

## 第十五章 曲线曲面形式之间的互化

曲线曲面形式的互化,指的是同一条(张)参数曲线(曲面)用不同多项式基来表示时不同特征网格之间的相互转化(Conversion),或者指拓扑结构不同的矩形曲面片与三角曲面片的相互转化,或者指参数曲线曲面隐式化(Implicitization)和隐式曲线曲面参数化(Parameterization).至于曲线曲面的近似合并(Approximate merging),例如 Hoschek<sup>[1,2]</sup>提出的用尽量少的几段(片)曲线(曲面)来近似代替  $G^1$  拼接的一批曲线(曲面),以及有理曲线曲面的多项式逼近(见第十二章)和参数曲线曲面的降阶逼近(见第十四章),则均属于近似转化或逼近转化,不在本章论题之内.

形式互化在 CAGD 中起着重要作用.我们已经看到,在第一章中,在研究 B ézier 曲线与 Ferguson 曲线的互化时证明了 Bernstein 基的线性无关性;在第七章中,利用 Hermite 插值曲线到 B ézier 曲线的转化,解释了双三次 Coons 曲面的扭矢之谜;在第八章中,利用 B ézier 曲面到 Wang-Ball 曲面的转化,提高了曲面求值和升降阶的速度;在第十一章中,利用 B 样条曲线曲面到 B ézier 曲线曲面的转化,实现了前者的离散求交;在第十四、十六章中,利用 B ézier 曲线与 Chebyshev 多项式曲线或 Legendre 多项式曲线的互化,得到了最佳一致收敛的降阶逼近或等距逼近.除了理论推导和算法设计的需要以外,形式互化主要是为了实现造型系统或图形系统之间的数据交换,也是为了获得不同类型的曲线曲面在同一系统中混合使用时进行拼接、求导、求交、绘制等几何操作的一致性.

不同多项式基来表示的曲线曲面互化,首先归结为这些多项式基之间的互化.鉴于 Bernstein 基、幂基、Hermite 基、广义 Ball 基、Chebyshev 基等的互化方法前已提及,本章重点导出低次 NURBS 曲线曲面与有理 B ézier 曲线曲面的一般互化公式.

1984 年,几何设计专家 Barnhill<sup>[3]</sup>在 Surface in CAGD 的国际会议上,指出矩形片与三角片的混合使用是 CAGD 的八个重要课题之一.因此,矩形曲面片与三角曲面片的互化和拼接,是 CAGD 的一个热点. Brueckner<sup>[4]</sup>,叶林<sup>[5]</sup>,王俊<sup>[6]</sup>都给出了一些互化公式,但都是把 B ézier 三角片表为矩形片的 trimmed(裁剪)曲面,几何意义不明显. Lino 和 Wilde<sup>[7]</sup>把一张 B ézier 三角片分解为三张同次的非退化矩形片,但子矩形片是有理形式且控制顶点不能直接计算. Goldman 和 Filip<sup>[8]</sup>把一张  $m \times n$  次的矩形片精确地分割为两张  $m+n$  次 B ézier 三角片,但转化公式比较复杂.此外 Sheng<sup>[9]</sup>, Piegl<sup>[10]</sup>都对 trimmed 曲面的三角化有所研究.总结以往的工作,我们认为一个好的互化方法应当具有直观的几何意义,且新曲面的控制顶点能由已知曲面的控制顶点来被稳定而递归地计算.本章介绍的研究成果:由一张 B ézier 三角片转化为三张矩形片,或由一张 B ézier 矩形片转化为二张三角片,都体现了这些要求.特别是,我们给出了矩形片按参数域内一条多项式曲线分割而得的两张 trimmed 曲面片(与沿等参数线分割的一般离散方法不同,不妨称此分割为广义离散)向 B ézier 矩形片的转化算法,进一步解决了 Kiciak<sup>[11]</sup>于 1995 年所提出的两个公开问题之一: trimmed 曲面沿参数域内一条多项式曲线的拼接问题.

鉴于隐式曲线曲面的优点及其在 CAGD 中的重要地位,参数曲线曲面隐式化在几何造型和求交算法中也起着很大的作用.典型的方法有 Salmon<sup>[12]</sup>法, Dixon<sup>[13]</sup>法和 Sederberg<sup>[14]</sup>法,以及基于 Gr öbner 基<sup>[15]</sup>的方法,数值方法<sup>[16]</sup>,多元结式方法<sup>[17]</sup>,逼近方法<sup>[18, 19]</sup>等. 1995 年 Sederberg 和陈发来<sup>[20]</sup>在 SIGGRAPH 国际图形会议上报告的活动曲线/曲面法则是全新的好方法.本章应用 de Casteljau 算法而无须利用结式,对 Goldman 和 Sederberg<sup>[21]</sup>得出的  $n$  次有理 B ézier 曲线隐式化方程进行了巧妙的证实.这一验证揭示了隐式方程的矩阵结构与 de Casteljau 算法之间的深刻联系.

本章第 1,2 节内容取材于[WGJ, 90];第 3 节内容取材于[WGJ, 92];第 4 节内容取材于[HSM, 96a];第 5 节内容取材于[HSM, 96b];第 6 节内容取材于[HSM, WGZ, JTG, 96a], [HSM, WGZ, JTG, 96b];第 7 节内容取材于[HSM, SJG, WGZ, 99];第 8 节内容取材于[STW, WGJ, 94];第 9 节内容取材于[WGJ, STW, 99].

### 15.1 二次 NURBS 曲线与二次有理 B ézier 曲线之间的互化

**定理 15.1.1** 设  $N_i^2(t)$  是定义在节点向量  $\{t_i\}_{i=n-1}^{n+2}$  上的二次 B 样条基函数,  $t_i$  的节点重数不大于 2, 则非均匀有理二次 B 样条曲线

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=n-2}^n N_i^2(t) w_i \mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=n-2}^n N_i^2(t) w_i, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, w_i > 0 \quad (15.1.1)$$

可以转化为有理二次 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}(T) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(T) W_i \mathbf{R}_i \Big/ \sum_{i=0}^2 B_i^2(T) W_i, \quad 0 \leq T \leq 1, W_i > 0. \quad (15.1.2)$$

这里(见图 15.1.1(a))

$$T = (t - t_n) / (t_{n+1} - t_n), \quad (15.1.3)$$

$$(W_0, W_1, W_2) = \left( \frac{c}{b+c} w_{n-2} + \frac{b}{b+c} w_{n-1}, w_{n-1}, \frac{d}{c+d} w_{n-1} + \frac{c}{c+d} w_n \right), \quad (15.1.4)$$

$$(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = ((1-l_1)\mathbf{r}_{n-2} + l_1\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_{n-1}, l_2\mathbf{r}_{n-1} + (1-l_2)\mathbf{r}_n). \quad (15.1.5)$$

其中

$$(b, c, d) = (t_n - t_{n-1}, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}), \quad (15.1.6)$$

$$(l_1, l_2) = (bw_{n-1} / (bw_{n-1} + cw_{n-2}), dw_{n-1} / (cw_n + dw_{n-1})). \quad (15.1.7)$$

反之, 在条件

$$c > \max(b(W_1 - W_0)/W_0, d(W_1 - W_2)/W_2) \quad (15.1.8)$$

之下, (15.1.2)可以转化为(15.1.1), 我们有(见图 15.1.1(b))

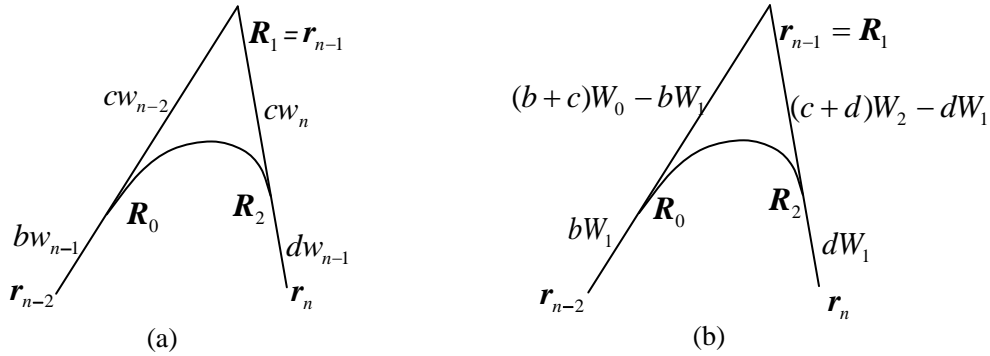


图 15.1.1 二次 NURBS 曲线与有理二次 Bézier 曲线的互化

$$(w_{n-2}, w_{n-1}, w_n) = (bW_1 / (ck_1), W_1, dW_1 / (ck_2)), \quad b, d \neq 0, \quad (15.1.9)$$

$$(b=0 \text{ 时}, w_{n-2} = W_0; d=0 \text{ 时}, w_n = W_2)$$

$$(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n) = (\mathbf{R}_0 + k_1(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1), \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 + k_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)), \quad (15.1.10)$$

$$(k_1, k_2) = (bW_1 / ((b+c)W_0 - bW_1), dW_1 / ((c+d)W_2 - dW_1)). \quad (15.1.11)$$

证 若  $t_n$  和  $t_{n+1}$  是单重节点, 按定理 2.8.1, 先在  $t_n$  处嵌入一个新节点, 则(15.1.1)变成有理二次 B 样条曲线

$$\mathbf{r}_*(t) = \sum_{i=n-2}^n N_{*i}^2(t) w_{*i} \mathbf{r}_{*i} \Big/ \sum_{i=n-2}^n N_{*i}^2(t) w_{*i}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (15.1.12)$$

这里

$$(w_{*n-2}, w_{*n-1}, w_{*n}) = ((c/(b+c))w_{n-2} + (b/(b+c))w_{n-1}, w_{n-1}, w_n),$$

$$(\mathbf{r}_{*n-2}, \mathbf{r}_{*n-1}, \mathbf{r}_{*n}) = ((1-l_1)\mathbf{r}_{n-2} + l_1\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n),$$

且其中  $N_{*i}^2(t)$  是定义在节点向量  $\{t_{*i}\}$  上的二次 B 样条基函数,  $t_{*i}$  是  $t_i (i \leq n)$  或  $t_{i-1} (i > n)$ . 再在  $t_{n+1}$  处嵌入一个新节点, 则(15.1.12)就变成(15.1.2), 且有(15.1.3)和(15.1.4). 反之, 在条件

(15.1.8)之下, 由(15.1.3)和(15.1.4)反解可得(15.1.9), (15.1.10)且  $w_j > 0 (j = n-2, n-1, n)$ . 若  $t_n$  和  $t_{n+1}$  中有一个是单重节点, 另一个是二重节点, 则只要在单重节点处嵌入一个新节点即可实现转化. 证毕.

应用定理 15.1.1 和定理 5.1.1, 我们不难得到圆弧曲线段的二次 NURBS 表示方法.

