'_{i-1}$ 为更新后的系数，$f'(h_{h-1})$ 为顶点左导数更新后的值。更新顶点两侧曲线系数后即可保证整条曲线在该顶点处保持 G^0 连续，如 Fig.4所示。

ii. G^1 连续:
G^1 连续要求曲线顶点两侧位置连续且切线共线。以第 i 段曲线的左侧顶点右导数为例，其更新过程与 G^0 连续的更新过程类似，区别在于更新完右导数后还需要对该顶点的左导数进行更新，同时要求左导数更新后与右导数共线。设该顶点原始左导数为 (f_x, f_y)，更新后为 (f'_x, f'_y)，则可以构造方程:

$$f_x^2 + f_y^2 = {f'_x}^2 + {f'_y}^2 = C \tag{14}$$

$$\frac{f'_y}{f'_x} = k \tag{15}$$

其中 k 为右导数更新后的方向。求解后得到

$$|f'_x| = \sqrt{\frac{C}{1+k^2}} \tag{16}$$

$$f'_y = kf'_x \tag{17}$$

其中 f'_x 符号与 f_x 相同。得到左导数更新值后利用连续性条件重新计算左侧曲线系数即可保证整条曲线在该顶点处保持 G^1 连续，如 Fig.5所示。

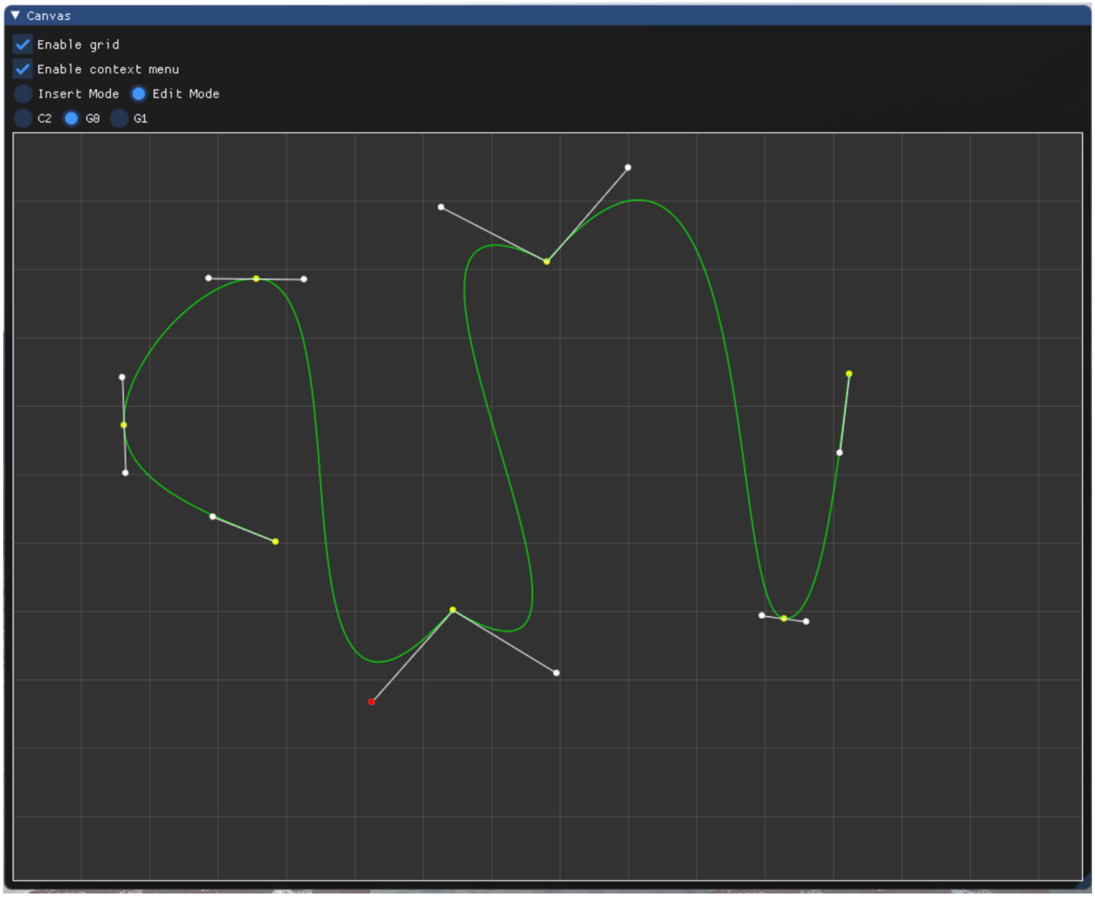

Figure 4: G0 连续

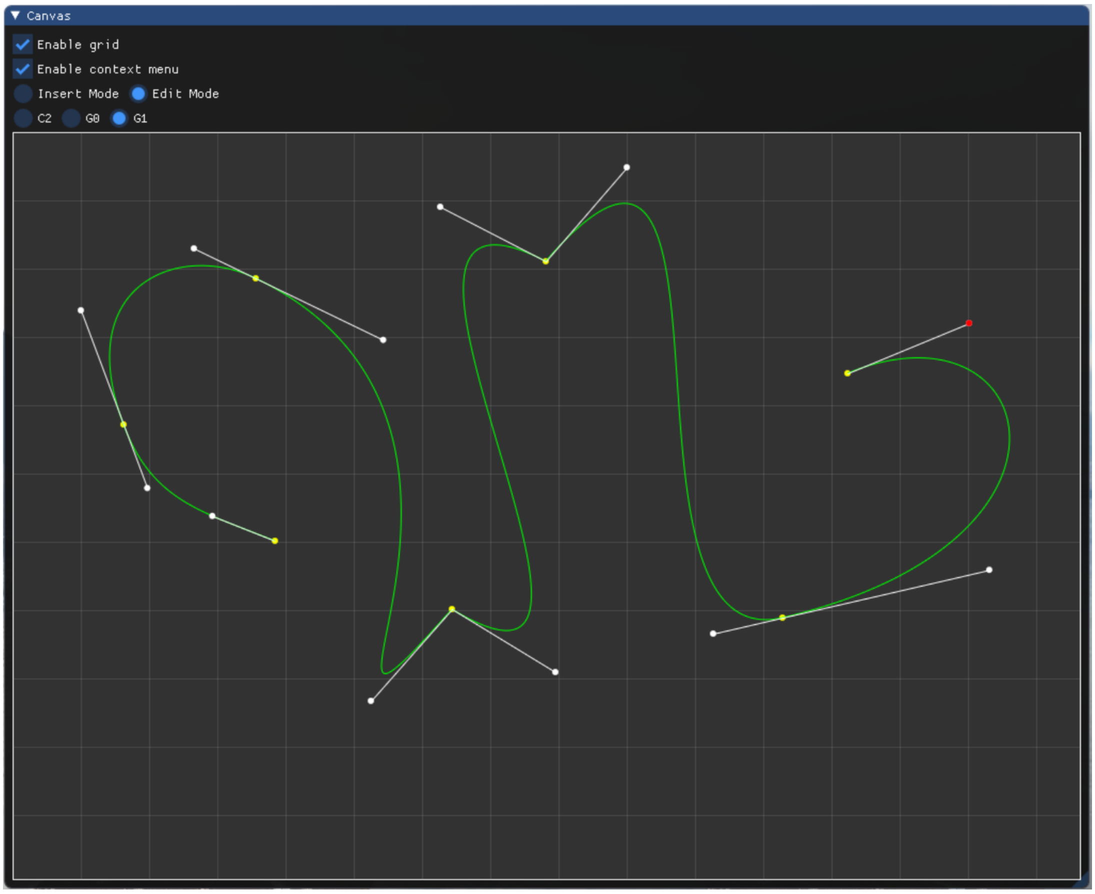

Figure 5: G1 连续

References

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2010.