

## 第十八章 基于切割磨光的曲线曲面离散造型

在计算机辅助几何设计中,自由曲线曲面往往由离散数据通过指定的调配函数表示成连续的参数形式.但这种连续的信息一旦用于实际,如在计算机屏幕上或在绘图仪上绘制出来,或用数控机床进行加工,还需要将连续模型离散化.这是一个“离散→连续→离散”的过程.然而,以连续表示作为中间媒介有时并非必要,而且还增加麻烦,降低效率.相反,放弃连续模型,直接用离散数据表示、操作曲线曲面更适合于显示、加工和求交计算等,也更适合于外形设计.直接从离散到离散的造型方法与传统的方法不同,它通常没有显式表达式,仅提供一个算法描述过程,用以产生加密的离散点列或点阵来表达曲线曲面的信息.

1974年,Chaikin<sup>[1]</sup>研究曲线的快速绘制,把离散细分的概念引入到图形学界.1978年,Catmull和Clark<sup>[CE, CJ, 78]</sup>,Doo和Sabin<sup>[DD, SM, 78]</sup>分别提出了将B样条曲面推广到任意拓扑网格上的细分算法.从此,离散细分曲面(Subdivision surface)造型得到了广泛的研究<sup>[2-4]</sup>,其主要的内容可分为三个方向:(1)各种细分规则的构造. Loop<sup>[5]</sup>推广了三角域上的B样条方法,Peters和Reif<sup>[6]</sup>提出了一类最简单的细分构造,Qin<sup>[7]</sup>等将动态模型加入到Catmull-Clark曲面中去,这些都是逼近的构造.与此同时,Dyn,Levin和Gregory<sup>[8]</sup>提出了著名的“Butterfly”插值细分算法,随后Zorin<sup>[9]</sup>等改进了这一算法以取得更好的光滑性质,它们是基于三角形网格的.Kobbelt<sup>[10]</sup>则提出了适合四边形网格的插值算法,Levin<sup>[11, 12]</sup>设计了细分规则用于网格曲线插值.其它的细分方法还包括基于变分原理的规则<sup>[13-15]</sup>,基于NURBS推广的规则<sup>[STW, ZJM, DS, 98]</sup>,具有某些特殊性质的规则<sup>[16, 17]</sup>等.(2)基于细分的实用有效的算法研究.如Nasri<sup>[18-21]</sup>将基本的细分算法应用到各种造型要求中去;Halstead<sup>[HM, KM, DT, 93]</sup>等发现了精确计算细分曲面上点的位置和法向的公式,从而建立了光顺函数用于构造光顺的插值曲面;Stam<sup>[22]</sup>进一步分析了精确计算和表示细分曲面的问题;Hoppe<sup>[23]</sup>等修改规则用于产生具有尖点、尖边等特性的细分曲面;DeRose<sup>[24]</sup>,Lee等<sup>[25]</sup>研究应用细分曲面到某些具体问题中去.(3)细分曲面连续性的数学分析.最早Doo和Sabin<sup>[DD, SM, 78]</sup>应用Fourier技术和特征根方法来讨论细分曲面的连续性,随后Ball和Storry<sup>[26, 27]</sup>,Sabin<sup>[28]</sup>给出了进一步的分析,并由此导出一组优化的细分规则.此外Reif和Peters<sup>[29, 30]</sup>提出了特征映射的概念,更严格地分析连续性和光滑性.至此,对于常见的一些细分曲面,人们已有了一个较好的认识.但对于复杂的细分曲面<sup>[31]</sup>,连续性仍然是一个未解决的问题.

在离散细分曲面造型中,有一类方法可以被形象地描述为“切割磨光”(Cutting and Grinding).美术师和设计师在绘图时,总是先用折线打轮廓,然后用更密的折线逐步割去多边形的尖角,最后得到被“磨光”的曲线.雕塑家在创造雕像时,也往往先用油泥、石块、木头或金属的多面体打轮廓,然后用铲刀或凿子的平面逐步“切割”多面体的棱边或尖角,最后得到被“磨光”的曲面.这种思想给了人们一个很大的启示:切割磨光技术可用来作用到初始控制多边形或控制多面体以产生自由曲线曲面.实际上,著名的Bézier曲线、B样条曲线就是切割磨光曲线的特例,前者已总结成定理1.2.1并给予证明.文献[32]指出Bézier曲线生成的几何本质就是对控制多边形进行包络磨光的结果.切割法不但能产生自由曲线曲面,而且能够产生尖点、直线、折角曲面等,具有保凸性、凸包性和局部可调性等B样条方法的优点.更为重要的是,它可以作用到任意拓扑网格上去,产生任意拓扑类型的光滑曲面.除此之外,切割磨光法还具有如下特点:(1)几何直观,操作简单,实时修正方便;(2)寓曲于直,使自由曲面与多面体有一个统一的表示;(3)层次清晰,内部数据可以有从简单到复杂的多个层次以满足各种不同需要.

在离散细分曲面造型中,对Catmull-Clark曲面以及Doo-Sabin曲面为代表的细分曲面的研究,近几年又掀起了一个高潮.这一方面是由于激光测距扫描等三维数据采样技术和硬件设备有了长足的进步,可以轻而易举地在计算机上产生物体的初始网格;另一方面,更为重要的是因为图形工业对任意拓扑结构的光滑曲面造型的需求变得日益迫切;传统的B样条方法无法满足这一要求,而细分曲面能很好地产生拓扑结构复杂的曲面.

本章主要介绍我们用切割磨光技术进行曲线曲面造型的理论研究成果.首先讨论对多边形割角产生自由曲线的造型原理和方法,研究极限曲线的性质和光滑性条件;然后将这一方法和思想推广到曲面情形,给出对矩形拓扑网格和任意拓扑网格控制多面体的切割磨光算法;最后介绍国际上由B样条曲面推广发展起来的细分曲面及有关结果,包括1998年Sederberg

和我们在奥兰多(Orlando)SIGGRAPH 国际图形会议上合作报告的论文. 这些都是近年来国际上相当活跃的研究课题.

本章第 1, 2 节内容取材于[JTG, 84], [XZM, 86], [LW, 86]; 第 3, 4, 5 节内容取材于[JTG, WGJ, 88], [LW, JTG, LYD, 87], [LW, JTG, LYD, 89], [LW, 86]; 第 6 节内容取材于[CE, CJ, 78], [HM, KM, DT, 93], [DD, SM, 78], [WGJ, 98]; 第 7 节内容取材于[STW, ZJM, SD, SM, 98], [ZJM, STW, SM, 97].

## 18.1 切割磨光空间多边形的迭代算法

设有空间有序点列  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ , 把这些点依次用折线相连 (若构造闭多边形, 再连接首末两点), 得到一个刻划曲线轮廓的多边形 (称为控制多边形)——例如, 可以把它设想为由某已知曲线的若干条切线所构成的多边形 (见图 18.1.1). 为了“还原”得到所给的光滑曲线, 一种自然的方法就是采用割角磨光. 记  $P_i^{(0)} = P_i$ ,  $\Gamma^{(0)} = P_1^{(0)}P_2^{(0)} \dots P_N^{(0)}$  为由点列  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_N^{(0)}$  所组成的控制多边形. 在边  $P_i^{(0)}P_{i+1}^{(0)}$  上按照分比  $\mu_i^1, \lambda_{i+1}^1$  ( $\mu_i^1, \lambda_{i+1}^1 > 0, \mu_i^1 + \lambda_{i+1}^1 < 1$ ) 取分点来进行割角 (见图 18.1.2), 割角后由每个  $P_i$  点产生两点:

$$\begin{cases} P_{2i-1}^{(1)} = (1 - \lambda_i^1)P_i + \lambda_i^1 P_{i-1} \\ P_{2i}^{(1)} = \mu_i^1 P_{i+1} + (1 - \mu_i^1)P_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (18.1.1)$$

其中约定, 当多边形  $\Gamma^{(0)}$  为开多边形时,  $P_0 = P_1, P_{N+1} = P_N$ ; 当  $\Gamma^{(0)}$  为闭多边形时,  $P_0 = P_N, P_{N+1} = P_1$ .

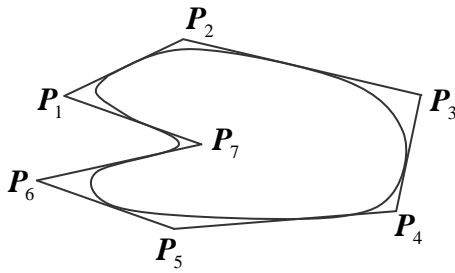


图 18.1.1 切线构成多边形

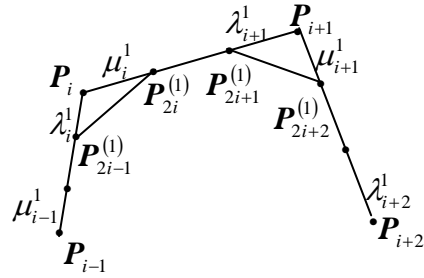


图 18.1.2 割角法产生新点

于是一次割角后点数增加一倍. 依次连接这些新点  $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_{2N}^{(1)}$ , 产生一个新的加密多边形, 记为  $\Gamma^{(1)}$ . 上述过程可以重复进行. 一般, 设  $\Gamma^{(k-1)}$  已经得到, 其中  $\Gamma^{(k-1)}$  是由  $k-1$  次割角后得到的  $2^{k-1}N$  个点  $P_1^{(k-1)}, \dots, P_{2^{k-1}N}^{(k-1)}$  所构成的多边形, 取边  $P_i^{(k-1)}P_{i+1}^{(k-1)}$  上的分比为  $\mu_i^k, \lambda_{i+1}^k$  ( $\mu_i^k, \lambda_{i+1}^k > 0, \mu_i^k + \lambda_{i+1}^k < 1$ ), 则第  $k$  次分割点按下面的规则产生:

$$\begin{cases} P_{2i-1}^{(k)} = (1 - \lambda_i^k)P_i^{(k-1)} + \lambda_i^k P_{i-1}^{(k-1)} \\ P_{2i}^{(k)} = \mu_i^k P_{i+1}^{(k-1)} + (1 - \mu_i^k)P_i^{(k-1)} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}N. \quad (18.1.2)$$

上式中同样约定, 对于开多边形,  $P_0^{(k-1)} = P_1^{(k-1)}, P_{2^{k-1}N+1}^{(k-1)} = P_{2^{k-1}N}^{(k-1)}$ ; 对于闭多边形,  $P_0^{(k-1)} = P_{2^{k-1}N}^{(k-1)}, P_{2^{k-1}N+1}^{(k-1)} = P_1^{(k-1)}$ . 当分割次数趋于无限时, 多边形序列  $\{\Gamma^{(k)}\}$  收敛到一条极限曲线 (证明见下一节), 此即为由割角法生成的自由曲线.

**定义 18.1.1** 曲线

$$C(\Gamma^{(0)}, S) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Gamma^{(k)} \quad (18.1.3)$$

称为切割曲线, 其中空间多边形  $\Gamma^{(0)} = P_1P_2 \dots P_N$  称为初始控制多边形, 集合  $S = \{(\lambda_i^k, \mu_i^k) | \lambda_i^k > 0, \mu_i^k > 0, \lambda_{i+1}^k + \mu_i^k < 1, k = 1, 2, \dots\}$  称为切割参数集.

由切割磨光法产生曲线, 关键是确定初始控制多边形和切割参数. 控制多边形给出曲线

的大致形状，切割参数决定切割方法，即迭代规则。例如，如果所有切割参数  $\lambda_i^k, \mu_i^k$  均取为常数  $1/4$ ，则此切割方法就是 Chaikin 算法<sup>[1]</sup>，其结果等价于由已知的控制多边形所定义的二阶 B 样条曲线<sup>[33]</sup>（见图 18.1.3）。又如，如果控制多边形为正方形，切割参数取为  $\lambda_i^k = \mu_i^k = (1/2)(1 + \cos(\pi/2^{k+1}))^{-1}$ ， $k = 1, 2, \dots$ ，则容易验证，每次迭代后得到的都是正多边形，第  $k$  次切割后为正  $2^{k+2}$  边形，因此极限曲线为一个整圆（见图 18.1.4）。注意，这个有趣的结果是 Bézier 或 B 样条方法所不能得到的。

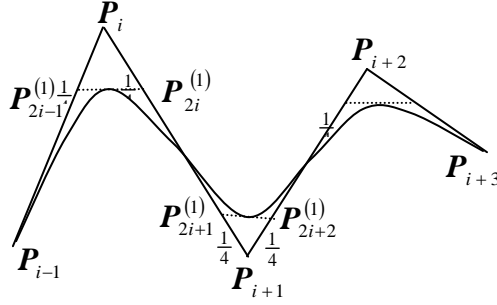


图 18.1.3 Chaikin 算法

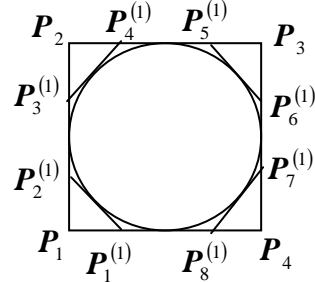


图 18.1.4 切割正方形产生圆

另外，切割参数也可用于调节曲线的形状，用户可以根据不同的要求选择不同的  $\lambda_i^k$ ， $\mu_i^k$ 。一般来说， $\lambda_i^k$ ， $\mu_i^k$  越小，所切割掉的东西也越少，因而形状越逼近于控制多边形，但整体上曲线感不强，仅仅把角磨光而已；相反， $\lambda_i^k$ ， $\mu_i^k$  越大，切割掉的东西越多，整体上曲线感强，但与控制多边形的接近程度较弱。

## 18.2 切割磨光曲线的性质

### 18.2.1 逼近性

从切割曲线的几何构造可以看出，切割曲线十分良好地近似初始的控制多边形。

**定理 18.2.1** 对于控制多边形  $\Gamma^{(0)} = P_1 P_2 \dots P_N$  中的任一边  $P_i P_{i+1}$ ，此边上以如下两点为端点的线段落在切割曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  上：

$$\begin{cases} P_i^l = P_i + \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_{2^j i}^{j+1} \prod_{m=0}^{j-1} (1 - r_{2^m i}^{m+1}) \right) (P_{i+1} - P_i), \\ P_i^r = P_{i+1} - \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_{2^j i+1}^{j+1} \prod_{m=0}^{j-1} (1 - r_{2^m i}^{m+1}) \right) (P_{i+1} - P_i), \end{cases} \quad (18.2.1)$$

其中  $r_i^k = \lambda_{i+1}^k + \mu_i^k$ ；并且当且仅当  $\sum_{j=0}^{+\infty} r_{2^j i}^{j+1} = +\infty$  时，线段的两 endpoint 重合，即  $P_i^l = P_i^r$ 。

证 对于边  $P_i P_{i+1}$ ，一次分割后由(18.1.1)得两个点（见图 18.2.1）：

$$\begin{aligned} P_{2i}^{(1)} &= P_i + \mu_i^1 (P_{i+1} - P_i), \\ P_{2i+1}^{(1)} &= P_{i+1} - \lambda_{i+1}^1 (P_{i+1} - P_i). \end{aligned}$$

于是

$$P_{2i+1}^{(1)} - P_{2i}^{(1)} = (1 - r_i^1) (P_{i+1} - P_i).$$

再分割  $k-1$  次，根据(18.1.2)可归纳推出

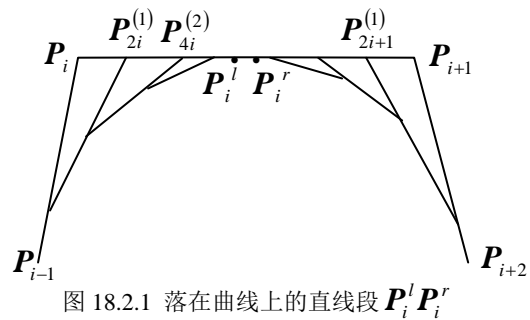


图 18.2.1 落在曲线上的直线段  $P_i^l P_i^r$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{2^k i}^{(k)} = \mathbf{P}_i + \left( \sum_{j=0}^{k-1} \mu_{2^j i}^{j+1} \prod_{m=0}^{j-1} (1 - r_{2^m i}^{m+1}) \right) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i), \\ \mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)} = \mathbf{P}_{i+1} - \left( \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{2^j i+1}^{j+1} \prod_{m=0}^{j-1} (1 - r_{2^m i}^{m+1}) \right) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i), \end{cases} \quad (18.2.2)$$

并且

$$\mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i}^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - r_{2^j i}^{j+1}) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i). \quad (18.2.3)$$

由于  $\lambda_i^k, \mu_i^k > 0, r_i^k < 1$ , 从上面两式可知: 在边  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$  上, 当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $\{\mathbf{P}_{2^k i}^{(k)}\}$  单调右移,  $\{\mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)}\}$  单调左移, 但  $\mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)}$  总介于  $\mathbf{P}_{2^k i}^{(k)}$  与  $\mathbf{P}_{i+1}$  之间. 所以  $\mathbf{P}_i^l = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{2^k i}^{(k)}$ ,  $\mathbf{P}_i^r = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)}$ . 由(18.2.2)得出(18.2.1). 注意到线段  $\mathbf{P}_i^l \mathbf{P}_i^r$  含在每一条线段  $\mathbf{P}_{2^k i}^{(k)} \mathbf{P}_{2^k i+1}^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 内, 即其位于每一个加密多边形  $\Gamma^{(k)}$  的边上, 所以  $\mathbf{P}_i^l \mathbf{P}_i^r \subset C(\Gamma^{(0)}, S)$ . 进一步, 由(18.2.3)又可知  $\mathbf{P}_i^l = \mathbf{P}_i^r$  当且仅当  $\prod_{j=0}^{+\infty} (1 - r_{2^j i}^{j+1}) = 0$ , 即  $\sum_{j=0}^{+\infty} r_{2^j i}^{j+1} = +\infty$ . 证毕.

一种简单情形是切割参数  $\lambda_i^k, \mu_i^k$  均为常数. 设  $\lambda_i^k = \lambda, \mu_i^k = \mu$ , 此时有

**推论 18.2.1** 设  $\lambda, \mu > 0, \lambda + \mu < 1$ , 则在割角过程中的每一边上都有切割曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  的点. 此点将该边分割为比  $\mu : \lambda$ . 特别, 对于初始控制多边形  $\Gamma^{(0)}$  的任一边  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$ , 其上的点

$$\bar{\mathbf{P}}_i = (\lambda/(\lambda + \mu))\mathbf{P}_i + (\mu/(\lambda + \mu))\mathbf{P}_{i+1} \quad (18.2.4)$$

落在  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  上.

进一步, 由定理 18.2.1 还可导出下面的性质, 它们在曲线造型中 (如构造尖点, 夹直线等) 经常要用到.

**推论 18.2.2** 在控制多边形  $\Gamma^{(0)}$  中, 若某顶点  $\mathbf{P}_i$  为重顶点, 则切割曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  通过  $\mathbf{P}_i$ ; 并且若此重点与相邻的两顶点共线, 则不产生尖点, 否则产生尖点.

证 不失一般性, 设  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i+1}$  为二重顶点 (见图 18.2.2). 于是  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$  边上的任一点与  $\mathbf{P}_i$  重合, 因此  $\mathbf{P}_i$  落在  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  上. 注意到经过每次切割后, 角  $\angle \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+2}$  都被保留下来, 而且

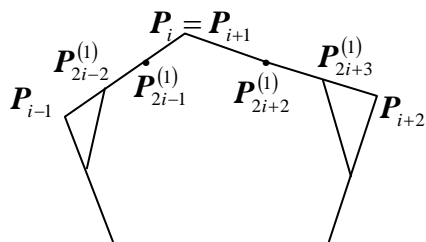


图 18.2.2 两顶点重合的情况

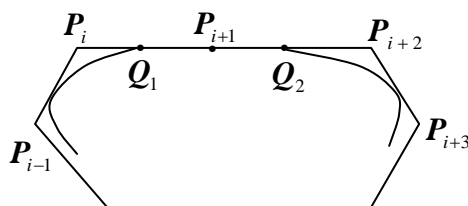


图 18.2.3 三顶点共线的情况

大小不变, 因此当顶点中的  $\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+2}$  共线时, 夹角为  $\pi$ , 不产生尖点; 否则, 切割曲线在  $\mathbf{P}_i$  处的左方单位导矢为  $\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i / \|\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i\|$ , 右方单位导矢为  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+2} / \|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+2}\|$ , 所以  $\mathbf{P}_i$  为尖点. 证毕.

