

## 第十六章 等距曲线与等距曲面

等距(Offset)曲线曲面也称为平行或位差曲线曲面,它们是基曲线曲面沿法向距离为 $d$ 的点的轨迹,为近十年来 CAGD 的一大热点,研究文献非常丰富.其应用领域遍及数据加工中刀具轨迹计算,机器人行走路径规划,形位公差学,公路铁路线型设计,箱包等带厚度物体设计,钣金零件为装配所预留的等宽度间隙计算,等间距挖洞加工,艺术花纹设计,实体造型和图形学等.

由于曲线曲面的单位法矢包含平方根项,offset 的代数次数相当高<sup>[1]</sup>,且一般不再具有原基曲线曲面的相同类型.除直线、圆、平面、球面、圆柱面、圆锥面和圆环面以外,有理曲线曲面的 Offset 一般无法表示为有理形式,从而无法被通用的 CAGD 系统来处理<sup>[1-3]</sup>.于是人们渴望弄清何种类型的有理曲线曲面其 offset 仍为有理,它又是如何构造的,这就是 offset 研究中的精确有理表示和插值造型问题<sup>[4-15]</sup>;当上述条件不再具备时,为使 CAGD 系统能有效处理,又必须用各种手段对 offset 进行逼近,由此产生了 offset 研究中基于几何或代数的逼近算法问题<sup>[16-31]</sup>;当法向距离 $d$ 大于基曲线的最小曲率半径或其中部分曲线段间的距离时,offset 会产生尖点、环或自交现象<sup>[32]</sup>,另外 offset 有时还会断裂,这就提出了 offset 研究中的异常情况对策问题<sup>[33-39]</sup>;最后一类研究问题是测地 offset<sup>[40-43]</sup>、广义 offset<sup>[44,40,45]</sup>和 offset 最优化<sup>[46]</sup>.

1990 年, Farouki<sup>[FRT, ST, 90]</sup>等把平面多项式曲线的 offset 表达式中分母根号内为完全平方的一类参数曲线命名为 PH 曲线,首开精确有理表示研究之先河.此后,他又把平面 PH 曲线推广到空间 PH 曲线与曲面,并给出了具有有理 offset 的可展曲面的显示表达<sup>[4]</sup>.与此同时,他对 PH 曲线作了进一步的理论与应用研究<sup>[5,6]</sup>,并把其弧长函数是原参数的多项式函数这一优点成功地应用于速度控制是基于轨迹弧长的数控加工和工业机器人中<sup>[7]</sup>. Pottmann<sup>[8]</sup>依据投影对偶表示和包络技术,用 PH 思想导出了有理曲线曲面的 offset 具有精确有理表示的条件. Martin 等<sup>[9]</sup>研究了扫掠体的等距曲面,并给出自交检测. Farouki<sup>[10]</sup>对凸多面体、旋转体和简单轮廓线的拉伸体这三种简单实体的表面均给出了等距面的精确表示. Martin<sup>[11]</sup>证明了 Dupin 曲面(即曲率线为圆弧的曲面)的等距曲面也是 Dupin 曲面. Peternel 等<sup>[12]</sup>利用 Laguerre 几何模型间的几何变换,给出了构造任意有理曲面的 PH 曲面的几何方法.另一方面,由于 PH 曲线的一系列优点,实际应用需要对已知型值点列构造用两端点的位矢、单位切矢和有向曲率作 Hermite (简称 H) 插值的 PH 曲线.一般三次参数曲线的  $GC^2$  H 插值为 deBoor<sup>[13]</sup>所研究. 1995 Farouki 等<sup>[14]</sup>给出五次 PH 曲线的  $C^1$  H 插值算法; 1997 年 Meek 等<sup>[15]</sup>给出平面分段三次 PH 曲线的  $G^1$  插值算法.

在 offset 逼近算法方面,主要有:(1)等距移动(offsetting)控制网格(顶点)来得到 offset 逼近曲线控制网格(顶点)的方法.如 Cobb<sup>[16]</sup>把 B 样条曲线的控制顶点沿曲线上与其距离最近点(称为结点)处的曲线法矢方向平移等距离 $d$ ; Coquillart<sup>[17]</sup>把上述方法的 $d$ 根据结点曲率以及结点与原控制顶点的距离作修正; Tiller 等<sup>[18]</sup>把 NURBS 曲线 B 网的各边沿边法向平移距离 $d$ ,再由相邻平移边的交点来得到 offset 逼近曲线的 B 网; Elber 和 Cohen<sup>[19]</sup>以 Cobb 得到的 B 网为初值,利用控制顶点对应于结点的逼近误差来迭代地扰动修正各控制顶点的偏移量.他们用 NURBS 曲线的和与积表示误差函数,并结合自适应的分割算法<sup>[20]</sup>,即把基曲线上逼近误差最大的点取为分割点,进行 offset 逼近.(2)基圆包络逼近法.如 Lee 等<sup>[21]</sup>先用二次 Bézier 样条曲线逼近基圆,再把此逼近曲线沿基曲线扫掠所得的包络线作为 offset 逼近.(3)基于插值或拟合的方法.如 Klass<sup>[22]</sup>和 Pham<sup>[23]</sup>分别用三次 Hermite 曲线和有限个采样点的三次 B 样条插值曲线逼近等距线; Hoschek<sup>[24]</sup>用样条曲线对等距线采样点的逼近误差的最小二乘解来调整 offset 端点的切矢模; Hoschek 和 Wissel<sup>[25]</sup>用多段低次保端点高阶连续的样条曲线作非线性最优化的 offset 逼近; Sederberg 等<sup>[26]</sup>用仅有中间控制顶点为区间点的偶次区间 Hermite 插值曲线来进行 offset 逼近; Piegl 和 Tiller<sup>[27]</sup>对 NURBS 提出基于样本点插值的 offset 曲线曲面逼近算法; Li 和 Hsu<sup>[28]</sup>提出基于 Legendre 级数逼近的方法; Farouki<sup>[29]</sup>利用双三次 Hermite 插值曲面来逼近等距曲面等.以上方法均在基曲线上取有限个样本点来考核误差,并与分割算法相结合来提高精度.(4)不会产生自交的逼近法.如 Chiang 等<sup>[30]</sup>把基

曲线上的点与二维网格点相对应,用图象处理的方法求等距线逼近;Kimmel<sup>[31]</sup>在具有精度所需分辨率的矩形网格上进行小波计算,最终通过对应网格点值的等高线来生成等距曲线逼近.

在异常情况对策研究方面, Maekawa 等<sup>[32]</sup>提出了基于子分的区间投影多面体算法,用于计算平面等距曲线的局部自交点和整体自交点; Maekawa 等<sup>[33]</sup>计算了使管道曲面不产生自交的最大可能半径; Maekawa<sup>[34,35]</sup>讨论了在显式或隐式表示下二次曲面的等距面的自交问题; Chen 和 Ravani<sup>[36]</sup>提出了用于计算一般参数曲面的等距曲面上自交曲线的步进算法; Aomura 等<sup>[37]</sup>提出了计算均匀双三次 B 样条曲面片的等距面上自交曲线的步进算法; Vafiadou 等<sup>[38]</sup>用光线跟踪方法绘制 Bézier 曲面片的等距面的自交; Maekawa 等<sup>[39]</sup>提出了一种基于 Bernstein 子分的 Bézier 曲面片的等距面的自交曲线的计算方法.

至于测地等距线,定义为曲面上沿曲线  $C$  的测地线距离为  $d$  的点的轨迹<sup>[40]</sup>. Patrikalakis 等<sup>[41]</sup>首次提出 NURBS 曲面上测地等距线的算法; Rausch 等<sup>[42]</sup>和 Kunze 等<sup>[43]</sup>用测地等距线的方法分别计算了曲面上两条曲线之间的中线和测地 Voronoi 图. 广义等距曲线曲面的概念最早由 Brechner<sup>[44]</sup>提出; Pottmann<sup>[40]</sup>对它作了进一步的推广,并应用于自由曲面三轴铣削的无碰撞研究<sup>[45]</sup>. offset 的最优化问题为 Alhanaty 等<sup>[46]</sup>提出,即求一形体,使得其等距线的周长变化最小或其等距面的面积变化最小,这在固体燃烧和在液体环境下的药物释放中有重要应用. 他们在凸集和星状集范围内给出了最优解.

国际学者围绕 offset 虽然做了以上大量研究,但分析表明这些工作还有许多缺陷:

1. PH 条件只是具有有理等距曲线的平面多项式曲线所应满足的一个充分条件. 换言之, PH 曲线只是所有等距线能精确有理表示的参数曲线 (OR 曲线) 的子集. 那么, OR 曲线的一般形式怎样? 分哪几类? 如何构造它呢?

2. 等距面的研究限于 PH 曲面及扫掠体和简单实体的表面作为基曲面,对 CAGD 常用的抛物面、双曲面、柱面、锥面、非可展有理直纹面等,其 offset 有理表示尚一无所知.

3. 对 PH 曲线的插值研究者甚少,三次情况下无法产生拐点<sup>[FRT, ST, 90]</sup>, Farouki 的方法仅限于  $C^1$  H 插值. 对 OR 曲线  $C^1$  以上的 H 插值由于技术难度和复杂计算,更鲜有人涉足.

4. 对 offset 的逼近,以 offsetting 控制顶点的多种方法为最简单直观. Elber<sup>[47]</sup>以逼近曲线所需控制顶点的多少为准则来评价优劣. 但所有这些方法都无有效的手段来控制误差. 那么能否精确分析顶点偏移中的误差,给出最优逼近呢?

5. Lee 的基圆包络逼近法所得到的逼近曲线次数太高,对  $n$  次多项式或有理多项式曲线而言,逼近曲线是  $3n-2$  或  $5n-4$  次的有理曲线. 那么能否降低逼近曲线的次数,例如,使其与基曲线同次呢? 又能否把它推广到曲面逼近呢?

本章将系统地介绍我们围绕以上论题所获的研究成果. 例如利用复分析、重新参数化和代数几何技术,我们可以完整而确切地回答以上第一个问题. Farouki 和 Sederberg<sup>[48]</sup>称这一结果为他们所意想不到的(Unexpected). 并通过证明抛物线的等距线的亏格为零,从理论上验证了我们结论的正确性. 本章第 1 节内容取材于[FRT, NCA, 90]; 第 2 节内容取材于[FRT, ST, 90]; 第 3 节内容取材于[LW, 93], [LW, 95], [ZJM, 95]; 第 4 节内容取材于[CGD, WGJ, 2000a, b, c]; 第 5 节内容取材于[LLG, WGJ, 2000a]; 第 6 节内容取材于[SHH, LLG, WGJ, 2000]; 第 7 节内容取材于[LW, PH, 96]; 第 8 节内容取材于[LW, 94], [LW, 96]; 第 9 节内容取材于[PH, LW, RB, 96]; 第 10 节内容取材于[LLG, WGJ, 2000b].

## 16.1 平面等距曲线

**定义 16.1.1** 给定一条平面参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , 它的距离为  $d$  的等距曲线定义为:

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d \cdot \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(t) = (y'(t) - x'(t)) / \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}. \quad (16.1.1)$$

这里  $\mathbf{r}(t)$  称为母线,  $\mathbf{n}(t)$  为  $\mathbf{r}(t)$  的单位法向量;  $d$  为带符号的偏离量,当  $d > 0 (< 0)$  时,  $\mathbf{r}_d(t)$  称为正(负)等距线.

当  $\mathbf{r}(t)$  为有理参数曲线时, 它可隐式化为一个不可约代数方程

$$\mathbf{F}: \quad f(x, y) = 0. \quad (16.1.2)$$

即  $\mathbf{F}$  为一条代数曲线. 它的等距线也可写成点集形式:

$$\Gamma_d = \{q | q = p + d \cdot N(p), p \in \Gamma\}, N(p) = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \right]_p. \quad (16.1.3)$$

由结式理论可证明代数曲线的等距线仍是代数曲线, 不过次数通常要比原曲线高出许多. 下面以多项式参数曲线为例, 给出其等距线的代数方程表示和次数公式.

