

第七章 矩形域和三角域上的参数函数曲面

CAGD 的主要对象是自由曲面。有了自由曲线的数学表示, 自由曲面的设计还需要有创新的数学构思. 对此作出突出贡献的有与 B ézier 齐名的美国机械工程教授 Coons (1912–1979), 还有德籍数学家 Farin. Coons^[CS,67]在 1967 年给美国国防部的技术报告中引进了超限插值这个全新的数学概念, Farin^[1,2]则在三角域上的 B ézier 曲面方面做了奠基性的工作. 值得提及的是中国科学技术大学的常庚哲、冯玉瑜教授, 他们在三角域上 B ézier 曲面的凸性与正性的研究中给出了许多深刻的结果, 对 CAGD 作出了重要贡献. 本章将简要地叙述矩形域和三角域上参数(函数)曲面的定义、性质和算法, 并给出 CAGD 中常用的旋转曲面的有理 B ézier 表示. 本章第 1 节内容取材于[CS, 67]; 第 2, 3.1, 4 节内容取材于[WGJ, WGZ, 99]; 第 3.2 节内容取材于[CGZ, DPI, 84], [CGZ, FYY, 84], [CGZ, FYY, 85], [CGZ, 95]; 第 5, 6 节内容取材于[WGJ, 89], [WGJ, 90], [WGJ, 91].

7.1 插值算子布尔和与张量积

定义 7.1.1 给定参数曲面 $f(u, v)$, $0 \leq u, v \leq 1$, 简记为 uv , 它在 u 向和 v 向的一对边界 (Boundary) 分别简记为 $0v, 1v; u0, u1$. 若对它们作线性插值, 得到新曲面

$$P_1 f = P_1 f(u, v) = (1-u, u)(0v, 1v)^T, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (7.1.1)$$

$$P_2 f = P_2 f(u, v) = (u0, u1)(1-v, v)^T, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (7.1.2)$$

则 P_1 和 P_2 分别称为 u 向和 v 向的插值算子, $P_1 f$ 和 $P_2 f$ 称为超限插值曲面.

取名为超限插值曲面 (Transfinite interpolation surface) 是因为 $P_1 f$ 和 $P_2 f$ 各插值了具有无穷多个数据点的 $f(u, v)$ 的一对边界线, 与传统的插值有限个数据点有本质的不同. 但是 $P_1 f$ 和 $P_2 f$ 却不各自插值两对边界线. 为减去多余部分, 必须引入

定义 7.1.2

$$P_1 \oplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \quad (7.1.3)$$

称为插值算子 P_1 和 P_2 的布尔和 (Boolean sum), P_1 和 P_2 如定义 7.1.1 所示.

由以上定义可得出被称为简单曲面片 (Simple patch) 的超限插值曲面

$$P_1 \oplus P_2 f(u, v) = (1-u, u) \begin{pmatrix} 0v \\ 1v \end{pmatrix} + (u0, u1) \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} - (1-u, u) \begin{pmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}. \quad (7.1.4)$$

容易验证 (7.1.4) 插值了 $f(u, v)$ 的两对边界线. 为了插值可微曲面 $f(u, v)$ 更多的边界信息, 例如四条边界斜率曲线 $0v_u, 1v_u; u0_v, u1_v$ ($0v_u = \partial f(u, v) / \partial u|_{u=0}$), 必须利用 (1.1.7) 所示的两点两切线式三次 Hermite 基来定义

$$P_1 f(u, v) = (F_0(u), F_1(u), G_0(u), G_1(u))(0v, 1v, 0v_u, 1v_u)^T, \quad (7.1.5)$$

$$P_2 f(u, v) = (u0, u1, u0_v, u1_v)(F_0(v), F_1(v), G_0(v), G_1(v))^T. \quad (7.1.6)$$

新的插值算子 P_1 和 P_2 所产生的曲面 $P_1 f$ 和 $P_2 f$ 各自插值一对边界和一对边界斜率, 但其迭加的结果并不各自插值这八条边界信息曲线. 为减去多余的部分, 必须减去曲面

$$\begin{aligned} P_1 P_2 f(u, v) &= P_1 [P_2 f(u, v)] \\ &= (F_0(u), F_1(u), G_0(u), G_1(u))(P_2 f(0, v), P_2 f(1, v), (P_2 f)_u(0, v), (P_2 f)_u(1, v))^T \\ &= (F_0(u), F_1(u), G_0(u), G_1(u)) \begin{pmatrix} 00 & 01 & 00_v & 01_v \\ 10 & 11 & 10_v & 11_v \\ 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv} \\ 10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

容易验证曲面 $P_1 \oplus P_2 f(u, v) = (P_1 + P_2 - P_1 P_2) f(u, v)$ 插值了曲面 $f(u, v)$ 的两对边界

和两对边界斜率，称为 Coons 双三次混合（Blending）曲面，这里 P_1, P_2 由(7.1.5)和(7.1.6)所定义。

为了插值更多的边界信息，例如四条边界曲率曲线 $0\mathbf{v}_{uu}, 1\mathbf{v}_{uu}, u0\mathbf{v}_v, u1\mathbf{v}_v$ ，可以利用五次 Hermite 基，即两点两切线两曲率式 Hermite 基来定义更高阶的插值算子，从而得出 Coons 双五次混合曲面。更一般的高阶插值算子和高阶 Coons 混合曲面的定义可类似给出。

工程实际中，常把 Coons 双三次混合曲面的四条边界和四条边界斜率都取为三次多项式参数曲线，并由三次 Hermite 基来张成。由此可推出 $P_1 \oplus P_2 \mathbf{f} = P_1 \mathbf{f} = P_2 \mathbf{f} = P_1 P_2 \mathbf{f}$ ，这

时的曲面形如(7.1.7)，可改写为 $\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \phi_i(u) \phi_j(v) A_{i,j}$ ，这是一种张量积（Tension product）

曲面。又因固定 u （或 v ）时对 v （或 u ）而言是三次，因而它被称为 Coons 双三次曲面。(7.1.7)右端的一个四阶矩阵称为角点信息阵；可分成四个二阶子矩阵，左上角、左下角、右上角的三个二阶子阵中，其元素分别代表此曲面四个角点上的位矢及 u, v 向切矢，几何定义清楚；但右下角的子矩阵没有明确的几何意义，其元素被称为角点扭矢。为了解开这个谜，可以利用 §1.6.3 给出的三次 Hermite 基和 Bernstein 基的转换关系，把(7.1.7)转化为^[3]

$$P_1 P_2 \mathbf{f}(u, v) = (B_0^3(u), \dots, B_3^3(u)) \mathbf{M} (B_0^3(v), \dots, B_3^3(v))^T, \quad \mathbf{M} = (P_{ij})_{4 \times 4}, 0 \leq i, j \leq 3. \quad (7.1.8)$$

容易算得四阶矩阵 \mathbf{M} 左上角的二阶子阵为

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\mathbf{0} & 0\mathbf{0} + 0\mathbf{0}_v / 3 \\ 0\mathbf{0} + 0\mathbf{0}_u / 3 & 0\mathbf{0} + (0\mathbf{0}_u + 0\mathbf{0}_v) / 3 + 0\mathbf{0}_{uv} / 9 \end{pmatrix},$$

而 \mathbf{M} 的第一行是 $(0\mathbf{0}, 0\mathbf{0} + 0\mathbf{0}_v / 3, 0\mathbf{1} - 0\mathbf{1}_v / 3, 0\mathbf{1})$ 。根据 Bézier 曲线的性质，以这一行中四个向量为控制顶点的三次 Bézier 曲线，其端点恰为 $0\mathbf{0}, 0\mathbf{1}$ ；端切矢恰为 $0\mathbf{0}_v, 0\mathbf{1}_v$ ；所以这条曲线就是曲面(7.1.7)的边界线 $0\mathbf{v}$ 。同理可证 \mathbf{M} 的第四行，第一列，第四列决定了曲面(7.1.7)的其余三条边界，而 \mathbf{M} 的四个角点就是曲面(7.1.7)的角点。现在把矩阵 \mathbf{M} 中的十六个点向量按同行同列两相邻点以直线段相连的原则在空间画成一个网格，称为 Bézier 网，而(7.1.8)右端给出的张量积曲面称为双三次 Bézier 曲面，则网格的角点或边界与曲面的角点或边界相对应，且 $P_{11} = P_{00} + (P_{01} - P_{00}) + (P_{10} - P_{00}) + 0\mathbf{0}_{uv} / 9$ 。由此可知，若以 $P_{00}, P_{01}, P_{00}, P_{10}$ 为邻边作平行四边形，则与 P_{00} 相对的那个顶点指向 P_{11} 的矢量恰为 $0\mathbf{0}_{uv} / 9$ 。分析 \mathbf{M} 的其余三个二阶子阵，可类似地得出 $0\mathbf{1}_{uv}, 1\mathbf{0}_{uv}, 1\mathbf{1}_{uv}$ 的意义。这就是扭矢的几何解释。正因为 Coons 曲面的角点信息阵与曲面形状的关系没有 Bézier 曲面的网格与曲面形状的关系那么直接，所以后者作为数学模型更受 CAGD 系统欢迎。

7.2 矩形域上的 Bézier 曲面及其几何性质

定义 7.2.1 设有 $(m+1)(n+1)$ 个点向量 $\{P_{ij}\}_{i=0, j=0}^{m, n} \in \mathbb{R}^3$ ， $B_i^m(u), B_j^n(v)$ 为 Bernstein 基，则与其相应的张量积曲面

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij}, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (7.2.1)$$