**推论 18.2.3** 设控制多边形  $\Gamma^{(0)} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_N$  中三个顶点  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}, \mathbf{P}_{i+2}$  共线, 但不是重顶点, 则切割曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  通过边  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+2}$  上的一条直线段  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ , 其中点  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  分别在边

$P_i P_{i+1}$  和  $P_{i+1} P_{i+2}$  内.

证 由于  $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  三点共线(见图 18.2.3), 切割  $k$  次后, 点  $P_{2^k i}^{(k)} P_{2^k(i+1)}^{(k)} \cdots P_{2^k(i+1)+1}^{(k)}$  也共线, 且位于边  $P_i P_{i+2}$  上, 是加密多边形  $\Gamma^{(k)}$  的一部分. 取点  $Q_1$  为边  $P_i P_{i+1}$  上的  $P_i^l$ , 点  $Q_2$  为边  $P_{i+1} P_{i+2}$  上的  $P_{i+1}^r$ , 则边  $P_i P_{i+1}$  包含在每一条边  $P_{2^k i}^{(k)} \cdots P_{2^k(i+1)+1}^{(k)}$  中, 于是  $Q_1 Q_2 \subset \Gamma^{(k)}$ , 因此  $Q_1 Q_2 \subset C(\Gamma^{(0)}, S)$ . 证毕.

### 18.2.2 连续性

为了证明切割曲线的连续性, 将多边形  $\Gamma^{(k)}$  表示成逐段线性参数曲线的形式:

$$\Gamma^{(k)}(t) = (i - Kt)P_i^{(k)} + (Kt - i + 1)P_{i+1}^{(k)}, \quad t \in [(i-1)/K, i/K], \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (18.2.5)$$

其中  $K$  为  $2^k N - 1$  (多边形为开时) 或  $2^k N$  (多边形为闭时). 于是  $\Gamma^{(k)}(t)$  是定义在  $[0, 1]$  上的连续曲线. 对于定义在  $[0, 1]$  上的两条参数曲线  $r_1(t)$  和  $r_2(t)$ , 再定义它们的距离为:

$$d(r_1, r_2) = \max_{0 \leq t \leq 1} \min_{0 \leq s \leq 1} \|r_1(t) - r_2(s)\|. \quad (18.2.6)$$

现考虑由切割磨光所产生的多边形序列  $\{\Gamma^{(k)}(t)\}$ . 设  $h^{(k)}$  为多边形  $\Gamma^{(k)}(t)$  各顶点到分割一次后所产生的所在三角形对应边上的高  $h_i^{(k)}$  的最大值(见图 18.2.4), 显然有:

$$d(\Gamma^{(k)}(t), \Gamma^{(k+1)}(t)) \leq h^{(k)}. \quad (18.2.7)$$

引入记号  $\bar{\lambda}^k = \max_i \{\lambda_i^k\}$ ,  $\underline{\lambda}^k = \min_i \{\lambda_i^k\}$ ,

$\bar{\lambda} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}^k$ ,  $\underline{\lambda} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{\lambda}^k$ ; 类似地定义  $\bar{\mu}^k$ ,  $\underline{\mu}^k$ ,

$\bar{\mu}^k$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\underline{\mu}$  等. 由直角三角形的性质可得到  $h^{(k)} \leq \max(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) L^{(k)}$ , 其中  $L^{(k)}$  为多边形  $\Gamma^{(k)}$  之最大边长. 根据(18.1.2), 有这样的估计:

$L^{(k+1)} \leq \max(\bar{\lambda}^k + \bar{\mu}^k, 1 - \underline{\lambda}^k - \underline{\mu}^k) \cdot L^{(k)}$ . 所以如

果记  $B^{(k)} = \max(\bar{\lambda}^k + \bar{\mu}^k, 1 - \underline{\lambda}^k - \underline{\mu}^k)$ , 则

$h^{(k)} \leq B^{(k)} L^{(k)}$ ,  $L^{(k+1)} \leq B^{(k)} L^{(k)}$ . 另一方面, 易知当  $\underline{\lambda} > 0$ ,  $\underline{\mu} > 0$ ,  $\bar{\lambda} + \bar{\mu} < 1$  时, 有  $0 < \max\{\bar{\lambda} + \bar{\mu}, 1 - \underline{\lambda} - \underline{\mu}\} < 1$ . 假设  $M$  为  $(\max\{\bar{\lambda} + \bar{\mu}, 1 - \underline{\lambda} - \underline{\mu}\}, 1)$  内任一常数, 则  $\exists N_0$ , 使当  $k \geq N_0$  时  $B^{(k)} \leq M$ . 于是当  $k \geq N_0$  时成立着下面两式:

$$h^{(k)} \leq M^{k+1-N_0} L^{(N_0)}, \quad (18.2.8)$$

$$d(\Gamma^{(k)}, \Gamma^{(k+m)}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} d(\Gamma^{(k+i)}, \Gamma^{(k+i+1)}) \leq (M^{1-N_0} / (1-M)) L^{(N_0)} M^k. \quad (18.2.9)$$

因此当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $M^k \rightarrow 0$ . 这说明  $\{\Gamma^{(k)}(t)\}$  是一个 Cauchy 序列, 一致收敛到一条连续曲线. 这样就证明了切割磨光法的收敛性和连续性:

**定理 18.2.2** 当切割参数满足

$$\underline{\lambda} > 0, \quad \underline{\mu} > 0, \quad \bar{\lambda} + \bar{\mu} < 1, \quad (18.2.10)$$

时, 由(18.1.1)和(18.1.2)迭代产生的加密多边形序列收敛到一条连续的曲线.

当切割参数为常数, 即  $\lambda_i^k \equiv \lambda$ ,  $\mu_i^k \equiv \mu$  时, 则可取  $M = \max(\lambda + \mu, 1 - \lambda - \mu)$ ,  $N_0 = 0$ , 在(18.2.9)中令  $m \rightarrow +\infty$ , 得到

$$d(\Gamma^{(k)}, C(\Gamma^{(0)}, S)) \leq (M^{k+1} / (1-M)) L^{(0)}. \quad (18.2.11)$$

上式可用于确定切割次数. 给定精度  $\varepsilon > 0$ , 要使  $d(\Gamma^{(k)}, C(\Gamma^{(0)}, S)) \leq \varepsilon$ , 只需

$$k+1 \geq \ln((1-M)\varepsilon / L^{(0)}) / \ln M, \quad (18.2.12)$$

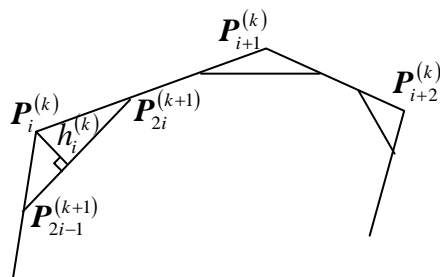


图 18.2.4 高  $h_i^{(k)}$  的示意图

所以当切割次数达到  $\lceil \ln((1-M)\varepsilon/L^{(0)})/\ln M \rceil$  以后, 所产生的多边形  $\Gamma^{(k)}$  与极限曲线的误差在精度  $\varepsilon$  以内.

### 18.2.3 光滑性

现就切割参数  $\lambda_i^k$ ,  $\mu_i^k$  为常数这一简单情形来讨论切割曲线的光滑性. 设  $\lambda_i^k \equiv \lambda$ ,  $\mu_i^k \equiv \mu$ . 令  $\theta_i^{(k)} \in [0, \pi]$  为控制多边形  $\Gamma^{(k)}$  中两条相邻边矢量  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  到  $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$  的转角, 它是多边形  $\Gamma^{(k)}$  的外角. 如果  $\Gamma^{(k)}$  没有重顶点, 并且对所有  $i$  满足  $\theta_i^{(k)} \in [0, \pi]$ , 则称这种控制多边形  $\Gamma^{(k)}$  是正则的. 记  $\theta^{(k)} = \max_i \{\theta_i^{(k)}\}$ , 则切割曲线为一阶几何连续 (即  $G^1$ ) 当且仅当  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta^{(k)} = 0$ . 记  $a_i^{(k)} = \|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\|$ ,  $\Delta_i^{(k)} = \mu a_{i+1}^{(k)} / (\lambda a_i^{(k)})$ ,  $r = \lambda + \mu$ .

**引理 18.2.1** 对于任一个正则控制多边形  $\Gamma^{(0)}$ , 只要切割参数满足  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $2\lambda + \mu < 1$ ,  $2\mu + \lambda < 1$ , 则经有限次切割后, 所有两相邻边矢量的转角均不大于  $\pi/2$ .

**证** 用反证法证明. 假设引理之结论不真, 则存在一个序列  $\{\theta_{i_k}^{(k)}\}$ , 使对所有  $k$ , 有  $\theta_{i_k}^{(k)} > \pi/2$ , 并且  $\theta_{i_k}^{(k)}$  是对  $\theta_{i_{k-1}}^{(k-1)}$  施行割角运算后所产生的两个夹角中的一个. 于是  $i_k = 2i_{k-1}$  或  $i_k = 2i_{k-1} - 1$ . 下面分四步来证明本引理.

第一步. 如图 18.2.5, 由三角形性质可知:  $\theta_i^{(k-1)} = \theta_{2i-1}^{(k)} + \theta_{2i}^{(k)} \geq \max(\theta_{2i-1}^{(k)}, \theta_{2i}^{(k)})$ , 所以  $\{\theta_{i_k}^{(k)}\}$  是一个单调减少且有下界  $\pi/2$  的序列, 从而存在极限, 设为  $\theta$ , 则  $\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_{i_k}^{(k)} \geq \pi/2$ . 取  $\theta_0 = (\pi - \theta)/2 > 0$ , 则存在  $K_1 > 0$ , 使得当  $k \geq K_1$  时,  $\theta_{i_{k-1}}^{(k-1)} - \theta_{i_k}^{(k)} < \theta_0 \leq \pi/4$ , 且  $\sin \theta = \sin(\pi - 2\theta_0) = \sin(2\theta_0) > \sin \theta_0$ , 所以又存在  $K(\geq K_1)$ , 使得当  $k \geq K$  时,  $\sin \theta_{i_k}^{(k)} > \sin \theta_0$ .

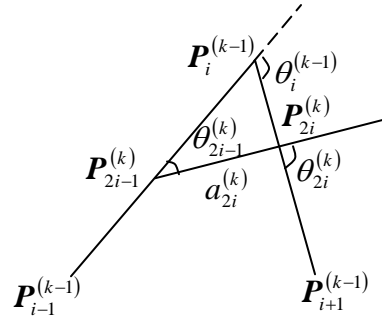


图 18.2.5 多边形的外角

第二步. 由正弦定理和余弦定理, 得到

$$\begin{aligned} \sin \theta_{2i}^{(k)} &= (\lambda a_i^{(k-1)} / a_{2i}^{(k)}) \sin \theta_i^{(k-1)} \\ &= \left( \lambda a_i^{(k-1)} / \sqrt{(\lambda a_i^{(k-1)})^2 + (\mu a_{i+1}^{(k-1)})^2 + 2\lambda a_i^{(k-1)} \mu a_{i+1}^{(k-1)} \cos \theta_i^{(k-1)}} \right) \sin \theta_i^{(k-1)} \\ &= \left( 1 / \sqrt{1 + (\Delta_i^{(k-1)})^2 + 2\Delta_i^{(k-1)} \cos \theta_i^{(k-1)}} \right) \sin \theta_i^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (18.2.13)$$

$$\Delta_{2i}^{(k)} = \mu a_{2i+1}^{(k)} / (\lambda a_{2i}^{(k)}) = \frac{1-r}{\lambda} \left( 1 / \sqrt{(1/\Delta_i^{(k-1)})^2 + 1 + (2/\Delta_i^{(k-1)}) \cos \theta_i^{(k-1)}} \right); \quad (18.2.14)$$

同理有

$$\sin \theta_{2i-1}^{(k)} = \left( 1 / \sqrt{1 + (1/\Delta_i^{(k-1)})^2 + (2/\Delta_i^{(k-1)}) \cos \theta_i^{(k-1)}} \right) \sin \theta_i^{(k-1)}, \quad (18.2.15)$$

$$\Delta_{2i-1}^{(k)} = \frac{\mu}{1-r} \sqrt{1 + (\Delta_i^{(k-1)})^2 + 2\Delta_i^{(k-1)} \cos \theta_i^{(k-1)}}. \quad (18.2.16)$$

第三步. 对于  $k > K$ , 如果  $\theta_{2i}^{(k)} > \pi/2$ , (即  $i_k = 2i$ ), 则有  $\theta < \theta_{2i}^{(k)} < \theta_i^{(k-1)}$ ,  $\theta_{2i-1}^{(k)} < \theta_0 \leq \pi/4$ , 于是由(18.2.15)得

$$\sin \theta_0 > \sin \theta_{2i-1}^{(k)} > \left( 1 / \sqrt{1 + (1/\Delta_i^{(k-1)})^2 + (2/\Delta_i^{(k-1)}) \cos \theta_i^{(k-1)}} \right) \sin \theta_0.$$

所以

$$1/\Delta_i^{(k-1)} + 2\cos\theta_i^{(k-1)} > 0. \quad (18.2.17)$$

又由(18.2.13)并注意到此时  $\sin\theta_{2i}^{(k)} > \sin\theta_i^{(k-1)}$ , 可得

$$\Delta_i^{(k-1)} + 2\cos\theta_i^{(k-1)} < 0. \quad (18.2.18)$$

应用不等式(18.2.17)于(18.2.14)得出  $\Delta_{2i}^{(k)} \leq (1-r)/\lambda$ ; 应用不等式(18.2.18)于(18.2.14)得出  $\Delta_{2i}^{(k)} \geq ((1-r)/\lambda)\Delta_i^{(k-1)} > \Delta_i^{(k-1)}$ .

采用类似步骤可证: 对于  $k \geq K$ , 如果  $\theta_{2i-1}^{(k)} > \pi/2$ , (即  $i_k = 2i-1$ ), 则成立着  $\mu/(1-r) \leq \Delta_{2i-1}^{(k)} \leq (\mu/(1-r))\Delta_i^{(k-1)} \leq \Delta_i^{(k-1)}$ . 由此可知, 对于  $k > K$ , 成立着

$$B_1 = \min(\mu/(1-r), \Delta_{i_K}^{(K)}) \leq \Delta_{i_k}^{(k)} \leq \max((1-r)/\lambda, \Delta_{i_K}^{(K)}) = B_2. \quad (18.2.19)$$

第四步. 由(18.2.13)和(18.2.15)可知, 对于  $k > K$ , 当  $\theta_{2i}^{(k)}$  和  $\theta_{2i-1}^{(k)}$  分别大于  $\pi/2$  时有

$$\sin\theta_{2i}^{(k)} \geq \sin\theta_i^{(k-1)} / \sqrt{1 + (\Delta_i^{(k-1)})^2 + 2\Delta_i^{(k-1)}} \geq \sin\theta_0 / (1 + B_2) > 0,$$

$$\sin\theta_{2i-1}^{(k)} \geq \sin\theta_i^{(k-1)} / \sqrt{1 + (1/\Delta_i^{(k-1)})^2 + 2/\Delta_i^{(k-1)}} \geq B_1 \sin\theta_0 / (1 + B_1) > 0.$$

上面两式右端都是一个正常数, 而当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $\theta_{i_k}^{(k)} \rightarrow \theta$ , 于是  $\theta_{2i-1}^{(k)}$  或  $\theta_{2i}^{(k)}$  中有一个趋向于 0. 因此上面两式必有一个不成立, 这就导致矛盾. 所以假设不成立, 引理得证.

**引理 18.2.2** 对于正则控制多边形  $\Gamma^{(0)}$ , 当切割参数满足  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $2\lambda + \mu < 1$ ,  $2\mu + \lambda < 1$  时, 成立着

$$\bar{\Delta} \leq \max((1-r)/\lambda, \mu/(1-r-\mu)), \quad (18.2.20)$$

$$\underline{\Delta} \geq \min(\mu/(1-\lambda), (1-r)/\lambda). \quad (18.2.21)$$

证 由引理 18.2.1, 我们不妨设所有  $\theta_i^{(k)} \in [0, \pi/2]$ , 因此由(18.2.14)和(18.2.16)得到

$$(1/(1+1/\Delta_i^{(k-1)})) \cdot (1-r)/\lambda \leq \Delta_{2i}^{(k)} \leq (1-r)/\lambda, \quad \mu/(1-r) \leq \Delta_{2i-1}^{(k)} \leq (\mu/(1-r))(1+\Delta_i^{(k-1)}),$$

所以

$$\bar{\Delta}^{(k)} \leq \max\{(1-r)/\lambda, (\mu/(1-r))(1+\bar{\Delta}^{(k-1)})\},$$

$$\underline{\Delta}^{(k)} \geq \min\{\mu/(1-\lambda), ((1-r)/\lambda)(\underline{\Delta}^{(k-1)})/(1+\underline{\Delta}^{(k-1)})\}.$$

令  $k \rightarrow +\infty$ , 即可得(18.2.20)和(18.2.21). 证毕.

用前面两个引理, 可证明切割曲线为  $G^1$  的一个充分条件.

**定理 18.2.3** 当切割参数  $\lambda, \mu$  满足

$$\lambda > 0, \mu > 0, 2\lambda + \mu < 1, 2\mu + \lambda < 1, \quad (18.2.22)$$

即点  $(\lambda, \mu)$  在图 18.2.6 所示的区域  $\Omega$  中时, 由一个正则多边形切割产生的曲线为一阶光滑.

证 由引理 18.2.1, 不妨设所有  $\theta_i^{(k)} \in [0, \pi/2]$ . 根据(18.2.13)和(18.2.15), 有如下估计:

$$\sin\theta_{2i}^{(k)} \leq \sin\theta_i^{(k-1)} / \sqrt{1 + \Delta_i^{(k-1)}} \leq \sin\theta^{(k-1)} / \sqrt{1 + \underline{\Delta}^{(k-1)}},$$

$$\sin\theta_{2i-1}^{(k)} \leq \sin\theta_i^{(k-1)} / \sqrt{1 + 1/\Delta_i^{(k-1)}} \leq \sin\theta^{(k-1)} / \sqrt{1 + 1/\bar{\Delta}^{(k-1)}}.$$

所以

$$\sin\theta^{(k)} \leq \max\left\{1/\sqrt{1 + \underline{\Delta}^{(k-1)}}, 1/\sqrt{1 + 1/\bar{\Delta}^{(k-1)}}\right\} \cdot \sin\theta^{(k-1)}.$$

注意到  $\{\theta^{(k)}\}$  是一个递减且有下界 0 的数列, 因此  $\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \theta^{(k)}$  存在, 另外由引理 18.2.2 知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{1 + \underline{\Delta}^{(k-1)}} \leq 1/\sqrt{1 + \min\{\mu/(1-r), (1-r-\lambda)/\lambda\}} < 1,$$

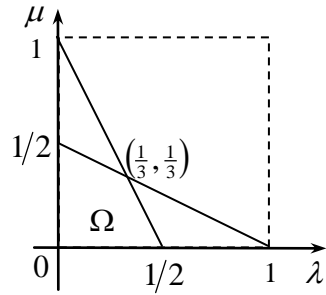


图 18.2.6  $G^1$  切割的参数区域

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{1+1/\Delta^{(k-1)}} \leq 1/\sqrt{1+1/\max\{(1-r)/\lambda, \mu/(1-r-\mu)\}} < 1,$$

令  $k \rightarrow +\infty$ , 有  $\sin \theta \leq \max\left\{\lim_{k \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{1+\underline{\Delta}^{(k-1)}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{1+1/\Delta^{(k-1)}}\right\} \sin \theta$ , 所以  $\theta$  必为 0, 从而切割曲线为  $G^1$  连续. 证毕.

#### 18.2.4 几何性质

切割曲线还具有许多良好的几何性质, 下面介绍其中最主要的. 为此先设  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  的控制多边形为  $\Gamma^{(0)} = P_1 P_2 \cdots P_N$ .

**定理 18.2.4** 切割曲线具有凸包性, 即曲线在其控制多边形的凸包内. 特别, 当控制多边形各顶点重合时, 曲线也缩为一点.

证 由于  $\Gamma^{(k)}$  由  $\Gamma^{(k-1)}$  经割角后产生,  $\Gamma^{(k)}$  位于  $\Gamma^{(k-1)}$  的凸包内, 因此  $\Gamma^{(k)}$  均在  $\Gamma^{(0)}$  的凸包内. 从而当  $k \rightarrow +\infty$  时, 曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  也在  $\Gamma^{(0)}$  的凸包内. 证毕.