**引理 16.1.1** 多项式  $A(t) = \sum_{k=0}^m \alpha_k t^k$  ( $\alpha_m \neq 0$ ) 和  $B(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k t^k$  ( $\beta_n \neq 0$ ) 有公共零点的充要条件是它们关于  $t$  的结式(Resultant)为零:

$$\text{Res}(A, B) = \begin{vmatrix} \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ & \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \beta_n & \cdots & \cdots & \beta_1 & \beta_0 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \beta_n & \cdots & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{vmatrix} \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ & \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{vmatrix}} \right\} n \text{行} \\ \left. \vphantom{\begin{vmatrix} \beta_n & \cdots & \cdots & \beta_1 & \beta_0 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \beta_n & \cdots & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \end{vmatrix}} \right\} m \text{行} \end{matrix} = 0. \quad (16.1.4)$$

这是代数学中的一个定理<sup>[49]</sup>, 上述  $m+n$  阶行列式称为 Sylvester 结式. 今有平面  $n$  次多项式参数曲线

$$r(t) = (a(t), b(t)) = \left( \sum_{i=0}^n a_i t^i, \sum_{i=0}^n b_i t^i \right), a_n^2 + b_n^2 \neq 0. \quad (16.1.5)$$

记  $\phi(t)$  为  $a'(t)$  和  $b'(t)$  的最大公因子, 即  $\text{GCD}_t(a'(t), b'(t))$ . 由此可知多项式  $p(t) = a'(t)/\phi(t)$  和  $q(t) = b'(t)/\phi(t)$  互素, 且对任意  $\tau$  (包括使  $\phi(\tau) = 0$  的  $\tau$ ), 成立着  $p(\tau)/q(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} (a'(t)/b'(t))$ . 这表明向量  $(p(t), q(t))$  为曲线  $r(t)$  的切向.

**定理 16.1.1** 对于平面  $n$  次多项式曲线  $r(t) = (a(t), b(t))$ , 其距离为  $d$  的等距线方程为

$$f_d(x, y) = \text{Res}_t(P(t, x, y), Q(t, x, y)) = 0, \quad (16.1.6)$$

$$P(t, x, y) = (x - a(t))^2 + (y - b(t))^2 - d^2, \quad Q(t, x, y) = p(t)(x - a(t)) + q(t)(y - b(t)). \quad (16.1.7)$$

证 由(16.1.7)可知, 方程  $P(t, x, y) = 0$  表示以母线  $r(t)$  上任一点  $(a(t), b(t))$  为中心,  $|d|$  为半径的圆  $c(t)$ , 方程  $Q(t, x, y) = 0$  表示母线在点  $(a(t), b(t))$  的法线  $L(t)$ . 根据结式的定义和性质, 对于满足  $f_d(x, y) = 0$  的点  $(x, y)$ , 必存在某一个参数值  $t$ , 使  $P(t, x, y) = Q(t, x, y) = 0$ , 这意味着点  $(x, y)$  位于圆  $c(t)$  和法线  $L(t)$  上, 即在  $r(t)$  的正或负等距线上. 反之, 与任意  $t$  相对应的  $r(t)$  的等距线上的点  $(x, y)$  必满足  $P(t, x, y) = Q(t, x, y) = 0$ , 从而(16.1.6)成立. 证毕.

**定理 16.1.2** 由(16.1.6)定义的平面多项式参数曲线(16.1.5)的等距线方程表示次数不超过  $n_d = 4n - 2 - 2\nu$  的代数曲线, 其中  $n$  为母线  $r(t)$  的次数,  $\nu$  为  $\text{GCD}_t(a'(t), b'(t))$  的次数.

证 由(16.1.7)可知,  $P(t, x, y)$  和  $Q(t, x, y)$  关于  $t$  各为  $2n$  次和  $2n-1-\nu$  次, 关于  $x$  和  $y$  各为 2 次和 1 次. 记  $\rho_{ij}(x, y)$  为结式(16.1.4)中的第  $i$  行第  $j$  列的元素, 于是可推知:

(1) 当  $\{1 \leq i \leq 2n-1-\nu \text{ 且 } i \leq j \leq i+n-1\}$ , 或  $\{2n-\nu \leq i \leq 4n-1-\nu \text{ 且 } i-(2n-\nu)+1 \leq j \leq i-(2n-\nu)+n\}$  时,  $\rho_{ij}(x, y)$  为一常数;

(2) 当  $\{1 \leq i \leq 2n-1-\nu \text{ 且 } j \leq i\}$ , 或  $\{1 \leq i \leq 2n-1-\nu \text{ 且 } j > i+2n\}$ , 或  $\{2n-\nu \leq i \leq 4n-1-\nu \text{ 且 } j < i-(2n-\nu)+1\}$  或  $\{2n-\nu \leq i \leq 4n-1-\nu \text{ 且 } j > i\}$  时,  $\rho_{ij}(x, y) = 0$ ;

(3) 当  $\{1 \leq i \leq 2n-1-\nu \text{ 且 } j=i+2n\}$  时,  $\deg(\rho_{ij}(x, y)) = 2$ ;

(4) 其余情况下,  $\deg(\rho_{ij}(x, y)) \leq 1$ .

设  $S$  为由序列  $\{1, 2, \dots, 4n-1-\nu\}$  的所有不同排列所组成的集合, 记

$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{4n-1-\nu}\} \in S$ , 由行列式定义可得  $f_d(x, y) = \sum_{\sigma \in S} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \prod_{i=1}^{4n-1-\nu} \rho_{i\sigma_i}(x, y)$ , 其

中当  $\sigma$  为偶(或奇)排列时,  $(-1)^{\text{sign}(\sigma)} = +1$  (或  $-1$ ). 现设排列  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{4n-1-\nu}\}$  对应于一个非零项, 则该项可分解成如下五项之积:

$$\begin{aligned} \pi_1(\sigma) &= \prod_{\substack{\sigma_i = i+2n \\ 1 \leq i \leq 2n-1-\nu}} \rho_{i\sigma_i}(x, y), \quad \pi_2(\sigma) = \prod_{\substack{i+n \leq \sigma_i \leq i+2n-1 \\ 1 \leq i \leq 2n-1-\nu}} \rho_{i\sigma_i}(x, y), \quad \pi_3(\sigma) = \prod_{\substack{i-(2n-\nu)+n+1 \leq \sigma_i \leq i \\ 2n-\nu \leq i \leq 4n-1-\nu}} \rho_{i\sigma_i}(x, y), \\ \pi_4(\sigma) &= \prod_{\substack{i \leq \sigma_i \leq i+n-1 \\ 1 \leq i \leq 2n-1-\nu}} \rho_{i\sigma_i}(x, y), \quad \pi_5(\sigma) = \prod_{\substack{i-(2n-\nu)+1 \leq \sigma_i \leq i-(2n-\nu)+n \\ 2n-\nu \leq i \leq 4n-1-\nu}} \rho_{i\sigma_i}(x, y). \end{aligned}$$

记  $n_k(\sigma)$  为  $\pi_k(\sigma)$  中元素  $\rho_{ij}$  的个数, 则仔细分析(16.1.6)中行列式的结构, 并注意到当  $i \neq j$  时  $\sigma_i \neq \sigma_j$ , 可以发现  $n_1(\sigma) + n_2(\sigma) \leq 3n+1-\nu$ . 所以当  $n_1(\sigma) \leq n-1-\nu$  时, 该  $\sigma$  所对应的项关于  $x$  和  $y$  的次数为  $N = 2n_1(\sigma) + n_2(\sigma) + n_3(\sigma) \leq 4n-2-2\nu$ ; 而当  $n_1(\sigma) \geq n-\nu$  时, 进一步分析 (16.1.6) 中行列式的特点, 容易知道  $n_3(\sigma)$  不大于  $(4n-\nu-1)-n-2(n_1(\sigma)-(n-\nu)+1)-(n-\nu-1)-n_2(\sigma)$ , 从而  $N \leq 4n-2-2\nu$ . 证毕.

现在应用(16.1.6)来考察两个例子. 对于抛物线  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$  和  $d = \pm 1$ , 得  $f_d(x, y) = 16x^6 + (16y^2 - 40y - 47)x^4 + (-32y^3 + 6y + 28)x^2 + 16y^4 - 40y^3 + 9y^2 + 40y - 25 = 0$ , 这是一个六次的不可约代数方程. 对于三次参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 2t^3, 3t - 3t^2)$  和  $d = \pm 1$ , 得  $f_d(x, y) = g_1(x, y) \cdot g_2(x, y) = 0$ , 其中  $g_1(x, y) = 54x^4 - 108x^3 + (8y^3 + 96y^2 - 30y - 37)x^2 + (-8y^3 - 96y^2 + 30y + 91)x + 8y^5 + 34y^4 - 22y^3 - 117y^2 + 60y - 34$ , 又有  $g_2(x, y) = 54x^4 - 108x^3 + (8y^3 + 48y^2 - 30y + 55)x^2 + (-8y^3 - 48y^2 + 30y - 1)x + 8y^5 - 14y^4 + 26y^3 - y^2$ , 这表示十次的  $f_d(x, y)$  可分解为两个五次多项式的乘积, 它们分别表示正负等距线.

类似地可证明有理参数曲线的等距线也是代数曲线<sup>[FRT, NCA, 90]</sup>. 下面考察这一等距线是否也能表示成有理参数形式. 这个问题比较复杂, 共有以下四种情况:

(1) 多项式参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (a(t), b(t))$  的等距线仍是多项式参数曲线, 则  $\mathbf{r}(t)$  必为直线: 设  $\mathbf{r}_d(t) = (c(t), d(t))$ ,  $c(t), d(t)$  为多项式, 则  $(a(t) - c(t))^2 + (b(t) - d(t))^2 = d^2$ , 因此  $a(t) - c(t)$  和  $b(t) - d(t)$  为常数, 从而法向量  $\mathbf{n}(t)$  为常向量, 即母线  $\mathbf{r}(t)$  为直线.

(2) 有理多项式参数曲线的等距线为有理多项式参数曲线: 例如, 如果假设  $\mathbf{r}(t) = \{6t - 6t^2 + 3t^3 / 2, 3t^2 - 2t^3\}$ , 则  $\|\mathbf{r}'(t)\| = 6 - 12t + 15t^2 / 2$ , 于是取  $d = 1$ , 有

$$\mathbf{r}_d(t) = (56t - 152t^2 + 168t^3 - 84t^4 + 15t^5, -8 + 16t + 18t^2 - 64t^3 + 62t^4 - 20t^5) / (8 - 16t + 10t^2).$$

(3) 有理多项式参数曲线的等距线可重新参数化为有理多项式参数曲线: 设有抛物线  $\mathbf{r}(t) = (3t, t^2/2)$ . 若引入变换  $t = t(s) = (s^2 - 9)/(8s)$ , 则  $\mathbf{r}(t(s)) = (32s)^{-1}(12s(s^2 - 9), (s^2 - 9)^2)$ ,  $\|\mathbf{dr}(t(s))/ds\| = (s^2 + 9)/(2s)$ , 于是取  $d = 1$ , 有

$$\mathbf{r}_d(s) = (12s^5 - 32s^4 - 972s + 288, s^6 - 9s^4 + 192s^3 - 81s^2 + 729) / (32s^2(s^2 + 9)).$$

(4) 有理参数曲线的等距线不能表示成有理曲线: 如椭圆  $\mathbf{r}(t) = (2 - 2t^2, 2t)/(1 + t^2)$ , 对  $d = 1$  应用结式方法有  $f_d(x, y) = 88x^4 - 192x^2 - 96y^2 + 296y^2x^2 - 16x^6 - 108x^4y^2$

$-168y^4x^2 - 80y^4 + 32y^6 + 33y^4x^4 + 40y^6x^2 + 10x^6y^2 + x^8 + 16y^8 + 144 = 0$ . 这是一个八次不可约代数方程, 经 MAPLE 计算知其亏格为 1, 由定理 3.4.3 知其不能有理参数化.