称为 $[0,1] \otimes [0,1]$ 上的 $m \times n$ 次 Bézier 曲面， P_{ij} 称为控制顶点，同行同列相邻两点用直线连成的网格称为 Bézier 特征网格（Characteristic Mesh/Net），简称 B 网（见图 7.2.1）。

把(7.2.1)改写作 $\sum_{i=0}^m B_i^m(u) Q_i(v)$ ， $Q_i(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) P_{ij}$ ，可知曲面(7.2.1)是以 $Q_i(v)$ 为控制顶点的 m 次 Bézier 曲线当 v 从 0 改变到 1 时的运动轨迹。每个点向量 $Q_i(v)$ 都有其 B 网 $\{P_{ij}\}_{j=0}^n, i=0, 1, \dots, m$ ，它们都在各自的轨道， n 次 Bézier 曲线 $\sum_{j=0}^n B_j^n(v) P_{ij}$ 上滑动。这就是 $m \times n$ 次张量积曲面的几何解释。

定义 7.2.2 设 $E_1, E_2; \Delta_1, \Delta_2$ 分别是对于控制顶点 P_{ij} 在 u 向、 v 向的移位算子和向前差分算子， I 为恒等算子：

$$E_1 P_{ij} = P_{i+1,j}; E_2 P_{ij} = P_{i,j+1}; I P_{ij} = P_{ij}; \Delta_1 P_{ij} = P_{i+1,j} - P_{ij}; \Delta_2 P_{ij} = P_{i,j+1} - P_{ij}. \quad (7.2.2)$$

则曲面

$$P(u, v) = [(1-u)I + uE_1]^m [(1-v)I + vE_2]^n P_{00} = (I + u\Delta_1)^m (I + v\Delta_2)^n P_{00} \quad (7.2.3)$$

称为由空间特征网格 $\{P_{ij}\}_{i=0, j=0}^{m, n}$ 所决定的 $m \times n$ 次 Bézier 曲面。

Bézier 曲面(7.2.1)具有与 Bézier 曲线极其相似的几何性质。

性质 7.2.1 几何不变性和仿射不变性。

性质 7.2.2 边界线：是 B 网的四个边界多边形

所决定的四条 Bézier 曲线 $\sum_{i=0}^m B_i^m(u) P_{i0}$,

$$\sum_{i=0}^m B_i^m(u) P_{in}, \sum_{j=0}^n B_j^n(v) P_{0j}, \sum_{j=0}^n B_j^n(v) P_{mj}.$$

性质 7.2.3 角点位置：曲面在四个角点插值 B 网的四个角点，即 $P(0,0) = P_{00}$, $P(0,1) = P_{0n}$, $P(1,0) = P_{m0}$, $P(1,1) = P_{mn}$.

性质 7.2.4 角点切平面：是 B 网四个角点三角形 $P_{00}P_{10}P_{01}$, $P_{0n}P_{1n}P_{0,n-1}$, $P_{m0}P_{m-1,n}P_{m,n-1}$, $P_{m0}P_{m-1,0}P_{m1}$.

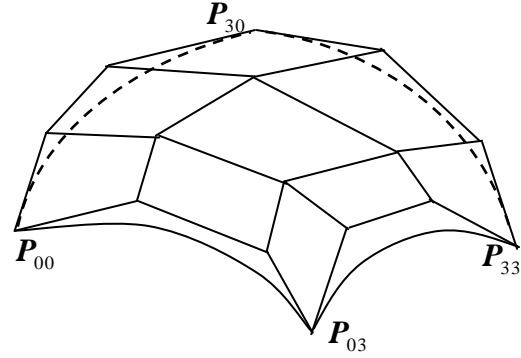


图 7.2.1 双三次 Bézier 曲面及其 B 网

性质 7.2.5 $k \times h$ 阶导矢曲面：是以 $\{(m!n!/((m-k)!(n-h)!))\Delta_1^k \Delta_2^h P_{ij}\}_{i=0, j=0}^{m-k, n-h}$ 为控制顶点的 $(m-k) \times (n-h)$ 次 Bézier 曲面， $0 \leq k \leq m-1, 0 \leq h \leq n-1$.

性质 7.2.6 法矢曲面：是 $(2m-1) \times (2n-1)$ 次 Bézier 曲面 $P'_u(u, v) \times P'_v(u, v) = N(u, v)$,

$$N(u, v) = mn \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{2n-1} B_i^{2m-1}(u) B_j^{2n-1}(v) N_{ij}, \quad (7.2.4)$$

$$N_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(m-1, i)} \sum_{h=0}^{\min(n-1, j)} \frac{\binom{m-1}{k} \binom{m}{i-k} \binom{n-1}{h} \binom{n}{j-h}}{\binom{2m-1}{i} \binom{2n-1}{j}} (\Delta_1 P_{k, j-h} \times \Delta_2 P_{i-k, h}). \quad (7.2.5)$$

性质 7.2.7 凸包性质：曲面位于 B 网的凸包内。

性质 7.2.8 特征造型性质与交互能力：B 网是输入曲面或人机交互地修改曲面形状的中介物。

性质 7.2.9 de Casteljau 递归求值方法：若已给参数值为 (u, v) ，记 $P_{ij}^{00}(u, v) \equiv P_{ij}^{00} = P_{ij}$ 。对 $r = 1, 2, \dots, m$ ，递归地计算 $P_{ij}^{r0}(u, v) = (1-u)P_{i-1,j}^{r-1,0}(u, v) + uP_{ij}^{r-1,0}(u, v)$ ， $i = r, r+1, \dots, m$ ； $j = 0, 1, \dots, n$ ；再对 $s = 1, 2, \dots, n$ ，递归地计算 $P_{mj}^{ms}(u, v) = (1-v)P_{m,j-1}^{m,s-1}(u, v) + vP_{mj}^{m,s-1}(u, v)$ ， $j = s, s+1, \dots, n$ 。则 $P_{mn}^{mn}(u, v)$ 即 $P(u, v)$ 。

性质 7.2.10 离散构造：任一张 Bézier 曲面

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m\left(\frac{u-a}{b-a}\right) B_j^n\left(\frac{v-c}{d-c}\right) P_{ij}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d, \quad (7.2.6)$$

可在其定义域内任一点 (g, h) 处被离散（分片）为四块 Bézier 子曲面：

$$P(u, v) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m((u-a)/(g-a)) B_j^n((v-c)/(h-c)) P_{ij}^{ij}, & a \leq u \leq g, c \leq v \leq h, \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m((u-a)/(g-a)) B_j^n((v-h)/(d-h)) P_{in}^{i, n-j}, & a \leq u \leq g, h \leq v \leq d, \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m((u-g)/(b-g)) B_j^n((v-c)/(h-c)) P_{mj}^{m-i, j}, & g \leq u \leq b, c \leq v \leq h, \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m((u-g)/(b-g)) B_j^n((v-h)/(d-h)) P_{mm}^{m-i, n-j}, & g \leq u \leq b, h \leq v \leq d. \end{cases} \quad (7.2.7)$$

$$P_{ij}^{r0} = \begin{cases} P_{ij}, & r=0, \\ (I + \alpha \Delta_1) P_{i-1, j}^{r-1, 0}, & r=1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad i=r, r+1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n; \alpha = \frac{g-a}{b-a}, \quad (7.2.8)$$

$$P_{ij}^{is} = \begin{cases} P_{ij}^{i0} & s=0, \\ (I + \beta \Delta_2) P_{i, j-1}^{i, s-1} & s=1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, m; j=s, s+1, \dots, n; \beta = \frac{h-c}{d-c}, \quad (7.2.9)$$

$$P_{mj}^{m-i, s} = \begin{cases} P_{mj}^{m-i, 0} & s=0, \\ (I + \beta \Delta_2) P_{m, j-1}^{m-i, s-1} & s=1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, m; j=s, s+1, \dots, n; \beta = \frac{h-c}{d-c}. \quad (7.2.10)$$

性质 7.2.11 包络性质: 设 $P_{i+r, j+s}^{rs}(\alpha, \beta)$ 如(7.2.8)—(7.2.10)所示, 则曲面(7.2.6)就是

$$P(u, v) = \text{env} \left\{ P^{[m-r][n-s]}(u, v; \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) P_{i+r, j+s}^{rs}(\alpha, \beta), 0 \leq u, v \leq 1 \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq r \leq m-1, 1 \leq s \leq n-1, \quad (7.2.11)$$

且曲面(7.2.6)与 $P^{[m-r][n-s]}(u, v; \alpha, \beta)$ 在接触点 $\alpha = u, \beta = v$ 处有 $(m-r) \times (n-s)$ 阶切触.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad P^{[m-r][n-s]}(u, v; \alpha, \beta) &= (I + u \Delta_1)^{m-r} (I + v \Delta_2)^{n-s} P_{rs}^{rs}(\alpha, \beta) \\ &= (I + u \Delta_1)^{m-r} (I + v \Delta_2)^{n-s} (I + \beta \Delta_2)^s P_{r0}^{r0}(\alpha, \beta) \\ &= (I + u \Delta_1)^{m-r} (I + v \Delta_2)^{n-s} (I + \alpha \Delta_1)^r (I + \beta \Delta_2)^s P_{00} \\ \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} P^{[m-r][n-s]}(u, v; \alpha, \beta) \Big|_{\substack{\alpha=u \\ \beta=v}} &= \frac{(m-r)!}{(m-r-i)!} \frac{(n-s)!}{(n-s-j)!} (I + u \Delta_1)^{m-i} (I + v \Delta_2)^{n-j} \\ &\quad \times \Delta_1^i \Delta_2^j P_{00} = \frac{(m-r)!}{(m-r-i)!} \frac{(m-i)!}{m!} \frac{(n-s)!}{(n-s-j)!} \frac{(n-j)!}{n!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} P(u, v), \end{aligned}$$

$i=0, 1, \dots, m-r; j=0, 1, \dots, n-s$; 于是本性质成立. 证毕.