**定理 18.2.5** 切割曲线具有局部性, 即变动控制多边形的一个顶点, 仅影响切割曲线在该点的附近部分.

证 假设变动顶点  $P_{i+1}$ , 显然  $P_1 \cdots P_{i-1}$  段和  $P_{i+3} \cdots P_N$  段切割后的结果保持不变. 从而曲线  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  仅在  $P_{i-1} P_i P_{i+1} P_{i+2} P_{i+3}$  段内有所改变. 证毕.

为了介绍凸性, 先给出平面凸曲线的概念.

**定义 18.2.1** 若平面连续曲线是平面上某一凸集的边界或边界的一部分, 则称其为凸曲线

**定义 18.2.2** 称多边形  $P_1 \cdots P_N$  为凸, 是指连接其两端点  $P_1$  和  $P_N$  后, 所围成的区域为凸集.

**定理 18.2.6** 切割曲线具有保凸性, 即若控制多边形为凸, 则切割生成的曲线也凸.

证 设  $A^{(k)}$  为由连接多边形  $\Gamma^{(k)} = P_1^{(k)} P_2^{(k)} \cdots P_{2^k N}^{(k)}$  的首尾端点后所得的多边形内部有界区域和边界所组成的闭集. 由已知条件知  $A^{(0)}$  为凸集. 因为  $\lambda_i^k, \mu_i^k > 0$ ,  $\lambda_{i+1}^k + \mu_i^k < 1$ , 可以认为  $\Gamma^{(k)}$  是由  $\Gamma^{(k-1)}$  依次割去每个角而得到. 但容易证明任何一个凸多边形, 割去一个角后仍是凸多边形, 并且包含在原多边形内. 因此用归纳法可证得  $A^{(k)}$  也是凸集, 且  $A^{(k)} \subset A^{(k-1)} \subset \cdots \subset A^{(0)}$ . 于是  $A^{(k)} = \bigcap_{i=0}^k A^{(i)}$ , 从而  $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A^{(i)}$  也是凸集, 由

定义 18.2.1 知  $C(\Gamma^{(0)}, S)$  为凸曲线. 证毕.

综上所述, 切割曲线类似于 Bézier 曲线或 B 样条曲线, 具有良好的几何性质, 它的数学原理和编程简单, 可调性强, 具有一阶连续, 非常适合于计算机辅助设计和图形学应用.

### 18.3 切割磨光曲面造型的原理和算法

为了叙述曲面造型的切割磨光原理, 考察如图 18.3.1 所示的由四个平面片  $A_{11} A_{12} A_{22} A_{21}$ ,  $A_{21} A_{22} A_{32} A_{31}$ ,  $A_{12} A_{13} A_{23} A_{22}$ ,  $A_{22} A_{23} A_{33} A_{32}$  所组成的简单多面体  $A$ .  $A$  称为控制多面体,  $A_{ij}$  称为控制顶点. 首先在四边形  $A_{11} A_{12} A_{22} A_{21}$  内部适当的位置取点  $B_{22}, B_{23}, B_{33}, B_{32}$ ; 如果边  $A_{11} A_{12}$  或  $A_{11} A_{21}$  为多面体  $A$  的边界, 则在边界上的适当位置取点  $B_{12}, B_{13}$  或  $B_{21}, B_{31}$ ; 当  $A_{11} A_{12}$  和  $A_{11} A_{21}$  同时为  $A$  的边界, 则令  $B_{11} = A_{11}$ . 对其余三个四边形作类似处理. 这样, 我们得到一组新的控制顶点  $\{B_{ij}\}$ , 把点  $B_{ij} (i, j = 1, \cdots, 6)$  依图用虚线连接, 得到由  $6 \times 6$  个顶点  $B_{ij}$  所组成的新控制多面体  $B$ . 容易看出, 当用  $B$  代替  $A$  时, 原有的  $A$  的尖角  $A_{22}$  被空间四边形  $B_{33} B_{34} B_{44} B_{43}$  “切割”掉了,  $A$  的棱边  $A_{12} A_{22}$ ,  $A_{21} A_{22}$ ,  $A_{32} A_{22}$ ,  $A_{23} A_{22}$  也被许多空间四边形 “切割”掉了. 接下来, 对  $B$  做类似的处理, 这一过程进行若干次以后, 则控制多面体随着顶点的密化而被 “磨光”, 这密化的顶点也就是欲求的离散曲面上的点列. 显然, 原来  $A$  的四个四边形  $A_{11} A_{12} A_{22} A_{21}$  等必须是平面的假设可以取



消，切割磨光算法的关键归结为求加密的顶点  $B_{ij}$ 。

本节讨论控制多面体网格为拓扑矩形的切割磨光算法。这样，控制顶点可表为有序的二维点列  $\{P_{ij} | i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M\}$ 。把  $i$  固定， $j$  变动的点列  $\{P_{ij}\}$  称为列向点列；把  $j$  固定， $i$  变动的点列  $\{P_{ij}\}$  称为行向点列。下面给出四个算法，它们都是曲线切割磨光法的推广。

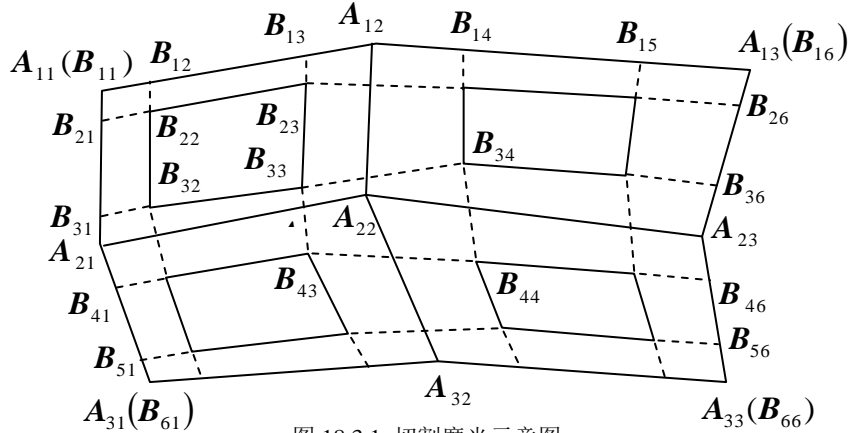


图 18.3.1 切割磨光示意图

#### 算法 18.3.1 (两步单向切割磨光法)

对每一个固定的  $i(i=1,2,\dots,N)$ ，根据点列  $\{P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{iM}\}$  得到控制多边形  $T_i$ ，对此  $T_i$  以切割分比  $\lambda_{ij}^l, \mu_{ij}^l$  ( $j$  为多边形顶点序号， $l$  为切割次数， $\lambda_{ij}^l, \mu_{ij}^l > 0$ ,  $\lambda_{i,j+1}^l + \mu_{ij}^l < 1$ ) 进行  $k$  次切割，得到新点列  $\{P_{i1}^{0k}, P_{i2}^{0k}, \dots, P_{i,2^k M}^{0k}\}$ ，此即列向切割生成曲线的离散点值。然后，对每一固定的  $j(j=1,2,\dots,2^k M)$ ，根据点列  $\{P_{1j}^{0k}, P_{2j}^{0k}, \dots, P_{Nj}^{0k}\}$ ，得到控制多边形  $R_j$ ，对此  $R_j$  以切割分比  $\sigma_{ij}^l, \tau_{ij}^l$  ( $i$  为多边形顶点序号， $l$  为分割次数， $\sigma_{ij}^l, \tau_{ij}^l > 0$ ,  $\sigma_{i+1,j}^l + \tau_{ij}^l < 1$ ) 进行  $h$  次切割，得到新点列  $\{P_{1j}^{hk}, P_{2j}^{hk}, \dots, P_{2^h N,j}^{hk}\}$ ，此即行向切割生成曲线的离散点值，也是先列向后行向的两步切割磨光曲面的离散点值。当然，也可先行向后列向切割。这一过程只要反复调用线切割磨光的子程序即可实现。

#### 算法 18.3.2 (交叉切割磨光法)

首先仿算法 18.3.1 在列向切割一次，得点列  $\{P_{i1}^{01}, P_{i2}^{01}, \dots, P_{i,2M}^{01}\}$ ，( $i=1,2,\dots,N$ )，再在行向切割一次，得点列  $\{P_{1j}^{11}, P_{2j}^{11}, \dots, P_{2N,j}^{11}\}$ ，( $j=1,2,\dots,2M$ )，这称为交叉切割一次。如此继续下去，直到第  $k-1$  次交叉切割后，再以切割比  $\lambda_{ij}^k, \mu_{ij}^k, \sigma_{ij}^k, \tau_{ij}^k$  对刚产生的离散曲面交叉切割一次，最终得新点列  $\{P_{1j}^{kk}, P_{2j}^{kk}, \dots, P_{2^k N,j}^{kk}\}$ ，( $j=1,2,\dots,2^k M$ )，此即先列向后行向的  $k$  次交叉切割所生成的离散点值。

若每一行中列向的切割系数取为一致，即  $\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j+1} = \dots = \sigma_i$ ， $\tau_{i,j} = \tau_{i,j+1} = \dots = \tau_i$ ；每一列中行向的切割系数也取为一致，即  $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j} = \dots = \lambda_j$ ， $\mu_{i,j} = \mu_{i+1,j} = \dots = \mu_j$ ；则交叉切割过程中先列向后行向和先行向后列向所产生的结果完全一致。事实上，如图 18.3.2，考察控制多面体网格中由四个顶点

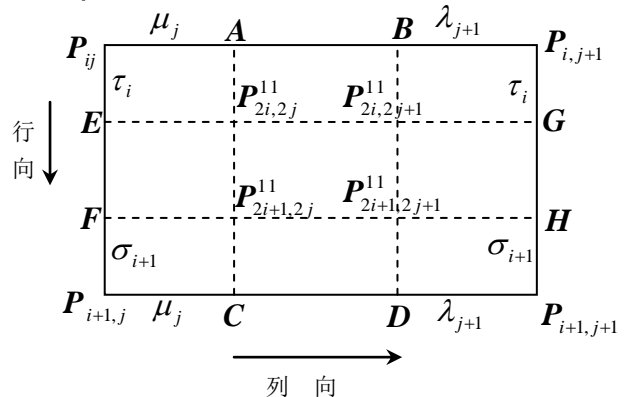


图 18.3.2 交叉切割法示意图

$\{P_{ij}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, P_{i+1,j}\}$  所组成的一个空间四边形. 经列向切割, 由  $\{P_{ij}, P_{i,j+1}\}$  得  $\{A, B\}$  点值, 由  $\{P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}\}$  得  $\{C, D\}$  点值, 其中  $A = (1 - \mu_j)P_{ij} + \mu_j P_{i,j+1}$ ,  $C = (1 - \mu_j)P_{i+1,j} + \mu_j P_{i+1,j+1}$ . 再经行向切割, 由  $\{A, C\}$  得  $\{P_{2i,2j}^{11}, P_{2i+1,2j}^{11}\}$ , 由  $\{B, D\}$  得  $\{P_{2i,2j+1}^{11}, P_{2i+1,2j+1}^{11}\}$ , 则  $P_{2i,2j}^{11}$  可表示为

$$P_{2i,2j}^{11} = (1 - \tau_i)A + \tau_i C = (1 - \mu_j)(1 - \tau_i)P_{ij} + (1 - \mu_j)\tau_i P_{i+1,j} + \mu_j(1 - \tau_i)P_{i,j+1} + \mu_j\tau_i P_{i+1,j+1}. \quad (18.3.1)$$

如果先作行向切割, 则由  $\{P_{ij}, P_{i+1,j}\}$  得  $\{E, F\}$ , 由  $\{P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$  得  $\{G, H\}$ , 再作列向切割, 由  $\{E, G\}$  可产生  $\{P_{2i,2j}^{11}, P_{2i,2j+1}^{11}\}$ , 由  $\{F, H\}$  可产生  $\{P_{2i+1,2j}^{11}, P_{2i+1,2j+1}^{11}\}$ . 可以验证, 由先行向后列向切割得到的  $P_{2i,2j}^{11}$  也可表示成(18.3.1). 其余三个新点也类似. 因此在这种情况下不需考虑切割顺序, 每交叉切割一次, 所产生的四个新点可由原四边形的顶点表示出来:

$$\begin{pmatrix} P_{2i,2j}^{11} \\ P_{2i+1,2j}^{11} \\ P_{2i,2j+1}^{11} \\ P_{2i+1,2j+1}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \mu_j)(1 - \tau_i) & (1 - \mu_j)\tau_i & \mu_j(1 - \tau_i) & \mu_j\tau_i \\ (1 - \mu_j)\sigma_{i+1} & (1 - \mu_j)(1 - \sigma_{i+1}) & \mu_j\sigma_{i+1} & \mu_j(1 - \sigma_{i+1}) \\ \lambda_{i+1}(1 - \tau_i) & \lambda_{i+1}\tau_i & (1 - \lambda_{i+1})(1 - \tau_i) & (1 - \lambda_{i+1})\tau_i \\ \lambda_{i+1}\sigma_{i+1} & \lambda_{i+1}(1 - \sigma_{i+1}) & (1 - \lambda_{i+1})\sigma_{i+1} & (1 - \lambda_{i+1})(1 - \sigma_{i+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{ij} \\ P_{i+1,j} \\ P_{i,j+1} \\ P_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \quad (18.3.2)$$

对于边界上的点, 不难仿曲线切割磨光法来确定. 易知交叉切割一次, 则控制多面体顶点便加密一倍.

#### 算法 18.3.3 (平行线切割磨光法)

假设原始的控制多面体, 其每一小单元(空间多边形)均为平面, 则按前面介绍的算法作切割磨光, 所得到的加密控制多面体的每一单元不一定仍是平面, 这在某些应用和计算机图形算法中会产生问题. 现提出一个用平行于小单元棱边的平面去作切割的方法, 可保证当原始控制多面体由平面片组成时, 由该法获得的加密单元仍是平面.

平行线切割磨光法可按先行向后列向交叉切割来实现. 不失一般性, 我们仅考虑原始多面体为开多面体的情形. 设控制多面体点列为  $\{P_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M\}$ , 取  $\{P_{ij}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, P_{i+1,j}\}$  为一小单元, 先作行向切割(见图 18.3.3):

$$\begin{cases} Q_{2i,j} = (1 - \tau_{ij}^1)P_{ij} + \tau_{ij}^1 P_{i+1,j}, \\ Q_{2i+1,j} = \sigma_{i+1,j}^1 P_{ij} + (1 - \sigma_{i+1,j}^1)P_{i+1,j}, & i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, M. \\ Q_{1j} = P_{1j}, \quad Q_{2N,j} = P_{Nj}, \end{cases} \quad (18.3.3)$$

对于  $Q_{ij} (i = 1, \dots, 2N; j = 1, \dots, M)$  再作列向切割磨光(见图 18.3.4):

$$\begin{cases} P_{i,2j}^1 = (1 - \mu_{ij}^1)Q_{ij} + \mu_{ij}^1 Q_{i,j+1}, \\ P_{i,2j+1}^1 = \lambda_{i,j+1}^1 Q_{ij} + (1 - \lambda_{i,j+1}^1)Q_{i,j+1}, & i = 1, 2, \dots, 2N; j = 1, 2, \dots, M-1. \\ P_{i,1}^1 = Q_{i,1}, \quad P_{i,2M}^1 = Q_{iM}, \end{cases} \quad (18.3.4)$$

这样, 由  $P_{ij} (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M)$ ,  $\tau_{ij}^1, \sigma_{i+1,j}^1 (i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, M)$  和  $\mu_{ij}^1, \lambda_{i,j+1}^1 (i = 1, 2, \dots, 2N; j = 1, 2, \dots, M-1)$  即可得  $P_{ij}^1 (i = 1, 2, \dots, 2N; j = 1, 2, \dots, 2M)$ .

一般来说, 向量  $Q_{2i,j}, Q_{2i,j+1}$  并不与棱边  $P_{i,j}, P_{i,j+1}$  平行. 为了得到棱边两侧的平行线, 从而使得四边形  $Q_{2i,j}, Q_{2i,j+1}, Q_{2i-1,j+1}, Q_{2i-1,j}$  构成平行于棱边的平面, 切割参数  $\tau_{ij}^1, \sigma_{ij}^1$  需满足一定的约束条件. 对于参数  $\mu_{ij}^1, \lambda_{ij}^1$  也类似. 下面给出递推关系来决定它们的算法.

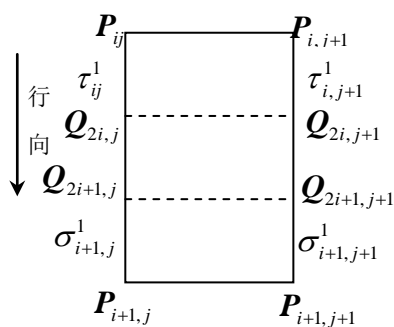


图 18.3.3 行向切割

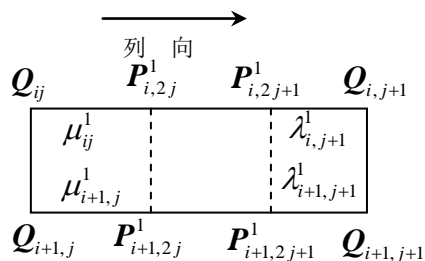


图 18.3.4 列向切割

第一步, 选取  $\sigma, \tau, \lambda, \mu$  的适当值.

第二步, 令  $\sigma_{i+1,1}^1 = \sigma, \tau_{i1}^1 = \tau$ , 由约束条件

$$(Q_{2i,j+1} - Q_{2i,j}) // (P_{i,j+1} - P_{ij}), (Q_{2i+1,j+1} - Q_{2i+1,j}) // (P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}),$$

得到

$$\begin{cases} \tau_{i,j+1}^1 = \left\{ \left\| (P_{i+1,j} - P_{ij}) \times (P_{i,j+1} - P_{ij}) \right\| / \left\| (P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}) \times (P_{i,j+1} - P_{ij}) \right\| \right\} \tau_{ij}^1, \\ \sigma_{i+1,j+1}^1 = \left\{ \left\| (P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}) \times (P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}) \right\| / \left\| (P_{i+1,j} - P_{ij}) \times (P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}) \right\| \right\} \sigma_{i+1,j}^1, \\ j = 1, 2, \dots, M-1. \end{cases} \quad (18.3.5)$$

于是由此递推关系可定出所有的  $\tau_{ij}^1, \sigma_{ij}^1$ .

第三步, 令  $\lambda_{1,j+1}^1 = \lambda, \mu_{1,j}^1 = \mu$ , 由约束条件

$$(P_{i+1,2j}^1 - P_{i,2j}^1) // (Q_{i+1,j} - Q_{ij}), (P_{i+1,2j+1}^1 - P_{i,2j+1}^1) // (Q_{i+1,j+1} - Q_{i,j+1}),$$

得到

$$\begin{cases} \mu_{i+1,j}^1 = \left\{ \left\| (Q_{i,j+1} - Q_{ij}) \times (Q_{i+1,j} - Q_{ij}) \right\| / \left\| (Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j}) \times (Q_{i+1,j} - Q_{ij}) \right\| \right\} \mu_{ij}^1, \\ \lambda_{i+1,j+1}^1 = \left\{ \left\| (Q_{i,j+1} - Q_{ij}) \times (Q_{i+1,j+1} - Q_{i,j+1}) \right\| / \left\| (Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j}) \times (Q_{i+1,j+1} - Q_{i,j+1}) \right\| \right\} \lambda_{i,j+1}^1, \\ i = 1, 2, \dots, 2N-1. \end{cases} \quad (18.3.6)$$

由此可递推定出所有的  $\mu_{ij}^1, \lambda_{i,j+1}^1$ .