在上述情况中, (1)和(4)较简单, 因此下面两节分别讨论 (2)和(3). 显然(2)是(3)的特例.

## 16.2 Pythagorean-hodograph (PH)曲线

### 16.2.1 定义和表示

**定义 16.2.1** 对一条多项式参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , 如果存在一个多项式  $\sigma(t)$  使得  $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ , 则称  $\mathbf{r}(t)$  为 Pythagorean-hodograph (简称 PH 曲线)曲线.

**引理 16.2.1**(Kubota) 三个实多项式  $a(t), b(t)$  和  $c(t)$  满足  $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ , 当且仅当存在实多项式  $u(t), v(t)$  和  $w(t)$  使得

$$a(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t)), \quad b(t) = 2w(t)u(t)v(t), \quad c(t) = w(t)(u^2(t) + v^2(t)). \quad (16.2.1)$$

证 仅证必要性. 记复多项式  $F(t) = a(t) + b(t)I, I = \sqrt{-1}$ , 由代数学基本定理知有分解式

$$F(t) = \rho(t)M(t)G^2(t), \quad (16.2.2)$$

其中  $\rho(t) = \text{GCD}_t(a(t), b(t))$  为一个实多项式,  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)I$  为一个复多项式,  $M(t) = M_1(t) + M_2(t)I$  为一个无平方因子的复多项式. 于是  $c^2(t) = F(t)\bar{F}(t) = w^2(t)M(t)\bar{M}(t)(G(t)\bar{G}(t))^2$ , 其中“ $\bar{\phantom{x}}$ ”表示取共轭. 因此  $M(t)\bar{M}(t) = d^2(t)$ , 这里  $d(t) = c(t)/(w(t)G(t)\bar{G}(t))$  为一个实多项式. 今假定  $d(t)$  不为常数, 则它的每个根  $\tau$  至少是  $M(t)\bar{M}(t)$  的二重根. 由于  $M(t)$  无平方因子, 所以  $M(\tau) = \bar{M}(\tau) = 0$ , 于是  $M_1(\tau) = M_2(\tau) = 0$ . 因此, 若  $\tau$  为实数, 则  $(t - \tau)$  为  $M(t)$  的一个因子; 若  $\tau$  为复数, 则  $M_1(\bar{\tau}) = M_2(\bar{\tau}) = 0$ , 即  $(t - \tau)(t - \bar{\tau})$  为  $M(t)$  的一个因子. 这与  $\rho(t)$  为  $\{a(t), b(t)\}$  的最大公因子发生矛盾. 所以  $d(t)$  必为常数. 从而  $M(t)$  亦为常数. 于是取  $w(t) = \rho(t)$ ,  $u(t) = \sqrt{M(t)}G_1(t)$ ,  $v(t) = \sqrt{M(t)}G_2(t)$  即知必要性成立. 证毕.

**推论 16.2.1** PH 曲线必可表示为:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left( \int w(t)[u^2(t) - v^2(t)]dt, \int 2w(t)u(t)v(t)dt \right). \quad (16.2.3)$$

由引理 16.2.1 的证明可以看出, 我们可以取  $w(t)$  的最高次项系数为 1, 且让  $u(t)$  和  $v(t)$  互素. 另外, 易知在多项式  $u(t), v(t)$  或  $w(t)$  有一个为零, 或  $u(t), v(t)$  均为常数的特殊情况, PH 曲线退化成一点或直线. 下面对这些情况不予考虑, 这样 PH 曲线至少为三次. 更准确地我们有

**定理 16.2.1** 由(16.2.3)所定义的 PH 曲线的次数为  $\lambda + 2\mu + 1$ , 其中  $\lambda = \deg(w(t))$ ,  $\mu = \max\{\deg(u(t)), \deg(v(t))\}$ .

证 由(16.2.3)可知  $\deg(x(t)) = \deg(w(t)) + \deg(u^2(t) - v^2(t)) + 1$ ,  $\deg(y(t)) = \deg(w(t)) + \deg(u(t)) + \deg(v(t)) + 1$ , 所以, 当  $\deg(u(t)) = \deg(v(t))$  时,  $\deg(y(t)) = \lambda + 2\mu + 1$ ; 否则  $\deg(u^2(t) - v^2(t)) = 2\mu$ , 从而  $\deg(x(t)) = \lambda + 2\mu + 1$ . 证毕.

一般,  $n$  次平面多项式曲线有  $2(n+1)$  个自由度. 但对于 PH 曲线, 由于其速端曲线的模为一个多项式或分段多项式, 这  $2(n+1)$  个系数不能任意选取.

**定理 16.2.2**  $n$  次 PH 曲线有  $n+3$  个自由度.

证 当  $\mu = \max\{\deg(u(t)), \deg(v(t))\} \geq 1$  时,  $u(t)$  和  $v(t)$  各有  $\mu+1$  个系数. 今假设  $\lambda = \deg(w(t))$ ,  $w(t)$  有  $\lambda+1$  个系数, 考虑到已取  $w(t)$  的首项系数为 1, 所以  $w(t)$  只有  $\lambda$  个系数. 再考虑到(16.2.3)中两个不定积分提供两个自由度, 因此 PH 曲线总共有  $2(\mu+1) + \lambda + 2 = (\lambda + 2\mu + 1) + 3 = n + 3$  个自由度. 证毕.

### 16.2.2 三次 PH 曲线的构造、特征和性质

三次 PH 曲线对应于  $\lambda = \deg(w(t)) = 0$ ,  $\mu = \max\{\deg(u(t)), \deg(v(t))\} = 1$ . 因此可设

$$w(t) = 1, \quad u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \quad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \quad (16.2.4)$$

代入(16.2.3)可得三次 PH 曲线  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{P}_i$  的 Bézier 点为

$$\begin{cases} \mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) \text{任取}; & \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + (u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0)/3; \\ \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + (u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0)/3; & \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + (u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1)/3. \end{cases} \quad (16.2.5)$$

下面进一步分析最简单的 PH 曲线——三次 PH 曲线的几何特征.

**定理 16.2.3** 设  $\mathbf{r}(t)$  为平面三次 Bézier 曲线, 如(1.3.2)所示,  $L_j (j=1,2,3)$  为其控制多边形边长,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为向量  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_0$  到  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$  的转角和  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$  到  $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3$  的转角, 如图 16.2.1 所示, 则  $\mathbf{r}(t)$  为 PH 曲线的充要条件是

$$L_2 = \sqrt{L_1 L_3}, \quad \theta_1 = \theta_2. \quad (16.2.6)$$

证 必要性: 设  $\mathbf{r}(t)$  为三次 PH 曲线, 记  $d_{jk} = \|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_k\|$ , 则有  $L_1 = d_{01} = (u_0^2 + v_0^2)/3$ ,  $L_3 =$

$(u_1^2 + v_1^2)/3$ ,  $L_2 = d_{12} = \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}/3$ , 所以  $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$ . 另外,

$$d_{02}^2 = (u_0^2 + v_0^2)[(u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2]/9, \quad d_{13}^2 = (u_1^2 + v_1^2)[(u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2]/9,$$

由余弦定理,  $\cos \theta_1 = \frac{d_{01}^2 + d_{12}^2 - d_{02}^2}{2d_{01}d_{12}} = \frac{-(u_0 u_1 + v_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}} = \cos \theta_2$ . 再

应用叉积运算得  $\sin \theta_1 = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_0 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{Z})/(d_{01}d_{12})$ ,  $\sin \theta_2 = (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{Z})/(d_{12}d_{23})$ ,  $\mathbf{Z}$  为  $\mathbf{r}(t)$  所在平面的单位法向. 将(16.2.5)代入上式, 得到

$$\sin \theta_1 = (u_1 v_0 - u_0 v_1) / \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} = \sin \theta_2. \quad \text{所以 } \theta_1 = \theta_2.$$

充分性: 假设  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,  $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$ . 现在我们这样选取坐标系, 使得(参见图 16.2.1)

$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = (1, 0)$ ;  $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = (-\cos \theta, \sin \theta)$ ;  $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = (\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$ , 于是  $x'^2(t) + y'^2(t) = 9L_1^2 B_0^4(t) - 9(L_1 L_2 \cos \theta) B_1^4(t) + (6L_2^2 + 3L_1 L_3 \cos 2\theta) B_2^4(t)$

$$- (9L_2 L_3 \cos \theta) B_3^4(t) + 9L_3^2 B_4^4(t).$$

当  $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$  时, 可以验证

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9(L_1 B_0^2(t) - L_2 \cos \theta \cdot B_1^2(t) + L_3 B_2^2(t))^2,$$

因此  $\mathbf{r}(t)$  为 PH 曲线. 证毕.

**定理 16.2.4** 平面三次 PH 曲线没有拐点.

证 按(16.2.5)容易算得曲率  $k(t) = 2(u_0 v_1 - u_1 v_0) / [(u_0(1-t) + u_1 t)^2 + (v_0(1-t) + v_1 t)^2]^2$ . 由  $u(t)$  与  $v(t)$  互素知  $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$ , 因此  $k(t)$  不变号, 即  $\mathbf{r}(t)$  无拐点. 证毕.

上述定理表明, 三次 Bézier 曲线为 PH 曲线, 当且仅当其控制多边形在两个内点处夹角相同, 且内边边长是相邻两外边边长的几何平均值. 这为构造三次 PH 曲线提供了简单直观的方法. 然而, 这也说明三次 PH 曲线条件严格, 加上它又没有拐点, 因此在实际应用中缺乏灵活性. 为了得到足够的自由度来构造自由曲线, 需要考虑高阶的 PH 曲线.

### 16.2.3 四次和五次 PH 曲线的构造

按定理 16.2.1, 为产生四次 PH 曲线需取  $\lambda = \mu = 1$ . 因此除  $u(t), v(t)$  按(16.2.4)定义外再设

$$w(t) = -\xi B_0^1(t) + (1 - \xi) B_1^1(t). \quad (16.2.7)$$

于是四次 PH 曲线  $\mathbf{r}(t)$  的 Bézier 点为:

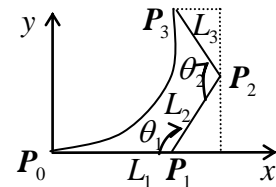


图 16.2.1 几何参数和坐标系

$$\begin{cases} P_0 \text{任取}, P_1 = P_0 - \xi(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/4, \\ P_2 = P_1 + (1-\xi)(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/12 - \xi(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/6, \\ P_3 = P_2 + (1-\xi)(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/6 - \xi(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/12, \\ P_4 = P_3 + (1-\xi)(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/4. \end{cases} \quad (16.2.8)$$

必须指出, 按(16.2.7)定义的  $w(t)$  有唯一零点  $t = \xi$ , 对应地有  $\mathbf{r}'(\xi) = \mathbf{0}$ , 因此  $\mathbf{r}(\xi)$  是曲线的一个尖点. 在设计 PH 曲线时, 我们可选择  $\xi$  之值使得尖点位于曲线段外部或内部. 特别若取  $\xi = 0$  或  $1$ , 将有  $P_1 = P_0$  或  $P_4 = P_3$ . 图 16.2.2 是  $\xi$  不同的三条四次 PH 曲线段.

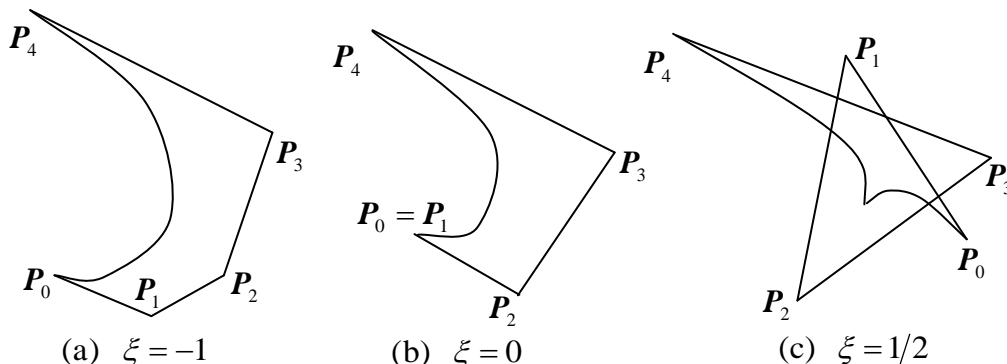


图 16.2.2 四次 PH 曲线及其尖点

对于五次 PH 曲线, 有两种情况, (1) 对应于  $\lambda = 0, \mu = 2$ ; (2) 对应于  $\lambda = 2, \mu = 1$ .