性质 7.2.12 差分表示: 见第十一章(11.10.15), (11.10.7), (11.10.14), (11.10.1)—(11.10.3).

矩形域上 Bézier 曲面的凸性条件是一个复杂的问题. 华宣积^[4]、许伟^[5]作过富有意义的研究; 陈发来^[6,7]等基于 Sturm 定理得到双二次函数形式的 Bézier 曲面为正及为凸的充要条件.

7.3 三角域上的 Bézier 曲面及其几何性质

7.3.1 三角域上的 Bézier 参数曲面及其基本性质

定义 7.3.1 给定平面上三角形 T 及其上一点 P , T 的顶点依逆时针方向记为 T_1, T_2, T_3 , 见图 7.3.1(a). 规定三角形 ABC 的顶点依逆(顺)时针方向排列时其有向面积(Directed area)为面积值乘以 $+1(-1)$, 记为 ΔABC , 则

$$(u, v, w) = (\Delta PT_2 T_3 / \Delta T_1 T_2 T_3, \Delta T_1 P T_3 / \Delta T_1 T_2 T_3, \Delta T_1 T_2 P / \Delta T_1 T_2 T_3) \quad (7.3.1)$$

称为点 P 关于坐标三角形 $T = \Delta T_1 T_2 T_3$ 的面积坐标(Area coordinates)或重心坐标(Barycentric coordinates). 这里总有 $u + v + w = 1$.

若点 T_i ，点 $P = (u, v, w)$ 关于已知平面直角坐标系的坐标分别是 (x_i, y_i) 和 (x, y) ， $i = 1, 2, 3$ ，则

$$(u, v, w) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad (7.3.2)$$

$$(x, y) = (ux_1 + vx_2 + wx_3, uy_1 + vy_2 + wy_3). \quad (7.3.3)$$

以上两式是面积坐标与直角坐标的转换关系式。若点 P 关于另一坐标三角形 $\Delta T_1^* T_2^* T_3^*$ 的面积坐标是 (u^*, v^*, w^*) ，且 T_i^* 关于 T 的面积坐标是 $T_i^* = (u_i, v_i, w_i)$ ， $i = 1, 2, 3$ ，则

$$P = (u^*, v^*, w^*) (T_1^*, T_2^*, T_3^*)^T = (u^*, v^*, w^*) ((u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3))^T,$$

于是我们又得到定点 P 在不同面积坐标系下的坐标变换公式

$$(u, v, w) = (u^*, v^*, w^*) \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \quad (7.3.4)$$

定义 7.3.2^[2] 设有 $(n+1)(n+2)/2$ 个点向量 $T_{i,j,k} \in \mathcal{R}^3$ ， $i, j, k \geq 0, i+j+k=n$ ，又设坐标三角形 T 及点 $P = (u, v, w)$ 如定义 7.3.1 所示，则称

$$T^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) T_{i,j,k}, \quad (u, v, w) \in T, \quad u, v, w \geq 0, \quad u+v+w=1 \quad (7.3.5)$$

为三角域 T 上的 n 次 Bernstein-Bézier 参数曲面，简称 B-B 曲面，这里

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad i+j+k=n, \quad u, v, w \geq 0, \quad u+v+w=1 \quad (7.3.6)$$

称为 n 次 Bernstein 基函数， $T_{i,j,k}$ 称为曲面(7.3.5)的控制顶点；把三个控制点向量 $T_{i+1,j,k}$ ， $T_{i,j+1,k}$ ， $T_{i,j,k+1}$ ($i+j+k=n-1$) 用直线段两两相连所得到的由 n^2 个三角形组成的曲面 $\hat{T}_n = \hat{T}_n(u, v, w)$ 称为曲面(7.3.5)的控制网格或 B 网（见图 7.3.1 (b)）。

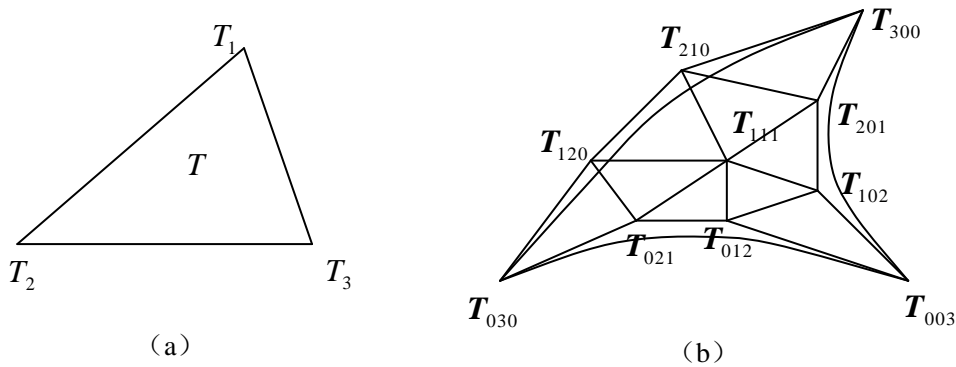


图 7.3.1 三次 B-B 三角曲面及其定义域 T 和 B 网

如果把(7.3.5)中的向量 $T_{i,j,k}$ 改为数量 $T_{i,j,k} = f(i/n, j/n, k/n)$ ，则得到函数形式的 B-B 曲面 $T^n(u, v, w) = T^n(f; P)$ ，也称为函数 $f(u, v, w)$ 的 n 次 Bernstein 多项式。为了得到它的 B 网，须把三角形 T 每边 n 等分，过这些分点作直线平行于其余两边，所有这些直线把 T 分成 n^2 个小三角形，交于点 $I_{i,j,k} = (i/n, j/n, k/n)$ ，这时空间点 $(I_{i,j,k}, T_{i,j,k})$ 称为控制顶点，

由这些控制顶点仿前述 \hat{T}_n 的产生规则所作成的分片线性函数称为函数曲面 $T^n(f;P)$ 的B网(见图7.3.2)。

定义 7.3.3 若 $T, P, T_{i,j,k}$ 如定义7.3.2所示, 则称与(7.3.5)等价的曲面

$$T^n(u, v) = \sum_{i+j=0}^n B_{i,j,n-i-j}^n(u, v, 1-u-v) T_{i,j,n-i-j} \equiv \sum_{i+j=0}^n B_{ij}^n(u, v) T_{ij}, \quad (7.3.7)$$

$$(u, v) \in D, \quad u, v \geq 0, \quad u+v \leq 1$$

为三角域 $D: \{(u, v) | u, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ 上的 n 次B-B参数曲面(见图7.3.3)。

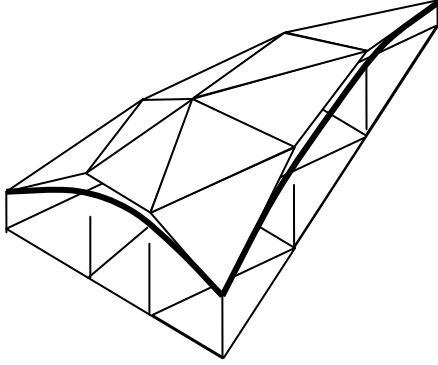


图 7.3.2 三次 B-B 三角函数曲面及其 B 网

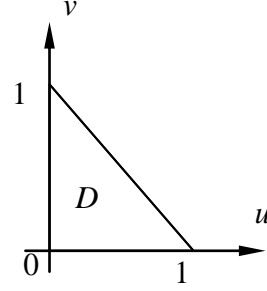


图 7.3.3 三次 B-B 三角曲面的定义域 D

定义 7.3.4 规定作用于控制顶点 $T_{i,j,k}$ 下标的移位算子 E_1, E_2, E_3 :

$$E_1 T_{i,j,k} = T_{i+1,j,k}, \quad E_2 T_{i,j,k} = T_{i,j+1,k}, \quad E_3 T_{i,j,k} = T_{i,j,k+1}; \quad (7.3.8)$$

或如定义7.2.2, 规定作用于控制顶点 T_{ij} 下标的算子 $E_1, E_2, \Delta_1, \Delta_2, I$; 则曲面

$$T^n(u, v, w) = (uE_1 + vE_2 + wE_3)^n T_{000}, \quad (u, v, w) \in T, u, v, w \geq 0, u+v+w=1, \quad (7.3.9)$$

$$T^n(u, v) = [(1-u-v)I + uE_1 + vE_2]^n T_{00} = (I + u\Delta_1 + v\Delta_2)^n T_{00}, \quad (u, v) \in D, u, v \geq 0, u+v \leq 1 \quad (7.3.10)$$

分别称为定义7.3.2所示的三角域 T 上或定义7.3.3所示的三角域 D 上的 n 次B-B曲面。

容易验证曲面(7.3.5)或(7.3.7)具有与矩形域上 Bézier 曲面类似的几何不变性、角点位置、角点切平面、边界曲线等性质。此外还具有:

性质 7.3.1 凸包性: 这是因为 $B_{i,j,k}^n(u, v, w) \geq 0$, $\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \equiv 1, (u, v, w) \in T$ 。

性质 7.3.2 de Casteljau 递归求值法: 对于 $r=1, 2, \dots, n$, 递归地计算 $T_{i,j,k}^r(u, v, w) = uT_{i+1,j,k}^{r-1}(u, v, w) + vT_{i,j+1,k}^{r-1}(u, v, w) + wT_{i,j,k+1}^{r-1}(u, v, w)$, $i+j+k=n-r$; $T_{i,j,k}^0(u, v, w) \equiv T_{i,j,k}^0 = T_{i,j,k}$, $i+j+k=n$; 则 $T_{000}^n(u, v, w) = T^n(u, v, w)$ 。