## 15.2 双二次 NURBS 曲面与双二次有理 Bézier 曲面之间的互化

**定理 15.2.1** 设  $N_i^2(u), N_j^2(v)$  分别是定义在节点向量  $\{u_i\}_{i=m-1}^{m+2}, \{v_j\}_{j=n-1}^{n+2}$  上的二次 B 样条基函数.  $u_i, v_j$  的节点重数均不大于 2. 则非均匀有理双二次 B 样条曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=m-2}^m \sum_{j=n-2}^n N_i^2(u) N_j^2(v) g_i h_j \mathbf{r}_{ij}}{\sum_{i=m-2}^m \sum_{j=n-2}^n N_i^2(u) N_j^2(v) g_i h_j}, \quad (15.2.1)$$

$$u_m \leq u \leq u_{m+1}, v_n \leq v \leq v_{n+1}; \quad g_i, h_j > 0$$

可以转化成有理双二次 Bézier 曲面

$$\mathbf{R}(U, V) = \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(U) B_j^2(V) G_i H_j \mathbf{R}_{ij}}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(U) B_j^2(V) G_i H_j}, \quad (15.2.2)$$

$$0 \leq U \leq 1, 0 \leq V \leq 1; \quad G_i, H_j > 0.$$

这里

$$U = (u - u_m) / (u_{m+1} - u_m), V = (v - v_n) / (v_{n+1} - v_n), \quad (15.2.3)$$

$$(G_0, G_1, G_2) = \left( \frac{q}{p+q} g_{m-2} + \frac{p}{p+q} g_{m-1}, \frac{r}{q+r} g_{m-1} + \frac{q}{q+r} g_m \right), \quad (15.2.4)$$

$$(H_0, H_1, H_2) = \left( \frac{c}{b+c} h_{n-2} + \frac{b}{b+c} h_{n-1}, \frac{d}{c+d} h_{n-1} + \frac{c}{c+d} h_n \right), \quad (15.2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{00} = (1-l_1)[(1-s_1)\mathbf{r}_{m-2,n-2} + s_1\mathbf{r}_{m-1,n-2}] + l_1[(1-s_1)\mathbf{r}_{m-2,n-1} + s_1\mathbf{r}_{m-1,n-1}], \\ \mathbf{R}_{01} = (1-s_1)\mathbf{r}_{m-2,n-1} + s_1\mathbf{r}_{m-1,n-1}, \\ \mathbf{R}_{02} = l_2[(1-s_1)\mathbf{r}_{m-2,n-1} + s_1\mathbf{r}_{m-1,n-1}] + (1-l_2)[(1-s_1)\mathbf{r}_{m-2,n} + s_1\mathbf{r}_{m-1,n}], \\ \mathbf{R}_{10} = (1-l_1)\mathbf{r}_{m-1,n-2} + l_1\mathbf{r}_{m-1,n-1}, \\ \mathbf{R}_{11} = \mathbf{r}_{m-1,n-1}, \\ \mathbf{R}_{12} = l_2\mathbf{r}_{m-1,n-1} + (1-l_2)\mathbf{r}_{m-1,n}, \\ \mathbf{R}_{20} = (1-l_1)[s_2\mathbf{r}_{m-1,n-2} + (1-s_2)\mathbf{r}_{m,n-2}] + l_1[s_2\mathbf{r}_{m-1,n-1} + (1-s_2)\mathbf{r}_{m,n-1}], \\ \mathbf{R}_{21} = s_2\mathbf{r}_{m-1,n-1} + (1-s_2)\mathbf{r}_{m,n-1}, \\ \mathbf{R}_{22} = l_2[s_2\mathbf{r}_{m-1,n-1} + (1-s_2)\mathbf{r}_{m,n-1}] + (1-l_2)[s_2\mathbf{r}_{m-1,n} + (1-s_2)\mathbf{r}_{m,n}], \end{array} \right. \quad (15.2.6)$$

$$(p, q, r) = (u_m - u_{m-1}, u_{m+1} - u_m, u_{m+2} - u_{m+1}), \quad (15.2.7)$$

$$(b, c, d) = (v_n - v_{n-1}, v_{n+1} - v_n, v_{n+2} - v_{n+1}), \quad (15.2.8)$$

$$(s_1, s_2) = (pg_{m-1} / (pg_{m-1} + qg_{m-2}), rg_{m-1} / (qg_m + rg_{m-1})), \quad (15.2.9)$$

$$(l_1, l_2) = (bh_{n-1} / (bh_{n-1} + ch_{n-2}), dh_{n-1} / (ch_n + dh_{n-1})). \quad (15.2.10)$$

反之, 在条件

$$q > \max(p \cdot (G_1 - G_0) / G_0, r \cdot (G_1 - G_2) / G_2), \quad (15.2.11)$$

$$c > \max(b \cdot (H_1 - H_0) / H_0, d \cdot (H_1 - H_2) / H_2) \quad (15.2.12)$$

之下, (15.2.2)可以转化成(15.2.1), 我们有

$$(g_{m-2}, g_{m-1}, g_m) = (pG_1 / (qt_1), G_1, rG_1 / (qt_2)), \quad p, r \neq 0,$$

$$(p=0 \text{ 时}, g_{m-2}=G_0; r=0 \text{ 时}, g_m=G_2), \quad (15.2.13)$$

$$(h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) = (bH_1/(ck_1), H_1, dH_1/(ck_2)), \quad b, d \neq 0, \\ (b=0 \text{ 时}, h_{n-2}=H_0; d=0 \text{ 时}, h_n=H_2), \quad (15.2.14)$$

$$\begin{cases} r_{m-2,n-2} = R_{00} + k_1(R_{00} - R_{01}) + t_1(R_{00} - R_{10}) + k_1t_1(R_{00} + R_{11} - R_{01} - R_{10}), \\ r_{m-2,n-1} = R_{01} + t_1(R_{01} - R_{11}), \\ r_{m-2,n} = R_{02} + k_2(R_{02} - R_{01}) + t_1(R_{02} - R_{12}) + k_2t_1(R_{02} + R_{11} - R_{01} - R_{12}), \\ r_{m-1,n-2} = R_{10} + k_1(R_{10} - R_{11}), \\ r_{m-1,n-1} = R_{11}, \\ r_{m-1,n} = R_{12} + k_2(R_{12} - R_{11}), \\ r_{m,n-2} = R_{20} + k_1(R_{20} - R_{21}) + t_2(R_{20} - R_{10}) + k_1t_2(R_{20} + R_{11} - R_{21} - R_{10}), \\ r_{m,n-1} = R_{21} + t_2(R_{21} - R_{11}), \\ r_{m,n} = R_{22} + k_2(R_{22} - R_{21}) + t_2(R_{22} - R_{12}) + k_2t_2(R_{22} + R_{11} - R_{21} - R_{12}), \end{cases} \quad (15.2.15)$$

$$(t_1, t_2) = (pG_1/((p+q)G_0 - pG_1), rG_1/((q+r)G_2 - rG_1)), \quad (15.2.16)$$

$$(k_1, k_2) = (bH_1/((b+c)H_0 - bH_1), dH_1/((c+d)H_2 - dH_1)). \quad (15.2.17)$$

### 15.3 三次 NURBS 曲线与三次有理 Bézier 曲线之间的互化

**定理 15.3.1** 假设  $N_i^3(t)$  是定义在节点向量  $\{t_i\}_{i=n-2}^{n+3}$  上的三次 B 样条基函数,  $t_i$  的最大重数不大于 3, 则非均匀有理三次 B 样条曲线

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=n-3}^n N_i^3(t) w_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=n-3}^n N_i^3(t) w_i, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad w_i > 0 \quad (15.3.1)$$

可转化为三次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(T) W_i \mathbf{R}_i / \sum_{i=0}^3 B_i^3(T) W_i, \quad 0 \leq T \leq 1, \quad W_i > 0. \quad (15.3.2)$$

这里(见图 15.3.1)

$$T = (t - t_n) / (t_{n+1} - t_n), \quad (15.3.3)$$

$$(W_0, W_1, W_2, W_3) = \left( \frac{c}{b+c} W_0^* + \frac{b}{b+c} W_1^*, W_1^*, W_2^*, \frac{d}{c+d} W_2^* + \frac{c}{c+d} W_3^* \right), \quad (15.3.4)$$

$$(W_0^*, W_1^*, W_2^*, W_3^*) = \left( \frac{c}{a+b+c} w_{n-3} + \frac{a+b}{a+b+c} w_{n-2}, \frac{c+d}{b+c+d} w_{n-2} + \frac{b}{b+c+d} w_{n-1}, \right. \\ \left. \frac{d}{b+c+d} w_{n-2} + \frac{b+c}{b+c+d} w_{n-1}, \frac{d+e}{c+d+e} w_{n-1} + \frac{c}{c+d+e} w_n \right), \quad (15.3.5)$$

$$(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3) = ((1-L_1)\mathbf{R}_0^* + L_1\mathbf{R}_1^*, \mathbf{R}_1^*, \mathbf{R}_2^*, L_2\mathbf{R}_2^* + (1-L_2)\mathbf{R}_3^*), \quad (15.3.6)$$

$$(\mathbf{R}_0^*, \mathbf{R}_1^*, \mathbf{R}_2^*, \mathbf{R}_3^*) = ((1-l_0)\mathbf{r}_{n-3} + l_0\mathbf{r}_{n-2}, (1-l_1)\mathbf{r}_{n-2} + l_1\mathbf{r}_{n-1}, \\ l_2\mathbf{r}_{n-2} + (1-l_2)\mathbf{r}_{n-1}, l_3\mathbf{r}_{n-1} + (1-l_3)\mathbf{r}_n), \quad (15.3.7)$$

其中

$$(a, b, c, d, e) = (t_{n-1} - t_{n-2}, t_n - t_{n-1}, t_{n+1} - t_n, t_{n+2} - t_{n+1}, t_{n+3} - t_{n+2}), \quad (15.3.8)$$

$$(L_1, L_2) = (bW_1^* / (bW_1^* + cW_0^*), dW_2^* / (cW_3^* + dW_2^*)), \quad (15.3.9)$$

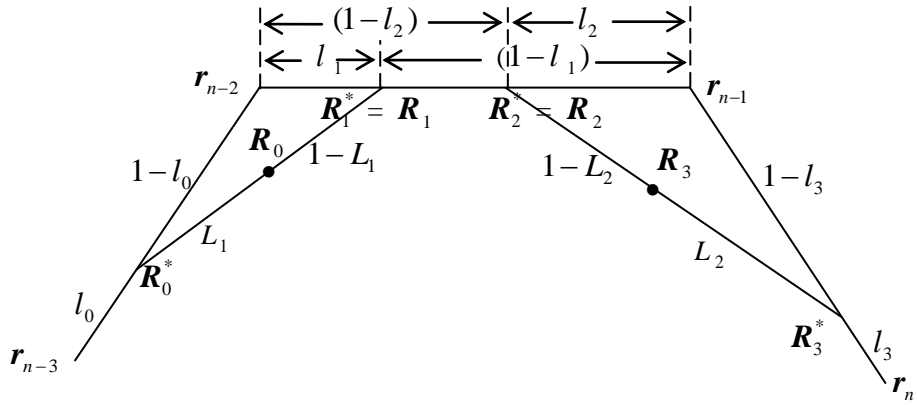


图 15.3.1 三次 NURBS 曲线转化为三次有理 Bézier 曲线

$$(l_0, l_1, l_2, l_3) = ((a+b)w_{n-2}/((a+b)w_{n-2} + cw_{n-3}), bw_{n-1}/(bw_{n-1} + (c+d)w_{n-2}), \\ dw_{n-2}/((b+c)w_{n-1} + dw_{n-2}), (d+e)w_{n-1}/(cw_n + (d+e)w_{n-1})). \quad (15.3.10)$$

反之，若我们记

$$\lambda_1 = a^2(W_0 - W_1)^2 + 4b(a+b)(W_1^2 - W_0W_2), \quad f_1 = ((a+2b)(W_1 - W_0) + \sqrt{\lambda_1})/(2W_0), \quad (15.3.11)$$

$$\lambda_2 = e^2(W_2 - W_3)^2 + 4d(d+e)(W_2^2 - W_1W_3), \quad f_2 = ((2d+e)(W_2 - W_3) + \sqrt{\lambda_2})/(2W_3), \quad (15.3.12)$$