(1) 此时  $w(t) \equiv 1$ , 令  $f(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t)f_i$ ,  $f = u, v$ ; 则 PH 曲线对应的 Bézier 点为

$$\begin{cases} P_0 \text{任取}, P_1 = P_0 + (u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/5, \\ P_2 = P_1 + (u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/5, \\ P_3 = P_2 + 2(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/15 + (u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0)/15, \\ P_4 = P_3 + (u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1)/5, P_5 = P_4 + (u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2)/5. \end{cases} \quad (16.2.9)$$

由于  $w(t) \equiv 1$ , 所以  $\mathbf{r}'(t)$  处处非零, 从而曲线为正则曲线, 没有尖点.

(2) 此时  $u(t), v(t)$  为线性, 如(16.2.4)表示; 令  $w(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t)w_i$ , 则 PH 曲线对应的

Bézier 点为

$$\begin{cases} P_0 \text{任取}, P_1 = P_0 + w_0(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/5, \\ P_2 = P_1 + w_0(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/10 + w_1(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/10, \\ P_3 = P_2 + w_0(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/30 + 2w_1(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/15 + w_2(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)/30, \\ P_4 = P_3 + w_1(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/10 + w_2(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)/10, P_5 = P_4 + w_2(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)/5. \end{cases}$$

当  $w(t) = 0$  有两个不同实根  $\xi_1, \xi_2$  时,  $\mathbf{r}(t)$  在  $\xi_1, \xi_2$  处导矢为零, 对应于两个尖点. 此时

$$w_0 = \xi_1\xi_2, \quad w_1 = [(\xi_1 - 1)\xi_2 + (\xi_2 - 1)\xi_1]/2, \quad w_2 = (\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1).$$

#### 16.2.4 PH 曲线的等距曲线和弧长

引进 PH 曲线的一个主要原因是它的等距曲线可以精确地表示成有理形式, 从而与当前的造型系统相兼容. 对于一条 PH 曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)(x_i, y_i)$ , 存在  $n-1$  次的

多项式(或分段多项式)  $\sigma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \sigma_i$ , 使得其等距曲线可写作

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_d(t) &= (x(t) + d \cdot y'(t)/\sigma(t), y(t) - d \cdot x'(t)/\sigma(t)). \text{ 把 } \mathbf{r}_d(t) \text{ 改写成齐次形式, 就是} \\ (X(t), Y(t), W(t)) &= (\sigma(t)x(t) + d \cdot y'(t), \sigma(t)y(t) - d \cdot x'(t), \sigma(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} B_k^{2n-1}(t)(X_k, Y_k, W_k), \end{aligned} \quad (16.2.10)$$

$$(X_k, Y_k, W_k) = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n}{k-j} \binom{n-1}{j}}{\binom{2n-1}{k}} [\sigma_j(x_{k-j}, y_{k-j}, 1) + d \cdot n \cdot (y_{j+1} - y_j, x_j - x_{j+1}, 0)]. \quad (16.2.11)$$

由此可知,  $n$  次的 PH 曲线的等距曲线为  $2n-1$  次的有理曲线. 注意, 当  $W(t)$  存在奇数重实零点时, 曲线在这些零点处会突然改变切向(或法向),  $\sigma(t)$  在这些零点两侧会改变符号. 因此在这种情况下, 须将原曲线在这些零点处分段, 然后对每段曲线计算其等距线.

PH 曲线还有一个很好的性质: 其弧长  $s$  是参数  $t$  的多项式(或分段多项式)函数. 事实上

$$s = s(t) = \int_0^t \sigma(t) dt = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{j-1} \sigma_k \right) B_j^n(t). \quad (16.2.12)$$

同样, 当  $W(t)$  有奇数重实零点时, 在使用上式时也需要按这些实零点将积分区间分段, 使得在每段小区间内  $\sigma(t)$  恒为正.

## 16.3 具有有理等距曲线的参数曲线(OR 曲线)

### 16.3.1 参数曲线的复形式表示

欧氏平面上的一点  $(x, y)$  都对应着复平面上的一点  $Z = x + yI$ . 同样, 平面参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  可在复平面上对应地表示为  $Z(t) = x(t) + y(t)I$ . 从几何角度来看,  $Z(t)$  在复平面上的几何轨迹与矢量形式  $\mathbf{r}(t)$  所表示的曲线是一致的; 从代数角度来看,  $Z(t)$  又是一个复系数多项式. 与一般复分析研究不同的是, 这里自变量被限制在实数域上.

引入复形式表示后, 对曲线的操作可用复数运算来完成. 若平面  $n$  次 Bézier 曲线表为

$$Z(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) Z_i, \quad Z_i = x_i + y_i I, \quad (16.3.1)$$

这里  $Z_i$  是控制顶点的复数形式, 则  $Z(t)$  的导矢可表为  $Z'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(Z_{i+1} - Z_i)$ . 对于

参数曲线  $Z = Z(t)$ , 其单位切向量为  $Z'(t)/|Z'(t)|$ , 单位法向为  $-Z'(t)/|Z'(t)|I$ , 因而  $Z(t)$  的等距曲线可写成:

$$Z_d(t) = Z(t) - d \cdot Z'(t)/|Z'(t)|I. \quad (16.3.2)$$

一般,  $|Z'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$  未必能表成有理函数形式. 下面给出它可有理参数化的条件.

**引理 16.3.1** 当且仅当  $m=1$  时,  $(t, r)$  平面上的代数曲线

$$\Gamma_{2m}: ((t-a_1)^2 + b_1^2) \cdots ((t-a_m)^2 + b_m^2) = r^2 \quad (16.3.3)$$

可以有理参数化, 其中  $a_i, b_j$  为实数, 满足  $b_j \neq 0$ , 且当  $i \neq j$  时,  $(a_i, b_i) \neq (a_j, \pm b_j)$ .

证 充分性: 当  $m=1$  时, (16.3.3) 成为  $t^2 - 2a_1 t + a_1^2 + b_1^2 = r^2$ , 作变换  $r = t + u$ , 则

$$t = (a_1^2 + b_1^2 - u^2)/(2u + 2a_1), \quad r = u + (a_1^2 + b_1^2 - u^2)/(2u + 2a_1). \quad (16.3.4)$$

这样, 曲线  $\Gamma_{2m}$  表示成以  $u$  为参数的有理二次曲线.



必要性：用反证法。设  $m > 1$ 。由于  $\Gamma_{2m}$  可以有理参数化，则存在一个参数变换  $t = f(u)/g(u)$ ,  $r = r_1(u)/r_2(u)$ ，其中多项式  $f(u)$  和  $g(u)$  互素， $r_1(u)$  和  $r_2(u)$  互素，使得  $\left((f(u) - a_1 g(u))^2 + b_1^2 g^2(u)\right) \cdots \left((f(u) - a_m g(u))^2 + b_m^2 g^2(u)\right) = g^{2m}(u) r_1^2(u)/r_2^2(u)$ 。记  $q(u) = g^m(u) r_1(u)/r_2(u)$ ，它为一个多项式。于是对于  $q(u)$  的每一个根  $u_k$ ，对应着唯一的一个  $i$  使得  $u_k$  及其共轭数  $\bar{u}_k$  为多项式  $(f(u) - a_i g(u))^2 + b_i^2 g^2(u)$  的偶数重根。因此必存在互素多项式  $v_1(u)$  和  $v_2(u)$ ，使  $(f(u) - a_j g(u))^2 + b_j^2 g^2(u) = v_j^2(u)$ ,  $j = 1, 2$ ，这说明下面的代数曲线在  $(t, \rho_1, \rho_2)$  空间中可以有理参数化：

$$\begin{cases} (t - a_1)^2 + b_1^2 = \rho_1^2, \\ (t - a_2)^2 + b_2^2 = \rho_2^2. \end{cases} \quad (16.3.5)$$

作变换  $\rho_1 = b_1 u + (t - a_1)$ ,  $\rho_2 = b_2 v + (t - a_2)$ ，显然参数  $u$  和  $v$  可由  $\rho_1, \rho_2, t$  线性表出。另外，将  $\rho_1, \rho_2$  的表达式代入(16.3.5)得：

$$t = (b_1 - b_1 u^2 + 2a_1 u)/(2u) = (b_2 - b_2 v^2 + 2a_2 v)/(2v), \quad (16.3.6)$$

令  $p = (a_2 - a_1)/b_1$ ,  $q = b_2/b_1$ ，则  $(p, q) \neq (0, \pm 1)$ ，且  $q \neq 0$ 。把(16.3.6)化简，得到

$$v(1 - u^2) - u(q - qv^2 + 2pv) = 0. \quad (16.3.7)$$

于是这一个代数方程组在  $(u, v)$  平面上可以有理参数化。现在构造齐次函数  $h(u, v, w) = v(w^2 - u^2) - u(qw^2 - qv^2 + 2pvw)$ ，则由  $h(u, v, w) = 0$  所定义的三次代数曲线的亏格为零，于是下列方程组有非零解<sup>[50]</sup>：

$$h(u, v, w) = v(w^2 - u^2) - u(qw^2 - qv^2 + 2pvw) = 0, \quad (16.3.8)$$

$$h'_u(u, v, w) = -2uv - (qw^2 - qv^2 + 2pvw) = 0, \quad (16.3.9)$$

$$h'_v(u, v, w) = (w^2 - u^2) - u(2pw - 2qv) = 0, \quad (16.3.10)$$

$$h'_w(u, v, w) = 2vw - u(2qw + 2pv) = 0. \quad (16.3.11)$$

由(16.3.8)和(16.3.9)得  $v(w^2 + v^2) = 0$ 。若  $v = 0$ ，则由(16.3.9)，(16.3.10)可得到  $u = w = 0$ ，这是上述方程组的平凡解。所以有  $w = \pm uI$ ，且  $u \neq 0$  (否则有  $w = 0$ ，由(16.3.9)知  $v = 0$ )，于是从(16.3.10)可解得  $v = (1 \pm pI)u/q$ ，把它代入(16.3.11)可得到  $2p \pm (p^2 + q^2 - 1)I = 0$ 。因而  $(p, q) = (0, \pm 1)$ ，这与  $p, q$  的定义矛盾，所以假设不成立。证毕。

**定理 16.3.1** 设  $Z(t) = x(t) + y(t)I$  为复系数多项式，则  $x'^2(t) + y'^2(t) = r^2$  在  $(t, r)$  平面上可有理参数化当且仅当  $Z(t)$  的奇数重复数根(虚部不为零)最多只能有一个，即  $Z(t)$  可表为

$$Z(t) = \rho(t)(Mt + 1)G^2(t), \quad (16.3.12)$$

其中  $\rho(t), G(t)$  分别为实、复多项式， $M$  为零或虚部不为零的常数。

证  $Z(t)$  可分解为  $Z(t) = \rho(t)M(t)G^2(t)$ ，其中  $\rho(t) = \text{GCD}_t(x(t), y(t))$  为实多项式； $G(t)$  为复多项式； $M(t)$  为无平方因子且常数项为 1 的复多项式。于是

$$x'^2(t) + y'^2(t) = |Z'(t)|^2 = \rho^2(t)[G(t)\bar{G}(t)]^2 M(t)\bar{M}(t).$$

设  $M(t)$  的次数为  $m$ ，则  $M(t)\bar{M}(t)$  为  $2m$  次实多项式，且无实根和平方因子。因此它可分解成： $M(t)\bar{M}(t) = c((t - a_1)^2 + b_1^2) \cdots ((t - a_m)^2 + b_m^2)$ ，其中  $c, a_i, b_i$  为实数。

显然， $x'^2(t) + y'^2(t) = r^2$  可有理参数化当且仅当  $M(t)\bar{M}(t)$  为常数或  $M(t)\bar{M}(t) = r^2$  可有理参数化，由引理 16.3.1 知道这等价于  $m \leq 1$ 。当  $m = 0$  时， $M(t) = 1$ ，即(16.3.12)中的常数  $M = 0$ ；当  $m = 1$  时， $M(t) = Mt + 1$ ，由  $\rho(t) = \text{GCD}_t(x(t), y(t))$  知  $M$  为虚部非零的复数。证毕。

### 16.3.2 参数曲线具有有理等距曲线的充要条件

具有精确有理等距曲线的参数曲线(Offset-rational curves)简称 OR 曲线. 下面研究其条件.