证 应用(7.3.8)立即得出 $T_{i,j,k}^r = (uE_1 + vE_2 + wE_3)T_{i,j,k}^{r-1} = (uE_1 + vE_2 + wE_3)^r T_{i,j,k}$, $i+j+k=n-r$ 。取 $r=n$, 则有 $T_{000}^n = (uE_1 + vE_2 + wE_3)^n T_{000}$, 与(7.3.9)比较即得证。

性质 7.3.3 升阶公式: 曲面(7.3.5)可表成

$$T^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n+1} B_{i,j,k}^{n+1}(u, v, w) \hat{T}_{i,j,k}, \quad (u, v, w) \in T, u, v, w \geq 0, u+v+w=1, \quad (7.3.11)$$

$$\hat{T}_{i,j,k} = \frac{i}{n+1} T_{i-1,j,k} + \frac{j}{n+1} T_{i,j-1,k} + \frac{k}{n+1} T_{i,j,k-1}, \quad i+j+k=n+1. \quad (7.3.12)$$

证 由恒等式 $(n+1)B_{i,j,k}^n(u, v, w) = (i+1)B_{i+1,j,k}^{n+1} + (j+1)B_{i,j+1,k}^{n+1} + (k+1)B_{i,j,k+1}^{n+1}$ 即得。

定理 7.3.1(Farin^{[1][CGZ,95]}) 记升阶 N 次后的B网为 $G^N \hat{T}_n = G^{N-1}(G \hat{T}_n)$, $N=1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G^N \hat{T}_n = T^n(u, v, w).$$

证 记 $p = i + a, q = j + b, r = k + c$, 则 $T^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n \cdot (u+v+w)^N T_{i,j,k}$

$$= \frac{n!N!}{(n+N)!} \sum_{i+j+k=n} \sum_{a+b+c=N} \binom{i+a}{i} \binom{j+b}{j} \binom{k+c}{k} B_{i+a,j+b,k+c}^{n+N} T_{i,j,k} = \sum_{p+q+r=n+N} B_{p,q,r}^{n+N} T_{p,q,r}^N,$$

其中 $T_{p,q,r}^N = \frac{n!N!}{(n+N)!} \sum_{i+j+k=n} \binom{p}{i} \binom{q}{j} \binom{r}{k} T_{i,j,k}$. 但是因 $\frac{n!N!}{(n+N)!} \binom{p}{i} \binom{q}{j} \binom{r}{k} = \frac{n!}{i!j!k!} \times F(N, n, p, q, r, i, j, k)$, 这里

$$F(N, n, p, q, r, i, j, k) = \frac{N!}{(n+N)!} \frac{p!q!r!}{(p-i)!(q-j)!(r-k)!}, \text{ 且 } \frac{1}{(n+N)^n} \leq \frac{N!}{(n+N)!} < \frac{1}{N^n},$$

$$(p-i)^i < \frac{p!}{(p-i)!} \leq p^i, (q-j)^j < \frac{q!}{(q-j)!} \leq q^j, (r-k)^k < \frac{r!}{(r-k)!} \leq r^k, \text{ 所以}$$

$$\left(\frac{p-i}{n+N} \right)^i \left(\frac{q-j}{n+N} \right)^j \left(\frac{r-k}{n+N} \right)^k \leq F(N, n, p, q, r, i, j, k) \leq \left(\frac{p}{N} \right)^i \left(\frac{q}{N} \right)^j \left(\frac{r}{N} \right)^k. \text{ 假设当 } N \rightarrow \infty \text{ 时同}$$

时有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{n+N}, \frac{q}{n+N}, \frac{r}{n+N} \right) = (u, v, w) \in T$, 则必有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}, \frac{r}{N} \right) = (u, v, w)$, 于是 $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N, n, p, q, r, i, j, k) = u^i v^j w^k$, 由此即得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{p,q,r}^N = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k T_{i,j,k} = T^n(u, v, w), \text{ 证毕.}$$

性质 7.3.4^[CGZ,DPI, 84] 离散构造: 设点 $H_i = (u_i, v_i, w_i) \in T, i = 1, 2, 3$, 则曲面(7.3.5)上对应于 $\Delta H_1 H_2 H_3 \subseteq T$ 部分的子三角片可表为 $\Delta H_1 H_2 H_3$ 上的 B-B 曲面

$$T^n(u^*, v^*, w^*) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u^*, v^*, w^*) T_{i,j,k}^*, \quad (u^*, v^*, w^*) \in \Delta H_1 H_2 H_3, \quad (7.3.13)$$

$$T_{i,j,k}^* = (u_1 E_1 + v_1 E_2 + w_1 E_3)^i (u_2 E_1 + v_2 E_2 + w_2 E_3)^j (u_3 E_1 + v_3 E_2 + w_3 E_3)^k T_{000}.$$

$$i + j + k = n. \quad (7.3.14)$$

特别当 $H_2 = T_2, H_3 = T_3$ 时, $T_{i,j,k}^*$ 可用 i 次递归求值法得到:

$$T_{i,j,k}^* = (u_1 E_1 + v_1 E_2 + w_1 E_3)^i T_{0,j,k}^{n-1} = T_{0,j,k}^{n-1}(u_1, v_1, w_1), \quad i + j + k = n. \quad (7.3.15)$$

证 设点 P 关于 $\Delta T, \Delta H_1 H_2 H_3$ 的面积坐标分别是 $(u, v, w), (u^*, v^*, w^*)$, 则按 (7.3.4) 有 $uE_1 + vE_2 + wE_3 = (u^*, v^*, w^*)(u_1 E_1 + v_1 E_2 + w_1 E_3, u_2 E_1 + v_2 E_2 + w_2 E_3, u_3 E_1 + v_3 E_2 + w_3 E_3)^T$, 把上式代入(7.3.9), 按三项展开公式即得(7.3.13), 按性质 7.3.2 有(7.3.15). 证毕.

因多项式在全平面上都有定义, 有时也考虑 ΔT 上定义的曲面的向外延伸部分, 显然有

推论 7.3.1 若点 $(u, v, w) \notin T$, 则性质 7.3.2 仍成立; 若点 $H_i \notin T$, 则性质 7.3.4 仍成立.

性质 7.3.5^[CGZ, 95] 任意点 $H_1 = (u_1, v_1, w_1)$ 处的切平面: 就是递归求 H_1 点值的最后第二步中所得三点 $T_{100}^{n-1}, T_{010}^{n-1}, T_{001}^{n-1}$ 所在的平面 π (此性质可归入 de Casteljau 递推求值法之中).

证 把曲面(7.3.5)离散成三个子三角片, 分别定义在 $\Delta H_1 T_2 T_3, \Delta T_1 H_1 T_3, \Delta T_1 T_2 H_1$ 上. 由 (7.3.15) 及角点切平面性质, 知 $\Delta T_{000}^n T_{010}^{n-1} T_{001}^{n-1}, \Delta T_{000}^n T_{100}^{n-1} T_{001}^{n-1}, \Delta T_{000}^n T_{100}^{n-1} T_{010}^{n-1}$ 分别是此三子曲面在点 T_{000}^n 处的切平面, 但因点 $T_{000}^n = uT_{100}^{n-1} + vT_{010}^{n-1} + wT_{001}^{n-1}$ 在平面 π 上, 所以得证.

7.3.2 三角域上 B ézier 函数曲面的正性和凸性

三角域上参数式 B-B 曲面的凸性条件十分复杂, 仅有文献^[8-10]给出一些初步结果, 郑津津^[11]给出二次情况的充要条件. 但函数式曲面的正性和凸性已有较完美的结果.

定理 7.3.2 二次 Bernstein 多项式(1.3.1)在 $[0,1]$ 上非负, 当且仅当

$$f_0 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1 + \sqrt{f_0 f_2} \geq 0. \quad (7.3.16)$$

证: 若(7.3.16)成立, 则有 $B^2(f; x) = (\sqrt{f_0}(1-x) - \sqrt{f_2}x)^2 + 2(f_1 + \sqrt{f_0 f_2})(1-x)x \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$; 反之, 若(1.3.1)在 $[0,1]$ 上非负, 则 $f_0 = B^2(f; 0) \geq 0, f_2 = B^2(f; 1) \geq 0$, 再取 $x^* = \sqrt{f_0}/(\sqrt{f_0} + \sqrt{f_2}) \in (0,1)$, 由 $B^2(f; x^*) = 2(f_1 + \sqrt{f_0 f_2})(1-x^*)x^* \geq 0$, 得证(7.3.16).

定理 7.3.3^[13] 三角域上二次 Bernstein 多项式 $T^2(u, v, w) = (u, v, w)\mathbf{K}(u, v, w)^T$ 在 T 上非负当且仅当

$$A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0; a + \sqrt{BC} \geq 0, b + \sqrt{CA} \geq 0, c + \sqrt{AB} \geq 0; \quad (7.3.17)$$

以及下面二式之一成立:

$$\sqrt{ABC} + a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C} \geq 0, \quad (7.3.18)$$

$$\det \mathbf{K} \geq 0; \quad (7.3.19)$$

这里

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{200} & T_{110} & T_{101} \\ T_{110} & T_{020} & T_{011} \\ T_{101} & T_{011} & T_{002} \end{pmatrix}. \quad (7.3.20)$$

证: 必要性. (7.3.17)的几何意义是二次三角曲面的三条边界线非负, 因而是必要的. 例如, $u=0$ 对应的曲面边界是 $(1-v)^2 C + 2(1-v)va + v^2 B$, 由定理 7.3.2 知其非负等价于

$C \geq 0, B \geq 0, a + \sqrt{BC} \geq 0$. 若 a, b, c 中至少有二个非负, 不妨设 $b \geq 0, c \geq 0$, 于是

$\sqrt{A}(\sqrt{BC} + a) + b\sqrt{B} + c\sqrt{C} \geq 0$, 即(7.3.18)成立; 反之, 不妨设 $b < 0, c < 0$; 这时若

$Aa - bc \geq 0$ 则 $A^{-1/2}(Aa + A\sqrt{BC} + b\sqrt{AB} + c\sqrt{AC}) \geq A^{-1/2}(b + \sqrt{AC})(c + \sqrt{AB}) \geq 0$.