图 18.3.5 是平行线切割磨光法在  $3 \times 3$  网格  $\{P_{ij} \mid i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\}$  上作用一次的结果. 当原网格小单元均为平面时, 则对应于每一单元的新四边形 (如  $P_{22}^1 P_{23}^1 P_{33}^1 P_{32}^1$ ) 仍位于原单元上, 从而也是平面; 对于跨越棱边的四边形, 如  $P_{32}^1 P_{33}^1 P_{43}^1 P_{42}^1$ , 由于边  $P_{32}^1 P_{33}^1$  与  $P_{42}^1 P_{43}^1$  平行, 所以它是平面四边形; 同样, 由于  $P_{23}^1 P_{33}^1$  与  $P_{24}^1 P_{34}^1$  平行, 所以  $P_{23}^1 P_{24}^1 P_{34}^1 P_{33}^1$  是平面四边

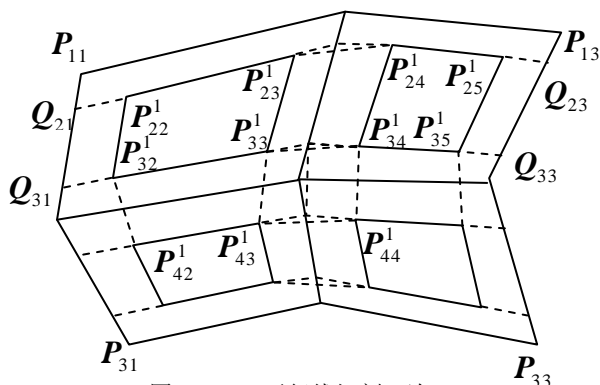


图 18.3.5 平行线切割一次

形; 至于对应于顶点  $P_{22}$  的四边形  $P_{33}^1 P_{34}^1 P_{44}^1 P_{43}^1$ , 由于  $P_{33}^1 P_{43}^1$  平行于  $P_{34}^1 P_{44}^1$ , 所以也是平面四边形. 因此, 所得到的加密控制多面体的每个小单元都为平面片. 上述切割过程进行  $k$  次, 即得到离散曲面的点列.

**算法 18.3.4** (仿射标架切割磨光法)

对于控制多面体中每一个顶点  $P_{ij}$ ，赋予四个切割参数  $\lambda_{ij}^1, \mu_{ij}^1, \tau_{ij}^1$  和  $\sigma_{ij}^1$ ，满足  $\lambda_{ij}^1, \mu_{ij}^1, \tau_{ij}^1, \sigma_{ij}^1 > 0$ ， $\lambda_{i+1,j}^1 + \mu_{ij}^1 < 1$ ， $\tau_{i,j+1}^1 + \sigma_{ij}^1 < 1$ ；其中下标是这样规定的：若  $i$  超越范围，则取  $\max(1, \min(N, i))$  代替之；对  $j$  也类似规定。

曲面的切割磨光就是对控制顶点的加密，而这种加密由下面方式给出（参见图 18.3.6）：

$$\begin{cases} P_{2i-1,2j-1}^1 = P_{ij} + \lambda_{ij}^1(P_{i,j-1} - P_{ij}) + \tau_{ij}^1(P_{i-1,j} - P_{ij}), \\ P_{2i-1,2j}^1 = P_{ij} + \mu_{ij}^1(P_{i,j+1} - P_{ij}) + \tau_{ij}^1(P_{i-1,j} - P_{ij}), \\ P_{2i,2j-1}^1 = P_{ij} + \lambda_{ij}^1(P_{i,j-1} - P_{ij}) + \sigma_{ij}^1(P_{i+1,j} - P_{ij}), \\ P_{2i,2j}^1 = P_{ij} + \mu_{ij}^1(P_{i,j+1} - P_{ij}) + \sigma_{ij}^1(P_{i+1,j} - P_{ij}). \end{cases} \quad (18.3.7)$$

在几何上，控制网格上的一个顶点和由此点出发的相邻两条边组成一个仿射标架，新顶点就是在这个标架上的一个点。如  $P_{2i,2j}^1$  是仿射标架  $\{P_{ij}; P_{ij}P_{i,j+1}, P_{ij}P_{i+1,j}\}$  中由切割分比  $(\mu_{ij}^1, \sigma_{ij}^1)$  所决定的点， $(\mu_{ij}^1, \sigma_{ij}^1)$  是其仿射坐标。因此这种方法称为仿射标架切割磨光法。可以看出，每一个新顶点仅与原网格中三个顶点有关，因此该方法计算简单。将上述过程重复进行，即可得到离散曲面的加密点列。

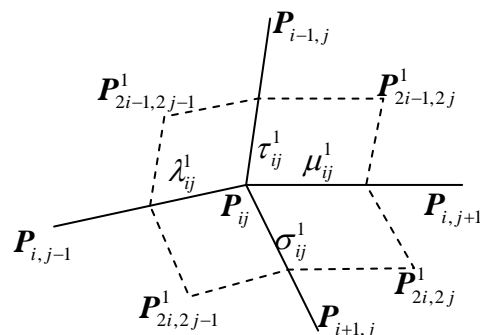


图 18.3.6 顶点加密

上面四种切割磨光算法都是利用原控制网格来构造新的控制网格。切割算法可看作由一个切割算子作用到矩形拓扑网格上，产生一个新的密化的矩形网格的过程。因此这个过程可以一直继续下去，在一定条件下，当切割次数趋于无限时，加密的矩形网格收敛到一个曲面，这个曲面就是切割（磨光）曲面。

## 18.4 切割磨光曲面造型的技巧和性质

### 18.4.1 切割磨光的技巧

上节介绍的四种切割磨光方法都是曲线切割磨光方法在矩形拓扑网格上的推广，因此，切割磨光曲面也有一系列类似于 § 18.2 中介绍的切割曲线的性质。例如：

- (1) 凸包性：切割生成曲面在其控制多面体的凸包内。特别，当控制多面体的各顶点重合为一点时，切割生成的曲面也缩为一点。
- (2) 局部性：变动控制多面体的一个顶点，则切割生成曲面仅在此顶点附近改变。
- (3) 插值性：当控制多面体的某一拓扑矩形面（即空间四边形）重合为一点时，则此点在切割曲面上。

显然，切割曲面的形状完全由初始控制多面体和切割磨光方法所决定，而切割磨光方法依赖于分比或切割系数。由于顶点位置和切割系数具有明显的几何意义，因此对于外形设计而言，我们既可通过采取合适的切割分比  $\lambda_{ij}^k, \mu_{ij}^k, \tau_{ij}^k$  和  $\sigma_{ij}^k$ ，又可通过选取适当的初始控制多面体，来得到理想的曲面。必要时还可通过人机交互，变动以上输入信息，不断调整输出曲面的形状，直至满意为止。就切割系数而言，当  $\lambda_{ij}^k, \mu_{ij}^k, \tau_{ij}^k, \sigma_{ij}^k$  取值较小，则切割曲面逼近控制多面体的程度较好，但光顺性较差；反之，曲面感较强，但逼近控制多面体的程度较差。就控制顶点而言，在切割磨光法中可灵活运用重顶点、共线顶点或共面顶点等技巧来设计控制多面体，以得到具有某些特征的切割曲面。例如：

- (1) 当控制多面体有两组或两组以上相邻的顶点（或每组的一部分）重合，且此组顶点的左右两组顶点与其不共面，则生成的曲面为折角曲面，即含有一条棱边。
- (2) 当控制多面体有三组以上相邻顶点（每组含有三个以上的顶点）共面时，将得到一小块平面。当控制多面体有四组以上相邻顶点（每组含有四个以上的顶点）共面时，将至少得到以中间四个顶点为角点的一小块平面。

### 18.4.2 切割磨光曲面的收敛性

对于离散造型方法来说, 极限曲面的收敛性、连续性是十分重要的. 在实际设计过程中, 切割参数经常在切割磨光若干次后被设定为常数. 下面我们以仿射标架切割磨光法为例来讨论切割曲面的性质, 并假设切割参数不依赖于切割次数和控制点的序号.

设切割参数  $\lambda_{ij}^k \equiv \lambda$ ,  $\mu_{ij}^k \equiv \mu$ ,  $\sigma_{ij}^k \equiv \sigma$ ,  $\tau_{ij}^k \equiv \tau$ . 记由初始二维点列  $\{P_{ij} | i=1, \dots, N; j=1, \dots, M\}$  所组成的矩形控制网格为  $\Gamma^{(0)}$ , 切割  $k$  次后产生的点列  $\{P_{ij}^{(k)} | i=1, \dots, 2^k N; j=1, \dots, 2^k M\}$  所组成的网格为  $\Gamma^{(k)}$ . 于是有:

**定理 18.4.1** 当参数  $\lambda, \mu, \sigma, \tau > 0$  且  $\lambda + \mu < 1$ ,  $\sigma + \tau < 1$  时, 由仿射标架切割磨光法产生的矩形控制网格序列  $\{\Gamma^{(k)}\}$  收敛到一个连续曲面.

证 先对每一个控制网格  $\Gamma^{(k)}$ , 赋予其中每一个顶点  $P_{ij}^{(k)}$  以一对参数

$$(u_i^{(k)}, v_j^{(k)}) = \left( \frac{i-1}{2^k N - 1}, \frac{j-1}{2^k M - 1} \right), \text{ 并}$$

将  $\Gamma^{(k)}$  表示成逐片线性参数形式, 其中每一个空间四边形由两个三角片组成 (见图 18.4.1), 可表为

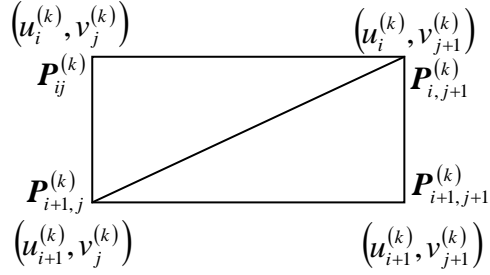


图 18.4.1 两个三角片表示一个单元

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma^{(k)}(u, v) &= P_{ij}^{(k)} - \frac{u - u_i^{(k)}}{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}} (P_{i+1,j}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}) + \frac{v - v_j^{(k)}}{v_{j+1}^{(k)} - v_j^{(k)}} (P_{i,j+1}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}), \\ &\quad v_j^{(k)} \leq v \leq v_{j+1}^{(k)}, u_i^{(k)} \leq u \leq u_{i+1}^{(k)} - \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}{v_{j+1}^{(k)} - v_j^{(k)}} (v - v_{j+1}^{(k)}), \\ \Gamma^{(k)}(u, v) &= P_{i+1,j+1}^{(k)} + \frac{u_{i+1}^{(k)} - u}{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}} (P_{i,j+1}^{(k)} - P_{i+1,j+1}^{(k)}) + \frac{v_{j+1}^{(k)} - v}{v_{j+1}^{(k)} - v_j^{(k)}} (P_{i+1,j}^{(k)} - P_{i+1,j+1}^{(k)}), \\ &\quad v_j^{(k)} \leq v \leq v_{j+1}^{(k)}, u_i^{(k)} - \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}{v_{j+1}^{(k)} - v_j^{(k)}} (v - v_{j+1}^{(k)}) \leq u \leq u_{i+1}^{(k)}. \end{aligned} \right. \quad (18.4.1)$$

于是每一个  $\Gamma^{(k)}(u, v)$  是定义在  $[0, 1] \otimes [0, 1]$  上的连续曲面.

考察  $\Gamma^{(k+h)}(u, v)$  和  $\Gamma^{(k)}(u, v)$ . 当  $(u, v) \in [u_{2^h i}^{(k+h)}, u_{2^h(i+1)}^{(k+h)}] \otimes [v_{2^h j}^{(k+h)}, v_{2^h(j+1)}^{(k+h)}]$  时,  $\Gamma^{(k)}(u, v)$  为  $\{P_{i+r,j+l}^{(k)}\}_{r=0,1,2}^{l=0,1,2}$  中某三点的凸组合,  $\Gamma^{(k+h)}(u, v)$  为  $\{P_{2^h i+r, 2^h j+l}^{(k+h)}\}_{r=0, \dots, 2^h}^{l=0, \dots, 2^h}$  中某三点的凸组合. 而

由仿射标架切割磨光法可知,  $P_{2^h i+r, 2^h j+l}^{(k+h)}$  能表成点集  $\{P_{i+r,j+l}^{(k)}\}_{r=0,1,2}^{l=0,1,2}$  的凸组合. 所以  $\Gamma^{(k+h)}(u, v)$  也可表示为  $\{P_{i+r,j+l}^{(k)}\}_{r=0,1,2}^{l=0,1,2}$  的凸组合. 记

$$M_{ij}^{(k)} = \max_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq l \leq 2}} \{\|P_{i+r,j+l}^{(k)}\|\}, \quad m_{ij}^{(k)} = \min_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq l \leq 2}} \{\|P_{i+r,j+l}^{(k)}\|\}, \quad (18.4.2)$$

$$\Delta_1 P_{ij}^{(k)} = P_{i+1,j}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}, \quad \Delta_2 P_{ij}^{(k)} = P_{i,j+1}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}, \quad (18.4.3)$$

$$\Delta^{(k)} = \max_{i,j} \{\|\Delta_1 P_{ij}^{(k)}\|, \|\Delta_2 P_{ij}^{(k)}\|\}, \quad (18.4.4)$$

$$\nabla^{(k)} = \max_{i,j} \|P_{i+1,j+1}^{(k)} - P_{i+1,j}^{(k)} - P_{i,j+1}^{(k)} + P_{ij}^{(k)}\|, \quad (18.4.5)$$

则有

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(k)} - m_{ij}^{(k)} &\leq 2 \left( \max_{i,j} \|\Delta_1 P_{ij}^{(k)}\| + \max_{i,j} \|\Delta_2 P_{ij}^{(k)}\| \right) \leq 4\Delta^{(k)}, \\ \max_{0 \leq u, v \leq 1} \|\Gamma^{(k+h)}(u, v) - \Gamma^{(k)}(u, v)\| &\leq \max_{i,j} |M_{ij}^{(k)} - m_{ij}^{(k)}| \leq 4\Delta^{(k)}. \end{aligned} \quad (18.4.6)$$

设

$$\begin{aligned} B &= \max\{\mu + \lambda, \tau + \sigma, 1 - \lambda - \mu, 1 - \tau - \sigma\}, \\ C &= \max\{\mu + \lambda, \tau + \sigma, |1 - \lambda - \mu - \tau - \sigma|\}, \end{aligned}$$

则  $0 < B, C < 1$ , 并且可推得:  $\Delta^{(k)} \leq B\Delta^{(k-1)} + B\nabla^{(k-1)}$ ,  $\nabla^{(k)} \leq C\nabla^{(k-1)}$ . 于是有

$$\Delta^{(k)} \leq B^k \Delta^{(0)} + (B^{k-1} + B^{k-2}C + \cdots + BC^{k-1} + C^{k-1})B\nabla^{(0)}.$$

当  $B < C$  时, 有  $\Delta^{(k)} \leq B^k \Delta^{(0)} + (BC^k / (C - B))\nabla^{(0)}$ ; 当  $B > C$  时, 有  $\Delta^{(k)} \leq B^k \Delta^{(0)} + (B^{k+1} / (B - C))\nabla^{(0)}$ . 所以由(18.4.6)可知对任意正整数  $h$  和任意  $(u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]$ , 均有  $\max_{0 \leq u, v \leq 1} \|\Gamma^{(k+h)}(u, v) - \Gamma^{(k)}(u, v)\| \leq 4(B^k \Delta^{(0)} + \max\{BC^k / (C - B), B^{k+1} / (B - C)\}\nabla^{(0)})$ . 但是当  $k \rightarrow +\infty$  时, 有  $B^k \rightarrow 0$ ,  $C^k \rightarrow 0$ . 这意味着  $\Gamma^{(k)}(u, v)$  一致收敛, 所以  $\Gamma^{(k)}$  收敛到一个连续曲面. 证毕.

进一步还有:

**定理 18.4.2** 如果切割参数满足:  $\lambda, \mu, \sigma, \tau > 0$ ,  $\lambda + \mu < 1$ ,  $\sigma + \tau < 1$ , 则对任给的一个初始网格  $\Gamma^{(0)}$ , 由下式定义的点必在由仿射标架切割磨光法产生的极限曲面上:

$$P_{ij}^* = \frac{\tau\lambda P_{ij}^{(0)} + \tau\mu P_{i,j+1}^{(0)} + \sigma\lambda P_{i+1,j}^{(0)} + \sigma\mu P_{i+1,j+1}^{(0)}}{(\tau + \sigma)(\lambda + \mu)}, \quad i = 1, \dots, N-1; j = 1, \dots, M-1. \quad (18.4.7)$$

证 由切割曲面的局部性质可知, 我们只需讨论控制网格中的一个单元(空间四边形). 设

$$\mathbf{F}_{ij}^{(k)} = (P_{ij}^{(k)}, P_{i,j+1}^{(k)}, P_{i+1,j}^{(k)}, P_{i+1,j+1}^{(k)})^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18.4.8)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{ij}^{(k)} = (P_{i,j+1}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}, P_{i+1,j+1}^{(k)} - P_{i,j+1}^{(k)}, P_{i+1,j}^{(k)} - P_{i+1,j+1}^{(k)}, P_{ij}^{(k)} - P_{i+1,j}^{(k)})^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18.4.9)$$

则由切割磨光法可得

$$\Delta \mathbf{F}_{ij}^{(k)} = \mathbf{C} \mathbf{F}_{ij}^{(k)}, \quad (18.4.10)$$

$$\mathbf{F}_{2^{k+1}i, 2^{k+1}j}^{(k+1)} = \mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}, \quad (18.4.11)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & -\sigma \\ -\lambda & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \tau \end{pmatrix}. \quad (18.4.12)$$

于是  $\Delta \mathbf{F}_{2^{k+1}i, 2^{k+1}j}^{(k+1)} = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$ , 其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \mathbf{C} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \mu - \lambda & \sigma & 0 & \sigma \\ \lambda & 1 - \sigma - \tau & \lambda & 0 \\ 0 & \tau & 1 - \mu - \lambda & \tau \\ \mu & 0 & \mu & 1 - \sigma - \tau \end{pmatrix}, \quad (18.4.13)$$

$\mathbf{I}$  为单位阵. 将  $\mathbf{B}$  分解成对角形式

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}, \quad (18.4.14)$$

这里

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda-\mu-\sigma-\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sigma-\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\tau} & -\frac{\sigma(\lambda+\mu)}{\mu(\sigma+\tau)} & -1 & 0 \\ \frac{\lambda}{\tau} & \frac{\lambda}{\mu} & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\tau(\lambda+\mu)}{\mu(\sigma+\tau)} & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\tau} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.4.15)$$

因此

$$\mathbf{F}_{2^{k+1}i, 2^{k+1}j}^{(k+1)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{AT} \left( \sum_{n=0}^k \mathbf{D}^n \right) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \right) \mathbf{F}_{ij}^{(0)}. \quad (18.4.16)$$

从而当  $k \rightarrow +\infty$  时, 有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{F}_{2^{k+1}i, 2^{k+1}j}^{(k+1)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{AT} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \mathbf{D}^n \right) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \right) \mathbf{F}_{ij}^{(0)} = \frac{1}{(\sigma+\tau)(\lambda+\mu)} \begin{pmatrix} \tau\lambda & \tau\mu & \sigma\mu & \sigma\lambda \\ \tau\lambda & \tau\mu & \sigma\mu & \sigma\lambda \\ \tau\lambda & \tau\mu & \sigma\mu & \sigma\lambda \\ \tau\lambda & \tau\mu & \sigma\mu & \sigma\lambda \end{pmatrix} \mathbf{F}_{ij}^{(0)}.$$

由此可知, 以(18.4.7)表示的点  $\bar{\mathbf{P}}_{ij}$  位于切割曲面上. 证毕.

由上述定理的证明可以看出, (18.4.7)也适合于切割过程中产生的加密控制网格的空间四边形. 例如, 对于控制网格  $\mathbf{F}^{(k)}$ , 由下式定义的点落在切割曲面上:

$$\mathbf{P}_{ij}^{*(k)} = (\tau\lambda\mathbf{P}_{ij}^{(k)} + \tau\mu\mathbf{P}_{i,j+1}^{(k)} + \sigma\lambda\mathbf{P}_{i+1,j}^{(k)} + \sigma\mu\mathbf{P}_{i+1,j+1}^{(k)}) / ((\tau+\sigma)(\lambda+\mu)). \quad (18.4.17)$$

通常称点  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  为对应于  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  的收敛点. 特别当  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  为平面四边形时,  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  位于此平面上.

### 18.4.3 切割磨光曲面的光滑性

类似于 § 18.4.2, 这里也以仿射标架切割磨光法为例, 来讨论切割参数为常数的情况下极限曲面的光滑性. 假设初始控制网格为正则, 即其中每一个空间四边形的四点均不重合.