**定义 16.3.1** 对于参数曲线  $\mathbf{r}(t)$  (或复数形式  $Z(t)$ ), 如果除了有限个点以外, 曲线上每一个点均有唯一的参数值  $t$  与之对应, 则称这种参数  $t$  为真参数.

根据经典代数几何理论, 对于任意有理参数曲线, 它总可以表示成真参数的有理形式.

**定理 16.3.2** 对于以  $t$  为参数的多项式曲线  $Z(t) = x(t) + y(t)I$ , 它的等距线可有理参数化当且仅当  $(t, \rho)$  平面上的代数曲线  $x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2$  可有理参数化.

证 由(16.3.2)知充分性是显然的, 下面证明必要性. 分两种情况讨论:

(1) 假设存在某个  $d (\neq 0)$  使曲线  $Z_d(t)$  和  $Z_{-d}(t)$  两者的隐式代数方程不同. 不妨假设  $Z_d(t)$  的代数方程为  $G(x, y) = 0$ , 其中  $G(x, y)$  为关于  $x$  和  $y$  的  $m$  次多项式, 则有  $G(Z_d(t)) = 0$ ,  $G(Z_{-d}(t)) \neq 0$ . 记  $\rho(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ , 则  $\rho^2(t)$  是关于  $t$  的多项式.

因为对于任意两个复数  $A = a + bI$  和  $B = c + dI$ , 有  $G(A + uB) = \sum_{i=0}^m u^i f_i(A, B)$ , 其中  $f_i(A, B)$  为关于  $a, b, c, d$  的多项式. 所以下面两式

$$G(Z_{-d}(t)) = G(Z_d(t)) + G(Z_d(t)) = 2 \sum_{i=0}^{[n/2]} \rho^{-2i}(t) f_{2i}(Z(t), d \cdot Z'(t)I),$$

$$\rho(t)G(Z_{-d}(t)) = \rho(t)[G(Z_{-d}(t)) - G(Z_d(t))] = -2 \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \rho^{-2i}(t) f_{2i+1}(Z(t), d \cdot Z'(t)I)$$

都是  $t$  的有理函数. 因此  $\rho(t) = \rho(t)G(Z_{-d}(t))/G(Z_d(t))$  亦为  $t$  的有理函数. 又  $\rho^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t)$ , 从而知  $\rho(t)$  为关于  $t$  的多项式. 因此  $x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2$  可有理参数化.

(2) 假设对所有  $d$ ,  $Z_d(t)$  与  $Z_{-d}(t)$  有相同的隐式代数方程. 则必存在  $d \neq 0$ , 使得对  $Z_d(t)$  来说, 它的等距线  $Z(t)$  和  $Z_{2d}(t)$  具有不同的隐式代数方程(否则  $Z(t)$  与所有  $Z_d(t)$  拥有相同的隐式代数方程, 这不可能). 设  $Z_d(t)$  的有理参数表示为  $Z_d(t) = R(s) = x_d(s) + y_d(s)I$ , 其中  $x_d(s), y_d(s)$  为  $s$  的有理函数. 则应用情形(1)的证明方法可知必存在多项式  $\rho(s)$  使得  $x_d'^2(s) + y_d'^2(s) = \rho^2(s)$ . 与此同时, 曲线  $Z(t)$  也可被写成:  $Z(t) = R(s) - d \cdot R'(s)I / |\rho(s)|$ . 注意到  $t$  为  $Z(t)$  的真参数, 由代数几何理论可知, 存在一个有理参数变换  $t = t(s)$  使得  $Z(t(s)) = R(s)$ . 因此  $(dx(t(s))/ds)^2 + (dy(t(s))/ds)^2 = \rho^2(s)[1 - d \cdot (x_d'(s)y_d''(s) - x_d''(s)y_d'(s)) / |\rho(s)|^3]^2$ , 即  $x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2$  可有理参数化, 证毕.

由定理 16.3.1 和 16.3.2, 立即可得

**定理 16.3.3** 设  $Z(t) = x(t) + y(t)I$  是以  $t$  为真参数的多项式曲线, 则它的等距线可有理参数化当且仅当  $Z'(t)$  可表示成如下形式:

$$x'(t) + y'(t)I = \rho(t)(Mt + 1)G^2(t). \quad (16.3.13)$$

其中  $\rho(t), M$  和  $G(t)$  的意义同定理 16.3.1. 特别当  $M = 0$  时(由于  $\rho(t)$  可任取,  $M = 0$  等价于  $M$  取实数), 上式即为  $Z(t)$  是 PH 曲线的充要条件; 当  $G(t)$  恒为常数时,  $Z'(t)$  与抛物线的速端曲线一致, 所以称  $Z(t)$  是抛物型曲线; 当  $M \neq 0$  且  $G(t)$  不为常数时,  $Z'(t)$  由抛物型速端曲线与 PH 曲线的速端曲线结合起来构成, 所以这时称  $Z(t)$  是抛物-PH 曲线.

假设  $M = \lambda + \mu I$ ,  $G(t) = u(t) + v(t)I$ , 同时我们总可认为  $u(t)$  和  $v(t)$  互素(因为否则可把它们公因子归到  $\rho(t)$  中), 于是

$$x'(t) + y'(t)I = \rho(t)[(\lambda t + 1)(u^2(t) - v^2(t)) - 2\mu tu(t)v(t)] \\ + \rho(t)[2(\lambda t + 1)u(t)v(t) + \mu t(u^2(t) - v^2(t))]I,$$

由此, 我们得到具有有理等距曲线的多项式曲线  $Z(t) = x(t) + y(t)I$  的一个表示:

$$\begin{cases} x(t) = \int \rho(t)[(\lambda t + 1)(u^2(t) - v^2(t)) - 2\mu tu(t)v(t)] dt, \\ y(t) = \int \rho(t)[2(\lambda t + 1)u(t)v(t) + \mu t(u^2(t) - v^2(t))] dt. \end{cases} \quad (16.3.14)$$

一旦给出具有表达式(16.3.14)的曲线, 为求其等距线, 还需要确定参数变换  $t = t(s)$ . 显然, 使得  $|Mt + 1|$  为一个有理函数的变换  $t = t(s)$  即为可行的参数变换. 这相当于寻求  $(t, \rho)$  平面上曲线  $|Mt + 1|^2 = \rho^2$  的一个参数化. 这里我们给出一个直观的方法.

设  $Mt + 1 = A(1-t) + Bt$ ;  $A, B$  为两个复数, 也可视作向量. 于是  $|Mt + 1|^2 = \rho^2$  变为

$$A\bar{A}(1-t)^2 + (A\bar{B} + \bar{A}B)(1-t)t + B\bar{B}t^2 = \rho^2. \quad (16.3.15)$$

记  $l_1 = |A|, l_2 = |B|, l_0 = |A + B|$ . 如果将  $A, B$  和  $A + B$  看作组成一个三角形的三个边向量, 如图 16.3.1, 则  $l_i$  即为边的长度. 把(16.3.15)改写为:

$$l_1^2(1-t)^2 + (l_0^2 - l_1^2 - l_2^2)(1-t)t + l_2^2t^2 = \rho^2. \quad (16.3.16)$$

以变换  $t = us + (1-u)/2, \rho = u[l_1(1-s) + l_2s] - l_0(1-u)/2$  代入(16.3.15), 并记  $d_2 = l_0 + l_1 - l_2, d_1 = l_0 - l_1 + l_2$ , 就有

$$u = (B_0^2(s)d_2 + B_1^2(s)l_0 + B_2^2(s)d_1) / (B_0^2(s)d_2 + B_1^2(s)(l_1 + l_2) + B_2^2(s)d_1).$$

这样, 方程(16.3.15)的一个参数表示形式为:

$$\begin{cases} t(s) = (B_1^2(s)l_1 + B_2^2(s)d_1) / (B_0^2(s)d_2 + B_1^2(s)(l_1 + l_2) + B_2^2(s)d_1); \\ \rho(s) = (B_0^2(s)l_1d_2 + B_1^2(s)d_1d_2/2 + B_2^2(s)l_2d_1) / (B_0^2(s)d_2 + B_1^2(s)(l_1 + l_2) + B_2^2(s)d_1), \end{cases} \quad (16.3.17)$$

显然, (16.3.17)的第一式便是欲求的参数变换. 由于  $d_1, d_2$  非负,  $t = t(s)$  是一个从  $[0, 1]$  到  $[0, 1]$  的一一变换, 且将端点映射到端点. 由此可以看出, 一条  $n$  次多项式曲线, 如果它的等距线可以有理参数化的话, 等距线一般为  $4n - 2$  次.

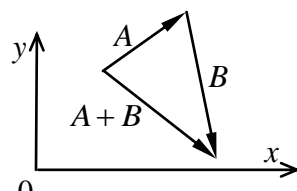


图 16.3.1  $l_i$  的几何解释

### 16.3.3 具有有理等距曲线的低次 Bézier 曲线

根据(16.3.13), 可以对具有有理等距曲线的多项式曲线进行分类.

(1)  $M = 0$ .

此时,  $x'(t) + y'(t)I = \rho(t)G^2(t)$ , 即  $x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2(t)(G(t)\bar{G}(t))^2$ , 曲线为 PH 曲线, 无需作参数变换.

(2)  $G(t) = 1$ .

这时  $x'(t) + y'(t)I = \rho(t)(Mt + 1)$ . 一般, 这类曲线存在着实或复的尖点, 分别对应着  $\rho(t)$  的实根或复根. 当  $\rho(t)$  为常数时, 此曲线即为常见的抛物线. 当  $\rho(t)$  为线性时, 曲线为三次, 有一个实尖点. 现在来推导它的表示式. 设  $Z(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t)Z_i$ , 并记  $T_0 = Z'(0)$ ,

$T_1 = Z'(1)$ , 则可设  $Z'(t) = [(1-t)T_0 + tT_1/b] \cdot [(1-t) + bt]$ ,  $b$  为某个实数. 于是有

$$Z_1 - Z_0 = T_0/3, \quad Z_3 - Z_2 = T_1/3, \quad Z_2 - Z_1 = (bT_0 + b^{-1}T_1)/6.$$

将上式的前两式代入第三式, 得到控制多边形首末两边的交点  $Z^* = Z_0 + T_0(b+2)/6 = Z_3 - T_1(2b+1)/(6b)$ . 所以该三次曲线的控制顶点为

$$Z_1 = Z_0 + 2(Z^* - Z_0)/(b+2), \quad Z_2 = Z_3 + 2b(Z^* - Z_3)/(2b+1), \quad (16.3.18)$$

这里  $Z_0, Z_3, Z^*$  可任取;  $b$  为自由参数, 当  $b > 0$  时, 三次曲线的尖点在区间  $[0,1]$  之外.

(3)  $M \neq 0$  且  $G(t)$  不是常数.