即(7.3.18)也成立. 若 $b < 0, c < 0$ 且 $Aa - bc < 0$, 在 ΔT 的边 $T_2 T_3$ 上任取点 $P_1 = (0, v, w)$,

再在线段 $T_1 P_1$ 上任取点 $P = (1-t)T_1 + tP_1$, 则曲面非负当且仅当对任意的 $t, v, w \in [0,1]$,

$v + w = 1$, 曲线

$$(1-t, tv, tw)\mathbf{K}(1-t, tv, tw)^T = (1-t)^2 A + 2(1-t)t(wb + vc) + t^2(v^2 B + 2vwa + w^2 C) \quad (7.3.21)$$

为非负. 由定理 7.3.2 知必有

$$wb + vc + \sqrt{A(v^2 B + 2vwa + w^2 C)} \geq 0, \quad 0 \leq v, w \leq 1, \quad v + w = 1. \quad (7.3.22)$$

这等价于 $v^2(AB - c^2) + 2vw(Aa - bc) + w^2(AC - b^2) \geq 0$. 再次应用定理 7.3.2 知必有

$$Aa - bc + \sqrt{(AB - c^2)(AC - b^2)} \geq 0, \quad (7.3.23)$$

这等价于 $A(ABC + 2abc - Aa^2 - Bb^2 - Cc^2) = A \det \mathbf{K} \geq 0$, 这样就得到(7.3.19).

充分性. 由必要性的证明可知, 当(7.3.17)成立时, 曲面非负仅取决于形如(7.3.22)的一式

成立. 当 a, b, c 中有二个非负时这个式子自动成立; 否则, 不妨设 $b < 0, c < 0$, 则曲面非负取决于 (7.3.23) 以及 $AB - c^2 \geq 0, AC - b^2 \geq 0$ 这样三式成立. 但由 $c < 0$ 可知 $AB - c^2 = (\sqrt{AB} + c)(\sqrt{AB} - c) \geq 0$, 同理 $AC - b^2 \geq 0$, 所以曲面非负仅取决于 (7.3.23). 当 $Aa - bc \geq 0$ 时 (7.3.23) 自然成立; 若 $Aa - bc < 0$, 则当 (7.3.19) 成立时能得知 (7.3.23) 成立. 下面假设 (7.3.18) 成立, 但 (7.3.19) 不成立. (7.3.18) 等价于 $(\sqrt{ABC} + a\sqrt{A})^2 \geq (b\sqrt{B} + c\sqrt{C})^2$, 即等价于 $ABC + Aa^2 - Bb^2 - Cc^2 + 2aA\sqrt{BC} - 2bc\sqrt{BC} \geq 0$; (7.3.19) 不成立, 则是 $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - ABC - 2abc > 0$. 两式相加得出

$$2(a^2A - abc + aA\sqrt{BC} - bc\sqrt{BC}) = 2(Aa - bc)(\sqrt{BC} + a) > 0.$$

于是有 $Aa - bc > 0$. 这时 (7.3.23) 自然成立, 所以曲面非负. 定理证毕.

三角曲面的正性与凸性有密切的关系, 因为三角曲面的凸性取决于次数低二次的另一张三角曲面的正性. 另外, Micchelli^[13]发现, $n-1$ 维单纯形上二次 B-B 曲面的正性等价于 n 阶实对称矩阵 \mathbf{K} 的 Copositive 性质, 即对任何 $x_i \geq 0$, $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 二次型 $\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$ 恒为非负. 这样, 高维单形上二次 B-B 曲面正性的研究推动了代数的研究^[14, 15]. 定理 7.3.2, 7.3.3 等价于二阶或三阶 Copositive 矩阵的充要条件. 但寻找二次以上的 B-B 三角曲面用其系数来表示正性的充要条件难度很大. 下面转向凸性研究, 先引入

定义 7.3.5 对于两点 $P_i = (u_i, v_i, w_i) \in T$, $i = 0, 1$, 如果把线段 P_0P_1 表示为 $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = (u(t), v(t), w(t))$, $0 \leq t \leq 1$, 则当 B-B 曲面 $T^n(u, v, w)$ 限于此线段之上时,

$$\frac{d}{dt}T^n(u(t), v(t), w(t)) = (\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{\partial T^n}{\partial u}, \frac{\partial T^n}{\partial v}, \frac{\partial T^n}{\partial w} \right)^T \Big|_{P \in P(t)}, \quad (7.3.24)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}T^n(u(t), v(t), w(t)) = (\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T^n}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial u \partial w} \\ \frac{\partial^2 T^n}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^2 T^n}{\partial w \partial u} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial w \partial v} & \frac{\partial^2 T^n}{\partial w^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \Big|_{P \in P(t)} \quad (7.3.25)$$

分别称为沿线段 P_0P_1 对曲面 $T^n(u, v, w)$ 的一、二阶方向导数, 这里

$$(\xi, \eta, \zeta) = (u_1 - u_0, v_1 - v_0, w_1 - w_0), \quad \xi + \eta + \zeta = 0. \quad (7.3.26)$$

定义 7.3.6 函数曲线 $F(t)$ 或函数曲面 $F(P)$ 称为是凸的, 若对其定义域内任意两点 P, Q , 任意实数 $\lambda \in [0, 1]$, 总有

$$F((1-\lambda)P + \lambda Q) \leq (1-\lambda)F(P) + \lambda F(Q). \quad (7.3.27)$$

定理 7.3.4 三角域上函数曲面 $T^n(u, v, w)$ 在 T 上凸的充要条件是对任意方向 (ξ, η, ζ) , 任意点 $P \in T$, 成立着

$$D_1\xi^2 + D_2\eta^2 + D_3\zeta^2 \geq 0. \quad (7.3.28)$$

其中

$$\begin{cases} D_1 = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \right) T^n(u, v, w), \\ D_2 = \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial w} \right) T^n(u, v, w), \\ D_3 = \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial v} \right) T^n(u, v, w). \end{cases} \quad (7.3.29)$$

证 首先证明恒等式

$$(\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (A + a - b - c)\xi^2 + (B + b - c - a)\eta^2 + (C + c - a - b)\zeta^2. \quad (7.3.30)$$

因为

$$\begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + a - b - c & 0 & 0 \\ 0 & B + b - c - a & 0 \\ 0 & 0 & C + c - a - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b + c - a & c & b \\ c & c + a - b & a \\ b & a & a + b - c \end{pmatrix},$$

再记上式右端第二项为 \mathbf{M} , 由

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{M} (\xi, \eta, \zeta)^T &= (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= (\xi, \eta) \begin{pmatrix} c-a & c-a & c-a \\ c-b & c-b & c-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

即知(7.3.30)成立. 曲面 T^n 在 T 上凸, 等价于对任意方向 (ξ, η, ζ) , 任意点 $t \in [0, 1]$, 曲线 $T^n(u(t), v(t), w(t))$ 为凸; 亦即其二阶方向导数(7.3.25)非负. 于是应用(7.3.30)即知定理得证.

定理 7.3.5 曲面 $T^n(u, v, w)$ 在 T 上凸的充要条件是 (无须对方向) 对任意点 $P \in T$, 有

$$D_1 + D_3 \geq 0, \quad D_2 + D_3 \geq 0, \quad D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1 \geq 0. \quad (7.3.31)$$

证 把(7.3.28)改写为 $(D_1 + D_3)\xi^2 + 2D_3\xi\eta + (D_2 + D_3)\eta^2$, 此式对任意的 (ξ, η) 非负, 当且仅当 $(D_1 + D_3)(D_2 + D_3) - D_3^2 \geq 0$, $D_1 + D_3 \geq 0$, $D_2 + D_3 \geq 0$, 此即(7.3.31), 证毕.

定义 7.3.7 若 E_1, E_2, E_3 如(7.3.8)定义, 曲面 $T^n(u, v, w)$ 的 B 网满足 $3n(n-1)/2$ 个不等式

$$\nabla_1 T_{i,j,k} = (E_1 - E_2)(E_1 - E_3)T_{i,j,k} \geq 0, \quad (7.3.32)$$

$$\nabla_2 T_{i,j,k} = (E_2 - E_3)(E_2 - E_1)T_{i,j,k} \geq 0, \quad i + j + k = n - 2, \quad (7.3.33)$$

$$\nabla_3 T_{i,j,k} = (E_3 - E_1)(E_3 - E_2)T_{i,j,k} \geq 0, \quad (7.3.34)$$

则称此 n 阶 B 网为三向凸; 顺次满足以上三式的 B 网分别称为 u 向凸, v 向凸和 w 向凸.

定理 7.3.6 曲面 $T^n(u, v, w)$ 在 T 上凸的一个充分条件是 B 网为三向凸.