曲面的一阶几何连续 ( $G^1$ ) 是指切平面或法向连续. 由定理 18.4.2 或公式(18.4.17)可知, 对于控制网格  $\mathbf{F}^{(k)}$  中每一个空间四边形  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$ , 都有切割曲面上一点  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  与之对应. 通常  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  不一定为平面, 但它的四个顶点通过不同的组合可确定四个平面三角形, 这些三角形称为  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  的子三角形. 当  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  位于  $\mathbf{F}^{(k)}$  内部时, 其周围有八个空间四边形与其共享一条边或一个顶点. 因此在几何直观上, 切割曲面在收敛点  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  处为  $G^1$  当且仅当  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  及其周围八个空间四边形的所有子三角形的法向都收敛到同一方向. 注意到切割曲面在  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  的任一收敛点  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  处为  $G^1$  是否等价于曲面处处为  $G^1$  还有待于理论上严格证明, 下面引入曲面拟  $G^1$  连续的概念. **定义 18.4.1** 切割曲面称为拟  $G^1$  连续, 如果对于任一个控制网格  $\mathbf{F}^{(k)}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) 的任一个空间四边形  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$ , 它在  $\mathbf{F}_{ij}^{(k)}$  所对应的收敛点  $\mathbf{P}_{ij}^{*(k)}$  处为  $G^1$  连续.

显然, 切割曲面若为拟  $G^1$ , 则它必在无穷多个点处为  $G^1$ . 下面给出它为拟  $G^1$  的条件.

**定理 18.4.3** 对于任意正则的初始控制网格, 切割曲面为拟  $G^1$  的充要条件是:

$$(1) (\lambda, \mu), (\tau, \sigma) \in \Omega_1, \quad (18.4.18)$$

$$(2) (R, r) = (\lambda + \mu, \sigma + \tau) \in \Omega_2, \quad (18.4.19)$$

其中(参见图 18.4.2)

$$\Omega_1 = \{(x, y) | 0 < x, y < 1, x+2y \leq 1, y+2x \leq 1\}; \quad (18.4.20)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | 0 < x, y < 1, x < 2(1-y), y < 2(1-x)\}; \quad (18.4.21)$$

证 由切割曲面的局部性和切割磨光法的循环迭代特征易知, 我们只需讨论曲面在对应于  $\mathbf{F}_{ij}^{(0)}$  的收敛点  $\mathbf{P}_{ij}^*$  处

为  $G^1$  的条件. 考察  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  及其周围八个四边形 (参见图 18.4.3), 称与  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  共

享一条边的四边形为  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  的边面; 称与

$\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  仅共有一个顶点的四边形为  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  的点面. 由于切割参数均为常数, 容易验证当  $k \geq 1$  时,  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  的点面都是平行四边形. 因此关于  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  及其周围八个四边形的所有子三角形的法向收敛情况, 只需讨论  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  及四个边面的子三角形的法向即可.

先考察四边形  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  和  $\mathbf{F}_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)}$ . 定义

$$\begin{aligned} n_1^{(k)} &= \frac{(\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)})}{\|(\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)})\|}, \\ n_2^{(k)} &= \frac{(\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)})}{\|(\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)})\|}, \\ n_3^{(k)} &= \frac{(\mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)})}{\|(\mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)})\|}, \\ n_4^{(k)} &= \frac{(\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)})}{\|(\mathbf{P}_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}) \times (\mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)})\|}. \end{aligned}$$

显然,  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  的四个子三角形的法向和  $\mathbf{F}_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)}$  的四个子三角形的法向收敛于同一方向当且仅当

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} n_1^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_2^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_3^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_4^{(k)}. \quad (18.4.22)$$

记  $\Delta \mathbf{S}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} = (\mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}, \mathbf{P}_{2^k i-1, 2^k j+1}^{(k)} - \mathbf{P}_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)})^T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 则得

$$\Delta \mathbf{S}_{2^{k+1} i, 2^{k+1} j}^{(k+1)} = \tau \Delta \mathbf{S}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} + \sigma \mathbf{J} \Delta \mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}, \quad \text{其中} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用 (18.4.15) 得到  $\Delta \mathbf{S}_{2^{k+1} i, 2^{k+1} j}^{(k+1)} = \tau^{k+1} \Delta \mathbf{S}_{ij}^{(0)} + \sigma \mathbf{J} \mathbf{T} \left( \sum_{n=0}^k \tau^n \mathbf{D}^{k-n} \right) \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{ij}^{(0)}$ . 记

$$\mathbf{D}_\tau = \sum_{n=0}^k \tau^n \mathbf{D}^{k-n} = \text{diag} \left( \frac{1-\tau^{k+1}}{1-\tau}, \frac{(1-R-r)^{k+1} - \tau^{k+1}}{1-R-r-\tau}, \frac{(1-R)^{k+1} - \tau^{k+1}}{1-R-\tau}, \frac{(1-r)^{k+1} - \tau^{k+1}}{1-r-\tau} \right),$$

则有

$$\Delta \mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} = \mathbf{T} \mathbf{D}^k \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{ij}^{(0)}, \quad (18.4.23)$$

$$\Delta \mathbf{S}_{2^k i, 2^k j}^{(k)} = \tau^k \Delta \mathbf{S}_{ij}^{(0)} + \sigma \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{D}_\tau \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{ij}^{(0)}. \quad (18.4.24)$$

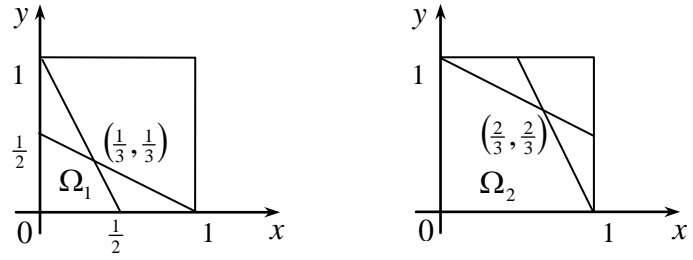


图 18.4.2 区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$

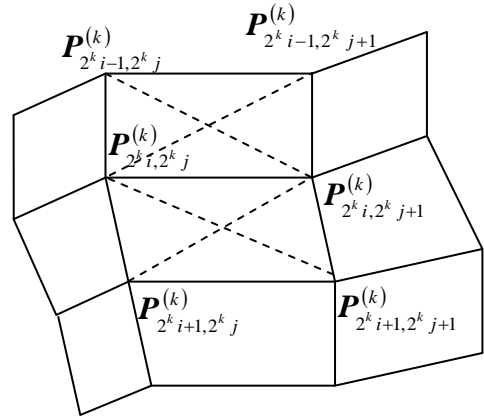


图 18.4.3  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  及其周围八个四边形



下面讨论 (18.4.22) 成立的条件.

$$(1) |1-r| < |1-r-R| \quad \text{或} \quad |1-R| < |1-r-R|.$$

当  $|1-r| < |1-r-R|$  时, 由 (18.4.23) 得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i+1, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} \right) / (1-r-R)^k &= (\lambda/R) \cdot (P_{i+1, j+1}^{(0)} - P_{i, j+1}^{(0)} - P_{i+1, j}^{(0)} + P_{ij}^{(0)}), \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i, 2^k j}^{(k)} - P_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} \right) / (1-r-R)^k &= (\mu/R) \cdot (P_{i+1, j+1}^{(0)} - P_{i, j+1}^{(0)} - P_{i+1, j}^{(0)} + P_{ij}^{(0)}). \end{aligned}$$

由于这两个方向一致, 易知 (18.4.22) 一般不成立. 同理当  $|1-R| < |1-r-R|$  时亦然.

$$(2) |1-r| = |1-r-R| \quad \text{或} \quad |1-R| = |1-r-R|.$$

当  $|1-r| = |1-r-R|$  时, 仍由 (18.4.23) 得

$$\begin{aligned} P_{2^{2k} i+1, 2^{2k} j+1}^{(2k)} - P_{2^{2k} i, 2^{2k} j+1}^{(2k)} &= (1-r)^{2k} (P_{i+1, j+1}^{(0)} - P_{i, j+1}^{(0)}), \\ P_{2^{2k} i, 2^{2k} j}^{(2k)} - P_{2^{2k} i+1, 2^{2k} j}^{(2k)} &= (1-r)^{2k} (P_{ij}^{(0)} - P_{i+1, j}^{(0)}). \end{aligned}$$

于是经简单计算知 (18.4.22) 一般不成立. 当  $|1-R| = |1-r-R|$  时情况亦然.

$$(3) \tau > 1-r > |1-r-R|.$$

从 (18.4.24) 可知, 此时  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_3^{(k)}$  和  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_4^{(k)}$  均和  $\Delta S_{i,j}^{(0)}$  有关, 而  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_1^{(k)}$  和  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_2^{(k)}$  均与  $\Delta S_{i,j}^{(0)}$  无关, 所以一般 (18.4.22) 不成立.

$$(4) \tau \leq 1-r, \quad |1-r| > |1-r-R|, \quad |1-R| > |1-r-R|.$$

此时令

$$\begin{cases} T_{ij}^1 = \tau(P_{i, j+1}^{(0)} - P_{ij}^{(0)}) - \sigma(P_{i+1, j}^{(0)} - P_{i+1, j+1}^{(0)}), \\ T_{ij}^2 = \mu(P_{i+1, j+1}^{(0)} - P_{i, j+1}^{(0)}) - \lambda(P_{ij}^{(0)} - P_{i+1, j}^{(0)}), \end{cases} \quad (18.4.25)$$

由 (18.4.23) 可知

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j}^{(k)} \right) / (1-R)^k &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i+1, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} \right) / (1-R)^k = T_{ij}^1 / r, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i+1, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} \right) / (1-r)^k &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i+1, 2^k j}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j}^{(k)} \right) / (1-r)^k = T_{ij}^2 / R; \end{aligned}$$

又由 (18.4.24) 可知, 当  $\tau < 1-r$  时有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j}^{(k)} \right) / (1-r)^k &= -T_{ij}^2 / (R(1-r-\tau)), \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i-1, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} \right) / (1-r)^k &= -T_{ij}^2 / (R(1-r-\tau)); \end{aligned}$$

而当  $\tau = 1-r$  时有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i-1, 2^k j}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j}^{(k)} \right) / (k(1-r)^{k-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( P_{2^k i-1, 2^k j+1}^{(k)} - P_{2^k i, 2^k j+1}^{(k)} \right) / (k(1-r)^{k-1}) = -T_{ij}^2 / R.$$

所以在上述情况下, (18.4.22) 成立, 而且法向的极限为  $T_{ij}^1 \times T_{ij}^2 / \|T_{ij}^1 \times T_{ij}^2\|$ .

至于四边形  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  与其余三个边面的情形可作类似分析. 由对称性可知,  $\mathbf{F}_{2^k i, 2^k j}^{(k)}$  及其周围四边形的子三角形的法向收敛到同一法向当且仅当 (18.4.18) 和 (18.4.19) 成立. 证毕.

从定理的证明过程, 还可得到:

**定理 18.4.4** 如果切割参数满足 (18.4.18) 和 (18.4.19), 则对于正则初始控制网格  $\Gamma^{(0)}$  的任一个四边形  $\{P_{ij}^{(0)}, P_{i, j+1}^{(0)}, P_{i+1, j+1}^{(0)}, P_{i+1, j}^{(0)}\}$ , 切割曲面在对应于该四边形的收敛点  $P_{ij}^* = (\tau \lambda P_{i, j}^{(0)} + \tau \mu P_{i, j+1}^{(0)} + \sigma \lambda P_{i+1, j}^{(0)} + \sigma \mu P_{i+1, j+1}^{(0)}) / ((\tau + \sigma)(\lambda + \mu))$  处的单位法向量为  $n(P_{ij}^*) = T_{ij}^1 \times T_{ij}^2 / \|T_{ij}^1 \times T_{ij}^2\|$ . 其中  $T_{ij}^1$  和  $T_{ij}^2$  由 (18.4.25) 定义.

显然, 当四边形  $\{P_{ij}^{(0)}, P_{i,j+1}^{(0)}, P_{i+1,j+1}^{(0)}, P_{i+1,j}^{(0)}\}$  为一个平面四边形时, 单位法向量  $n(P_{ij}^*)$  也就是该平面的法向量, 因而切割曲面在此点相切于该平面.

至此, 我们给出了切割磨光曲面的收敛性和光滑性条件. 并且, 定理 18.4.2 和定理 18.4.4 还提供了计算切割曲面上一个点以及曲面在该点处法向的公式. 这对于应用而言, 如计算机图形学中的浓淡处理, 都是十分有意义的.

## 18.5 任意拓扑网络的切割磨光法

在 CAGD 中, 不仅需要矩形域上的自由曲面造型方法, 而且还需要任意拓扑网络上的曲面造型方法. 这是因为在各种外形设计、实验模型和机械零件中存在着很多非矩形区域上的曲面构造问题. 对于任意拓扑网络来说, 传统的张量积方法已不适用, 必须探求新的工具和方法.

### 18.5.1 原理和方法

正如 § 18.4 中所指出的, 曲面离散构造的过程即为离散点逐步加密的过程. 一般来说, 曲面的切割磨光过程包括两个方面: 离散曲面中几何点的产生和新几何点之间的拓扑关系的建立. 对于矩形拓扑网络来说, 其拓扑结构比较简单, 离散点之间的关系可简单地用一个二维数组来表示; 然而, 对于一般拓扑网络而言, 其拓扑关系的建立和表示往往非常复杂. 这也是造成在任意拓扑网络上造型十分困难的一个主要原因.

为简单起见, 这一节仅考虑封闭网络. 如果是开网络, 需再对其边界作适当处理. 所谓空间中的封闭网络是指由一系列顶点、边和面所组成的一个结构, 其中每个顶点在三维空间中有具体的位置; 每条边有两个顶点; 每个面由一个边环组成, 沿着边环, 前后边共享一个顶点; 每两个面共享一条边. 更进一步, 每个顶点都有几何点与之对应. 每条边可认为是连接两个顶点的直线段. 每个面上的边环可视作与单位圆周同胚. 面的几何信息没有精确指定, 可理解为位于由它的边所产生的凸包内. 对于每个顶点, 它的度数定义为以此顶点为一个端点的所有边的个数; 对于每个面, 定义它的度数为属于这个面的所有边的数目.

切割磨光方法是一些规则, 它作用到封闭网络上产生一个新的封闭网络, 而且它还可进一步作用到新的封闭网络上. 我们感兴趣的是那些能产生更密网络 (即有更多的顶点、边和面) 的切割磨光方法.

检查 § 18.3 中介绍的切割磨光方法, 只有仿射标架切割磨光法不依赖于顶点网络的矩形拓扑结构. 现在我们将它推广到任意拓扑网络上, 这包括如下两个步骤:

#### (1) 新几何点的产生

设  $f_n = \{P_i\}_{i=1}^n$  是拓扑结构  $G$  中度数为  $n$  的一个面. 类似于曲线切割磨光法, 给每条边  $P_i P_{i+1}$  赋予两个切割参数  $\mu_i, \lambda_{i+1}$ , 满足  $\mu_i, \lambda_{i+1} > 0$ ,  $\mu_i + \lambda_{i+1} < 1$ , 这里假定下标  $i$  关于  $n$  取模 (如果需要的话). 于是在面  $f_n$  上产生对应于原  $n$  个顶点的新点如下 (见图 18.5.1):

$$P_i^{(1)} = P_i + \lambda_i(P_{i-1} - P_i) + \mu_i(P_{i+1} - P_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (18.5.1)$$

对于每个面, 都产生相应的新点, 所有的新点组成新拓扑结构  $G^{(1)}$  的几何点.

#### (2) 拓扑结构 $G^{(1)}$ 的建立

$G^{(1)}$  的面分为三类:

- 新面 (NFF) —— 对于  $G$  中的任一个面, 把其对应的所有新几何点按该面原有点的顺序连接起来, 产生一个新面;
- 新边面 (NEF) —— 对于  $G$  中的任一条边, 连接“位于”相邻面中对应于其端点的两个新顶点, 再连接“位于”同一面中对应于该边两个端点的新顶点, 这

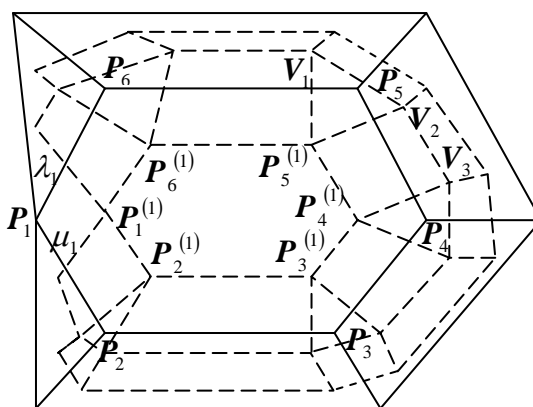


图 18.5.1 仿射标架切割磨光法

样产生一个新四边形面；

- 新点面 (NVF) —— 对于  $G$  中的任一个顶点，依次连接对应于该点的“位于”相邻面上的新顶点，从而也产生一个新面。

例如图 18.5.1 中， $\{P_i^{(1)}\}_{i=1}^6$  为新面， $\{P_4^{(1)}, P_5^{(1)}, V_2, V_3\}$  为新边面， $\{V_1, V_2, P_5^{(1)}\}$  为新点面。所有这三类面组成了拓扑关系  $G^{(1)}$ ，同样也可得到  $G^{(2)}, G^{(3)}, \dots$ 。如果切割次数  $k$  趋于无限时，序列  $\{G^{(k)}\}$  有极限，则称此极限为切割（磨光）曲面。

从上面的构造过程可以看出，在逐步切割磨光过程中，新点面的边数等于它所对应的点的度数；新边面总为矩形拓扑面；新面面与其对应的面具有相同的度数。第一次切割后，所有的新顶点的度数为 4。因此第一次切割后，非矩形拓扑面的个数在随后的切割过程中保持不变，它等于在初始网格中非矩形拓扑面的个数加上度数不为 4 的顶点的个数。显然，切割曲面的形状取决于初始控制网格和切割参数。设计人员可利用控制顶点来修改曲面形状，也可利用磨光参数调整曲面形状。这种切割曲面也具有凸包性、局部可调性等良好性质。

### 18.5.2 切割磨光曲面的光滑性

由于在切割过程中非矩形拓扑的面数保持不变，又由于切割曲面具有局部性，因此除有限个点以外，其余点处的光滑性可由 §18.4.3 中关于矩形拓扑网格切割磨光的光滑性条件给出。这里仅讨论在这有限个特殊点处的情况，并假设所有的切割参数为同一常数。

**引理 18.5.1** 循环矩阵

$$\mathbf{A} := \text{Cir}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad (18.5.2)$$

的特征根为  $\lambda_j = \sum_{i=1}^n a_i \omega_j^{i-1}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ；与  $\lambda_j$  相对应的特征向量为  $(1, \omega_j, \omega_j^2, \dots, \omega_j^{n-1})^T$ ，其中  $\omega_j = \cos(2(j-1)\pi/n)$  为  $z^n = 1$  的第  $j$  个根。

上述引理的证明可参见文献[34]。据此首先有

**定理 18.5.1** 对于任一拓扑网格  $G$  中的任一个面  $f = \{P_i\}_{i=1}^n$ ，当切割参数  $\mu \in (0, 1/2)$  时，点

$$P^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \text{ 落在切割曲面上。}$$

证 设  $f^{(k)} = \{P_i^{(k)}\}_{i=1}^n$  为  $f$  在第  $k$  次切割磨光后所对应的新面，参见图 18.5.2。如果记

$\mathbf{P}^{(k)} = (P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, \dots, P_n^{(k)})^T$ ，则得  $\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{(k)}$ ，其中

$$\mathbf{B} = \text{Cir}_n(1-2\mu, \mu, 0, \dots, 0, \mu). \quad (18.5.3)$$

构造矩阵  $\mathbf{W} = (1/\sqrt{n}) \cdot (\omega_j^{i-1})_{n \times n}$ ，由引理 18.5.1 得

$$\mathbf{B} = \overline{\mathbf{W}}^T \text{diag}(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) \mathbf{W}, \quad (18.5.4)$$

其中  $\lambda_i = 1 - 2\mu \sin^2(i\pi/n)$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ 。因  $\mathbf{W}$  为正交阵，其共轭转置阵  $\overline{\mathbf{W}}^T$  即逆阵  $\mathbf{W}^{-1}$ 。于是  $\mathbf{P}^{(k)} = \overline{\mathbf{W}}^T \text{diag}(1, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_{n-1}^k) \mathbf{W} \mathbf{P}^{(0)}$ 。所以当  $\mu \in (0, 1/2)$  时， $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^{(k)} = (P^*, P^*, \dots, P^*)^T$ 。证毕。