这类曲线中次数最低者为四次, 对应于  $\rho(t)$  为常数且  $G(t)$  为线性多项式. 今设四次曲线为  $Z(t) = \sum_{i=0}^4 B_i^4(t) Z_i$ , 记  $T_0 = Z'(0), T_1 = Z'(1)$ . 则可设  $Z'(t) = [T_0(1-t) + T_1 t/c^2][1-t+ct]^2$ ,  $c$  为某个复数. 于是导出

$$Z_1 = Z_0 + T_0/4, \quad Z_2 = Z_0 + T_0(3+2c)/12 + T_1/(12c^2), \quad Z_3 = Z_4 - T_1/4, \quad (16.3.19)$$

其中  $Z_0, Z_4, T_0, T_1$  可任取,  $c$  满足约束条件

$$T_1 + 2T_1c + 3(4Z_0 - 4Z_4 + T_0 + T_1)c^2 + 2T_0c^3 + T_0c^4 = 0. \quad (16.3.20)$$

四次代数方程(16.3.20)有四个根, 每一个根均可用来构造一条四次曲线, 它是插值  $Z_0, Z_1, T_0, T_1$  的一条  $C^1$  Hermite 插值曲线.

## 16.4 PH 曲线和 OR 曲线的插值构造算法

本节应用平面 Bézier 曲线的复数表示(16.3.1), 按插值和 PH, OR 条件求出其控制顶点.

### 16.4.1 平面五次 PH 曲线的 $G^2$ Hermite 插值

根据定理 16.2.4, 平面三次 PH 曲线不能产生适当的拐点, 所以工程中这种曲线至少为五次. 设  $\rho(t), G(t)$  分别为实和复系数多项式, 由定理 16.3.3, PH 条件为  $Z'(t) = \rho(t)G^2(t)$ . 取  $\rho(t) \equiv 1$ ,  $G(t) = a(1-t)^2 + b(1-t)t + ct^2$ , 其中  $a, b, c$  为待定复系数, 利用积分

$$\int \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (1-t)^{n+1-j} t^j + C, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (16.4.1)$$

可得  $Z(t) = \sum_{i=0}^5 Z_i B_i^5(t)$ , 此时初始点  $R_0$  对应于积分常数  $C$ , 且

$$(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) = \left( R_0, Z_0 + \frac{a^2}{5}, Z_1 + \frac{ab}{10}, Z_2 + \frac{b^2 + 2ac}{30}, Z_3 + \frac{bc}{10}, Z_4 + \frac{c^2}{5} \right). \quad (16.4.2)$$

对于给定的位矢  $R_i$ 、切矢  $T_i$  和曲率  $k_i$ ,  $i = 0, 1$ , 有可能不存在满足  $G^2$  条件的插值曲线, 此时需使用 deBoor 的文献[13]中解的条件来调整曲率. 由连续条件得

$$Z(i) = R_i, \quad Z'(i)/|Z'(i)| = T_i, \quad (Z'(i) \otimes Z''(i))/|Z'(i)|^3 = k_i, \quad i = 0, 1. \quad (16.4.3)$$

把(16.4.2)代入上式, 可得关于复系数  $a, b, c, Z_0$  及实系数  $\lambda, \mu$  的六个约束方程:

$$Z_0 = R_0, \quad b^2 + 3(a+c)b + 2ac + 6(\lambda^2 T_0 + \mu^2 T_1) = 30(R_1 - R_0), \quad (16.4.4)$$

$$\alpha = \mp \sqrt{\lambda^2 T_0 + \mu^2 T_1}, \quad c = \pm \mu \sqrt{T_1}, \quad \text{Im}(\bar{T}_0 \cdot 2ab)/\lambda^4 = k_0, \quad \text{Im}(-\bar{T}_1 \cdot 2bc)/\mu^4 = k_1. \quad (16.4.5)$$

这里 “ $-$ ” 表示共轭. 记  $b = b_1 + b_2 I$ ,  $T_j = T_{jx} + T_{jy} I$ ,  $\sqrt{T_j} = \tilde{T}_{jx} + \tilde{T}_{jy} I$ ,  $j = 0, 1$ , 由(16.4.5)中的后两式可得:

$$\begin{cases} (T_{0x} * \tilde{T}_{0y} - T_{0y} * \tilde{T}_{0x})b_1 + (T_{0x} * \tilde{T}_{0x} + T_{0y} * \tilde{T}_{0y})b_2 = k_0 \lambda^3 / 2 \\ (T_{1x} * \tilde{T}_{1y} - T_{1y} * \tilde{T}_{1x})b_1 + (T_{1x} * \tilde{T}_{1x} + T_{1y} * \tilde{T}_{1y})b_2 = -k_1 \mu^3 / 2 \end{cases}. \quad (16.4.6)$$

按上式可将  $b$  表为  $\lambda, \mu$  的关系式, 把它和(16.4.5)中的前两式代入(16.4.4)中的第二式, 分离实部及虚部可得关于  $\lambda, \mu$  的二元六次方程组, 应用数学软件可求得  $\lambda, \mu$  的值, 从而最终求得曲线的控制顶点. 从数值实验结果来看, 通常可求得几组实数解, 但各组解所得曲线形状相当相似(它们有相似的曲线能量), 因而实际中可根据需要挑选一组  $\lambda, \mu$  求得最终结果.

### 16.4.2 平面双三次 PH 曲线的 $C^1$ Hermite 插值

平面三次 PH 曲线无法处理所给两切向位于两端点连线同侧的情形, 即无法产生拐点. 若提高曲线次数可产生拐点. 但次数低也有简化计算的优点. 为此我们提出双三次 PH 曲线的插值法.

给定端点位矢  $R_0, R_1$  和切矢  $T_0, T_1$ , 今用控制顶点为  $Z_{j,i} (j=1,2; i=0,1,2,3)$  的两条三次 PH 曲线  $Z_j(t) (j=1,2)$  来进行  $C^1$  H 插值, 设

$$Z_1'(t) = G_1^2(t) = (a(1-t) + bt)^2, \quad Z_2'(t) = G_2^2(t) = (c(1-t) + dt)^2, \quad (16.4.7)$$

其中  $a, b, c, d$  为待定的复系数. 积分, 得两条曲线的 Bézier 点为

$$\begin{aligned} (Z_{1,0}, Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{1,3}) &= (R_0, Z_{1,0} + a^2/3, Z_{1,1} + ab/3, Z_{1,2} + b^2/3), \\ (Z_{2,0}, Z_{2,1}, Z_{2,2}, Z_{2,3}) &= (Z_{2,1} - c^2/3, Z_{2,2} - cd/3, Z_{2,3} - d^2/3, R_1). \end{aligned} \quad (16.4.8)$$

由端点插值条件及两条三次 PH 曲线保持  $C^1$  连续的条件可得:

$$\begin{aligned} Z_{1,0} &= R_0, \quad a = \pm\sqrt{T_0}, \quad Z_{2,3} = R_1, \quad d = \pm\sqrt{T_1}, \quad c = \pm b, \\ 2b^2 + ab + cd + \alpha &= 0, \quad \alpha = (T_0 + T_1) + 3(R_1 - R_0). \end{aligned} \quad (16.4.9)$$

从上式中观察似乎有十六个解, 但由于 PH 曲线内在的特征及双三次 PH 曲线的对称性, 实际上只有四个不同的解如下:

$$\begin{aligned} Z_{1,0} &= R_0, \quad a = \sqrt{T_0}, \quad Z_{2,3} = R_1, \quad d = \sqrt{T_1}, \\ b &= \begin{cases} -\frac{1}{4} \left( \sqrt{T_0} + \sqrt{T_1} \pm \sqrt{(\sqrt{T_0} + \sqrt{T_1})^2 - 8\alpha} \right), & c = b, \\ -\frac{1}{4} \left( \sqrt{T_0} - \sqrt{T_1} \pm \sqrt{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1})^2 - 8\alpha} \right), & c = -b \end{cases} \end{aligned} \quad (16.4.10)$$

对应于一组  $a, b, c, d$ , 相应地可求得一条满足  $C^1$  H 插值条件的双三次 PH 曲线. 数值实验表明, 所得四条插值曲线中, 存在一条曲线能很好地满足几何设计要求, 可灵活处理拐点. 而其他插值曲线则可能存在尖点、圈点或明显不符合几何形状设计的要求.

把它与传统的三次插值曲线作比较, 可见两类曲线具有类似的几何形状特征; 但因前者具有明显的几何解释且其 Offset 曲线具有精确的有理表示. 因而在实际应用中, 完全可以考虑用它来替代传统的三次插值参数曲线.

### 16.4.3 平面八次抛物—PH 曲线的 $C^2$ Hermite 插值

由定理 16.3.3 知 OR 曲线的充要条件是  $Z'(t) = \rho(t)F(t)G^2(t)$ , 其中  $\rho(t)$  是实系数多项式,  $F(t)$  和  $G(t)$  为复系数多项式, 且  $\deg_t(F(t)) \leq 1$ . 为得到抛物—PH 曲线, 可令

$$\rho(t) = 1, \quad F(t) = a(1-t) + bt, \quad G(t) = (1-t)^3 + c(1-t)^2t + d(1-t)t^2 + et^3,$$

其中  $a, b, c, d, e$  为待定的复系数. 积分, 可得曲线  $Z(t)$  的 Bézier 点

$$\begin{cases} Z_0 = R_0, \quad Z_1 = Z_0 + a/8, \quad Z_2 = Z_1 + (b + 2ac)/56, \quad Z_3 = Z_2 + (ac^2 + 2ad + 2bc)/168, \\ Z_4 = Z_3 + (bc^2 + 2ae + 2bd + 2acd)/280, \quad Z_5 = Z_4 - (bd^2 + 2ade + 2bce)/168, \\ Z_6 = Z_5 - (ae^2 + 2bde)/56, \quad Z_7 = Z_6 - be^2/8, \\ Z_8 = R_1 + (a + be^2)/8 + (b + ae^2 + 2ac + 2bde)/56 + (ac^2 + bd^2 + 2ad + 2bc)/168 \\ \quad + (ade + bce)/84 + (ad^2 + bc^2 + 2ae + 2bd + 2be + 2acd + 2ace + 2bcd)/280. \end{cases} \quad (16.4.11)$$

再设  $C^2$  H 的插值条件为两端点  $R_0, R_1$ , 相应一阶导矢  $T_0, T_1$  和二阶导矢  $B_0, B_1$ , 则可得

$$a = T_0, \quad b + (2c - 7)a = B_0, \quad be^2 = T_1, \quad (a - 7b)e^2 + 2bde = -B_1, \quad 5U + 3V = 105W, \quad (16.4.12)$$

$$U = ac^2 + bd^2 + 2(ad + bc)(e + 1), \quad V = bc^2 + ad^2 + 2(bd + ace) + 2(a + b)(e + cd), \quad (16.4.13)$$

$$W = 8(R_1 - R_0) - 2(T_0 + T_1) - (B_0 - B_1)/7. \quad (16.4.14)$$

由(16.4.12)的前四式可得

$$a = T_0, \quad b = \frac{T_1}{e^2}, \quad c = \frac{(B_0 + 7T_0)e^2 - T_1}{2T_0e^2}, \quad d = \frac{(7T_1 - B_1 - T_0e^2)e}{2T_1}, \quad (16.4.15)$$

将(16.4.15)代入(16.4.12)中最后一式, 得到  $e$  的十二次约束复方程, 继而可求出  $e$  的所有复根. 对应于  $e$  的每一个复根, 相应可求得一条满足  $C^2H$  插值条件的八次抛物-PH 插值曲线.

由数值实验及图形观察可知, 上述曲线中至少有四条可以满足几何设计的要求. 为了选择最佳插值曲线, 除观察方法以外, 更明确和更方便的是利用插值曲线的最小绝对旋转数和曲线能量最小化. 对复平面曲线  $Z(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 记其曲率为  $k(t)$ , 则利用微分几何中的曲线旋转数概念<sup>[51]</sup>和 CAGD 中的曲线光顺度量法, 可定义其绝对旋转指标和能量分别为

$$ARot(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |k(t)| |Z'(t)| dt, \quad E(Z) = \int_0^1 k^2(t) |Z'(t)| dt. \quad (16.4.16)$$

对上两式中的被积分量重新参数化, 表为新参数的有理多项式, 通过有限次积分可求得积分值. 实践表明,  $ARot$  值较大的曲线往往存在尖点或圈点等奇异情形. 反之, 则与传统的五次插值曲线具有相当接近的  $ARot$  值. 由此首先可有效地排除奇异情形, 下一步, 再利用曲线能量的最小化来选择最佳插值曲线. 总之, 具有最小绝对旋转数和最小曲线能量的曲线, 是插值曲线的最佳选择. 它们具有比传统的五次插值曲线更自然的几何形状.