证 应用(7.3.9)得 $\partial^2 T^n / \partial u \partial v = n(n-1)(uE_1 + vE_2 + wE_3)^{n-2} E_1 E_2 T_{000}$, 所以由(7.3.29)得

$$\begin{aligned} D_1 &= n(n-1)(uE_1 + vE_2 + wE_3)^{n-2} (E_1 - E_2)(E_1 - E_3)T_{000} \\ &= n(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} B_{i,j,k}^{n-2}(u, v, w) \nabla_1 T_{i,j,k} \geq 0, \quad (u, v, w) \in T. \end{aligned} \quad (7.3.35)$$

同理 $D_2 \geq 0, D_3 \geq 0, (u, v, w) \in T$, 于是(7.3.28)成立, 曲面为凸. 证毕.

定理 7.3.6 给出了设计凸曲面的一个简单办法, 即只要调整 $T_{i,j,k}$ 使其满足 B 网三向凸的不等式组即可. 但即使当 $n=2$ 时, 这也仅是一个充分条件, 例如曲面 $T^2(u, v, w) = -u^2 + 2v^2 + 2w^2$, 不满足(7.3.32)但满足(7.3.31). 为描述更好的保凸条件, 我们有

定理 7.3.7 曲面 $T^n(u, v, w)$ 在 T 上凸的一个充分条件是其 B 网满足弱凸条件:

$$\begin{cases} (\nabla_1 + \nabla_3)T_{i,j,k} \geq 0, \\ (\nabla_2 + \nabla_3)T_{i,j,k} \geq 0, \\ \nabla_1 T_{i,j,k} \nabla_2 T_{i,j,k} + \nabla_2 T_{i,j,k} \nabla_3 T_{i,j,k} + \nabla_3 T_{i,j,k} \nabla_1 T_{i,j,k} \geq 0, \end{cases} \quad i+j+k=n-2. \quad (7.3.36)$$

当 $n=2, n=3$ 时, 上述条件也是必要的.

证 由(7.3.35)知

$$D_1 \xi^2 + D_2 \eta^2 + D_3 \zeta^2 = n(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} B_{i,j,k}^{n-2}(u, v, w) \Omega T_{i,j,k}, \quad (7.3.37)$$

$$\Omega = \xi^2 \nabla_1 + \eta^2 \nabla_2 + \zeta^2 \nabla_3. \quad (7.3.38)$$

所以按定理 7.3.4, $\Omega T_{i,j,k} \geq 0$ ($i+j+k=n-2$) 是曲面为凸的充分条件. 但把它写为 $(\nabla_1 T_{i,j,k})\xi^2 + (\nabla_2 T_{i,j,k})\eta^2 + (\nabla_3 T_{i,j,k})\zeta^2 \geq 0$, 参见定理 7.3.5 的证明可见它恰等价于 (7.3.36). 下面假设曲面为凸, 当 $n=2$ 时, (7.3.37) 右端仅有的一项 $2[(\nabla_1 T_{000})\xi^2 + (\nabla_2 T_{000})\eta^2 + (\nabla_3 T_{000})\zeta^2]$, 对任意的 (ξ, η, ζ) , $\xi + \eta + \zeta = 0$, 均为非负. 所以得出(7.3.36). 而当 $n=3$ 时, (7.3.37) 右端为 $6u\Omega T_{100} + 6v\Omega T_{010} + 6w\Omega T_{001}$, 对任意 (ξ, η, ζ) , $\xi + \eta + \zeta = 0$ 及任意点 $P \in T$ 均为非负. 特别地取 $P = T_1, T_2, T_3$, 分别得出 $\Omega T_{100}, \Omega T_{010}, \Omega T_{001} \geq 0$ 对任意 (ξ, η, ζ) , $\xi + \eta + \zeta = 0$ 均成立. 这就导出(7.3.36). 证毕.

弱凸条件(7.3.36)相对于曲面离散是不变的^[16]. 下面, 为描述满足定义 7.3.7 的 B 网的几何意义, 我们给出以下的引理和定理.

引理 7.3.1 若 $f(t)$ 是连续曲线, 且能分割成不仅具有一个公共点, 而且具有一个公共部分 (a, b) 的两段凸曲线, 则 $f(t)$ 在定义域 Σ 内为凸.

证 任取两点 $x, y \in \Sigma$, 设 $(x+y)/2 = m$. 先考虑 $m \in (a, b)$ 的情况, 则必存在两点 x_1, y_1 使得 $(x_1 + y_1)/2 = m$, 且 $x < x_1 < m < y_1 < y$, $a < x_1 < y_1 < b$. 于是必可确定 $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, 使得 $x_1 = \alpha x + \beta m$, $y_1 = \beta m + \alpha y$. 因 $f(t)$ 在 $t \in (a, b)$, $t < b$, $t > a$ 时为凸, 所以得到 $2f(m) \leq f(x_1) + f(y_1) \leq \alpha f(x) + 2\beta f(m) + \alpha f(y)$, 于是 $2f(m) \leq f(x) + f(y)$, 即 $f(t)$ 为凸. 下面再考虑 $m \notin (a, b)$ 的情况. 不失一般性, 可设 $m \in [b, y]$ 且 $x \leq a < b \leq y$. 这时, 固定 (a, b) 内任一点 z , 再取点 x' , 使 $(x+x')/2 = z$, 于是 $z < x' < y$, 因而可以确定 $\lambda, 0 < \lambda < 1$, 使得 $x' = \lambda z + (1-\lambda)y$, 所以 $m = (2-\lambda)z/2 + \lambda y/2$. 但是注意到 $z \in (a, b)$, 应用 $m \in (a, b)$ 的情况中已证的结论, 有 $2f(z) \leq f(x) + f(x') \leq f(x) + \lambda f(z) + (1-\lambda)f(y)$, 因此 $2f(m) \leq (2-\lambda)f(z) + \lambda f(y) \leq f(x) + f(y)$. 即 $f(t)$ 为凸. 证毕.

定理 7.3.8 曲面 $T^n(u, v, w)$ 的 B 网凸, 当且仅当 B 网三向凸.

证 必要性: 若 B 网凸, 则在 u 方向上, 凡有一条公共边界在 T 上的投影平行于边 $T_2 T_3$ 的 $n(n-1)/2$ 对小三角形所组成的空间曲面是 T 上的凸函数, 所以由图 7.3.4 知 $\hat{T}^n(A)/2 + \hat{T}^n(B)/2 = \hat{T}^n((A+B)/2) = \hat{T}^n((P+Q)/2) \leq \hat{T}^n(P)/2 + \hat{T}^n(Q)/2$, 这表明 $T_{i+1,j,k+1} + T_{i+1,j+1,k} \leq T_{i+2,j,k} + T_{i,j+1,k+1}$ 或(7.3.24)成立, 所以 B 网 u 向凸. 同理可证 B 网 v 向凸和 w 向凸.

充分性: 当 $n=2$ 时, 三向凸条件是 $T_{200} + T_{011} \geq T_{101} + T_{110}$, $T_{020} + T_{101} \geq T_{110} + T_{011}$, $T_{002} + T_{110} \geq T_{011} + T_{101}$, 这表明有一条公共边界的三对小三角形在 T 上凸. 现假定 P, Q 是 T 上的任意两点, 则如图 7.3.5, 至少有一个带阴影的小三角形既不含点 P 又不含点 Q , 于是直线段 PQ 被包含在两个平行四边形的并集中. 假定 PQ 是 B 网 \hat{T}^2 上曲线 $\overline{P'Q'}$ 在 T 上的投影, 则当 PQ 不在 T 的边界上时, $\overline{P'Q'}$ 便是一条有公共曲线段的两条凸曲线之并集, 由引理

7.3.1, 它是凸曲线; 当 PQ 在 T 的边界上时, 由以上三向凸的三个不等式两两相加, 可得 $T_{200} + T_{020} \geq 2T_{110}$, $T_{020} + T_{002} \geq 2T_{011}$, $T_{002} + T_{200} \geq 2T_{101}$, 这表明 \hat{T}^2 的三条边界线为凸, 于是 $\overline{P'Q'}$ 凸. 今假设对每一个 $n-1$ 阶 B 网, 充分性成立. 考虑三向凸的 n 阶 B 网. 凡它的小三角片在 T 上的投影与 T 的一条固定边界接触, 就把此小三角片从 B 网中除去, 这样可得到三个 $n-1$ 阶的 B 网 (见图 7.3.6), 它们都是三向凸的, 而 T 上的任意线段 PQ 必包含在其中两个 B 网在 T 上投影的并集中. 由归纳假设及引理 7.3.1, PQ 对应的 B 网上的曲线为凸. 所以原 n 阶 B 网凸. 由归纳法得证充分性. 证毕.

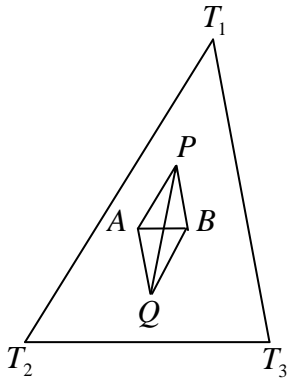


图 7.3.4 由 B 网凸推得 B 网 u 向凸

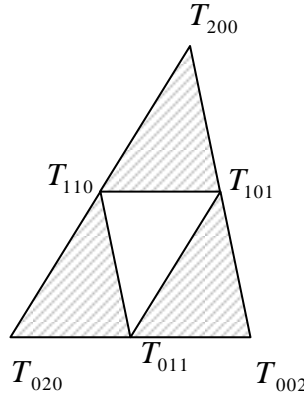


图 7.3.5 PQ 的位置

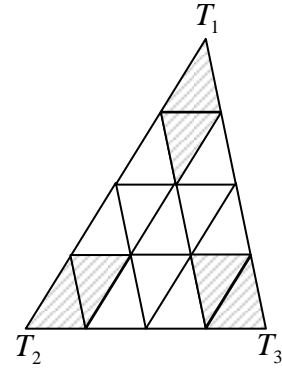


图 7.3.6 充分性的归纳法证明

推论 7.3.2 B 网凸的 B-B 三角曲面凸, 即 B-B 三角曲面具有保凸性.