假设拓扑网格  $G$  是正则的，即  $G$  中各个顶点均不重合。关于切割曲面的光滑性，与 §18.4.3 中的讨论相似，我们将分析它的拟  $G^1$  连续性，即考察任一拓扑网格

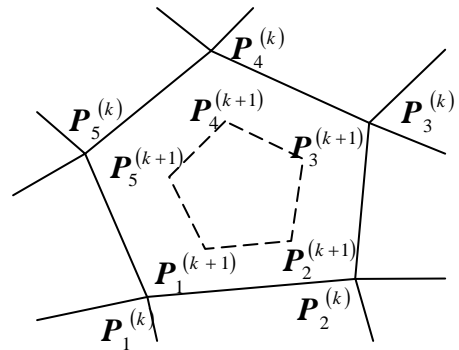


图 18.5.2 新面  $f^{(k+1)}$

$G^{(k)}$  中的任一个面  $f^{(k)}$ ，它和相邻的新边面、新点面的所有子三角形的法向是否收敛于同一方向。必须指出，对于非矩形拓扑的多边形面，其子三角形为所有连接相邻三顶点的三角形所组成的集合。

**定理 18.5.2** 对于任意正则拓扑网格  $G$ ，如果

- (1)  $G$  中非矩形拓扑面均为平面多边形；
- (2)  $G$  中任一顶点最多只与四边关联；

则切割曲面为拟  $G^1$  的充要条件是

$$0 < \mu \leq 1/(4\sin^2(\pi/n)+1), \quad (18.5.5)$$

其中  $\mu$  为切割参数， $n$  为  $G$  中所有面的度数和顶点度数的最小值。

证 注意到拓扑网格  $G$  的正则性和条件(2)， $n$  必等于 3 或 4。条件(2)同时也保证了第一次切割磨光后，新增加的非矩形面均为三角形。于是在随后的切割中非矩形面的数量不会增加，并且这些非矩形面均为平面多边形。

对于矩形面来说，由 § 18.4.3 中的结论可推知其为拟  $G^1$  的充要条件是  $\mu \in (0, 1/3)$ 。

对于非矩形面  $f^{(0)} = \{P_i^{(0)}\}_{i=1}^n$ ，我们不妨假设  $f^{(k)} = \{P_i^{(k)}\}_{i=1}^n$  为其经过  $k$  次切割磨光后所对应的新面。又记  $S_m^{(k)} = \{V_m^{(k)}, V_{m+1}^{(k)}, P_{m+1}^{(k)}, P_m^{(k)}\}$  为对应于边  $P_m^{(k-1)}P_{m+1}^{(k-1)}$  的新边面，参见图 18.5.3。容易验证，从第二次切割开始，每个新点面均为平行四边形，从而共面。令

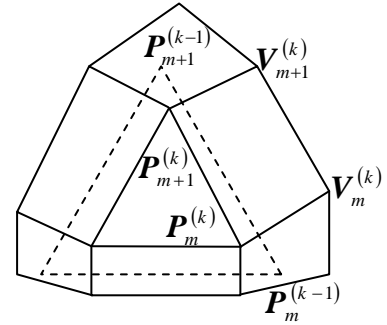


图 18.5.3 非矩形面和周围的面

$$\Delta V_m^{(k)} = (V_m^{(k)} - P_m^{(k)}, V_{m+1}^{(k)} - P_{m+1}^{(k)})^T, \quad (18.5.6)$$

$$\Delta F_n^{(k)} = (P_2^{(k)} - P_1^{(k)}, P_3^{(k)} - P_2^{(k)}, \dots, P_1^{(k)} - P_n^{(k)})^T, \quad (18.5.7)$$

则按(18.5.3)那样定义  $B$  以后，容易得到

$$\Delta F_n^{(k+1)} = B \Delta F_n^{(k)}, \quad (18.5.8)$$

$$\Delta V_m^{(k+1)} = \mu \Delta V_m^{(k)} + \mu (P_m^{(k)} - P_{m-1}^{(k)}, P_{m+1}^{(k)} - P_{m+2}^{(k)})^T = \mu \Delta V_m^{(k)} + \mu J_m \cdot \Delta F_n^{(k)}, \quad (18.5.9)$$

$$J = (J_{ij})_{2 \times n}, \quad J_{1j} = \begin{cases} 0, & j \neq m, \\ 1, & j = m, \end{cases} \quad J_{2j} = \begin{cases} 0, & j \neq m+2, \\ -1, & j = m+2. \end{cases} \quad (18.5.10)$$

于是通过递推可求出  $\Delta V_m^{(k+1)} = \mu^{k+1} \Delta V_m^{(0)} + \mu J_m \cdot \left( \sum_{i=0}^k \mu^i B^{k-i} \right) \Delta F_n^{(0)}$ 。注意到 (18.5.4)，可知

$\sum_{i=0}^k \mu^i B^{k-i} = \bar{W}^T \text{diag} \left( \frac{1-\mu^{k+1}}{1-\mu}, \frac{\lambda_1^{k+1}-\mu^{k+1}}{\lambda_1-\mu}, \dots, \frac{\lambda_{n-1}^{k+1}-\mu^{k+1}}{\lambda_{n-1}-\mu} \right) W$ 。由于  $\sum_{i=0}^k (P_{i+1} - P_i) = 0$ ，所以又有

$$\Delta V_m^{(k+1)} = \mu^{k+1} \Delta V_m^{(0)} + \mu J_m \bar{W}^T \text{diag} \left( 0, \frac{\lambda_1^{k+1}-\mu^{k+1}}{\lambda_1-\mu}, \dots, \frac{\lambda_{n-1}^{k+1}-\mu^{k+1}}{\lambda_{n-1}-\mu} \right) W \Delta F_n^{(0)}. \quad (18.5.11)$$

因为  $\lambda_i = 1 - 2\mu \sin^2(i\pi/n)$ ，易知当  $\mu \in (0, 1/2)$  时有  $\lambda_1 = \lambda_{n-1} > \lambda_i > 0$ ， $i = 2, \dots, n-2$ 。下面利用 (18.5.11)，分几种情况分析新面在收敛点处的连续情况。

(a). 当  $\mu < \lambda_1$ ，即  $\mu < 1/(4\sin^2(\pi/n)+1)$  时，经计算得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_1 - \mu) \Delta V_m^{(k+1)} / \lambda_1^{k+1} &= J_m \bar{W}^T \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0, 1) W \Delta F_n^{(0)} \\ &= \left( 2 \sum_{j=1}^n \cos \frac{2(m-j)\pi}{n} (P_{j+1} - P_j), 2 \sum_{j=1}^n \cos \frac{2(m+2-j)\pi}{n} (P_{j+1} - P_j) \right)^T, \end{aligned}$$

所以  $\mathbf{S}_m^{(k)}$  的子三角形的法向与  $\mathbf{f}^{(0)}$  所在平面的法向一致. 因而由对称性可知, 曲面在  $\mathbf{f}^{(k)}$  的收敛点处为  $G^1$ .

(b). 当  $\mu = \lambda_1$ , 即  $\mu = 1/(4\sin^2(\pi/n)+1)$  时, 由 (18.5.11) 得到

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta \mathbf{V}_m^{(k+1)}}{(k+1)\lambda_1^k} = \left( 2 \sum_{j=1}^n \cos \frac{2(m-j)\pi}{n} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j), 2 \sum_{j=1}^n \cos \frac{2(m+2-j)\pi}{n} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) \right)^T.$$

与上一情况类似, 知曲面在收敛点处为  $G^1$ .

(c). 当  $\mu > \lambda_1 = 1/(4\sin^2(\pi/n)+1)$  时, 则有  $\lambda_i < \mu$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . 于是

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta \mathbf{V}_m^{(k+1)} / \mu^{k+1} = \Delta \mathbf{V}_m^{(0)} + \mu \mathbf{J}_m \bar{\mathbf{W}}^T \text{diag}(0, 1/(\mu - \lambda_1), \dots, 1/(\mu - \lambda_{n-1})) \mathbf{W} \Delta \mathbf{F}_n^{(0)}.$$

由  $\Delta \mathbf{V}_m^{(0)}$  的任意性可知, 此时  $\mathbf{S}_m^{(k)}$  的子平面的法向与  $\mathbf{f}^{(0)}$  所在平面的法向一般不一致, 所以切割曲面在此点不是  $G^1$ .

综上所述, 切割曲面在拓扑网格  $G$  中一个平面  $n$  边形所对应的新面面的收敛点处为  $G^1$  当且仅当  $\mu \in (0, 1/(4\sin^2(\pi/n)+1)]$ . 所以当  $n$  取  $G$  中所有面和顶点的度数的最小值时, 这个条件即为整个切割曲面的  $G^1$  条件. 证毕.

对于矩形拓扑网格,  $n = 4$ , 于是  $\mu \in (0, 1/3]$ . 可以验证, 这与定理 18.4.3 中切割参数  $\lambda \equiv \mu \equiv \sigma \equiv \tau$  时的条件相一致.

## 18.6 Catmull-Clark 曲面和 Doo-Sabin 曲面

B 样条曲面在 CAD 中已得到广泛的应用, 非均匀有理 B 样条(NURBS)曲面已成为一个工业标准. 然而 B 样条曲面对其控制网格有严格要求, 即它只能定义在矩形拓扑网格上. 目前, 几何设计对象的拓扑结构日趋复杂, 例如在特征动画中要表示人的头和人的手. 虽然我们可以应用 Alias-Wavefront, SoftImage 和 Maya 等商业软件对 B 样条曲面做裁剪(Trimming), 来产生拓扑结构复杂的光滑曲面, 但代价是昂贵的, 又有数值误差; 同时, 对特征动画来说, 要在曲面的接缝处保持光滑是困难的, 因为模型是活动的. 但细分曲面能克服以上两个困难. 由定理 2.9.1 我们知道 B 样条曲线曲面的节点嵌入算法实际上就是对其控制多边形或网格的切割磨光过程. 因此人们自然地希望将这一算法推广到任意拓扑网格上去. 本节将要介绍的曲面就是 B 样条曲面的推广: 当控制网格为矩形拓扑网格时, 所产生的曲面是 B 样条曲面; 当控制网格为任意拓扑网格时, 所产生的曲面由一系列 B 样条曲面组成. DeRose<sup>[24]</sup>把细分技术应用到 Pixar 动画电影制片厂的作品“Geri's Game”, 形象逼真地表现了 Geri 老头的头壳、手指、茄克衫、裤子、领带和鞋子就是这种推广的一个生动的例子. 这部作品荣获 1998 年奥斯卡大奖.

为与本章前几节中切割磨光算法的符号统一起见, 本节中控制网格的顶点仍用大写字母  $\mathbf{P}$  来表示, 而不是用本书头几章中 B 样条的  $\mathbf{p}$ .

### 18.6.1 Catmull-Clark 曲面的生成

1978 年, Catmull 和 Clark 将双三次 B 样条方法推广到任意拓扑网格上. 首先考察由控制多边形  $\dots \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1} \dots$  所定义的一条均匀三次 B 样条曲线. 如果在每两个节点的中点嵌入一个新节点, 则相当于对原控制多边形进行两次割角磨光, 使其变成一个新的控制多边形  $\dots \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_{i+1} \dots$ , 见图 18.6.1, 其中新的控制顶点为

$$\mathbf{Q}_{2i+1} = (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1})/2, \quad \mathbf{Q}_{2i} = (\mathbf{Q}_{2i-1} + 2\mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_{2i+1})/4. \quad (18.6.1)$$

应用张量积方法, 上述对于 B 样条曲线的公式可推广到曲面情形. 见图 18.6.2, 一片 B 样条曲面由十六个控制顶点  $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{4,4}$  所定义. 在每两个节点的中点处嵌入一个新节点, 则产生二十五个新的控制顶点, 它们定义四片子曲面. 对应于原控制网格中的每一个小四边形(如  $\mathbf{P}_{11} \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{22} \mathbf{P}_{21}$ ), 都有一个新点(如  $\mathbf{Q}_{11}$ )产生, 称作面点, 它的方程为

$$Q_{11} = (P_{11} + P_{12} + P_{22} + P_{21})/4; \quad (18.6.2)$$

对应于每一条边，也有一个新点（如  $Q_{12}$ ）产生，称为边点，它的方程为

$$\begin{cases} Q_{12} = ((C + D)/2 + (P_{12} + P_{22})/2)/2; \\ C = Q_{11}, \quad D = Q_{13} = (P_{12} + P_{13} + P_{22} + P_{23})/4. \end{cases} \quad (18.6.3)$$

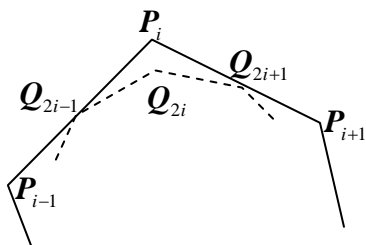


图 18.6.1 三次 B 样条曲线的控制多边形的变化情况

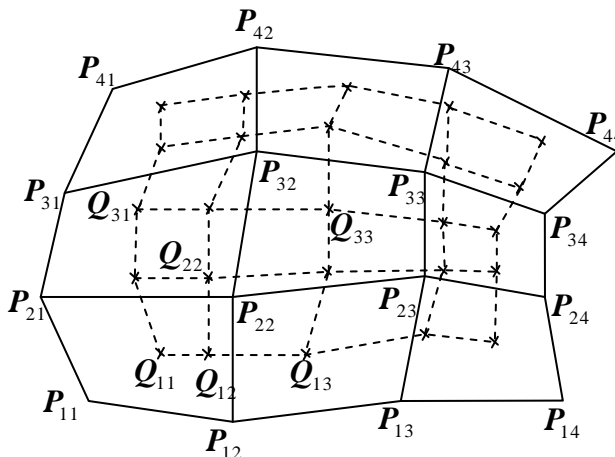


图 18.6.2 双三次 B 样条曲面的控制网格的变化情况

对应于每一个顶点  $P_{ij}$ ，也有一个新顶点（如  $Q_{22}$ ）产生，它的方程为

$$\begin{cases} Q_{22} = Q/4 + R/2 + P_{22}/4, \\ Q = (Q_{11} + Q_{13} + Q_{33} + Q_{31})/4, \\ R = (1/4)((P_{22} + P_{12})/2 + (P_{22} + P_{21})/2 + (P_{22} + P_{32})/2 + (P_{22} + P_{23})/2). \end{cases} \quad (18.6.4)$$

这些新的面点、边点和顶点组成一个新的控制网格。上述过程可重复进行下去，控制网格最终收敛到双三次 B 样条曲面。受 B 样条性质的启发，Catmull 和 Clark 提出适合于任意拓扑控制网格的细分规则。当控制网格为 B 样条曲面的控制网格时，这些规则就是产生 B 样条曲面的规则，即(18.6.2)，(18.6.3)和(18.6.4)。一般，它由几何点的产生和拓扑结构的建立这样两部分组成：

● 几何点的产生。

- 新面点——对应面上所有顶点的平均；
- 新边点——对应边的两端点和与该边相邻的两个面的新面点的平均；
- 新顶点——对应顶点与周围一些点的平均，即  $((n-2)/n) \cdot S + E/n + F/n$ 。其中  $S$  为对应顶点， $E$  为所有以  $S$  为端点的边的新边点的平均， $F$  为所有以  $S$  为一个顶点的面的新面点的平均， $n$  为顶点  $S$  的度数。（注：这一个新顶点公式是原 Catmull-Clark 公式的一个变种）。

● 拓扑结构的建立。

- 连接每一新面点与周围的新边点；
- 连接每一新顶点与周围的新边点。

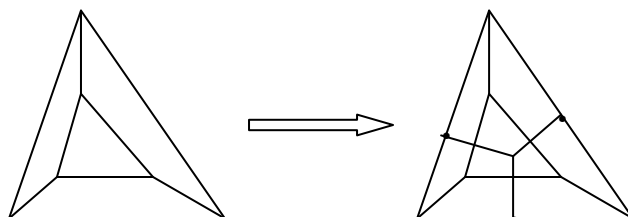


图 18.6.3 把 Catmull-Clark 规则应用一次所产生的结果

根据以上细分规则可以得到一个加密的控制网格。例如，图 18.6.3 中左图是一个初始控

制网格，右图是作用一次 Catmull-Clark 规则后产生的加密网格。上述过程一直重复下去，加密的网格序列最后收敛到一张光滑曲面，这张曲面称为 Catmull-Clark 曲面。

### 18.6.2 Catmull-Clark 曲面的连续性分析

Catmull-Clark 细分规则不受控制网格的拓扑限制，它可作用到任意拓扑网格上去。作用细分规则一次以后，所有的面均变为四边形，而且从此以后度数不为 4 的顶点（称为奇异点）的个数保持不变。实际上，奇异点的个数等于初始网格中度数不为 4 的顶点和面的个数之和。于是除了奇异点以外，Catmull-Clark 曲面由一系列双三次 B 样条曲面覆盖而成，从而处处达到曲率连续。因此下面我们只需分析在奇异点处 Catmull-Clark 曲面的性态即可。

记  $\mathbf{F}^{(0)}$  为初始控制网格， $\mathbf{F}^{(k)}$  为经  $k$  次 Catmull-Clark 细分后的网格。为了描述第  $k+1$  次细分，考虑  $\mathbf{F}^{(k)}$  中的一个度数为  $n$  的顶点  $\mathbf{v}^{(k)}$  的局部网格，它由  $n$  个边点  $\mathbf{e}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(k)}$  和  $n$  个面点  $\mathbf{f}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{f}_n^{(k)}$  组成，参见图 18.6.4。记

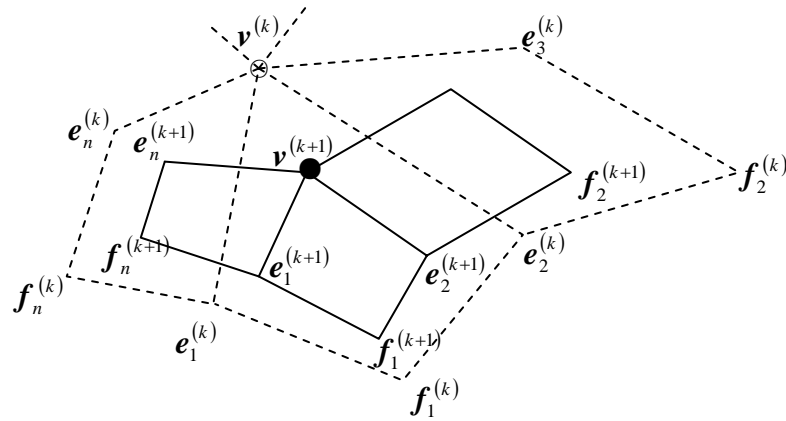


图 18.6.4 度数为  $n$  的顶点  $\mathbf{v}^{(k)}$  的周围网格

$$\mathbf{V}_n^{(k)} = (\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{e}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(k)}, \mathbf{f}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{f}_n^{(k)})^T \quad (18.6.5)$$

为由点  $\mathbf{v}^{(k)}$  周围的顶点所组成的列向量， $\mathbf{V}_n^{(k+1)}$  为细分一次后对应的列向量，则细分迭代过程可由一个  $(2n+1) \times (2n+1)$  阶的矩阵  $\mathbf{S}_n$  来描述：

$$\mathbf{V}_n^{(k+1)} = \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (18.6.6)$$

例如，对于  $n = 4$ ，细分矩阵  $\mathbf{S}_4$  为：

$$\mathbf{S}_4 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 6 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

于是极限曲面在点  $\mathbf{v}^{(k)}$  附近的性质与  $\mathbf{S}_n$  的特征结构紧密相关。

利用离散 Fourier 方法<sup>[5]</sup>，可以发现  $\mathbf{S}_n$  有  $m$  个实特征根  $\lambda_j$  和与其相应的  $m$  个线性无关的特征向量  $\mathbf{r}_j = (r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj})^T$ ， $j = 1, 2, \dots, m$ 。其中  $m = 2n+1$ 。  $m$  个特征根满足

$$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = \lambda_3 = (1/16)(5 + \cos(2\pi/n) + \cos(2\pi/n)\sqrt{9(2 + \cos(2\pi/n))}) > |\lambda_4|, \dots, |\lambda_m|, \quad (18.6.7)$$

$\mathbf{r}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ , 且  $\mathbf{V}_n^{(1)}$  可以由这些特征向量  $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^m$  来线性表示, 即存在位置向量  $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^m$ ,  $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im})$ , 使得

$$\mathbf{V}_n^{(1)} = \sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im}) = \mathbf{r}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{r}_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \mathbf{r}_m \mathbf{c}_m. \quad (18.6.8)$$

由  $\mathbf{S}_n \mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_j$  可得  $\mathbf{V}_n^{(k+1)} = \mathbf{S}_n^k \mathbf{V}_n^{(1)} = \lambda_1^k \mathbf{r}_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2^k \mathbf{r}_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \lambda_m^k \mathbf{r}_m \mathbf{c}_m$ . 令  $k \rightarrow +\infty$ , 则有

$$\mathbf{V}_n^{(\infty)} = \mathbf{r}_1 \mathbf{c}_1 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_1)^T. \quad (18.6.9)$$

所以  $\mathbf{v}^{(k)}$ ,  $\mathbf{e}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(k)}$ ,  $\mathbf{f}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{f}_n^{(k)}$  均收敛到点  $\mathbf{c}_1$ . 进一步, 为了考察极限曲面在点  $\mathbf{c}_1$  处的一阶光滑性, 要研究点  $\mathbf{v}^{(k)}$  周围的点是否收敛到一个公共切平面上. 以  $\mathbf{p}_l^{(k)}$  表示  $\mathbf{V}_n^{(k)}$  中第  $l$  个向量,  $l = 1, 2, \dots, 2n+1$ , 则

$\mathbf{p}_l^{(k)} - \mathbf{v}^{(\infty)} = (\lambda_1^k r_{1l} \mathbf{c}_1 + \lambda_2^k r_{2l} \mathbf{c}_2 + \dots + \lambda_m^k r_{ml} \mathbf{c}_m) - \mathbf{c}_1 = \lambda_2^k (r_{2l} \mathbf{c}_2 + r_{3l} \mathbf{c}_3) + \lambda_4^k r_{4l} \mathbf{c}_4 + \dots$ , 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}_l^{(k)} - \mathbf{v}^{(\infty)}}{\|\mathbf{p}_l^{(k)} - \mathbf{v}^{(\infty)}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(r_{2l} \mathbf{c}_2 + r_{3l} \mathbf{c}_3) + (\lambda_4 / \lambda_2)^k r_{4l} \mathbf{c}_4 + \dots}{\|(r_{2l} \mathbf{c}_2 + r_{3l} \mathbf{c}_3) + (\lambda_4 / \lambda_2)^k r_{4l} \mathbf{c}_4 + \dots\|} = \frac{r_{2l} \mathbf{c}_2 + r_{3l} \mathbf{c}_3}{\|r_{2l} \mathbf{c}_2 + r_{3l} \mathbf{c}_3\|}. \quad (18.6.10)$$

这说明当细分次数  $k \rightarrow \infty$  时, 对所有的  $l$ , 单位向量  $(\mathbf{p}_l^{(i)} - \mathbf{v}^{(\infty)}) / \|\mathbf{p}_l^{(i)} - \mathbf{v}^{(\infty)}\|$  均趋向于一个由向量  $\mathbf{c}_2$  和  $\mathbf{c}_3$  线性组合所产生的常向量, 它与  $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3$  垂直. 因此  $\mathbf{c}_2$  和  $\mathbf{c}_3$  张成公共切平面.