则在下列四条件之一成立时：

$$c > c^* = \max((W_1 - W_0)/W_0, b(W_2 - W_1)/W_1, d(W_1 - W_2)/W_2, d(W_2 - W_3)/W_3), \quad (15.3.13)$$

(当  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ),

$$c > \max(c^*, f_1), \quad (15.3.14)$$

(当  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 < 0$ ),

$$c > \max(c^*, f_2), \quad (15.3.15)$$

(当  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \geq 0$ ),

$$c > \max(c^*, f_1, f_2), \quad (15.3.16)$$

(当  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ ),

曲线(15.3.2)可转化为曲线(15.3.1)，我们有(见图 15.3.2)

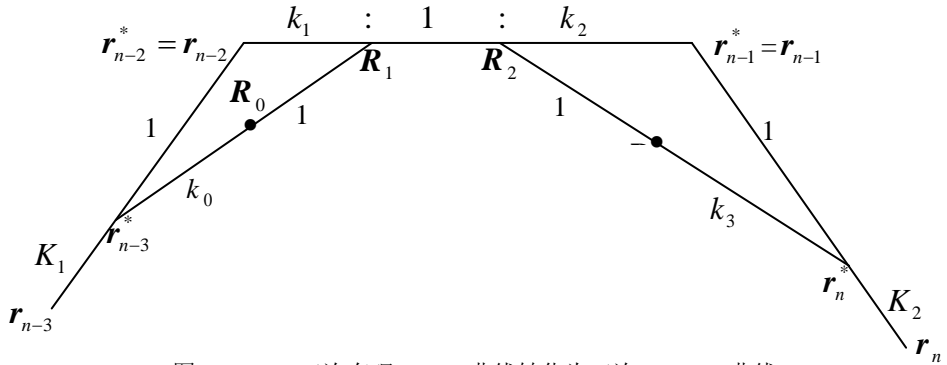


图 15.3.2 三次有理 Bézier 曲线转化为三次 NURBS 曲线

$$(w_{n-3}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n) = (bc^{-2}((a+b+c)W_1/k_0 - (a+b)W_2/k_1), bW_2/(ck_1), \\ dW_1/(ck_2), dc^{-2}((c+d+e)W_2/k_3 - (d+e)W_1/k_2)), \quad b, d \neq 0,$$

$$\begin{aligned} & (\text{当 } b=0, w_{n-3}=W_0+a(W_0-W_1)/c \text{ 且 } w_{n-2}=W_1; \\ & \text{当 } d=0, w_{n-1}=W_2 \text{ 且 } w_n=W_3+e(W_3-W_2)/c), \end{aligned} \quad (15.3.17)$$

$$(r_{n-3}, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n) = (r_{n-3}^* + K_1(r_{n-3}^* - r_{n-2}^*), r_{n-2}^*, r_{n-1}^* + K_2(r_n^* - r_{n-1}^*)), \quad (15.3.18)$$

$$\begin{aligned} (r_{n-3}^*, r_{n-2}^*, r_{n-1}^*, r_n^*) &= (R_0 + k_0(R_0 - R_1), R_1 + k_1(R_1 - R_2), \\ & R_2 + k_2(R_2 - R_1), R_3 + k_3(R_3 - R_2)). \end{aligned} \quad (15.3.19)$$

这里

$$(K_1, K_2) = \left( \frac{(a+b)W_2/k_1}{(a+b+c)W_1/k_0 - (a+b)W_2/k_1}, \frac{(d+e)W_1/k_2}{(c+d+e)W_2/k_3 - (d+e)W_1/k_2} \right), \quad (15.3.20)$$

$$\begin{aligned} (k_0, k_1, k_2, k_3) &= (bW_1/((b+c)W_0 - bW_1), bW_2/((b+c)W_1 - bW_2), \\ & dW_1/((c+d)W_2 - dW_1), dW_2/((c+d)W_3 - dW_2)), \end{aligned} \quad (15.3.21)$$

证 首先假定  $t_n$  和  $t_{n+1}$  都是单重节点. 按定理 2.8.1 先在  $t_n$  处嵌入一个新节点, 则曲线(15.3.1)化为如下的三次 NURBS 曲线

$$r^{[1]}(t) = \sum_{i=n-2}^{n+1} N_i^{[1]3}(t) w_i^{[1]} r_i^{[1]} / \sum_{i=n-2}^{n+1} N_i^{[1]3}(t) w_i^{[1]}, \quad t_n = t_{n+1}^{[1]} \leq t \leq t_{n+2}^{[1]} = t_{n+1}. \quad (15.3.22)$$

$N_i^{[1]3}(t)$  是定义在节点向量  $\{t_i^{[1]}\}_{i=n-2}^{n+3}$  上的三次 B 样条基函数,  $t_i^{[1]}$  是  $t_i (i \leq n)$  或  $t_{i-1} (i > n)$ ,

$$(w_{n-2}^{[1]}, w_{n-1}^{[1]}, w_n^{[1]}, w_{n+1}^{[1]}) = (W_0^*, W_1^*, w_{n-1}, w_n), \quad (r_{n-2}^{[1]}, r_{n-1}^{[1]}, r_n^{[1]}, r_{n+1}^{[1]}) = (R_0^*, R_1^*, r_{n-1}, r_n).$$

其次, 在  $t_n$  处再嵌入一个新节点, 则曲线 (15.3.22) 进一步化为三次 NURBS 曲线

$$r^{[2]}(t) = \sum_{i=n-1}^{n+2} N_i^{[2]3}(t) w_i^{[2]} r_i^{[2]} / \sum_{i=n-1}^{n+2} N_i^{[2]3}(t) w_i^{[2]}, \quad t_n = t_{n+2}^{[2]} \leq t \leq t_{n+3}^{[2]} = t_{n+1}. \quad (15.3.23)$$

这里  $N_i^{[2]3}(t)$  是定义在节点向量  $\{t_i^{[2]}\}_{i=n-2}^{n+3}$  上的三次 B 样条基函数,  $t_i^{[2]}$  是  $t_i (i \leq n)$ ,  $t_{i-1} (i = n+1)$  或  $t_{i-2} (i > n+1)$ ,

$$(w_{n-1}^{[2]}, w_n^{[2]}, w_{n+1}^{[2]}, w_{n+2}^{[2]}) = (W_0, W_1, w_{n-1}, w_n), \quad (r_{n-1}^{[2]}, r_n^{[2]}, r_{n+1}^{[2]}, r_{n+2}^{[2]}) = (R_0, R_1, r_{n-1}, r_n).$$

仿照上述过程, 再在  $t_{n+1}$  处先后分两次嵌入一个新节点, 则曲线(15.3.23)就最终转化为三次有理 Bézier 曲线(15.3.2).

反之, 若条件(15.3.13)–(15.3.16)之中有一个成立, 注意到下式是关于  $c$  的二次三项式:  
 $b((a+b+c)W_1/k_0 - (a+b)W_2/k_1) = W_0c^2 + (a+2b)(W_0 - W_1)c + b(a+b)(W_0 - 2W_1 + W_2)$ ,  
 其值当  $\Delta_1 < 0$  时恒正, 当  $\Delta_1 \geq 0$  且  $c > f_1$  时也恒正; 同理, 对下列表达式亦有类似结果:  
 $d((c+d+e)W_2/k_3 - (d+e)W_1/k_2) = W_3c^2 + (2d+e)(W_3 - W_2)c + d(d+e)(W_3 - 2W_2 + W_1)$ ,  
 因而这时由(15.3.4)–(15.3.7)可反解得到(15.3.17)–(15.3.19)且  $w_i > 0 (i = n-3, n-2, n-1, n)$ .

其次, 假设  $t_n$  和  $t_{n+1}$  中至少有一个非单重节点, 则应用与上面类似的方法, 在  $t_n$  或  $t_{n+1}$  处嵌入新节点使成为三重节点, 就可实现曲线(15.3.1)向(15.3.2)的转化. 有关转化关系式可相应地令  $b=0$  (若  $t_n$  原为二重节点),  $a=b=0$  (若  $t_n$  原为三重节点),  $d=0$  (若  $t_{n+1}$  原为二重节点),  $d=e=0$  (若  $t_{n+1}$  原为三重节点)来得到. 反之亦然. 证毕.

## 15.4 Bézier 三角片到退化矩形片的转化

本节的论题是: 三角域上的 Bézier 曲面能否表示为矩形域上的 Bézier 曲面? 在什么条件下逆命题也成立?

**定理 15.4.1** 定义在三角域  $\{(u, v) | 0 \leq u, v, u+v \leq 1\}$  上的  $n$  次 Bézier 三角曲面片  $T(u, v)$  即 (7.3.7) 可唯一地表示为一张  $n \times n$  次 Bézier 矩形片

$$P(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(s) B_j^n(t) P_{ij}, \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (15.4.1)$$

其控制顶点  $P_{ij}$  可利用 (1.3.9) 所示的升阶算子  $A_k$  由下式确定:

$$(P_{i0}, P_{i1}, \dots, P_{in}) = A_n A_{n-1} \cdots A_{n-i+1} (T_{i0}, T_{i1}, \dots, T_{i, n-i})^T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15.4.2)$$

证 参数变换

$$T: u = s, \quad v = (1-s)t, \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad (15.4.3)$$

的逆变换将三角域  $\{(u, v) | 0 \leq u, v, u+v \leq 1\}$  变换到矩形域  $\{(s, t) | 0 \leq s, t \leq 1\}$ , 见图 15.4.1. 今把 (15.4.3) 代入  $T(u, v)$  的算子表达式 (7.3.10) 可得

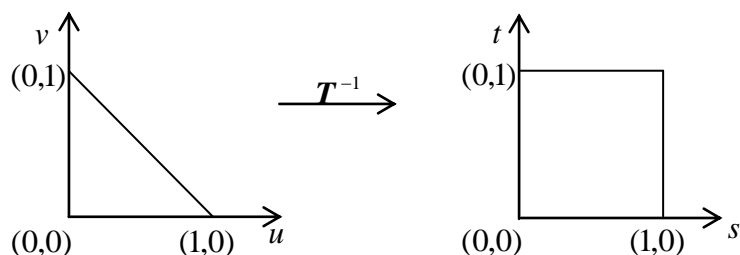


图 15.4.1 三角域变到矩形域

$$\begin{aligned} T(u, v) &= (I + u\Delta_1 + v\Delta_2)^n T_{00} = [I + s\Delta_1 + (1-s)t\Delta_2]^n T_{00} \\ &= \{I[(1-s) + s] + s\Delta_1 + (1-s)t\Delta_2\}^n T_{00} = [(1-s)(I + t\Delta_2) + s(I + \Delta_1)]^n T_{00} \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(s) E_1^i (I + t\Delta_2)^{n-i} T_{00} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} B_i^n(s) B_j^{n-i}(t) T_{ij}. \end{aligned}$$

进一步, 把  $n-i$  次 B 样条曲线  $C_i(t) = \sum_{j=0}^{n-i} B_j^{n-i}(t) T_{ij}$  升阶  $i$  次,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 曲线次数变为  $n$

后控制顶点可用升阶算子表为 (15.4.2), 再由 Bernstein 基的线性无关性得出表示唯一性, 证毕.

我们也可把  $T(u, v)$  进一步转化为  $m \times n$  次 ( $m \geq n$ ) B 样条矩形片. 这只要把 (15.4.1) 沿  $s$  方向再升阶  $m-n$  次即可.