最后必须指出: 若一元函数 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数, 那么 $f(i/n) + f((i+2)/n) - 2f((i+1)/n) \geq 0$, 即 $\Delta^2 f(i/n) \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n-2$. 于是我们可得到 $d^2 B^n(f; x)/dx^2 \geq 0$, 这表明与 f 相应的 Bernstein 多项式是凸函数. 但类似的结论对三角域上的 Bernstein 多项式不成立. 如图 7.3.7, 设 $f(u, v, w)$ 由 $\Delta T_1 M T_3$ 与 $\Delta T_1 A M$ 拼成, 点 A 到 T 的投影是 T_2 , $AT_2 = 1$, M 是 $T_2 T_3$ 的中点, 则 f 凸; 但是 $T^2(f; P) = v^2 + uv$ 在 T 上不凸. 这只要取点 T_1 和 M 来验证凸性条件即知.

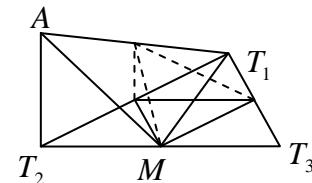


图 7.3.7 相应于凸网格的二元 Bernstein 多项式不凸

7.4 矩形域上的 B 样条曲面, 有理 Bézier 曲面与有理 B 样条曲面

由于 Bézier 曲面不能精确表示除抛物面以外的二次曲面, 所以必须引进有理参数曲面.

定义 7.4.1 若给定 \mathcal{R}^3 空间中, 在齐次坐标下的 $(m+1) \times (n+1)$ 个点向量 $\tilde{R}_{ij} = (\omega_{ij}x_{ij}, \omega_{ij}y_{ij}, \omega_{ij}z_{ij}, \omega_{ij}), i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; \omega_{ij} > 0$, 则参数曲面

$$\tilde{R}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v), \omega(u, v)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \tilde{R}_{ij}, 0 \leq u, v \leq 1 \quad (7.4.1)$$

称为矩形域 $[0,1] \otimes [0,1]$ 上的 $m \times n$ 次有理 Bézier 曲面, 式中 $B_i^m(u), B_j^n(v)$ 为 m, n 次 Bernstein 基, \tilde{R}_{ij} 称为控制顶点, ω_{ij} 称为权因子. (7.4.1) 在仿射坐标系下的对应表达式是

$$R(u, v) = \left(\frac{X(u, v)}{\omega(u, v)}, \frac{Y(u, v)}{\omega(u, v)}, \frac{Z(u, v)}{\omega(u, v)} \right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \omega_{ij} R_{ij} / \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \omega_{ij},$$

$$\mathbf{R}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}); \omega_{ij} > 0; 0 \leq u, v \leq 1. \quad (7.4.2)$$

由张量积表达式(7.4.1)可推知, 有理 B ézier 曲面具有与 B ézier 曲面相类似的几何与仿射不变性、凸包性、交互性、递归求值法和离散算法. 特别, 当 ω_{ij} 为常数时, 它退化为 B ézier 曲面. 图 12.11.2 给出了一张 3×3 次的有理 B ézier 曲面.

定义 7.4.2 给定 \mathfrak{R}^3 空间中, 在齐次坐标下 $m \times n$ 个点向量 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = (w_{ij}x_{ij}, w_{ij}y_{ij}, w_{ij}z_{ij}, w_{ij})$, $w_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$; 同时再给定节点向量 $U = \{u_\alpha\}_{\alpha=-\infty}^{+\infty}$, $V = \{v_\beta\}_{\beta=-\infty}^{+\infty}$, $u_\alpha \leq u_{\alpha+1}, v_\beta \leq v_{\beta+1}$. 记相应的 u 向 k 阶, v 向 h 阶 B 样条基分别为 $N_{i,k}(u)$, $N_{j,h}(v)$, 则有理参数曲面

$$\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v), w(u, v)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) \tilde{\mathbf{r}}_{ij},$$

$$u_k \leq u \leq u_{m+1}, v_h \leq v \leq v_{n+1}, m \geq k, n \geq h \quad (7.4.3)$$

称为矩形域上 $[u_k, u_{m+1}; v_h, v_{n+1}]$ 相对于节点向量 U, V 的 $k \times h$ 阶 $((k-1) \times (h-1)$ 次) 非均匀有理 B 样条(NURBS)曲面, 式中 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$ 称为控制顶点, $w_{i,j}$ 称为权因子. (7.4.3) 在仿射坐标系下的对应表达式是

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{X(u, v)}{w(u, v)}, \frac{Y(u, v)}{w(u, v)}, \frac{Z(u, v)}{w(u, v)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) w_{ij} \mathbf{r}_{ij}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) w_{ij}},$$

$$\mathbf{r}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}); w_{ij} > 0; u_k \leq u \leq u_{m+1}; v_h \leq v \leq v_{n+1}; m \geq k, n \geq h. \quad (7.4.4)$$

若取 u_k, u_{k+1} 均为 $k-1$ 重节点, $u_k < u_{k+1}$; v_h, v_{h+1} 均为 $h-1$ 重节点, $v_h < v_{h+1}$; 则曲面 (7.4.4): $\mathbf{r}(u, v)$ ($u_k \leq u \leq u_{k+1}, v_h \leq v \leq v_{h+1}$) 退化为 $(k-1) \times (h-1)$ 次有理 B ézier 曲面. 此外它还可退化为 B 样条曲面.

定义 7.4.3 在定义 7.4.2 中, 权因子 w_{ij} 为常数的曲面

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) \mathbf{p}_{ij},$$

$$\mathbf{p}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}); u_k \leq u \leq u_{m+1}; v_h \leq v \leq v_{n+1}; m \geq k, n \geq h \quad (7.4.5)$$

称为矩形域 $[u_k, u_{m+1}; v_h, v_{n+1}]$ 上相对于节点向量 U, V 的 $k \times h$ 阶 $((k-1) \times (h-1)$ 次) 非均匀 B 样条曲面, \mathbf{p}_{ij} 称为控制顶点.

曲面(7.4.4)或(7.4.5)具有与 NURBS 曲线类似的几何与仿射不变性、凸包性、交互性、局部性、分片(段)性、连续阶性、递归求值算法和离散构造. 使用有理参数曲面的优点在于用同一个程序系统来统一处理二次曲面, 旋转曲面和自由曲面.

7.5 旋转曲面的有理 B ézier 表示

7.5.1 有理双二次 B ézier 表示

定理 7.5.1 若 yz 平面上的母线 l 表为以 (y_i, z_i) 为控制顶点, 以 g_i 为权因子 ($i = 0, 1, 2$) 的有理二次 B ézier 曲线 $(y(u), z(u))$, l 绕 z 轴依逆时针和顺时针方向各转动 θ 角, $0 < \theta < \pi/2$, 则由此生成的旋转曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 可表成以 $\omega_{ij} = g_i h_j$ ($i, j = 0, 1, 2$) 为权因子的有理双二次 B ézier 曲面(7.4.2) ($m = n = 2$) 的充要条件是

$$h_1^2 = h_0 h_2 \cos^2 \theta, \quad (7.5.1)$$

$$(\mathbf{R}_{i0}, \mathbf{R}_{i1}, \mathbf{R}_{i2}) = ((-y_i \sin \theta, y_i \cos \theta, z_i), (0, y_i \sec \theta, z_i), (y_i \sin \theta, y_i \cos \theta, z_i)),$$

$$i = 0, 1, 2. \quad (7.5.2)$$

证 权因子 $\omega_{ij} = g_i h_j$ 的有理曲面(7.4.2)可写为 $\mathbf{R}(u, v) = \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) h_j \mathbf{R}_j(u) / \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) h_j$,

其中 $\mathbf{R}_j(u) = (x_j(u), y_j(u), z_j(u)) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) g_i \mathbf{R}_{ij} / \sum_{i=0}^2 B_i^2(u) g_i, j = 0, 1, 2$. $\mathbf{R}(u, v)$ 为旋转面当且仅当对任意固定的 $u \in [0, 1]$, $\mathbf{R}(u, v)$ 构成半径为 $y(u)$ 的有理二次圆弧. 应用定理 3.5.2 知道 (7.5.1) 成立, 但是此有理圆弧的首末控制顶点为 $\mathbf{R}_j(u) = (\mp y(u) \sin \theta, y(u) \cos \theta, z(u)), j = 0, 2$; 且中间一个控制顶点为 $\mathbf{R}_1(u) = (0, \|\mathbf{R}_2(u) - \mathbf{R}_0(u)\| \csc 2\theta, z(u))$. 这等价于(7.5.2). 证毕.