为了计算  $\mathbf{c}_i$ , 现在构造行向量  $\mathbf{l}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 使得  $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_j$  为 1 ( $i = j$  时) 或 0 ( $i \neq j$  时), 即  $\mathbf{l}_i$  为矩阵  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m)$  的逆矩阵的第  $i$  行. 于是在 (18.6.8) 的两端左乘  $\mathbf{l}_i$  可得

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{V}_n^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (18.6.11)$$

即  $\mathbf{c}_i$  可由  $\mathbf{S}_n$  的特征向量所构成的矩阵来计算. 特别地, 有

$$\mathbf{c}_1 = \left( n^2 \mathbf{v}^{(1)} + 4 \sum_j \mathbf{e}_j^{(1)} + \sum_j \mathbf{f}_j^{(1)} \right) / (n(n+5)), \quad (18.6.12)$$

$$\mathbf{c}_2 = \sum_j \{ A_n \cos(2\pi j/n) \mathbf{e}_j^{(1)} + (\cos(2\pi j/n) + \cos(2\pi(j+1)/n)) \mathbf{f}_j^{(1)} \}, \quad (18.6.13)$$

$$\mathbf{c}_3 = \sum_j \{ A_n \cos(2\pi j/n) \mathbf{e}_{j+1}^{(1)} + (\cos(2\pi j/n) + \cos(2\pi(j+1)/n)) \mathbf{f}_{j+1}^{(1)} \}. \quad (18.6.14)$$

$$A_n = 1 + \cos(2\pi/n) + \cos(\pi/n) \sqrt{2(9 + \cos(2\pi/n))}. \quad (18.6.15)$$

总结上述分析, 可知 Catmull-Clark 曲面在有限个奇异点处切平面连续, 在其他地方处处曲率连续, 即有

**定理 18.6.1** 当 Catmull-Clark 细分规则作用到控制网格  $\mathbf{\Gamma}^{(0)}$ , 细分次数  $k \rightarrow \infty$  时, 点  $\mathbf{v}^{(k)}$  必然收敛到点  $\mathbf{v}^{(\infty)} = \mathbf{c}_1$ ; 并且极限曲面在点  $\mathbf{v}^{(\infty)}$  处有唯一的切平面, 其法向为  $\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3$ , 其中  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  由 (18.6.12) — (18.6.15) 决定.

### 18.6.3 Doo-Sabin 曲面的生成

在 § 18.1 已经指出, 二次 B 样条曲线的节点中点嵌入算法就是 Chaikin 割角算法. 它也容易拓广到 B 样条曲面情形. 如图 18.6.5, 控制网格  $\{\mathbf{P}_{ij}\}$  定义一张双二次 B 样条曲面. 嵌入节点后, 在每一个面上, 对应于每一个顶点, 产生一个新顶点. 如在面  $\mathbf{P}_{11} \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{22} \mathbf{P}_{21}$  上, 与点  $\mathbf{P}_{11}$  相对应的新顶点  $\mathbf{Q}_{11}$  为:



$$Q_{11} = (9P_{11} + 3P_{12} + 3P_{21} + P_{22})/16. \quad (18.6.16)$$

于是，连接这些新顶点，产生对应于原控制网格中的面点、边点和顶点的新面，它们组成加密的网格。

1978 年，Doo 和 Sabin 将上述过程推广到任意拓扑网格上，提出了定义在任意拓扑网格上的细分规则。该规则也包括新几何点的产生和拓扑结构的连接这样两部分，大致步骤与 § 18.5 中描述的任意拓扑网格上的仿射标架切割磨光法相同，差别在于新顶点的生成公式不一样。参见图 18.6.6，在面

$P_1 \cdots P_{i-1} P_i P_{i+1} \cdots P_n$  上，对应于点  $P_i$  的新点  $Q_i$  取为：

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} P_j, \quad (18.6.17)$$

$$\omega_{ij} = \begin{cases} (n+5)/(4n), & i = j, \\ (3 + 2\cos(2\pi(i-j)/n))/(4n), & i \neq j. \end{cases} \quad (18.6.18)$$

显然，经过一次 Doo-Sabin 细分后，每个顶点的度数均为 4；再经过一次细分后，度数不为 4 的面的个数保持不变，它等于初始控制网格中度数不为 4 的面和顶点的个数之和。规则 (18.6.17) 和 (18.6.18) 的引入，保证了当初始控制网格为 B 样条曲面的控制网格时，Doo-Sabin 规则产生双二次 B 样条曲面。对于一般的拓扑网格，它产生一个光滑曲面，称为 Doo-Sabin 曲面。应用类似于 Catmull-Clark 曲面的分析方法可知，Doo-Sabin 曲面除了有限个奇异点外，由一系列双二次 B 样条曲面覆盖而成；而在这有限个奇异点处，Doo-Sabin 曲面也是一阶光滑连续的。

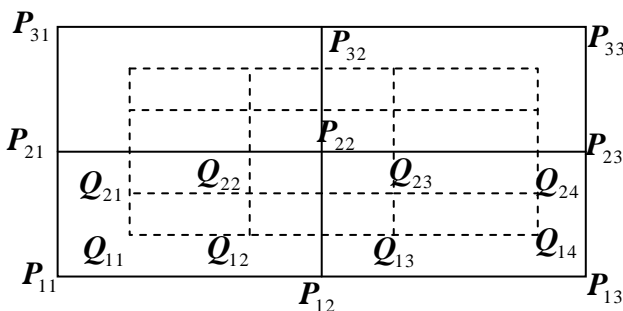


图 18.6.5 双二次 B 样条曲面的控制网格变化情况

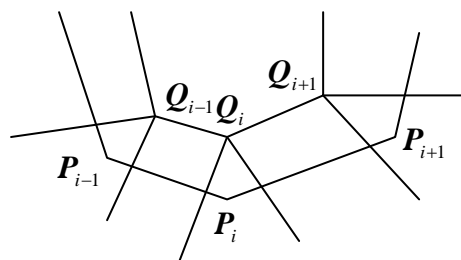


图 18.6.6 面  $P_1 P_2 \cdots P_n$  上的新顶点

## 18.7 非均匀 Doo-Sabin 曲面和非均匀 Catmull-Clark 曲面

### 18.7.1 非均匀 Doo-Sabin 曲面和非均匀 Catmull-Clark 曲面的生成

由于 Doo-Sabin 曲面和 Catmull-Clark 曲面是基于均匀 B 样条曲面节点嵌入法发展起来的，它们不能表示 NURBS 曲面；另外 Doo-Sabin 曲面和 Catmull-Clark 曲面处处光滑，它们不适合于表示含有尖点(Cusp)、尖边(Crease)等特征的形状。因此，推广 Doo-Sabin 和 Catmull-Clark 细分规则使得它们能产生 NURBS 曲面，在实际应用中具有重要的作用。

为了将规则推广到非均匀情形，关键是引入节点信息。由于节点本身不是本质的量，我们采用节点区间的长度，称之为节点距。对于二次 B 样条曲线，其每个控制顶点都对应于一段二次曲线，所以将曲线段的参数区间长度  $d_i$  赋给对应的控制顶点  $P_i$ 。于是在每一个节点区间的中点嵌入一个节点以后，控制顶点和节点距均发生变化，见图 18.7.1，其中

$$\begin{cases} Q_{2i} = [(d_i + 2d_{i+1})P_i + d_i P_{i+1}]/[2(d_i + d_{i+1})], \\ Q_{2i+1} = [d_{i+1} P_i + (2d_i + d_{i+1})P_{i+1}]/[2(d_i + d_{i+1})]. \end{cases} \quad (18.7.1)$$

对于三次 B 样条曲线，控制多边形的每条边对应于一段三次曲线。所以在每条边上赋予一个相应的节点距。于是当在每一个节点区间嵌入节点以后，控制多边形和节点距变为图 18.7.2 所示，其中

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{2i+1} = [(d_i + 2d_{i+1})\mathbf{P}_i + (d_i + 2d_{i-1})\mathbf{P}_{i+1}] / [2(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})], \\ \mathbf{Q}_{2i} = [d_i\mathbf{Q}_{2i-1} + (d_{i-1} + d_i)\mathbf{P}_i + d_{i-1}\mathbf{Q}_{2i+1}] / [2(d_{i-1} + d_i)]. \end{cases} \quad (18.7.2)$$

图 18.7.1 非均匀二次 B 样条曲线嵌入节点

图 18.7.2 非均匀三次 B 样条曲线嵌入节点

与曲线的情况相类似，控制顶点和节点距均发生变化的公式可被推广到曲面情形。例如，对双二次 B 样条曲面嵌入节点以后，在控制网格的每个四边形内，每个控制顶点  $\mathbf{A}$  对应于一个新顶点

$$\mathbf{F}_A = (\mathbf{V} + \mathbf{A}) / 2 + ac(\mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{D}) / [4(ad + ac + bc + bd)], \quad (18.7.3)$$

见图 18.7.3. 其中  $a, b, c, d$  为节点距， $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  为控制顶点，

$$\mathbf{V} = (bd\mathbf{A} + ad\mathbf{B} + bc\mathbf{C} + ac\mathbf{D}) / (bd + ad + bc + ac). \quad (18.7.4)$$

图 18.7.3 非均匀双二次 B 样条曲面嵌入节点

图 18.7.4 非均匀双三次 B 样条曲面嵌入节点

类似地，对于非均匀双三次 B 样条曲面，节点嵌入的效果相当于如下的过程。首先，在控制网格的每个四边形内产生一个新面点  $\mathbf{F}_i$ ，例如：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = & [(e_3 + 2e_4)(d_2 + 2d_1)\mathbf{P}_0 + (e_3 + 2e_4)(d_2 + 2d_3)\mathbf{P}_1 + (e_3 + 2e_2)(d_2 + 2d_3)\mathbf{P}_5 \\ & + (e_3 + 2e_2)(d_2 + 2d_1)\mathbf{P}_2] / [4(e_2 + e_3 + e_4)(d_1 + d_2 + d_3)]. \end{aligned} \quad (18.7.5)$$

见图 18.7.4. 然后对应于每条边，产生一个新边点  $\mathbf{E}_i$ ，例如：

$$\mathbf{E}_1 = [e_2\mathbf{F}_1 + e_3\mathbf{F}_4 + (e_2 + e_3)\mathbf{M}_1] / [2(e_2 + e_3)], \quad (18.7.6)$$

其中

$$\mathbf{M}_1 = [(2d_1 + d_2)\mathbf{P}_0 + (d_2 + 2d_3)\mathbf{P}_1] / [2(d_1 + d_2 + d_3)]. \quad (18.7.7)$$

最后，每个控制顶点（如  $\mathbf{P}_0$ ）被一个新的顶点（如  $\mathbf{V}$ ）所替代：

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & \mathbf{P}_0 / 4 + [d_3e_2\mathbf{F}_1 + d_2e_2\mathbf{F}_2 + d_2e_3\mathbf{F}_3 + d_3e_3\mathbf{F}_4] / [4(d_2 + d_3)(e_2 + e_3)] \\ & + [d_3(e_2 + e_3)\mathbf{M}_1 + e_2(d_2 + d_3)\mathbf{M}_2 + d_2(e_2 + e_3)\mathbf{M}_3 + e_3(d_2 + d_3)\mathbf{M}_4] / [4(d_2 + d_3)(e_2 + e_3)]. \end{aligned} \quad (18.7.8)$$

在上述表达式中，小写字母代表节点距。一旦所有新的面点、边点、顶点产生以后，按均匀 Catmull-Clark 细分规则将它们连接起来就产生一个加密的 B 样条曲面控制网格。

现在的目标是将 Doo-Sabin 曲面和 Catmull-Clark 曲面推广到非均匀情形，使得当整个控制网格为矩形拓扑网格，并且沿着每行和每列的节点距相同时，所产生的极限曲面为非均匀

B 样条曲面. 对于非均匀 Catmull-Clark 曲面, 给它的控制网格的每条边赋予一个节点距; 对于非均匀 Doo-Sabin 曲面, 给它的控制网格的每个顶点沿任一边均赋予一个节点距. 这样, 曲面的细分规则包括三个部分: 与节点距有关的新点的产生; 节点距更新规则; 拓扑结构的构造. 下面我们用  $d_{ij}^k$  表示和以  $P_i$  为端点的边有关的节点距. 用  $d_{ij}^0$  表示边  $P_i P_j$  的节点距; 用  $d_{ij}^i$  或  $d_{ij}^{-i}$  表示边  $P_i P_j$  以  $P_i$  为中心按逆时针或顺时针方向旋转所遇到的第  $i$  条边的节点距; 参见图 18.7.5 或图 18.7.6. 于是对于非均匀 Catmull-Clark 曲面情形, 每边有一个节点距, 所以  $d_{ij}^0 = d_{ji}^0$ .

### (1) 非均匀 Doo-Sabin 细分规则

从拓扑上来看, 非均匀 Doo-Sabin 细分规则和均匀 Doo-Sabin 细分规则或 § 18.5 中的仿射标架切割磨光法一致, 即每细分一次, 产生相对于原控制网格的新面 (NFF), 新边面 (NEF) 和新点面 (NVF), 把它们相互连接组成新的网格取代原来旧的网格. 在这个过程中, 奇异点出现在度数不为 4 的面中. 因此与均匀规则不一样的是新点的产生公式和新增的节点距的更新 (见图 18.7.5):

- 新顶点的计算.

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{P}_i &= (V + P_i)/2 + (d_{i+1,i+2}^0 d_{i+3,i+2}^0 + d_{i-1,i-2}^0 d_{i-3,i-2}^0) \times \frac{-nP_i + \sum_{j=1}^n (1 + 2\cos(2\pi|i-j|/n))P_j}{8\sum_{h=1}^n d_{h-1,h}^0 d_{h+1,h}^0}, \\ V &= \sum_{h=1}^n d_{h-1,h}^0 d_{h+1,h}^0 P_h / \sum_{h=1}^n d_{h-1,h}^0 d_{h+1,h}^0. \end{aligned} \right. \quad (18.7.9)$$

- 节点距的更新.

对于加密的控制网格, 新的节点距可以有許多方法来给定, 下面给出一种简单的选择:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{d}_{i,i+1}^0 &= \bar{d}_{i,i-1}^{-1} = d_{i,i+1}^0/2, \\ \bar{d}_{i,i-1}^0 &= \bar{d}_{i,i+1}^1 = d_{i,i-1}^0/2. \end{aligned} \right. \quad (18.7.10)$$

这样的节点距设定可使得经过几次细分后细分矩阵保持不变.

### (2) 非均匀 Catmull-Clark 细分规则

图 18.7.5 非均匀 Doo-Sabin 细分规则

(a) (b) (c)

图 18.7.6 (a) 新面点; (b) 新边点; (c) 新顶点

非均匀 Catmull-Clark 细分规则在拓扑上同均匀 Catmull-Clark 的细分规则相一致, 因此差别在于新几何点产生的公式和节点距的更新 (见图 18.7.6):

- 新几何点的计算.

对于度数为  $n$  的面，新面点为：

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \mathbf{P}_i / \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i, \quad (18.7.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_i = & (d_{i+1,i}^0 + d_{i+1,i}^2 + d_{i+1,i}^{-2} + d_{i-2,i-1}^0 + d_{i-2,i-1}^2 + d_{i-2,i-1}^{-2}) \\ & \times (d_{i-1,i}^0 + d_{i-1,i}^2 + d_{i-1,i}^{-2} + d_{i+2,i+1}^0 + d_{i+2,i+1}^2 + d_{i+2,i+1}^{-2}). \end{aligned} \quad (18.7.12)$$

新边点由下式计算：

$$\mathbf{E} = (1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ji}) \mathbf{M} + \alpha_{ij} \mathbf{F}_{ij} + \alpha_{ji} \mathbf{F}_{ji}. \quad (18.7.13)$$

其中

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} (d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1}) / [2(d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1} + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1)], & \text{当 } (d_{ji}^1 + d_{ij}^{-1} + d_{ji}^{-1} + d_{ij}^1) \neq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (18.7.14)$$

$$\mathbf{M} = [(d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2}) \mathbf{P}_i + (d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2}) \mathbf{P}_j] / (d_{ji}^0 + d_{ji}^2 + d_{ji}^{-2} + d_{ij}^0 + d_{ij}^2 + d_{ij}^{-2}). \quad (18.7.15)$$

对于度数为  $n$  的顶点  $\mathbf{P}_0$ ，其新顶点  $\mathbf{V}$  为：

$$\mathbf{V} = c \mathbf{P}_0 + 3 \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{M}_i + f_{i,i+1} \mathbf{F}_{i,i+1}) / \left( n \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1}) \right). \quad (18.7.16)$$

这里  $\mathbf{M}_i$  由 (18.7.15) 定义， $\mathbf{F}_{ij}$  由 (18.7.11) 定义，

$$m_i = (d_{0i}^1 + d_{0i}^{-1}) (d_{0i}^2 + d_{0i}^{-2}) / 2, \quad f_{ij} = d_{0i}^1 d_{0j}^{-1}, \quad (18.7.17)$$

$$c = \begin{cases} (n-3)/n, & \text{当 } \sum_{i=1}^n (m_i + f_{i,i+1}) \neq 0, \\ 1, & \text{其他.} \end{cases} \quad (18.7.18)$$

#### • 节点距的更新

每个度数为  $n$  的面分为  $n$  个四边形，于是新节点距的设定参见图 18.7.7.