上述定理的证明中所引入的参数变换  $T$  给出了几何意义明显的割角转化关系: 按矩阵  $\{A_k\}_{k=1}^n$  所给出的升阶割角系数, 对三角片  $T(u, v)$  的控制网格沿  $v$  向割角, 第  $i$  排割  $i$  层,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 就可得矩形片  $P(s, t)$  的控制网格. 例如当  $n = 3$  时, 我们有 (见图 15.4.2)

$$\begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{20} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{20} \\ T_{21} \end{pmatrix}.$$

定理 15.4.1 表明, B 样条三角片是 B 样条矩形片的特殊情况. 由此想到其逆问题: 满足什么条件, B 样条矩形片退化为 B 样条三角片? 我们有

**定理 15.4.2** 对  $n \times n$  次矩形片  $P(s, t)$ , 当且仅当第  $i$  排控制顶点  $\{P_{i0}, P_{i1}, \dots, P_{in}\}$  所对应的  $n$  次 B 样条曲线实质上是  $n-i$  次 B 样条曲线,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 即控制顶点满足关系式

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} P_{ij} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} P_{ij} = \cdots = \sum_{j=0}^{n-i+1} (-1)^j \binom{n-i+1}{j} P_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15.4.4)$$

时,  $P(s,t)$  为一张  $n$  次 Bézier 三角片  $T(u,v)$ , 其控制顶点可由参数变换  $T$  的逆变换对  $P(s,t)$  重新参数化 (降阶) 而得出.

作为定理 15.4.1 的应用, 根据第十章中 Bézier 矩形片的连续拼接条件, 我们可立即得到 Bézier 矩形片和 Bézier 三角片之间  $C^1$  或  $G^1$  的连续拼接条件.

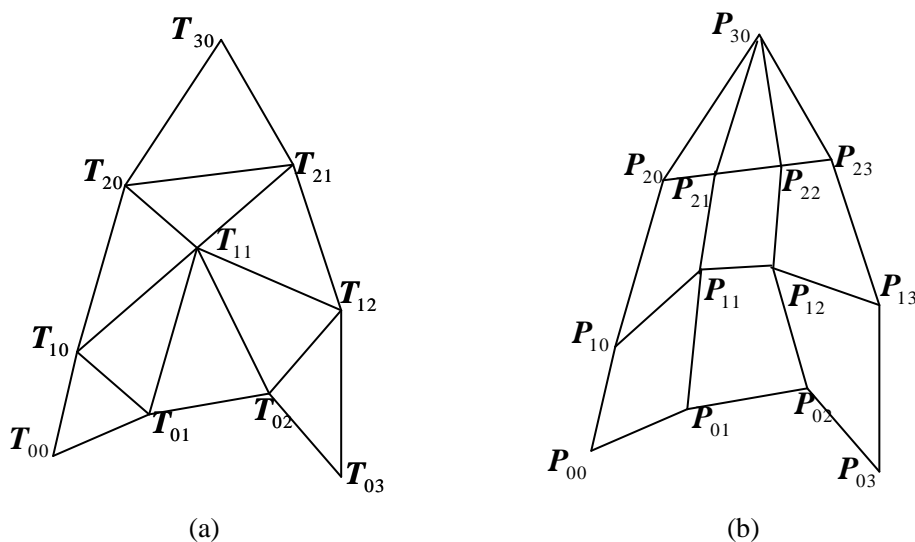


图 15.4.2  $n=3$  时 Bézier 网的变化

## 15.5 Bézier 三角片到三张非退化矩形片的转化

鉴于退化曲面在造型中可能会带来麻烦<sup>[19]</sup>, 研究非退化的转化方法更有意义. 不失一般性, 我们假设非退化的 Bézier 三角片  $T(u,v)$  定义在如图 15.5.1 的三角域  $D = \{(u,v) | 0 \leq u, v, u+v \leq 1\}$  上, 今在  $D$  的每条边上选取点  $P_1(0,d), P_2, P_3(b,0)$ , 再在三角形  $P_1P_2P_3$  内部取点  $P(a,c)$ , 使得  $0 < a < b < 1, 0 < c < d < 1$ . 线段  $PP_1, PP_2, PP_3$  把  $D$  分割为三块四边形区域  $D_1, D_2, D_3$ , 和这些线段相应的曲面  $T(u,v)$  上的曲线把这张 Bézier 三角片裂解为三张四边曲面片. 我们首先给出定义在  $D_1$  上的曲面片的张量积 Bézier 表示, 进而得出它的非退化性.  $D_2$  与  $D_3$  上的情形可类似给出.

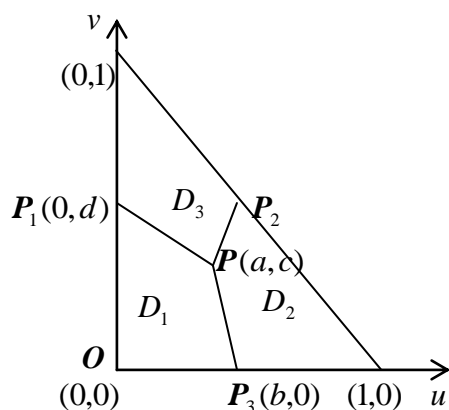


图 15.5.1 三角曲面片定义域的分割

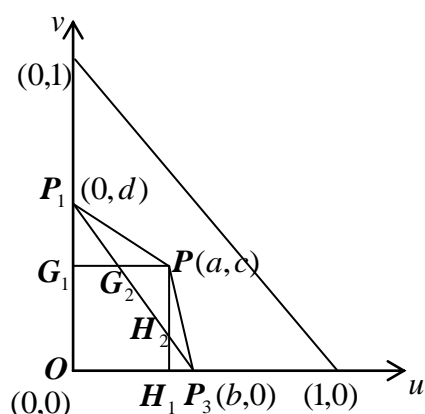


图 15.5.2 分析  $|J|$  的示意图

**定理 15.5.1**  $n$  次三角曲面片  $T(u,v)$  的定义在  $D_1$  上的 trimmed 曲面可表为一张  $n \times n$  次的 Bézier 矩形片 (15.4.1), 其控制顶点  $P_{ij}$  由下式确定:



$$P_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{n-i} \binom{i}{k} \binom{n-i}{l} Q_{kl}^{(i)} / \binom{n}{k+l}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (15.5.1)$$

$$Q_{kl}^{(i)} = [aE_1 + cE_2 + (1-a-c)I]^k [(1-b)I + bE_1]^{i-k} [(1-d)I + dE_2]^l T_{00}. \quad (15.5.2)$$

证 参数变换

$$T: u = s[at + b(1-t)], \quad v = [cs + d(1-s)]t, \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad (15.5.3)$$

的逆变换将区域  $D_1$  变换成矩形域  $\{(s, t) | 0 \leq s, t \leq 1\}$ . 把(15.5.3)代入  $T(u, v)$  的算子表达式得

$$\begin{aligned} T(u, v) &= (I + u\Delta_1 + v\Delta_2)^n T_{00} = [I + (a-b)st\Delta_1 + bs\Delta_1 + (c-d)st\Delta_2 + dt\Delta_2]^n T_{00} \\ &= \{[I(1-s) + s][(1-t) + t] + (a-b)st\Delta_1 + bs\Delta_1 + (c-d)st\Delta_2 + dt[(1-s) + s]\Delta_2\}^n T_{00} \\ &= \{(1-s)[(1-t)I + t(I + d\Delta_2)] + s[(1-t)(I + b\Delta_1) + t(I + a\Delta_1 + c\Delta_2)]\}^n T_{00} \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(s) [(1-t)I + t(I + d\Delta_2)]^{n-i} [(1-t)(I + b\Delta_1) + t(I + a\Delta_1 + c\Delta_2)]^i T_{00} \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(s) \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{n-i} B_k^i(t) B_l^{n-i}(t) (I + a\Delta_1 + c\Delta_2)^k (I + b\Delta_1)^{i-k} (I + d\Delta_2)^l T_{00} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^{n-i} \binom{i}{k} \binom{n-i}{l} B_i^n(s) B_{k+l}^n(t) Q_{kl}^{(i)} / \binom{n}{k+l} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(s) B_j^n(t) P_{ij}. \end{aligned}$$

这表明, 曲面  $T(u, v)$  在  $D_1$  上的 trimmed 曲面是一张标准的  $n \times n$  次的 Bézier 矩形片 (15.4.1), 证毕.

**定理 15.5.2** 如果原 Bézier 三角片  $T(u, v)$  是非退化的, 则与  $D_1$  所对应的 Bézier 矩形片也非退化.

证 按求导的链锁法则, 我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial s} \\ \frac{\partial T}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial u} \\ \frac{\partial T}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)t + b & (c-d)t \\ (a-b)s & (c-d)s + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial u} \\ \frac{\partial T}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (15.5.4)$$

由上式知变换 (15.5.3) 的 Jacobi 矩阵  $\mathbf{J}$  的行列式  $|\mathbf{J}| = b(c-d)s + d(a-b)t + bd$ . 因为  $P$  是三角形  $P_1P_2P_3$  的内点, 参照图 15.5.2, 注意到  $(s, t) \in [0, 1] \otimes [0, 1]$ , 我们有  $\frac{d-c}{d}s + \frac{b-a}{b}t = \frac{\|P_1G_1\|}{\|P_1O\|}s + \frac{\|H_1P_3\|}{\|OP_3\|}t = \frac{\|P_1G_2\|}{\|P_1P_3\|}s + \frac{\|H_2P_3\|}{\|P_1P_3\|}t \leq \frac{\|P_1G_2\| + \|H_2P_3\|}{\|P_1P_3\|} < 1$ , 因而  $|\mathbf{J}| > 0$ ,  $\mathbf{J}$  非奇异; 另一方面, 因为  $T(u, v)$  非退化, 可知对  $(u, v) \in D_1$  有  $(\partial T / \partial u) \times (\partial T / \partial v) \neq \mathbf{0}$ , 所以由表达式 (15.5.4) 得知当  $(s, t) \in [0, 1] \otimes [0, 1]$  时必有  $(\partial T / \partial s) \times (\partial T / \partial t) \neq \mathbf{0}$ , 即定义在  $D_1$  上的子曲面片所对应的 Bézier 矩形片非退化, 证毕.

下面分析与  $D_1, D_2, D_3$  所对应的三张 Bézier 子矩形片的拼接连续性. 由 (15.5.1), (15.5.2) 得  $P_{nj} = Q_{j0}^{(n)} = [aE_1 + cE_2 + (1-a-c)I]^j [bE_1 + (1-b)I]^{n-j} T_{00}$ . 这表明, 与  $D_1$  相对应的 Bézier 矩形片上, 与线段  $PP_3$  相对应的边界曲线的控制顶点仅与点  $P$  和  $P_3$  的坐标有关.  $D_2$  上的矩形片情况类似, 于是它们的特征网格在公共边界重合, 从而它们的位置连续. 更高阶的连续性可类似推出.

由定理 15.5.1 可导出根据已知三角片的控制顶点计算  $D_1$  上矩形片的控制顶点的稳定的递归算法. 为此可应用组合恒等式

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} A_k = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} A_k + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} A_{k+1} \quad (15.5.5)$$

得到

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k} Q_{k,j-k}^{(i)} / \binom{n}{j} \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \left[ \binom{n-i}{j-k} / \binom{n}{j} \right] Q_{k,j-k}^{(i)} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \left[ \binom{n-i}{j-(k+1)} / \binom{n}{j} \right] Q_{k+1,j-(k+1)}^{(i)} \\
&= \frac{n-j}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \binom{i-1}{k} \binom{n-i}{j-k} / \binom{n-1}{j} \right] Q_{k,j-k}^{(i)} + \frac{j}{n} \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \binom{i-1}{k} \binom{n-i}{j-(k+1)} / \binom{n-1}{j-1} \right] Q_{k+1,j-(k+1)}^{(i)}.
\end{aligned}$$

上式说明  $P_{ij}$  可由  $Q_{kl}^{(i)}$  的凸线性组合计算来递归地得出, 而(15.5.2)说明  $Q_{kl}^{(i)}$  又可由  $T_{ij}$  的凸线性组合来递归地得出, 因而整个转化算法是简单、稳定的递归割角算法. 例如, 设曲面次数  $n=3$ , 选取  $a=c=1/3$ ,  $b=d=1/2$ , 把  $D$  比较匀称地裂解为三块, 这时记  $A=(E_1+E_2+I)/3$ ,  $B=(E_1+I)/2$ ,  $C=(E_2+I)/2$ , 则  $D_1$  上子矩形片的控制顶点

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C & C^2 & C^3 \\ B & (2BC+A)/3 & (BC^2+2AC)/3 & AC^2 \\ B^2 & (B^2C+2AB)/3 & (2ABC+A^2)/3 & A^2C \\ B^3 & AB^2 & A^2B & A^3 \end{pmatrix} T_{00},$$

由对称性可立即得出其余两块子矩形片的控制顶点.