## 16.5 基于法矢曲线逼近的等距曲线最佳逼近

如前所述, 在等距曲线逼近中, 等距移动控制顶点的方法不能有效控制误差, 插值方法在非插值点误差可能很大. 为改革这些弊端, 我们从分析顶点偏移所生成的逼近曲线与等距曲线的误差入手, 找到了基于法矢曲线逼近的最佳逼近算法.

### 16.5.1 法矢曲线最佳多项式逼近的导出

假设基曲线、法矢曲线和等距曲线分别为

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{n}_d(t) = d \cdot \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{n}_d(t), \quad (16.5.1)$$

这里  $\mathbf{n}(t)$  为单位法矢曲线; 再假设控制顶点  $\mathbf{P}_i$  的偏移量为  $\mathbf{D}_i$ , 顶点偏移曲线和等距曲线的逼近曲线分别为

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{r}_d^a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i^a, \quad \mathbf{P}_i^a = \mathbf{P}_i + \mathbf{D}_i, \quad (16.5.2)$$

则 offset 逼近的误差曲线为

$$\Delta(t) = \mathbf{r}_d^a(t) - \mathbf{r}_d(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{n}_d(t). \quad (16.5.3)$$

由此可见, 问题的关键在于寻求一条  $n$  次多项式曲线  $\mathbf{d}(t)$  来逼近  $\mathbf{n}_d(t)$ .

更一般地, 我们可不局限于控制顶点偏移的思想, 而直接对单位法矢  $\mathbf{n}(t)$  进行逼近, 进而用等距逼近曲线

$$\mathbf{r}_d^a(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i + d \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{N}_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (16.5.4)$$

来逼近  $\mathbf{r}_d(t)$ . 应用升阶公式可把上述公式表成  $\max(m, n)$  次的 Bézier 曲线. 易见(16.5.2)为上式之特例. 为方便起见, 下面仅讨论(16.5.2)的实现.

在传统逼近论中, 利用多项式逼近解析函数有许多种方法<sup>[52]</sup>, 如 Legendre 级数逼近, Chebyshev 级数逼近, 最小二乘插值逼近等. 经试验比较, 我们发现使平方误差最小的 Legendre 最佳平方逼近的效果最为理想.

Legendre 多项式<sup>[53]</sup>是由  $\{t^i\}_{i=0}^n$  关于权函数  $W(t)=1$  进行正交化所得到的多项式  $\{L_k(t) = (2^k k!)^{-1} d^k [(t^2 - 1)^k] / dt^k, -1 \leq t \leq 1\}_{k=0}^n$ , 可由以下递推式得到:

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t, \quad (k+1)L_{k+1}(t) = (2k+1)tL_k(t) - kL_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

它与 Bernstein 基的关系为

$$L_k(t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{k}{i} B_i^k \left( \frac{t+1}{2} \right), \quad t \in [-1, 1]. \quad (16.5.5)$$

由逼近论的 Neumann 定理<sup>[52-54]</sup>可知,  $f(t) \in C[-1, 1]$  按 Legendre 多项式展开的  $n$  次多项式

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n L_k(t) a_k, \quad a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) L_k(t) dt, \quad (16.5.6)$$

在  $[-1, 1]$  上一致绝对收敛于  $f(t)$ , 且是  $f(t)$  在  $[-1, 1]$  上的  $n$  次最佳平方逼近; 即其平方误差

$$\|f - S_n\|_2 = \left[ \int_{-1}^1 [f(t) - S_n(t)]^2 dt \right]^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 f^2(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2 \right]^{1/2} = \inf_{S \in H_n} \|f - S\|_2, \quad (16.5.7)$$

这里  $H_n$  是次数不大于  $n$  的多项式集合. 应用这一结果, 我们得到

**定理 16.5.1** 对已知基曲线  $\mathbf{r}(t)$  的法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$  构作曲线

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{k=0}^n L_k(2t-1) \mathbf{a}_k, \quad t \in [0, 1]; \quad \mathbf{a}_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{n}_d \left( \frac{t+1}{2} \right) L_k(t) dt, \quad (16.5.8)$$

再按(16.5.5)把  $\mathbf{d}(t)$  化为 Bernstein 基表示  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{D}_i$ , 则  $\mathbf{d}(t)$  是  $\mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次最佳平方逼近多项式曲线, 而  $\mathbf{D}_i$  是基曲线  $\mathbf{r}(t)$  的控制顶点  $\mathbf{P}_i$  的最佳偏移向量,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

### 16.5.2 具有端点约束的法矢曲线最佳逼近

上述对法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次最佳平方逼近曲线  $\mathbf{d}(t)$  在两端点误差非零, 即并不插值  $\mathbf{n}_d(t)$  的首末端点, 这不适用于曲线离散. 为此, 我们提出下面的补救办法. 记(16.5.2)中的曲线  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_n(t)$ , 它要满足端点插值条件

$$\mathbf{d}_n(0) = \mathbf{n}_d(0), \quad \mathbf{d}_n(1) = \mathbf{n}_d(1), \quad (16.5.9)$$

所以  $\mathbf{d}_n(t) = B_0^n(t) \mathbf{n}_d(0) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t) \mathbf{D}_i + B_n^n(t) \mathbf{n}_d(1)$ , 显然, 要使  $\mathbf{d}_n(t)$  成为  $\mathbf{n}_d(t)$  的最佳逼近

近, 则须且只须  $\hat{\mathbf{d}}_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t) \mathbf{D}_i$  是  $\hat{\mathbf{n}}_d(t) = \mathbf{n}_d(t) - B_0^n(t) \mathbf{n}_d(0) - B_n^n(t) \mathbf{n}_d(1)$  的最佳逼近. 因为  $\hat{\mathbf{n}}_d(0) = \hat{\mathbf{n}}_d(1) = 0$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_d(t)$  必含有因子  $(1-t)t$ . 令  $\tilde{\mathbf{n}}_d(t) = \hat{\mathbf{n}}_d(t)/((1-t)t)$ , 它在端点的值定义为  $\tilde{\mathbf{n}}_d(i) = \lim_{t \rightarrow i} \hat{\mathbf{n}}_d(t)/((1-t)t)$ ,  $i = 0, 1$ . 所以, 若

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n-2}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \tilde{\mathbf{D}}_i \quad (16.5.10)$$

是  $\tilde{\mathbf{n}}_d(t)$  的  $n-2$  次最佳平方多项式逼近, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_n(t) &= B_0^n(t) \mathbf{n}_d(0) + (1-t)t \tilde{\mathbf{d}}_{n-2}(t) + B_n^n(t) \mathbf{n}_d(1) \\ &= B_0^n(t) \mathbf{n}_d(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\binom{n-2}{i-1}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) \tilde{\mathbf{D}}_{i-1} \right] + B_n^n(t) \mathbf{n}_d(1), \quad t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (16.5.11)$$

为  $\mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次近似最佳平方多项式逼近, 并且满足端点条件(16.5.9).

类似地, 我们还可得到保高阶端点插值的法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$  的近似最佳平方多项式逼近.

从上一小节开始, 我们用 Legendre 多项式为工具进行法矢曲线逼近, 但其实 Legendre 多项式只是 Jacobi 多项式<sup>[55]</sup>

$$J_n^{(r,s)}(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \binom{n+r}{i} \binom{n+s}{n-i} B_i^n(t) / \binom{n}{i}, \quad r, s > -1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16.5.12)$$

的特例. Jacobi 多项式在  $[-1,1]$  上关于权函数  $w^{(r,s)}(t) = (1-t)^r(1+t)^s$  正交. 进一步, 对任意正整数  $\alpha$ , 递归地定义多项式

$$J_{n,\alpha}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\alpha J_{n-2\alpha}^{(2\alpha,2\alpha)}(t), \quad n = 2\alpha, 2\alpha+1, \dots, \quad (16.5.13)$$

则它关于权  $w(t) = 1$  形成正交基, 且在点  $t = \pm 1$  取零值. 因后一性质, 它优于 Legendre 多项式. 我们用它作为新的工具, 对函数  $f(t)$ ,  $t \in [-1,1]$ , 令

$$h(t) = B_0^n \left( \frac{t+1}{2} \right) f(-1) + B_n^n \left( \frac{t+1}{2} \right) f(1), \quad (16.5.14)$$

则多项式

$$s_n(t) = h(t) + \sum_{k=2}^n J_{k,1}(t) b_k, \quad b_k = \int_{-1}^1 [f(t) - h(t)] J_{k,1}(t) dt / \int_{-1}^1 J_{k,1}^2(t) dt \quad (16.5.15)$$

是  $f(t)$  在  $[-1,1]$  上的最佳平方逼近且插值端点  $f(-1)$ ,  $f(1)$ .

### 16.5.3 Legendre 级数与 Jacobi 级数的系数计算

(16.5.6), (16.5.15) 分别称为 Legendre 级数与 Jacobi 级数, 为实现法矢曲线逼近, 必须分别计算其中的系数  $a_k$  与  $b_k$ . 由 Gauss-Legendre 积分法<sup>[53]</sup>, 对  $[-1,1]$  上的函数  $f(t)$ ,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=0}^N A_i f(t_i), \quad (16.5.16)$$

$$a_k \approx \sum_{i=0}^N A_i^k f(t_i), \quad A_i^k = (2k+1) A_i \cdot L_k(t_i) / 2, \quad (16.5.17)$$

这里  $t_i$  是 Legendre 多项式  $L_{N+1}(t)$  的零点,  $A_i$  是 Gauss 积分系数,  $t_i, A_i$  和  $A_i^k$  均与  $f(t)$  无关, 因此可预先算好置于表中备用; 为使逼近良好, 需要  $N > n$ , 误差界的详细讨论可参阅[53]. 类似地, 我们有

$$b_k \approx \sum_{i=0}^N B_i^k [f(t_i) - h(t_i)], \quad B_i^k = A_i J_{k,1}(t_i) / \int_{-1}^1 J_{k,1}^2(t) dt, \quad (16.5.18)$$

$B_i^k$  也可预置于表中. 高阶 Gauss-Legendre 公式有两个性质使它对高精度下的计算特别有用. 首先因  $A_i$  为正, 数值计算是稳定的; 其次, 它计算简单, 且仅有很小的截断误差. 当与曲线离散技术相结合时, 逼近精度会很高.

容易看出, 我们采用的最佳平方逼近不但平方误差最小, 而且有以下两个明显的优点: 逼近系数可直接决定, 无须求解线性方程组; 这些系数与逼近多项式的次数  $n$  无关, 当  $n$  增大时, 仅需再计算后继系数  $n$ , 而前面的系数保持不变.

### 16.5.4 NURBS 曲线的等距曲线逼近

若 §16.5.1 中曲线  $\mathbf{r}(t)$  及其等距逼近曲线  $\mathbf{r}_d^n(t)$  的调配基函数  $B_i^n(t)$  均改为带权因子  $\omega_i$  的函数  $G_i^n(t) = \omega_i / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i$ , 则等距逼近曲线的误差仍具有(16.5.3)的形式, 但其中偏移曲

线为  $\mathbf{d}(t) = \sum_{i=0}^n G_i^n(t) \mathbf{D}_i$ . 于是问题转化为求法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次最佳有理多项式逼近曲线,

通常这是不容易的. 这里, 我们建议, 不妨采用类似于 §16.5.1 的方法, 先求

$\left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \right) \mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次最佳多项式逼近曲线, 然后求得  $\mathbf{D}_i$ .