当然，上述这些细分公式在具体应用中还可作适当调整，产生出一些变种以适应各种不同要求. 彩图 18.7.1 显示的是 Doo-Sabin 曲面和各种不同形态的非均匀 Doo-Sabin 曲面. 彩图 18.7.2 显示的是在不同节点距下的非均匀 Doo-Sabin 曲面. 彩图 18.7.3 显示的是用非均匀有理 Catmull-Clark 曲面表示一个球面. 彩图 18.7.4 显示的是均匀 Catmull-Clark 曲面和不同节点距下的非均匀 Catmull-Clark 曲面. 一般来说，非均匀 Doo-Sabin 曲面和非均匀 Catmull-Clark 曲面是均匀的细分曲面的推广，它们具有如下的特点：

图 18.7.7 节点距的更新

- 细分规则可作用到任意的拓扑网格上，产生任意拓扑类型的曲面；
- 极限曲面由一系列均匀或非均匀 B 样条曲面组成，特别在奇异点处，有一个 B 样条曲面序列收敛到该点；
- 与 NURBS 兼容，能产生 NURBS 曲面. 至于有理曲面情形，只需应用细分规则作用到四维的齐次控制顶点上，最后再通过投影返回到三维空间中来.
- 节点距可用作形状参数来调节形状. 特别，适当地设置节点距为零（相当于 B 样条方法中的重节点技术）可产生尖点、尖边等形状.

### 18.7.2 非均匀 Doo-Sabin 曲面的特征根分析

由于经过最多两次非均匀 Doo-Sabin 细分迭代后，所有新点面和新边面均为四边形，并且还可验证新点面将收敛到均匀双二次 B 样条曲面，同时新边面将收敛到非均匀双二次 B 样条曲面，因此我们只需考察新面面的收敛情况即可. 类似于 § 18.6.2，易知极限曲面的性质与

细分矩阵的特征根有很大的关系. 因此这一小节分析非均匀 Doo-Sabin 细分矩阵的特征根分布.

不妨设新面面的周围都是四边形的面. 见图 18.7.8, 中间是一个新面  $P_1 P_2 \cdots P_n$ . 此面的每条边连接着一个新边面, 例如  $P_j P_{j+1}$  对应着  $P_j P_{j+1} E_{j2} E_{j1}$ ; 每个顶点  $P_j$  对应着一个四边面 (新点面)  $P_j E_{j1} C_j E_{j-1,2}$ . 为了符号简洁起见, 我们用  $d_{ij}$  代表  $d_{ij}^0$ , 表示节点距. 注意到经两次细分后新点面和新边面的节点距的特征, 非均匀 Doo-Sabin 曲面的细分公式可改写成:

图 18.7.8 NFF 及其周围的面

$$\begin{cases} \tilde{P}_j = (V + P_j)/2 + \alpha_j \left[ -nP_j + \sum_{h=1}^n (1 + 2\cos(2\pi h/n)) P_{j+h} \right], \\ \tilde{E}_{j1} = [6(d_{j,j-1}d_{j+1,j} + 3d_{j,j+1}d_{j+1,j+2})P_j + 3d_{j,j+1}d_{j+1,j+2}P_{j+1} + \\ (d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + 2d_{j,j-1}d_{j+1,j})E_{j1} + d_{j,j+1}d_{j+1,j+2}E_{j2}] / [8(d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + d_{j,j-1}d_{j+1,j})], \\ \tilde{E}_{j2} = [3d_{j,j-1}d_{j+1,j}P_j + 6(d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + 3d_{j,j-1}d_{j+1,j})P_{j+1} + \\ d_{j,j-1}d_{j+1,j}E_{j1} + (d_{j,j-1}d_{j+1,j} + 2d_{j,j+1}d_{j+1,j+2})E_{j2}] / [8(d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + d_{j,j-1}d_{j+1,j})], \\ \tilde{C}_j = (9P_j + 3E_{j1} + 3E_{j-1,2} + C_j)/16. \\ \alpha_j = (d_{j+1,j+2}d_{j+3,j+2} + d_{j-1,j-2}d_{j-3,j-2}) / 8 \sum_{h=1}^n d_{h-1,h}d_{h+1,h} \end{cases} \quad (18.7.19)$$

于是, 这个新面及其周围的结构在细分前后的关系为

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}_n \mathbf{M}. \quad (18.7.20)$$

这里

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_n \\ \cdots \\ \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{12} \\ \vdots \\ \tilde{E}_{n1} \\ \tilde{E}_{n2} \\ \cdots \\ \tilde{C}_1 \\ \vdots \\ \tilde{C}_n \end{pmatrix}, \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \vdots & & & \vdots & & \\ \mathbf{Q}_n & & 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \mathbf{SE}_1 & & 0 & \vdots & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ * & \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \vdots & & 0 & \mathbf{SE}_n & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & & 1/16 & 0 \\ * & \vdots & * & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 1/16 \end{pmatrix}_{4n \times 4n}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \cdots \\ E_{11} \\ E_{12} \\ \vdots \\ E_{n1} \\ E_{n2} \\ \cdots \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (18.7.21)$$

其中  $\mathbf{Q}_n$  为  $n \times n$  阶矩阵,  $\mathbf{SE}_j$  为  $2 \times 2$  阶矩阵:

$$\mathbf{SE}_j = \frac{\begin{pmatrix} d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + 2d_{j,j-1}d_{j+1,j} & d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} \\ d_{j,j-1}d_{j+1,j} & d_{j,j-1}d_{j+1,j} + 2d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} \end{pmatrix}}{8(d_{j,j+1}d_{j+1,j+2} + d_{j,j-1}d_{j+1,j})}, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (18.7.22)$$

并易知在随后的细分中,  $\mathbf{S}_n$  保持不变.

引理 18.7.1 设  $\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  是一个  $n \times n$  阶 Hermitian 阵, 这里  $\bar{\phantom{x}}$  表示取共轭. 如

果  $\mathbf{A}$  的特征根  $\lambda_j$  满足  $\lambda_j \in (0, c)$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , 其中  $c$  是一个正的常数, 那么矩阵

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1h} & \bar{a}_{2h} & \cdots & a_{hh} \end{pmatrix} \quad (1 \leq h \leq n) \text{ 的特征根 } \mu_j \text{ 也满足 } \mu_j \in (0, c).$$

证 因为  $\lambda_j > 0$ , 易知  $\mathbf{A}_n$  为正定矩阵. 所以  $\mathbf{A}_h$  也是正定矩阵,  $1 \leq h \leq n$ . 由此导出  $\mu_j > 0$ , 同理, 考虑矩阵  $\mathbf{CI}_n - \mathbf{A}_n$  和  $\mathbf{CI}_h - \mathbf{A}_h$  ( $\mathbf{I}$  为单位阵) 知  $\mu_j < c$ . 证毕.

现在来分析  $\mathbf{S}_n$  的特征根. 由 (18.7.21) 知  $\mathbf{S}_n$  的特征根由  $\mathbf{Q}_n$ ,  $\mathbf{SE}_h$ , ( $h=1,2,\dots,n$ ) 和  $\mathbf{I}_n/16$  的特征根组成.  $\mathbf{I}_n/16$  有  $n$  个相等的特征根  $\lambda_1^{\mathbf{I}_n} = \cdots = \lambda_n^{\mathbf{I}_n} = 1/16$ . 此外, 可以算得  $\mathbf{SE}_h$  的特征根为  $\lambda_1^{\mathbf{SE}_h} = 1/4$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{SE}_h} = 1/8$ . 因此我们只需考察  $\mathbf{Q}_n$  的特征根. 显然  $\mathbf{Q}_n$  满足

$$(\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)^T = \mathbf{Q}_n(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n)^T. \quad (18.7.23)$$

现利用离散 Fourier 变换技术, 令  $\mathbf{p}_\omega$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_\omega$  分别为对应于  $\mathbf{P}_j$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  的 Fourier 向量, 即

$$\mathbf{P}_j = \sum_{\omega=0}^{n-1} a_{\omega j} \mathbf{p}_\omega, \quad \tilde{\mathbf{P}}_j = \sum_{\omega=0}^{n-1} a_{\omega j} \tilde{\mathbf{p}}_\omega, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (18.7.24)$$

其中  $a_{\omega j} = e^{(2\pi)\omega j/n} = \cos(2\pi\omega j/n) + i \sin(2\pi\omega j/n)$ ,  $\bar{a}_{\omega j}$  为  $a_{\omega j}$  的共轭.

于是细分规则可写成 Fourier 向量的形式:

$$\sum_{\omega=0}^{n-1} a_{\omega j} \tilde{\mathbf{p}}_\omega = \sum_{\omega=0}^{n-1} c_\omega \mathbf{p}_\omega + \mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} a_j \mathbf{p}_1 + \beta_j \sum_{\omega=2}^{n-2} a_{\omega j} \mathbf{p}_\omega + \frac{1}{2} a_{(n-1)j} \mathbf{p}_{n-1}. \quad (18.7.25)$$

其中

$$\beta_j = 1/2 - n\alpha_j, \quad c_\omega = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n a_{\omega l} d_{l-1,l} d_{l+1,l} \bigg/ \sum_{h=1}^n d_{h-1,h} d_{h+1,h}, \quad (18.7.26)$$

注意到  $\sum_{h=1}^n a_h$  为  $n$  (当  $h=0 \bmod(n)$ ) 或  $0$  (当  $h \neq 0 \bmod(n)$ ), 用  $\bar{a}_{ij}$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ) 乘以方程 (18.7.25) 的两倍, 并对  $j$  从  $1$  到  $n$  作和, 则得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_0 \\ \tilde{\mathbf{p}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{p}}_{n-2} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{p}}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & | & & | & c_{n-1} \\ 0 & 1/2 & | & * & | & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & | & \mathbf{B}_{n-3} & | & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & | & * & | & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (18.7.27)$$

其中

$$\mathbf{B}_{n-3} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0j} & \sum_{j=1}^n \beta_j a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \beta_j a_{(n-4)j} \\ \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{a}_{1j} & \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \beta_j a_{(n-5)j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{a}_{(n-4)j} & \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{a}_{(n-5)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \beta_j a_{0j} \end{pmatrix}. \quad (18.7.28)$$

于是立即得到  $\mathbf{Q}_n$  的特征根之中的三个:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$ .

如果  $n = 4$ , 则  $\mathbf{B}_{n-3} = \sum_j \beta_j a_{0j} = 1/4$ , 所以  $\lambda_4 = 1/4$ . 否则

$$\mathbf{B}_{n-3} = (1/2) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_{n-3}, \quad (18.7.29)$$

$$\mathbf{A}_{n-3} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-4)j} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{a}_{1j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-5)j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{a}_{(n-4)j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{a}_{(n-5)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} \end{pmatrix}. \quad (18.7.30)$$

显然  $\bar{\mathbf{A}}_{n-3} = \mathbf{A}_{n-3}$ ,  $\mathbf{A}_{n-3}$  为一个 Hermitian 矩阵, 因此其特征值为实数. 另一方面,  $\mathbf{A}_{n-3}$  可写成:

$$\mathbf{A}_{n-3} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-4)j} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-1)j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-5)j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{4j} & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{5j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} \end{pmatrix}. \quad (18.7.31)$$

现在构造矩阵

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-4)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-1)j} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-1)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-5)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-2)j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{4j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{3j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-3)j} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} \end{pmatrix}, \quad (18.7.32)$$

这是一个循环矩阵. 记  $p(z)$  为  $z$  的多项式:

$$p(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{0j} + \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{1j} z + \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(n-1)j} z^{n-1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{0j} + a_{1j} z + \cdots + a_{(n-1)j} z^{n-1}), \quad (18.7.33)$$

则由引理 18.5.1 可知  $\mathbf{G}_n$  的特征根为:

$$\begin{aligned} \mu_h &= p(e^{2\pi i(h-1)/n}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{0j} + a_{1j} e^{2\pi i(h-1)/n} + \cdots + a_{(n-1)j} e^{2\pi i(n-1)(h-1)/n}) \\ &= n\alpha_{n-h+1}, \quad h = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (18.7.34)$$

由  $\alpha_j$  的定义可知, 当所有的节点距  $d_{ij} > 0$ ,  $n \neq 4$  时,  $\alpha_j \in (0, 1/8)$ . 因而当  $n < 9$  时,  $0 < \mu_h < 1$ . 由引理 18.7.1 推知  $\mathbf{A}_{n-3}$  的特征根也满足  $0 < \lambda_j^A < 1$ . 由此可得出  $\mathbf{B}_{n-3}$  的特征根  $\lambda_j^B \in (-1/2, 1/2)$ .

综合以上讨论结果, 我们有

**定理 18.7.1** 当所有节点距  $d_{ij} > 0$ , 并且  $n < 9$  时, 细分矩阵  $\mathbf{S}_n$  的特征根满足

$$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} > |\lambda_4|, |\lambda_5|, \dots, |\lambda_{4n}|. \quad (18.7.35)$$

现在我们来分析  $\mathbf{S}_n$  的特征向量. 首先,  $\mathbf{A}_{n-3}$  是一个 Hermitian 阵, 有  $n-3$  个线性无关的特征向量, 于是  $\mathbf{B}_{n-3}$ ,  $\mathbf{Q}_n$  也分别有  $n-3$  个和  $n$  个线性无关的特征向量. 其次, 每个  $\mathbf{SE}_k$  也有两个独立的特征向量,  $\mathbf{I}_n/16$  有 16 个独立的特征向量. 因此  $\mathbf{S}_n$  有  $4n$  个线性无关的特征向量. 仿 § 18.6.2 中的分析方法可得

**定理 18.7.2** 当所有节点距  $d_{ij} > 0$ , 所有点和面的度数小于 9 时, 新面及其周围结构收敛到一个极限点; 非均匀 Doo-Sabin 曲面在极限点处有唯一的切平面. 即非均匀 Doo-Sabin 曲面处处为  $G^1$  连续.

## 主要文献

- [JTG, 84] 金通洸, 用割角法生成的自由曲线, 计算几何烟台会议交流资料, 1984
- [XZM, 86] 许志明, 割角法画曲线的原理及其算法, 计算机学报, 1986, 9(6): 456-466
- [LW, 86] 吕伟, 几种离散切割磨光造型的新方法及其性质研究, 浙江大学硕士学位论文, 1986, 杭州
- [JTG, WGJ, 88] 金通洸, 王国瑾, 曲面离散造型的切割磨光法, 高校应用数学学报, 1988, 3(1): 5-15
- [LW, JTG, LYD, 87] Lü Wei, Jin Tongguang, Liang Youdong, Surfaces generated by cutting and grinding polyhedra with arbitrary topological meshes – C-G surfaces, Proceedings of the first International Conference on CADD, 1987, Beijing, 248-253
- [LW, JTG, LYD, 89] Lü Wei, Jin Tongguang, Liang Youdong, Geometric modeling by recursively cutting vertices, Journal of Computer Science and Technology, 1989, 4(4): 363-373
- [CE, CJ, 78] Catmull, E., Clark, J., Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes, Computer Aided Design, 1978, 10(6): 350-355
- [HM, KM, DT, 93] Halstead, M., Kass, M., DeRose, T., Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces, Proceedings of SIGGRAPH'93, Computer Graphics, 1993, 27: 35-44
- [DD, SM, 78] Doo, D., Sabin, M., Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points, Computer Aided Design, 1978, 10(6): 356-360
- [WGJ, 98] 王国瑾, 曲面造型技术的现状与发展趋势, 计算机世界, 1998, 第 36 期 D 版 (技术专题), D12-D13
- [STW, ZJM, SD, SM, 98] Sederberg T.W., Zheng Jianmin, Sewell, D., Sabin, M., Non-uniform recursive subdivision surfaces, Proceedings of SIGGRAPH '98, Computer Graphics, 1998, 32: 387-394
- [ZJM, STW, SM, 97] Zheng Jianmin, Sederberg, T.W., Sabin, M., Eigenanalysis of non-uniform Doo-Sabin surfaces, Technical report, Brigham Young University, Department of Computer



## 参考文献

- 1 Chaikin, G., An algorithm for high speed curve generation, *Computer Graphics and Image Processing*, 1974, 3(4): 346-349
- 2 Sabin, M., Recursive division, in: Gregory, J. ed., *The Mathematics of Surfaces*, Clarendon Press, Oxford, 1986, 269-282
- 3 Dyn, N., Subdivision schemes in CAGD, in: Light. W ed., *Advances in Numerical Analysis* (vol. 2), Oxford University Press, New York, 1991, 36-104
- 4 Schröder, P., Zorin, D., Course Notes: Subdivision for Modeling and Animation, ACM SIGGRAPH'98
- 5 Loop, C., Smooth subdivision surfaces based on triangles, Master's thesis, Department of Mathematics, University of Utah, 1987
- 6 Peters, J., Reif, U., The simplest subdivision scheme for smoothing polyhedra, *ACM Transactions on Graphics*, 1997, 16(4): 420-431
- 7 Qin, H., Mandal, C., Vemuri, B., Dynamic Catmull-Clark subdivision surfaces, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1998, 4(3): 215-229
- 8 Dyn, N., Levin, D., Gregory, J.A., A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control, *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 9(2): 160-169
- 9 Zorin, D., Schröder, P., Sweldens, W., Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology, *Proceedings of SIGGRAPH'96*, 189-192
- 10 Kobbelt, L., Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology, *Computer Graphics Forum (Eurographics 96)*, 1996, c409-c420
- 11 Levin, A., Interpolating nets of curves by smooth subdivision surfaces, *Proceedings of SIGGRAPH'99*, 57-64
- 12 Levin, A., Combined subdivision schemes for the design of surfaces satisfying boundary conditions, *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16(5): 345-354
- 13 Kobbelt, L., A variational approach to subdivision, *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(8): 743-761
- 14 Kobbelt, L., Schröder, P., A multiresolution framework for variational subdivision, *ACM Transactions on Graphics*, 1998, 17(4): 209-237
- 15 Weimer, H., Warren, J., Subdivision schemes for thin plate splines, *Computer Graphics Forum (Eurographics'98)*, 1998, 17(3), c303-c313
- 16 Kobbelt, L.,  $\sqrt{3}$ -subdivision, *Proceedings of SIGGRAPH'2000*, 103-112
- 17 Biermann, H., Levin, A., Zorin, D., Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control, *Proceedings of SIGGRAPH'2000*, 113-120
- 18 Nasri, A., Polyhedral subdivision methods for free-form surfaces, *ACM Transactions on Graphics*, 1987, 6(1): 29-73
- 19 Nasri, A., Surface interpolation on irregular network with normal conditions, *Computer Aided Geometric Design*, 1991, 8(1): 89-96
- 20 Nasri, A., Boundary-corner control in recursive-subdivision surfaces, *Computer Aided Design*, 1991, 23(6): 405-410
- 21 Nasri, A., Curve interpolation in recursively generated B-spline surfaces over arbitrary topology, *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(1): 13-30
- 22 Stam, J., Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values, *Proceedings of SIGGRAPH'98*, 395-404
- 23 Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., Halstead, M., Jin, H., McDonald, J., Schweitzer, J., Stuetzle, W., Piecewise smooth surface reconstruction, *Proceedings of SIGGRAPH'94*, 295-302
- 24 DeRose, T., Kass, M., Truong, T., Subdivision surfaces in character animation, *Proceedings of SIGGRAPH'98*, 85-94
- 25 Lee, A., Moreton, H., Hoppe, H., Displaced subdivision surfaces, *Proceedings of SIGGRAPH'2000*, 85-94
- 26 Ball, A. A., Storry, D.J., Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces, *ACM Transactions on Graphics*, 1988, 7(2): 83-102
- 27 Ball, A.A., Storry, D.J., An investigation of curvature variations over recursively generated B-spline surfaces, *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 9(4): 424-437
- 28 Sabin, M., Cubic recursive division with bounded curvature, in: Laurent, P. J., Mehaute, A., and Schumaker, L. L., eds., *Curves and Surfaces*, Academic Press, 1991, 411-414
- 29 Reif, U., A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices, *Computer Aided Geometric Design*, 1995, 12(2): 153-174
- 30 Peters, J., Reif, U., Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision, *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 1998, 35: 728-748
- 31 Dyn, N., Levin, D., Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 1995, 193(2): 594-621
- 32 苏步青, 金通洸, Bézier 曲线的包络定理, *浙江大学学报, 计算几何论文集*, 1982, 13-16
- 33 Riesenfeld, R. F., On Chaikin's algorithm, *IEEE Computer Graphics and Application*, 1975, 4(3): 304-310
- 34 Davis, P., *Circulant Matrices*, John Wiley&Sons, New York, 1976