## 15.6 Bézier 矩形片用线性函数实现广义离散及其到三角片的转化

### 15.6.1 矩形参数域被分割为两块梯形域的广义离散算法

本节考察 B ézier 矩形片  $P(u,v)$  的参数域  $\{u,v|0 \leq u,v \leq 1\}$  被直线  $u=f_1v+f_0$  分割为两块梯形域  $D_1, D_2$  这一典型情况, 见图 15.6.1. 我们仅推导定义在  $D_1$  上的 trimmed 曲面的张量积 B ézier 表示,  $D_2$  上的情况类似. 对  $P(u,v)$  作如下的重新参数化

$$T_1: u = s[a(1-t)+bt], \quad v = t, \quad 0 \leq s, t \leq 1. \quad (15.6.1)$$

$T_1$  的逆变换将区域  $D_1$  变换成矩形域  $\{(s,t)|0 \leq s,t \leq 1\}$ . 注意到  $I=(1-s)I+sI$ , 以及  $1-a(1-t)-bt=(1-t)(1-a)+t(1-b)$ , 我们有以下两个引理.

$$\text{引理 15.6.1} \quad (I+st^* \Delta_1)^m = \sum_{i=0}^m B_i^m(s)(I+t^* \Delta_1)^i.$$

引理 15.6.2

$$\{I+[a(1-t)+bt]\Delta_1\}^i = \sum_{k=0}^i B_k^i(t)[(1-a)I+aE_1]^{i-k}[(1-b)I+bE_1]^k, \quad 0 \leq a,b \leq 1.$$

**定理 15.6.1**  $m \times n$  次 B ézier 矩形片  $P(u,v)$  的定义在  $D_1$  上的 trimmed 曲面可表为  $m \times (m+n)$  次的 B ézier 矩形片  $\hat{P}(s,t)$ , 其控制顶点  $\hat{P}_{ij}$  可利用升阶算子  $A_k$  由下式确定:

$$(\hat{P}_{i0}, \hat{P}_{i1}, \dots, \hat{P}_{i,m+n})^T = A_{n+m} A_{n+m-1} \cdots A_{n+i+1} (H_{i0}, H_{i1}, \dots, H_{i,n+i})^T, \quad i=0,1,\dots,m, \quad (15.6.2)$$

$$H_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^n \binom{i}{k} \binom{n}{l} Q_{kl}^{(i)} / \binom{n+i}{j}, \quad i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,n+i, \quad (15.6.3)$$

$$Q_{kl}^{(i)} = [(1-a)I+aE_1]^{i-k} [(1-b)I+bE_1]^k P_{0l}, \quad i=0,1,\dots,n; k=0,1,\dots,i; l=0,1,\dots,n. \quad (15.6.4)$$

证 把(15.6.1)代入  $P(u,v)$  的算子表达式 (7.2.3), 由引理 15.6.1(取  $t^* = a(1-t)+bt$ ) 及引理 15.6.2, 我们有

$$\begin{aligned}
P(u,v) &= (I + u\Delta_1)^m (I + v\Delta_2)^n P_{00} = \{I + s[a(1-t) + bt]\Delta_1\}^m (I + t\Delta_2)^n P_{00} \\
&= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) (I + [a(1-t) + bt]\Delta_1)^i \sum_{l=0}^n B_l^n(t) P_{0l} \\
&= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^n B_k^i(t) B_l^n(t) Q_{kl}^{(i)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} B_i^m(s) B_j^{n+i}(t) H_{ij},
\end{aligned}$$

再使用升阶算子  $\mathbf{A}_k$  ( $k = n+i+1, n+i+2, \dots, n+m$ ) 把曲线  $C_i(t) = \sum_{j=0}^{n+i} B_j^{n+i}(t) H_{ij}$  升阶  $m-i$  次,  $i=0,1,\dots,m$ , 即得(15.6.2). 证毕.

由定理 15.6.1 可导出根据已知矩形片的控制顶点, 计算  $D_1$  上的子矩形片的控制顶点的稳定的递归算法. 其理由是: 首先, (15.6.2), (15.6.4) 均可用凸线性组合计算来递归实现; 其次, 由 (15.5.5) 可得出

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{n}{j-k} Q_{k,j-k}^{(i)} / \binom{n+i}{j} = \frac{n+i-j}{n+i} \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \binom{i-1}{k} \binom{n}{j-k} / \binom{n+i-1}{j} \right] Q_{k,j-k}^{(i)} \\
&\quad + \frac{j}{n+i} \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \binom{i-1}{k} \binom{n}{j-(k+1)} / \binom{n+i-1}{j-1} \right] Q_{k+1,j-(k+1)}^{(i)}
\end{aligned}$$

而且 (15.6.3) 也可用凸线性组合计算来递归实现. 总之, Bézier 曲面如图 15.6.1 格式的广义离散可用递归割角算法来实现.

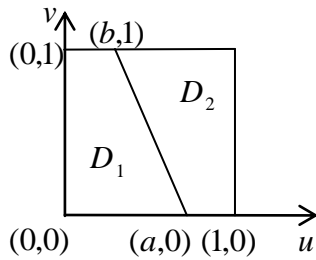


图 15.6.1 矩形参数域被直线分割为两块梯形域

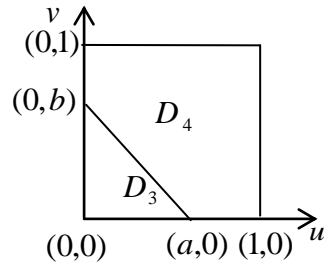


图 15.6.2 矩形参数域被直线分割为三边和五边区域

### 15.6.2 矩形参数域被分割为三边区域和五边区域的广义离散算法

本节考察 Bézier 矩形片  $P(u,v)$  的参数域  $\{(u,v) | 0 \leq u, v \leq 1\}$  被直线  $u = f_1 v + f_0$  分割为三边区域  $D_3$  和五边区域  $D_4$  这另一种典型情况, 见图 15.6.2. 我们仅推导定义在  $D_3$  上的 trimmed 曲面的张量积 Bézier 表示.  $D_4$  上的曲面可再用等参数线  $v=b$  离散为两张 Bézier 矩形片, 其一是原曲面  $P(u,v)$  的正规子曲面, 其二的 Bézier 表示可按定理 15.6.1 得出. 对  $P(u,v)$  作重新参数化

$$T_2: \quad u = as(1-t), \quad v = bt, \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (15.6.5)$$

$T_2$  的逆变换将区域  $D_3$  变换成矩形域  $\{(s,t) | 0 \leq s, t \leq 1\}$ . 我们有

$$\text{引理 15.6.3} \quad (I + bt\Delta_2)^n = \sum_{l=0}^n B_l^n(t) [(1-b)I + bE_2]^l, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

**定理 15.6.2**  $m \times n$  次 Bézier 矩形片  $P(u,v)$  的定义在  $D_3$  上的 trimmed 曲面可表为  $m \times (m+n)$

次的 Bézier 矩形片  $\hat{P}(s,t)$ , 其控制顶点  $P_{ij}$  可利用升阶算子  $\mathbf{A}_k$  由下式确定:

$$(\hat{P}_{i0}, \hat{P}_{i1}, \dots, \hat{P}_{i, m+n})^T = \mathbf{A}_{n+m} \mathbf{A}_{n+m-1} \cdots \mathbf{A}_{n+i+1} (H_{i0}, H_{i1}, \dots, H_{i, n+i})^T, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

(15.6.6)

$$H_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{\substack{l=0 \\ k+l=j}}^n \binom{i}{k} \binom{n}{l} Q_{kl}^{(i)} / \binom{n+i}{j}, \quad i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n+i, \quad (15.6.7)$$

$$Q_{kl}^{(i)} = [(1-a)I + aE_1]^{i-k} [(1-b)I + bE_2]^l P_{00}, \\ i=0,1,\dots,m; l=0,1,\dots,n; k=0,1,\dots,i. \quad (15.6.8)$$

证 把(15.6.5)代入  $P(u,v)$  的算子表达式,应用引理 15.6.1(取  $t^* = a(1-t)$ ), 引理 15.6.2(取  $b=0$ ) 和引理 15.6.3, 我们有

$$\begin{aligned} P(u,v) &= (I + u\Delta_1)^m (I + v\Delta_2)^n P_{00} = [I + as(1-t)\Delta_1]^m (I + bt\Delta_2)^n P_{00} \\ &= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) [I + a(1-t)\Delta_1]^i (I + bt\Delta_2)^n P_{00} \\ &= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^n B_k^i(t) B_l^n(t) Q_{kl}^{(i)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} B_i^m(s) B_j^{n+i}(t) H_{ij}, \end{aligned}$$

再使用升阶算子  $A_k$  ( $k = n+i+1, n+i+2, \dots, n+m$ ) 把曲线  $C_i(t) = \sum_{j=0}^{n+i} B_j^{n+i}(t) H_{ij}$  升阶  $m-i$  次,  $i=0,1,\dots,m$ , 即得(15.6.6), 证毕.

容易看出, B ézier 曲面如图 15.6.2 格式的广义离散也可用递归割角算法来实现.

### 15.6.3 B ézier 矩形片到两张三角片的转化

应用如图 15.6.1 格式的广义离散, 我们可实现一张  $m \times n$  次 B ézier 矩形片  $P(u,v)$  到两张  $m+n$  次三角片的转化. 不失一般性, 仅考虑  $D_1$  上的子曲面片转化. 这一过程可分为两步. 第一步, 应用定理 15.6.1, 取  $a=1, b=0$ , 把 trimmed 曲面  $P(u,v)$  ( $(u,v) \in D_1$ ) 用  $T_1$  重新参数化, 转化为  $m \times (m+n)$  次 B ézier 矩形片  $\hat{P}(s,t)$  ( $0 \leq s, t \leq 1$ ). 这时矩形片其实退化为三边曲面片(见图 15.6.3). 因此, 把曲面  $\hat{P}(s,t)$  升阶为  $(m+n) \times (m+n)$  次曲面  $\hat{P}^*(u,v)$  以后, 其控制顶点  $\hat{P}_{ij}^*$  必然满足<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \binom{m+n}{i} \hat{P}_{ij}^* &= \sum_{i=0}^{m+n-1} (-1)^i \binom{m+n-1}{i} \hat{P}_{ij}^* \\ &= \dots = \sum_{i=0}^{m+n-j+1} (-1)^i \binom{m+n-j+1}{i} \hat{P}_{ij}^* = 0, \\ j &= 1, 2, \dots, m+n. \end{aligned}$$

即定理 15.4.2 的条件成立. 因而我们可实施第二步, 引入参数变换

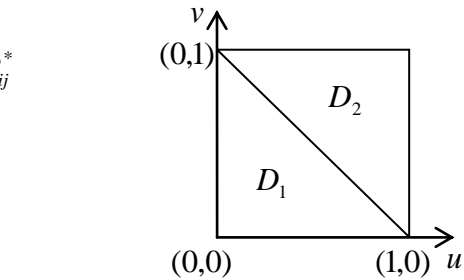


图 15.6.3 矩形参数域被直线分割为两块三角域

$$T_1^{-1}: \quad s = \frac{u}{1-v}, \quad t = v, \quad 0 \leq u, v, u+v \leq 1 \quad (15.6.9)$$

对  $\hat{P}^*(s,t)$  作重新参数化 (即降阶), 就可以得到一张  $m+n$  次 B ézier 三角片  $T(u,v)$  ( $0 \leq u, v, u+v \leq 1$ ).