7.5.2 有理双三次 Bézier 表示

定理 7.5.2 若 yz 平面上的母线 l 表为以 $(y_i, z_i), (y_0 \neq 0)$ 为控制顶点, 以 g_i 为权因子 ($i = 0, 1, 2, 3$) 的有理三次 Bézier 曲线 $(y(u), z(u))$, 又假定 l 绕 z 轴旋转时, 点 $(y(0), z(0))$ 的运动轨迹表为以 $\mathbf{R}_j(0)$ 为控制顶点, 以 h_j 为权因子 ($j = 0, 1, 2, 3$) 的有理三次 Bézier 曲线, 则由此生成的旋转曲面 $\mathbf{R}(u, v)$ 可表为有理双三次 Bézier 曲面(7.4.2) ($m = n = 3$), 这里

$$\omega_{ij} = g_i h_j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad (7.5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{00} & \mathbf{R}_{01} & \mathbf{R}_{02} & \mathbf{R}_{03} \\ \mathbf{R}_{10} & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{20} & \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{30} & \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{y_0} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} (\mathbf{R}_0(0), \mathbf{R}_1(0), \mathbf{R}_2(0), \mathbf{R}_3(0)) + \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} (\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}). \quad (7.5.4)$$

证 固定 $u \in [0, 1]$, 截面曲线 $\mathbf{F}(u, v)$ 是中心在 z 轴的一段圆弧, 可表为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} \\ &= [\mathbf{R}_0(u), \dots, \mathbf{R}_3(u)][(1-v)^3 h_0, \dots, v^3 h_3]^T / [h_0, \dots, h_3][(1-v)^3, \dots, v^3]^T, \quad 0 \leq u, v \leq 1. \end{aligned}$$

因对不同的 $u \in [0, 1]$, $\mathbf{F}(u, v)$ 的分量与圆弧半径 $y(u)$ 成正比, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u, v) &= y(u)\mathbf{F}(0, v)/y(0) \\ &= \frac{[(1-u)^3 g_0, \dots, u^3 g_3][y_0, \dots, y_3]^T [\mathbf{R}_0(0), \dots, \mathbf{R}_3(0)][(1-v)^3 h_0, \dots, v^3 h_3]^T}{y_0[(1-u)^3, \dots, u^3][g_0, \dots, g_3]^T [h_0, \dots, h_3][(1-v)^3, \dots, v^3]^T}. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{R}(u, v) = z(u)\mathbf{k} + \mathbf{F}(u, v)$, 且

$$z(u) = \frac{[(1-u)^3 g_0, \dots, u^3 g_3][z_0, \dots, z_3]^T [1, 1, 1][(1-v)^3 h_0, \dots, v^3 h_3]^T}{[(1-u)^3, \dots, u^3][g_0, \dots, g_3]^T [h_0, \dots, h_3][(1-v)^3, \dots, v^3]^T},$$

由有理 Bézier 曲面的表示唯一性得证(7.5.3), (7.5.4). 证毕.

下面再给出绕轴旋转 π 角的常用旋转面的一个简单构造法.

定理 7.5.3 若 yz 平面上的母线 l 表为以 (y_i, z_i) 为控制顶点, 以 g_i 为权因子 ($i = 0, 1, 2, 3$) 的有理三次 Bézier 曲线, l 绕 z 轴依逆时针和顺时针方向各转动 $\pi/2$ 角, 则由此生成的旋转曲面可表成以 $\omega_{ij} = g_i h_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) 为权因子的有理双三次曲面(7.4.2) ($m = n = 3$) 的充要条件是

$$\begin{aligned} h_0 h_3 &= 9h_1 h_2; \quad z_{ij} = z_i, i, j = 0, 1, 2, 3; \quad -x_{i0} = -x_{i1} = x_{i2} = x_{i3} = y_i; \\ y_{i0} &= y_{i3} = 0; \quad y_{ij} = \pm \sqrt{h^{(j)}} y_i, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2; \\ h^{(1)} &= 4h_0 h_2 / (3h_1^2), \quad h^{(2)} = 4h_1 h_3 / (3h_2^2). \end{aligned}$$

7.6 球面的有理参数表示

例 7.6.1 应用定理 7.5.1 和 3.5.2 可把一块三角单位球面片表为 2×2 次有理 Bézier 曲面(7.4.2), 其控制网格是边长为 1 的正方体的三个侧面, $2g_1^2 = g_0g_2$, $2h_1^2 = h_0h_2$, 见图 7.6.1.

例 7.6.2 应用定理 7.5.3 和 5.2.2 可把单位半球面表为 3×3 次有理 Bézier 曲面(7.4.2), 其中控制网格是棱长 $4 \times 4 \times 2$ 的立方体的五个侧面, $(g_0, g_1, g_2, g_3) = (h_0, h_1, h_2, h_3) = (3, 1, 1, 3)$, 见图 7.6.2.

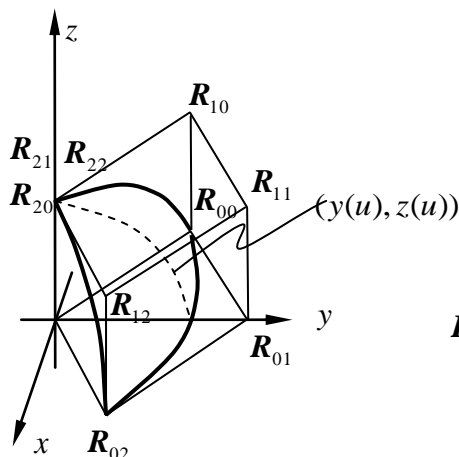


图 7.6.1 八分之一单位球面的有理双二次 Bézier 表示

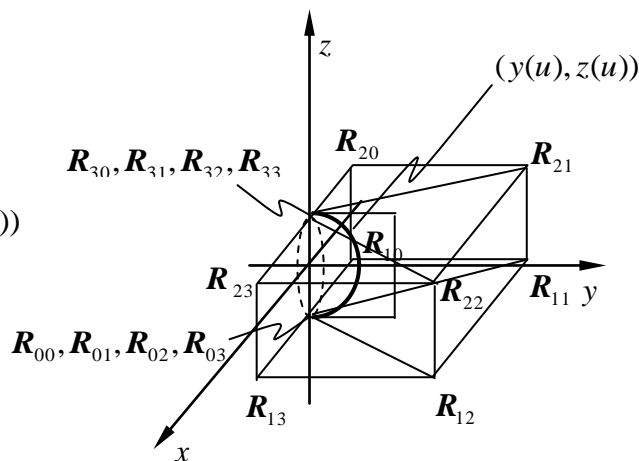


图 7.6.2 单位半球面的有理双三次 Bézier 表示

当然我们很容易把以上两张曲面改写为定义域边界取为重节点的 NURBS 曲面, 从而得到球面片的 NURBS 表示.

主要文献

- [CS, 67] Coons, S.A., Surfaces for computer aided design of space forms, MIT Project MAC-TR-41, (or see AD-663504), 1967
- [WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学数学系研究生学位课程讲义, 1999.
- [CGZ, DPJ, 84] Chang Gengzhe, Davis P.J., The convexity of Bernstein polynomials over triangles, Journal of Approximation Theory, 1984, 40(1): 11-28.
- [CGZ, FYY, 84] Chang Gengzhe, Feng Yuyu, An improved condition for the convexity of the Bernstein-Bézier surfaces over triangles, Computer Aided Geometric Design, 1984, 1: 279-283.
- [CGZ, FYY, 85] Chang Gengzhe, Feng Yuyu, A new proof of the convexity of the Bernstein polynomials over triangles, Chinese Annual of Mathematics, 1985, 6B(2): 171-176.
- [CGZ, 95] 常庚哲, 曲面的数学, 湖南教育出版社, 长沙, 1995.
- [WGJ, 89] 王国瑾, 旋转曲面的有理 Bernstein-Bézier 表示, 高校应用数学学报, 1989, 4(2): 157-171.
- [WGJ, 90] 王国瑾, 旋转曲面 CAD 的有理 B 样条方法, 软件学报, 1990, 1(4): 24-39.
- [WGJ, 91] Wang Guojin, Rational cubic circular arcs and their application in CAD, Computers in Industry, 1991, 16(3): 283-288.

参考文献

- 1 Farin, G. E., Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r polynomials, TR/91, Department of Mathematics, Brunel University, Uxbridge, UK., 1980.
- 2 Farin, G. E., Triangular Bernstein-Bézier patches, Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(2): 83-127
- 3 苏步青, 刘鼎元, 计算几何, 上海科学技术出版社, 上海, 1981
- 4 华宣积, 邝志全, Bézier 曲面的凸性定理, 浙江大学学报, 计算几何论文集, 1982, 182-189.
- 5 许伟, 矩形域上 Bernstein-Bézier 多项式曲面的凸性, 应用数学学报, 1990, 13(2): 176-184.
- 6 陈发来, 冯玉瑜, 矩形域上 Bézier 曲面的凸性, 高等学校计算数学学报 (计算几何专辑), 1993, 7-13.
- 7 陈发来, 双二次 Bézier 曲面的正性和凸性, 高校应用数学学报, 1996, 11A(4): 467-476
- 8 Zhou, C.Z., On the convexity of parametric Bézier triangular surfaces, Computer Aided Geometric Design,

-
- 1990, 7(6): 459-463.
- 9 Cao, Y., Hua, X.J., The convexity of quadratic parametric triangular Bernstein-Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1991, 8(1): 1-6.
 - 10 刘晓春, 三角域上参数 Bézier 曲面为凸的一个充分条件, *数学年刊*, 1990, 11A(4): 467-473.
 - 11 Zheng, J.J. The convexity of parametric Bézier triangular patches of degree 2, *Computer Aided Geometric Design*, 1993, 10(6): 521-530.
 - 12 Hadeler, K.P., On copositive matrices, *Linear Algebra & its Applications*, 1983, 49: 79-89.
 - 13 Micchelli, C.A., Pinkus, A., Some remarks on nonnegative polynomials on polyhedra, *Probability, Statistics and Mathematics*, 1989, 161-185.
 - 14 Li, P, Feng, Y.Y., Criteria for copositive matrices of order four, *Linear Algebra & its Applications*, 1993, 194: 109-124.
 - 15 Andersson, L.E., Chang, G.Z., Elfving T., Criteria for copositive matrices using simplices and barycentric coordinates, *Linear Algebra & its Applications*, 1995, 220: 9-30.
 - 16 Feng, Y.Y., Chen, F.L., Zhou, H.L., The invariance of weak convexity conditions of B-nets with respect to subdivision, *Computer Aided Geometric Design*, 1994, 11(1): 97-107.