## 15.7 B ézier 矩形片用高次代数曲线实现广义离散并用于曲面拼接

### 15.7.1 矩形参数域被分割为两块曲边梯形域的广义离散算法

本节考察 B ézier 矩形片  $P(u,v)$  的矩形参数域被  $k$  次代数曲线  $u = f(v) = \sum_{i=0}^k f_i v^i$  分割为两块曲边梯形域  $D_5, D_6$  的典型情况 (如图 15.7.1). 不失一般性, 我们仅推导定义在  $D_5$  上的

trimmed 曲面的张量积 Bézier 表示. 首先表分割曲线为

$$u = f(v) = \sum_{i=0}^k B_i^k(v) a_i, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (15.7.1)$$

参数变换

$$T_3: \quad u = s \sum_{l=0}^k B_l^k(t) a_l, \quad v = t, \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad (15.7.2)$$

的逆变换将区域  $D_5$  变换成矩形域  $\{(s, t) | 0 \leq s, t \leq 1\}$ . 我们有

$$\text{引理 15.7.1} \quad \left[ I + \left( \sum_{l=0}^k B_l^k(t) a_l \right) \Delta_1 \right]^i = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_k=i} B_\alpha^{ki}(t) \binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} \prod_{l=0}^k \binom{k}{l} \prod_{l=0}^k F_l^{i_l} / \binom{ki}{\alpha}$$

这里  $\binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} = \frac{i!}{i_0! i_1! \dots i_k!}$  为  $k$  项式展开系数,

$$\alpha = \sum_{l=0}^k l i_l, \quad F_l = (1 - a_l) I + a_l E_1, \quad (15.7.3)$$

证 把  $I$  写为  $\left( \sum_{l=0}^k B_l^k(t) \right) I$ , 欲证之式左端就成为

$$\left[ \sum_{l=0}^k B_l^k(t) F_l \right]^i = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_k=i} \binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} \prod_{l=0}^k [B_l^k(t)]^{i_l} \prod_{l=0}^k F_l^{i_l},$$

于是引理得证.

**定理 15.7.1**  $m \times n$  次 Bézier 矩形片  $P(u, v)$  的定义在  $D_5$  上的 trimmed 曲面可表为一张

$m \times (km + n)$  次 Bézier 矩形片  $\hat{P}(s, t)$ , 其控制顶点  $\hat{P}_{ij}$  可利用升阶算子  $\mathbf{A}_k$  由下式确定:

$$\left( \hat{P}_{i0}, \hat{P}_{i1}, \dots, \hat{P}_{i, km+n} \right)^T = \mathbf{A}_{n+km} \mathbf{A}_{n+km-1} \dots \mathbf{A}_{n+ki+1} \left( H_{i0}, H_{i1}, \dots, H_{i, n+ki} \right)^T, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (15.7.4)$$

$$H_{ij} = \sum_{r=0}^n \sum_{i_0+i_1+\dots+i_k=i} \binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} \binom{n}{r} \prod_{l=0}^k \binom{k}{l} \prod_{l=0}^k F_l^{i_l} P_{0r} / \binom{n+ki}{j}, \quad (15.7.5)$$

这里  $\alpha$ ,  $F_l$  的意义同(15.7.3).

证 把(15.7.2)代入  $P(u, v)$  的算子表达式, 应用引理 15.6.1  $\left( \text{取 } t^* = \sum_{l=0}^k B_l^k(t) a_l \right)$  和 15.7.1, 有

$$\begin{aligned} P(u, v) &= (I + u \Delta_1)^m (I + v \Delta_2)^n P_{00} = \left[ I + s \left( \sum_{l=0}^k B_l^k(t) a_l \right) \Delta_1 \right]^m (I + t \Delta_2)^n P_{00} \\ &= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) \left[ I + \left( \sum_{l=0}^k B_l^k(t) a_l \right) \Delta_1 \right]^i \sum_{r=0}^n B_r^n(t) P_{0r} \\ &= \sum_{i=0}^m B_i^m(s) \sum_{r=0}^n \sum_{i_0+i_1+\dots+i_k=i} B_r^n(t) B_\alpha^{ki}(t) \binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} \prod_{l=0}^k \binom{k}{l} \prod_{l=0}^k F_l^{i_l} P_{0r} / \binom{ki}{\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+ki} B_i^m(s) B_j^{n+ki}(t) H_{ij}. \end{aligned}$$

再使用升阶算子  $\mathbf{A}_k$  ( $k = n + ki + 1, n + ki + 2, \dots, n + km$ ) 就可得到(15.7.4). 证毕.

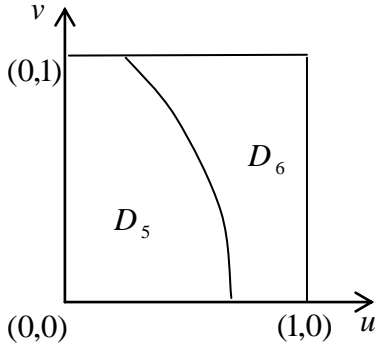


图 15.7.1 矩形参数域被曲线分割为两块曲边梯形域

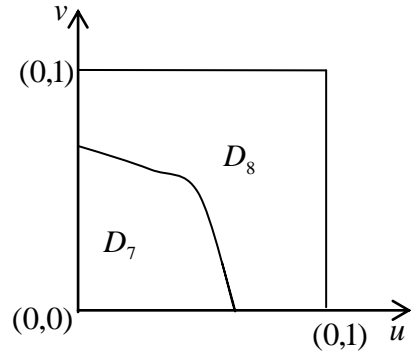


图 15.7.2 矩形参数域被曲线分割成曲边三角形域和五边形域

### 15.7.2 矩形参数域被分割为三边和五边曲边区域的广义离散算法

本节考察和上节类似的典型情况，只是参数域被分割为一个曲边直角三角形区域  $D_7$  和一个曲边五边形区域  $D_8$ ，见图 15.7.2。我们仅讨论定义在  $D_7$  上的 trimmed 曲面，至于  $D_8$  上的曲面可仿 § 15.6.2 的等参线方法及定理 15.7.1 处理。首先表分割线为

$$u = f(v) = \sum_{i=0}^k B_i^k(v/b)a_i, \quad 0 \leq v \leq b. \quad (15.7.6)$$

参数变换

$$T_4: \quad u = s \sum_{l=0}^k B_l^k(t)a_l, \quad v = bt, \quad 0 \leq s, t \leq 1 \quad (15.7.7)$$

的逆变换将区域  $D_7$  变换成矩形域  $\{(s,t) | 0 \leq s, t \leq 1\}$ ，我们有

**定理 15.7.2**  $m \times n$  次 Bézier 矩形片  $P(u,v)$  的定义在  $D_7$  上的 trimmed 曲面可表为一张  $m \times (km+n)$  次 Bézier 矩形片  $\hat{P}(s,t)$ ，其控制顶点  $\hat{P}_{ij}$  可利用升阶算子  $A_k$  由下式确定：

$$[\hat{P}_{i0}, \hat{P}_{i1}, \dots, \hat{P}_{i,km+n}]^T = A_{n+km} A_{n+km-1} \cdots A_{n+ki+1} [H_{i0}, H_{i1}, \dots, H_{i,n+ki}]^T, \quad i=0,1,\dots,m, \quad (15.7.8)$$

$$H_{ij} = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{i_0+i_1+\dots+i_k=i \\ r+\alpha=j}} \binom{i}{i_0, i_1, \dots, i_k} \prod_{l=0}^k \binom{n}{l} \prod_{l=0}^k F_l^{i_l} G^r P_{00} / \binom{n+ki}{j}, \quad (15.7.9)$$

这里  $\alpha$ ， $F_l$  的意义同(15.7.3)，且

$$G = (1-b)I + bE_2. \quad (15.7.10)$$

证 把(15.7.7)代入  $P(u,v)$  的算子表达式，注意到

$$(I + v\Delta_2)^n = (I + bt\Delta_2)^n = [(1-t)I + t(I + b\Delta_2)]^n = \sum_{r=0}^n B_r^n(t)G^r,$$

仿定理 15.7.1 的证明即可得证本定理。

### 15.7.3 广义离散在几何连续拼接和 trimmed 曲面参数表示中的应用

在第十章中我们详细研究了两张相邻的 Bézier 矩形片  $P(u,v)$  和  $Q(u,v)$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) 沿公共边界  $P(u,1) = Q(u,0)$  的  $G^n$  条件。由于曲面造型中通常是用 Bézier 矩形片通过求交、裁剪所得的 trimmed 曲面来拼合复杂的几何形体<sup>[22]</sup>，因此只研究 Bézier 曲面沿正规的公共边界的几何连续条件是不够的。现在我们已经可以解决 Kiciak<sup>[11]</sup>提出的两个公开问题之一，即沿参数域内一条多项式曲线拼接 trimmed 曲面的

**问题 15.7.1** 给定 Bézier 矩形片  $P(u,v)$  及其定义域内的一条 trimming 线  $u = f(v)$ ， $f(v)$  为多

项式且  $u = f(v)$  将定义域  $[0,1] \otimes [0,1]$  分割为  $D_*$  与  $D_{**}$  两个子区域; 若曲线  $\mathbf{P}(u,v)|_{u=f(v)}$  与另一张 Bézier 矩形片  $\mathbf{Q}(u,v)$  的边界  $\mathbf{Q}(u,0)$  相重合, 试求曲面  $\mathbf{P}(u,v)((u,v) \in D_*)$  与  $\mathbf{Q}(u,v)((u,v) \in [0,1] \otimes [0,1])$  沿公共边界即多项式曲线  $u = f(v)$  的几何连续条件.

应用定理 15.7.1(或 15.7.2), 我们只要求出广义离散以后曲面  $\mathbf{P}(u,v)((u,v) \in D_*)$  (或  $D_7$ ) 的张量积 Bézier 表示  $\hat{\mathbf{P}}(s,t)$ , 再把第十章中的两张 Bézier 曲面拼接的几何连续条件应用到  $\hat{\mathbf{P}}(s,t)$  和  $\mathbf{Q}(u,v)$ , 就可轻松地得出上述问题的解.

另一方面, 本节的广义离散算法使我们可把一张 trimmed Bézier 曲面分解为多张完整的参数曲面, 其步骤如下:

1. 用形如  $u = \sum_{i=0}^2 B_i^2(v)a_i$  的二次 Bézier 函数逼近参数域内的 trimming 线.
2. 把 trimmed 曲面的定义域分解为若干子区域, 每个子区域上可含有一个曲边直角梯形.
3. 把每个上述子区域上的子曲面片, 用广义离散法表示为一张完整的 Bézier 矩形片.

回顾 § 15.4—§ 15.7, 可以看到所有结果都是直观的, 推导是简洁的, 其原因在于我们采用了 Bézier 曲面的算子表示和重新参数化的技巧. 利用齐次坐标, 我们还可以把上述结果全部推广到有理 Bézier 曲面.

## 15.8 基于 de Casteljau 算法的有理二次 Bézier 曲线隐式化

参数曲线曲面隐式化的研究中, 常利用传统的代数几何理论. 本节和下节将展示这样一个事实: 对于隐式化而言, 新兴的 Blossoming 原理<sup>[23,24]</sup>比代数几何方法更为直观和有效.

给定一条平面  $n$  次有理 Bézier 曲线的齐次坐标形式

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \left( (1-t)^n, \binom{n}{1}(1-t)^{n-1}t, \dots, t^n \right) \cdot (\tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)^T, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (15.8.1)$$

这里  $\tilde{\mathbf{P}}_i = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i)$  是齐次坐标表示的 Bézier 控制顶点. 不妨假定曲线(15.8.1)不含使  $\tilde{\mathbf{P}}(\tau) = \mathbf{0}$  的参数点  $\tau$ , 即基点(Base point). 这是因为基点总可以通过提取因式  $(t - \tau)$  而除去. 记齐次坐标点  $\tilde{\mathbf{P}} = (x, y, 1)$ , 并记

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_i \\ \tilde{\mathbf{P}}_j \end{vmatrix} \equiv \omega_i \omega_j \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}, \quad l_{ij} = l_{ij}(x, y) = \binom{n}{i} \binom{n}{j} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_i \\ \tilde{\mathbf{P}}_j \end{vmatrix}, \quad (15.8.2)$$

$$L_{hk} = \sum_{l=\max(0, h+k+1-n)}^{\min(h,k)} l_{l, h+k+1-l}, \quad (15.8.3)$$

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n) = \mathbf{F}_{n \times n} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & \cdots & L_{0, n-1} \\ L_{10} & L_{11} & \cdots & L_{1, n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n-1, 0} & L_{n-1, 1} & \cdots & L_{n-1, n-1} \end{pmatrix}. \quad (15.8.4)$$

利用多项式的结式, 曲线(15.8.1)的隐式方程能被表为<sup>[21]</sup>

$$f(x, y) = \det(\mathbf{F}) = 0. \quad (15.8.5)$$

例如, 有理二次和三次 Bézier 曲线的隐式方程分别是

$$\begin{vmatrix} l_{01}(x, y) & l_{02}(x, y) \\ l_{02}(x, y) & l_{12}(x, y) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l_{01}(x, y) & l_{02}(x, y) & l_{03}(x, y) \\ l_{02}(x, y) & l_{03}(x, y) + l_{12}(x, y) & l_{13}(x, y) \\ l_{03}(x, y) & l_{13}(x, y) & l_{23}(x, y) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.8.6)$$

我们将应用 de Casteljau 算法而无须借助于多项式理论来证明(15.8.6)的第一式, 亦即

$n=2$  时曲线(15.8.1)上的所有点满足  $f(x, y)=0$ . 这一个证明将揭示出隐式矩阵(15.8.4)的结构与 de Casteljau 算法之间的深刻联系, 并表明后者是研究参数曲线隐式化的一个有力工具.

因  $l_{ij}(x, y)=0$  是过点  $\tilde{\mathbf{P}}_i$  和点  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  的一条直线的方程, 所以  $l_{ij}(x_i, y_i)=l_{ij}(x_j, y_j)=0$ . 下面, 我们首先来证明曲线(15.8.1)的两个端点必然满足  $f(x, y)=0$ . 由(15.8.3), 易知  $L_{0i}=L_{i0}=l_{0,i+1}$ ,  $L_{n-1,i}=L_{i,n-1}=l_{in}$ , 这意味着矩阵  $\mathbf{F}$  的首(末)行和首(末)列中, 每个元素等于 0 的表达式就是通过点  $\tilde{\mathbf{P}}_0(\tilde{\mathbf{P}}_n)$  的直线的方程, 于是行列式  $f(x_0, y_0)=f(x_n, y_n)=0$ , 因其首(末)行和首(末)列全为 0. 当  $n=2$  时, 即

$$f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l_{12}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f(x_2, y_2) = \begin{vmatrix} l_{01}(x_2, y_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

第二步, 我们对任意的实数  $t = \alpha \in (0, 1)$ , 应用 de Casteljau 算法把曲线(15.8.1)分为两段. 我们将根据子曲线上两个端点处具有与原曲线类似的端点性质的事实, 得出新的隐式方程  $\hat{f}(x, y)=0$ , 且  $\hat{f}(x, y)=c \cdot f(x, y)$ ,  $c$  与  $x$  和  $y$  无关. 显然, 第一条离散子曲线的控制顶点是  $(\hat{\mathbf{P}}_0, \hat{\mathbf{P}}_1, \hat{\mathbf{P}}_2) = (\tilde{\mathbf{P}}_0, \beta\tilde{\mathbf{P}}_0 + \alpha\tilde{\mathbf{P}}_1, \beta^2\tilde{\mathbf{P}}_0 + 2\alpha\beta\tilde{\mathbf{P}}_1 + \alpha^2\tilde{\mathbf{P}}_2)$ ,  $\beta=1-\alpha$ , 这一条子曲线的末端点  $\tilde{\mathbf{P}}$  在原曲线上相应于参数  $\alpha$ . 把上式代入(15.8.6)的第一式就得出

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{P}}_0 \\ \hat{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \beta\tilde{\mathbf{P}}_0 + \alpha\tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \beta^2\tilde{\mathbf{P}}_0 + 2\alpha\beta\tilde{\mathbf{P}}_1 + \alpha^2\tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \beta^2\tilde{\mathbf{P}}_0 + 2\alpha\beta\tilde{\mathbf{P}}_1 + \alpha^2\tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ 2\alpha\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 \\ 2\alpha\beta\tilde{\mathbf{P}}_0 + \alpha^2\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ 2\alpha^2\beta\tilde{\mathbf{P}}_0 + 2\alpha\beta^2\tilde{\mathbf{P}}_0 + 2\alpha^3\tilde{\mathbf{P}}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ 2\tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_0 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4 f(x, y) = 0, \end{aligned}$$

于是  $f(x, y)=0$  对任意  $x=x(\alpha)$ ,  $y=y(\alpha)$  均成立. 证毕.

下节我们还将严格证明上述结果对任意次数  $n$  的曲线(15.8.1)成立. 隐式化新方法的导出揭示了基点使隐式方程变得混乱的原因. 假设存在一个参数值  $t = \tau$  使得  $\tilde{\mathbf{P}}(\tau) = (0, 0, 0)$ , 我们



可应用 de Casteljau 算法把曲线在这点离散, 但由此得到  $\hat{\mathbf{P}}_n = (0,0,0)$ , 这意味着  $\hat{l}_{i,n} \equiv 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , 从而  $\hat{f}(x, y) = f(x, y) \equiv 0$ , 由此可见, 若曲线具有一个基点, 由(15.8.5)给出的隐式方程恒为零.

本节的思想可直接推广到双线性参数曲面的隐式化以及高次参数曲面的隐式化. 对于后者, 传统的方法是利用 Dixon 结式<sup>[25]</sup>.

## 15.9 基于 de Casteljau 算法的平面有理 $n$ 次 Bézier 曲线隐式化

**引理 15.9.1** 假设

$$\phi_1(a, b, c, r) = \sum_{k=0}^r \binom{a+1}{k} \binom{b}{r+c-k}, \quad \phi_2(a, b, c, r) = \sum_{k=0}^r \binom{a-k}{r-k} \binom{b+k}{c+k}, \quad (15.9.1)$$

则

$$\phi_1(a, b, c, r) = \phi_2(a, b, c, r), \quad 0 \leq r \leq a. \quad (15.9.2)$$

证 对  $a$  施行数学归纳法. 首先有  $\phi_1(0, b, c, r) = \phi_2(0, b, c, r)$ . 设引理当  $a = d$  时成立, 则

$$\begin{aligned} \phi_1(d+1, b, c, r) &= \sum_{k=0}^r \left[ \binom{d+1}{k-1} + \binom{d+1}{k} \right] \binom{b}{r+c-k} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{d+1}{k} \binom{b+1}{(r-1)+(c+1)-k} + \binom{d+1}{r} \binom{b}{c} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{d-k}{r-1-k} \binom{b+1+k}{c+1+k} + \binom{d+1}{r} \binom{b}{c} = \phi_2(d+1, b, c, r). \end{aligned}$$

所以引理得证.

**引理 15.9.2**

$$\phi_1(a, b, 0, r) = \phi_2(a, b, 0, r) = \binom{a+b+1}{r}. \quad (15.9.3)$$

证 上式的正确性基于文献[26]第 822 页的恒等式

$$\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

**定理 15.9.1** 若将有理 Bézier 曲线(15.8.1)在任意参数值  $\alpha$  处分段, 并把相应于区间  $[0, \alpha]$  内的一段表为齐次形式的有理  $n$  次 Bézier 曲线

$$\tilde{\mathbf{P}}^*(t) = \left( (1-t)^n, \binom{n}{1}(1-t)^{n-1}t, \dots, t^n \right) (\tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*)^T, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (15.9.4)$$

则必有  $n \times n$  阶的下三角阵  $\mathbf{A}(\alpha) = (a_{ij})$ , 使得

$$\alpha \cdot \mathbf{A}(\alpha) \cdot \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n) \cdot \mathbf{A}^T(\alpha) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*), \quad (15.9.5)$$

$$a_{ij} = \binom{n-j}{i-j} \beta^{i-j} \alpha^{j-1}, \quad \beta = 1 - \alpha; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (15.9.6)$$

证 本节中置  $\binom{n}{p} = 0 (p > n)$ , 于是(15.8.3)能被重新写成

$$L_{hk} = \sum_{l=0}^{\min(h,k)} l_{l, h+k+1-l}. \quad (15.9.7)$$

同时, 记  $n \times n$  阶矩阵  $\mathbf{E}$  为  $(e_{i+1, j+1})$ ,  $e_{i+1, j+1}$  是  $\mathbf{E}$  中第  $i+1$  行第  $j+1$  列的元素. 置

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n) = (f_{h+1, k+1}), \quad \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*) = (f_{i+1, j+1}^*). \quad (15.9.8)$$

不失一般性, 我们将仅就  $i \geq j$  的情况证明

$$\alpha(afa^T)_{i+1,j+1} = f_{i+1,j+1}^*. \quad (15.9.9)$$

首先有  $(af)_{i+1,k+1} = \sum_{h=0}^{n-1} a_{i+1,h+1} f_{h+1,k+1} = \sum_{h=0}^i a_{i+1,h+1} L_{hk} = \sum_{h=0}^i \binom{n-1-h}{i-h} \beta^{i-h} \alpha^h L_{hk}$ . 假设

$$u_{hk} = \binom{n-1-h}{i-h} \binom{n-1-k}{j-k} \alpha^{h+k} \beta^{i+j-h-k}, \quad 0 \leq h \leq i, 0 \leq k \leq j,$$

$$v_{lm} = \alpha^{l+m-1} \beta^{i+j+1-l-m} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_l \\ \tilde{\mathbf{P}}_m \end{vmatrix}, \quad w = \begin{cases} 0, & i = j \\ \sum_{h=j+1}^i u_{hj} L_{hj}, & i > j \end{cases},$$

$$\sigma_{klm} = \binom{n-1-k}{j-k} \binom{n-l-m+k}{i+1-l-m+k},$$

则当  $i > j$  时有  $w = \sum_{l=0}^j \sum_{h=j+1}^i u_{hj} L_{l,h+j+1-l}$ , 从而

$$\begin{aligned} \alpha(afa^T)_{i+1,j+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (af)_{i+1,k+1} a_{k+1,j+1}^T = \sum_{k=0}^j \sum_{h=0}^i u_{hk} L_{hk} = \sum_{k=0}^j \sum_{h=0}^k u_{hk} L_{hk} + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{h=k+1}^i u_{hk} L_{hk} + w \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{h=0}^k u_{hk} \sum_{l=0}^h l_{l,h+k+1-l} + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{h=k+1}^i u_{hk} \sum_{l=0}^k l_{l,h+k+1-l} + w \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k \sum_{h=l}^k u_{hk} l_{l,h+k+1-l} + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=0}^k \sum_{h=k+1}^i u_{hk} l_{l,h+k+1-l} + w = \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k \sum_{h=l}^i u_{hk} l_{l,h+k+1-l} \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k \sum_{m=1+k}^{i+1+k-l} \binom{n}{l} \binom{n}{m} \sigma_{klm} v_{lm}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (15.9.10)$$

另一方面, 易知

$$f_{i+1,j+1}^* = \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{n}{i+j+1-k} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_k^* \\ \tilde{\mathbf{P}}_{i+j+1-k}^* \end{vmatrix},$$

根据 de Casteljau 算法,

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^* = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \beta^{k-l} \alpha^l \tilde{\mathbf{P}}_l, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{i+j+1-k}^* = \sum_{m=0}^{i+j+1-k} \binom{i+j+1-k}{m} \beta^{i+j+1-k-m} \alpha^m \tilde{\mathbf{P}}_m,$$

因而利用恒等式

$$\binom{n}{k} \binom{n}{i+j+1-k} \binom{k}{l} \binom{i+j+1-k}{m} = \binom{n}{l} \binom{n}{m} \binom{n-l}{k-l} \binom{n-m}{i+j+1-m-k},$$

可以得到

$$f_{i+1,j+1}^* = \alpha \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{i+j+1-k} \binom{n}{l} \binom{n}{m} \binom{n-l}{k-l} \binom{n-m}{i+j+1-m-k} v_{lm}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (15.9.11)$$

现在假设

$$(afa^T)_{i+1,j+1} = \sum_{\substack{0 \leq l \leq j \\ 1 \leq m \leq i+j+1 \\ l+m \leq i+j+1 \\ l < m}} \binom{n}{l} \binom{n}{m} \xi_{lm} v_{lm}, \quad f_{i+1,j+1}^* = \alpha \sum_{\substack{0 \leq l \leq j \\ 1 \leq m \leq i+j+1 \\ l+m \leq i+j+1 \\ l < m}} \binom{n}{l} \binom{n}{m} \eta_{lm} v_{lm}. \quad (15.9.12)$$

从(15.9.10)容易得出

$$\xi_{lm} = \sum_{k=\max(l, l+m-1-i)}^{\min(j, m-1)} \sigma_{klm} = \begin{cases} \xi_{lm}^{(1)} = \sum_{k=l}^{m-1} \sigma_{klm}, & m < j+1, \\ \xi_{lm}^{(2)} = \sum_{k=l}^j \sigma_{klm}, & j+1 \leq m \leq i+1, \\ \xi_{lm}^{(3)} = \sum_{k=l+m-1-i}^j \sigma_{klm}, & m > i+1. \end{cases}$$

另一方面, 假设

$$\eta_{lm} = \begin{cases} \eta_{lm}^{(1)}, & m < j+1, \\ \eta_{lm}^{(2)}, & j+1 \leq m \leq i+1, \\ \eta_{lm}^{(3)}, & m > i+1. \end{cases}$$

应用引理 15.9.1 和 15.9.2, 我们有

$$\begin{aligned} \eta_{lm}^{(1)} &= \sum_{k=l}^{\min(j, i+j+1-m)} \binom{n-l}{k-l} \binom{n-m}{i+j+1-m-k} - \sum_{k=m}^j \binom{n-m}{k-m} \binom{n-l}{i+j+1-l-k} \\ &= \phi_1(n-1-l, n-m, i+1-m, j-l) - \phi_1(n-1-m, n-l, i+1-l, j-m) \\ &= \phi_2(n-1-l, n-m, i+1-m, j-l) - \phi_2(n-1-m, n-l, i+1-l, j-m) \\ &= \sum_{k=l}^j \sigma_{klm} - \sum_{k=m}^j \sigma_{klm} = \xi_{lm}^{(1)}, \\ \eta_{lm}^{(2)} &= \sum_{k=l}^{\min(j, i+j+1-m)} \binom{n-l}{k-l} \binom{n-m}{i+j+1-m-k} = \phi_1(n-1-l, n-m, i+1-m, j-l) \\ &= \phi_2(n-1-l, n-m, i+1-m, j-l) = \xi_{lm}^{(2)}, \\ \eta_{lm}^{(3)} &= \sum_{k=l}^{i+j+1-m} \binom{n-l}{k-l} \binom{n-m}{i+j+1-m-k} = \phi_1(n-1-l, n-m, 0, i+j+1-l-m) \\ &= \phi_2(n+i-l-m, n-1-i, 0, i+j+1-l-m) = \xi_{lm}^{(3)}. \end{aligned}$$

于是得到  $\xi_{lm} = \eta_{lm}$ ,  $\forall l, m$ . 这表明(15.9.9)成立. 本定理证毕.

**定理 15.9.2** 对于有理 Bézier 曲线(15.8.1)上的任何点  $(x, y, 1)$ , 均有(15.8.5)成立.

证 由定理 15.9.1, 我们得到

$$\alpha^n \{\det(\mathbf{A}(\alpha))\}^2 \cdot \det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)\} = \det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*)\},$$

即

$$\alpha^{n^2} \cdot \det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)\} = \det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*)\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

因为  $L_{i,n-1} \equiv L_{n-1,i} \equiv l_{i,n} = \binom{n}{i} \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}_i \\ \tilde{\mathbf{P}}_n \end{vmatrix}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , 所以

$$\det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}_n, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)\} = \begin{vmatrix} L_{00} |_{\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\mathbf{P}}_n} & \cdots & L_{0,n-2} |_{\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\mathbf{P}}_n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{n-2,0} |_{\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\mathbf{P}}_n} & \cdots & L_{n-2,n-2} |_{\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\mathbf{P}}_n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

类似地有  $\det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}(\alpha), \tilde{\mathbf{P}}_0^*, \tilde{\mathbf{P}}_1^*, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n^*)\} \equiv 0$ ,  $\forall \alpha$ . 从而对一切参数  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 均有

---

$\det\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n)\} = 0$ . 证毕.

### 主要文献

- [WGJ, 90] 王国瑾, 旋转曲面 CAD 的有理 B 样条方法, 软件学报, 1990, 1(4): 24-39
- [WGJ, 92] 王国瑾, 三次 NURBS 曲线的一个转换公式, 浙江大学学报(自然科学版), 1992, 26(6): 627-636
- [HSM, 96a] 胡事民, CAD 系统数据通讯中的若干几何问题, 浙江大学博士学位论文, 1996 年 6 月, 杭州
- [HSM, 96b] Hu Shimin, Conversion of a triangular Bézier patch into three rectangular Bézier patches, Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(3): 219-226
- [HSM, WGZ, JTG, 96a] Hu Shimin, Wang Guozhao, Jin Tongguang, Generalized subdivision of Bézier surfaces, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1996, 58(3): 218-222
- [HSM, WGZ, JTG, 96b] 胡事民, 汪国昭, 金通洸, 矩形域上有理 Bézier 曲面的广义离散算法及其应用, 计算机学报, 1996, 19(4): 285-292
- [HSM, SJG, WGZ, 99] 胡事民, 孙家广, 汪国昭, Bézier 曲面的广义离散及应用, 计算机学报, 1999, 22(3): 290-295
- [STW, WGJ, 94] Sederberg, T.W., Wang Guojin, A Simple verification of the implicitization formulae for Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, 1994, 11(2): 225-228
- [WGJ, STW, 99] Wang Guojin, Sederberg, T.W., Verifying the implicitization formulae for degree  $n$  rational Bézier curves, Journal of Computational Mathematics, 1999, 17(1): 33-40

### 参考文献

- 1 Hoschek, J., Approximate conversion of spline curves, Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1-2): 59-66
- 2 Hoschek, J., Lasser D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A.K., Peters Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1992
- 3 Barnhill, R., Surfaces in computer aided geometric design: a survey with new results, Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(1-3): 1-17
- 4 Brueckner, I., Construction of Bézier points of quadrilaterals from those of triangles, Computer Aided Design, 1980, 12(1): 21-24
- 5 叶林, 两类 Bézier 曲线间的转换, 应用数学学报, 1987, 10(4): 413-417
- 6 王俊, Bézier 曲面在三角域和矩形域上的互换, 计算数学, 1993, 15(1): 5-15
- 7 Lino, L., Wilde, J., Subdivision of triangular Bézier Patches into rectangular Bézier patches, Advances in Design Automation, 1991, 32(2): 1-6
- 8 Goldman, R.N., Filip, D.J., Conversion from Bézier rectangles to Bézier triangles, Computer Aided Design, 1987, 19(1): 25-27
- 9 Sheng, X., Hirsch, B.E., Triangulation of trimmed Surface in parametric space, Computer Aided Design, 1992, 24(8): 437-444
- 10 Piegel, L.A., Richard, A.M., Tessellating trimmed NURBS surfaces, Computer Aided Design, 1995, 27(1): 16-26
- 11 Kiciak, P., Constructions of  $G^1$  continuous joins of rational Bézier patches, Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(3): 283-303
- 12 Salmon, G., *Modern higher Algebra*, Chelsea, New York, 5<sup>th</sup> Edition, 1985, 83-86
- 13 Dixon, A.L., The eliminant of three quantics in two independent variables, Proceedings of London Mathematical Society, 1908, 76(2): 46-49, 473-492
- 14 Sederberg, T.W., Implicit and parametric curves and surfaces for computer aided geometric design, Ph.D. thesis, Purdue University, 1983
- 15 Buchberger, B., Applications of grobner bases in nonlinear computational geometry, in: Kapur, D. and Mundy, J.L., eds, *Geometric Reasoning*, Elsevier Science Publisher, MIT Press, 1989, 413-446
- 16 Manocha, D., Canny, J.F., Implicit representation of rational parametric surfaces, Journal of Symbolic Computation, 1992, 13(5): 485-510
- 17 Wee, C.E., Goldman, R.N., Using multivariate resultants to find the implicit equation of a rational surface, The Visual Computer, 1992, 8(3): 171-180
- 18 陈发来, 有理曲线的近似隐式化表示, 计算机学报, 1998, 21(9): 855-859
- 19 Sederberg, T.W., Zheng J.M., Klimaszewski, K., Dokken T., Approximate implicitization using monoid curves and surfaces, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1999, 61(4): 177-198.
- 20 Sederberg, T.W., Chen, F.L., Implicitization using moving curves and surfaces, Proceedings of SIGGRAPH'95, Los Angeles, CA, 301-308
- 21 Goldman, R.N., Sederberg, T.W., Anderson, D.C., Vector elimination: A technique for the implicitization, inversion, and intersection of planar parametric rational polynomial curves, Computer Aided Geometric Design 1984, 1(4): 327-356
- 22 Farouki, R.T., Trimmed surface algorithms for the evaluation and interrogation of solid boundary representation, IBM Journal of Research and Development, 1987, 31(3): 314-334

- 
- 23 Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 2<sup>nd</sup> Edition, Academic Press, New York, 1990
  - 24 Farin, G., *NURBS for Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, 1991
  - 25 Sederberg, T.W., Anderson, D.C., Goldman, R.N., Implicit representation of parametric curves and surfaces, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1984, 28(1): 72-84
  - 26 Abramowitz, M., Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publication Inc., New York(Tenth Printing), 1972