对于一般的 NURBS 曲线, 可先用节点插入法把它变成分段有理 Bézier 曲线, 对各段有理 Bézier 曲线作等距逼近曲线, 再合并成一条, 就可得到 NURBS 表示的等距逼近曲线. 应用 §16.5.2 的方法能保证逼近至少是  $G^0$  连续的, 对这个方法适当修改也可保证更高阶连续性. 另



外，合并后还需在误差精度范围内删除多余节点，删除节点的方法已有较成熟的算法。

偏移控制顶点方法求等距逼近曲线只对曲线是正则且上凸或下凸时有效，对于具有尖点和拐点的曲线，我们首先在尖点和拐点处将曲线细分，再对各段分别作等距逼近曲线。

虽然 Legendre 多项式逼近具有显式的平方误差计算公式(16.5.7)，但在同其他方法比较时，我们通常在曲线上取若干点进行误差计算。当误差不满足精度时，进一步在误差最大点处对此曲线段进行离散。若某曲线段的误差满足公差要求，则不必离散，以减少控制顶点的个数。整个逼近过程可总结为

**算法 16.5.1** (NURBS 曲线的等距逼近曲线计算)

输入: NURBS 曲线  $\mathbf{r}(t)$  ( $t \in [0,1]$ ), 等距距离  $d$ , 公差  $\varepsilon$ .

Step 1. 将曲线  $\mathbf{r}(t)$  用节点插入法分解成(有理)Bézier 段;

Step 2. 计算每一曲线段的法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$ , 并把参数区间变换至  $[-1,1]$ ;

Step 3. 求法矢曲线  $\mathbf{n}_d(t)$  的  $n$  次多项式逼近曲线, 即为偏移曲线  $\mathbf{d}(t)$ ;

Step 4. 若所有曲线段都满足公差要求则转 Step 6; 否则在最大误差点处离散, 转 Step 2;

Step 5. 将参数区间变换回  $[0,1]$ , 得到各段曲线的控制顶点的偏移向量;

Step 6. 由所得的偏移向量计算新的控制顶点, 构造等距逼近曲线, 去除多余的节点。

输出: 满足公差  $\varepsilon$  要求的等距逼近 NURBS 曲线  $\mathbf{r}_d^a(t)$ .

大量实例表明, 相对于曲线离散次数, 本方法误差呈指数速率递减, 收敛速度非常快。通过与其他多种方法的比较, 可知在一定公差要求下, 用本方法得到的等距逼近曲线细分次数最少, 控制顶点数最少, 大大优于其它方法。

**例 16.5.1** 基曲线为三次均匀 B 样条曲线, 它有七个控制顶点。等距曲线距离为  $d = 0.5$  (如图 16.5.1, 实线为基曲线, 虚线为等距逼近曲线)。表 16.5.1 为在不同公差要求  $\varepsilon$  下, 用各种方法得到的等距逼近曲线的控制顶点数目。表中最后两列是我们应用 Legendre, Jacobi 多项式逼近法矢曲线的结果, 其余各列是文献[21][27]列出的结果, 其中 Cobb, Elb, Til 分别是文献[16][19][18]中的控制顶点偏移方法的结果,  $\text{Elb}_2$ ,  $\text{Lst}$ ,  $\text{Lst}_2$ ,  $\text{M}_2$ , P&T 分别是文献[48][48][48][21][27]中所用方法的结果。

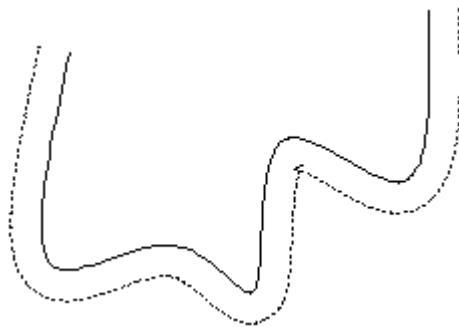


图 16.5.1 三次均匀 B 样条曲线的等距逼近曲线

表 16.5.1 对三次均匀 B 样条曲线用各种方法产生等距逼近曲线的控制顶点数

$\varepsilon$	Cobb	Elb	$\text{Elb}_2$	Til	Lst	$\text{Lst}_2$	$\text{M}_2$	P&T	Leg	Jac
$10^{-1}$	28	19	22	25	16	37	78	19	19	19
$10^{-2}$	73	57	55	67	48	49	92	33	38	35
$10^{-3}$	208	174	190	202	84	94	120	56	69	60
$10^{-4}$	637	417	550	640	138	166	176	101	112	98
$10^{-5}$	1846	1357	1690	1918	240	277	302	179	184	168

## 16.6 基于刘徽割圆术的等距曲线逼近算法

如前所述, 等距曲线逼近算法常用有限个样本点来估计误差而非整体误差, Lee<sup>[21]</sup>的基圆逼近包络法实现了整体误差估计, 但逼近曲线次数太高。为克服这一弊端, 我们提出基于刘徽割圆术的方法, 即用内接正  $n$  边形逼近基圆, 让其中心沿基曲线  $\mathbf{r}(t)$  运动, 各边方向保持不变, 则由此刚体运动扫掠形成的带状区域的边界曲线当  $n \rightarrow \infty$  时收敛到等距曲线。

为便于讨论, 假设  $\mathbf{r}(t)$  为  $C^1$  连续的平面正则  $r$  次 NURBS 曲线, 基圆  $Q_d$  的内接正  $n$  边

形  $P_d^n$  的顶点为  $\{P_i^n\}_{i=0}^{n-1}$ , 边向量为  $\{e_i^n: P_{i-1}^n P_i^n\}_{i=1}^n$ ,  $P_n^n = P_0^n$ .

**定义 16.6.1** 若  $r'(t_0)$  平行于  $P_d^n$  的边向量  $e$ , 则称  $t_0$  为切相点参数, 称  $r(t_0)$  为切相点, 称  $e$  为切相边.

今记曲线  $r(t)$  的所有切相点参数为  $\{t_j\}_{j=1}^m$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$ , 再记  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = 1$ . 由于曲线切线的连续性, 这些切相点对应的切相边必定是  $P_d^n$  的首尾相连边, 记为  $\{e_j^n\}_{j=1}^m$ , 记  $e_j^n$  的两端点为  $P_{j-1}^n, P_j^n$ , 当  $j \geq n$  时规定  $e_j^n \equiv e_{j \bmod n}^n, P_j^n = P_{j \bmod n}^n$ .

**定义 16.6.2**  $r(t)$  被所有切相点  $\{r(t_j)\}_{j=1}^m$  分成的  $m+1$  段曲线称为基本段, 记为

$$r^k = r(t), t_k \leq t \leq t_{k+1}, k = 0, 1, \cdots, m.$$

**定理 16.6.1**  $P_d^n$  按中心沿平面正则 NURBS 曲线扫掠而成区域的边界  $\Gamma^n$  由同次 NURBS 曲线段和直线段组成.

证  $P_d^n$  沿基曲线  $r(t)$  扫掠而成的区域边界  $\Gamma^n$  必由其边界的扫掠轨迹构成, 而  $P_d^n$  的边界由其  $n$  条边组成, 又每一条边由其两个顶点和边上的内点组成. 因此  $\Gamma^n$  必由  $P_d^n$  的  $n$  个顶点和  $n$  条边的内点的扫掠轨迹构成. 由于假定在沿基曲线运动过程中  $P_d^n$  只有平移没有旋转, 因而  $P_d^n$  的  $n$  个顶点  $\{P_i^n\}_{i=0}^{n-1}$  的  $n$  条扫掠轨迹线  $P_i^n(t) = r(t) + OP_i^n$  (其中  $O$  为基圆的圆心) 只不过是基曲线  $r(t)$  平移了一个常向量  $OP_i^n$ , 它们是  $n$  条与  $r(t)$  同形状的 NURBS 曲线, 从而作为边界曲线的一部分是由它们互相裁剪出来的分段 NURBS 曲线段. 又因为  $P_d^n$  的边  $e_i^n = P_{i-1}^n P_i^n$  的内点  $(P_{i-1}^n, P_i^n)$  作为一条直线段, 在扫掠过程中或者整段出现在边界上, 或者在边界上不出现. 所以  $\Gamma^n$  必由分段同次 NURBS 曲线段和直线段组成. 证毕.

定理 16.6.1 指出了等距逼近曲线的结构. 进一步的研究发现, 等距逼近曲线的分段与基曲线  $r(t)$  的基本段有密切联系. 下面先考虑基曲线  $r(t)$  凸向一边的等距逼近曲线.

**定理 16.6.2** 顶点  $P_j^n$  的轨迹线部分  $R^j: \{P_j^n(t), t_j \leq t \leq t_{j+1}, j = 0, 1, \cdots, m\} \subseteq \Gamma^n$ .

证 考虑基本段  $r^j = r(t), t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , 它在端点  $r(t_j), r(t_{j+1})$  处的切线分别与基圆内接多边形的边  $e_j^n = P_{j-1}^n P_j^n$ ,  $e_{j+1}^n = P_j^n P_{j+1}^n$  平行, 如图 16.6.1 (图中多边形顶点的上标被省略).

在基本段的点  $r(t), t_j \leq t \leq t_{j+1}$  处, 轨迹线  $P_j^n(t)$  在点  $P_j^n$  的切线方向 (图中双箭头方向) 位于两边向量  $e_j^n$  和  $e_{j+1}^n$  的方向向量之间, 线段  $P_j^n P_{j-1}^n$  和  $P_j^n P_{j+1}^n$  上离顶点  $P_j^n$  任意近的点至  $r(t)$  之距离必定小于轨迹线  $P_j^n(t)$  上离顶点  $P_j^n$  任意近的点至  $r(t)$  之距离. 因此, 在此点  $r(t)$ , 多边形的顶点  $P_j^n$  位于扫掠区域的边界上, 定理证毕.

易见  $P_j^n(t) = r(t) + OP_j^n$ . 所以  $R^j = r^j + OP_j^n, j = 0, 1, \cdots, m$ . 这表明, 将基本段  $r^j$  按向量值  $OP_j^n$  平移可得  $\Gamma^n$  的一段, 另外易知把  $R^{j-1}, R^j (1 \leq j \leq m)$  的首尾相连所得的直线段也是  $\Gamma^n$  上的一段, 又它平行且等于对应的边向量  $e_j^n$ , 并与  $R^{j-1}, R^j$  连续. 于是有

**定理 16.6.3**  $P_d^n$  按中心沿平面正则 NURBS 曲线扫掠而成区域的凸向边界由  $m+1$  段同次 NURBS 曲线段和  $m$  段平行于  $P_d^n$  边的直线段交替组成.

**算法 16.6.1** (凸向等距曲线的逼近曲线生成)

Step 1. 计算  $r(t)$  的切相点参数  $\{t_j\}_{j=1}^m$  并排序, 记录切相边  $e_j^n$  及其端点  $P_{j-1}^n, P_j^n$ .

Step 2. 将  $r^j$  平移向量值  $OP_j^n$  得  $R^j$ , 将边  $e_j^n$  平移至  $r(t_j)$  处得  $T^j, j = 0, 1, \cdots, m-1$ .

Step 3. 将  $r^m$  平移向量值  $OP_{m+1}^n$  得到  $R^{m+1}$ .

Step 4. 将  $\{R^0, T^0, R^1, T^1, \cdots, R^{m-1}, T^{m-1}, R^m\}$  作为凸向等距曲线的逼近曲线.

利用与上面同样的方法, 我们可以得到基曲线凹向一边的等距逼近曲线.

**定义 16.6.3** 设  $n$  为偶数, 称  $P_d^n$  上与顶点  $P_j^n$  及中心共线的顶点为对角顶点, 记为  $\tilde{P}_j^n$ , 即  $\tilde{P}_j^n = P_{(j+n/2) \bmod n}^n$ .

设  $\tilde{R}^j(t) = r^j(t) + O\tilde{P}_j^n, t_j \leq t \leq t_{j+1}, j = 0, 1, \dots, m$ . 设  $\tilde{R}^j(s_{j1}) = \tilde{R}^{j+1}(s_{j0}), j = 0, 1, \dots, m-1$ , 则有  $0 < s_{01} < s_{10} < s_{11} < \dots < s_{m0} < 1$ .

**定理 16.6.4**  $P_d^n$  沿平面正则 NURBS 曲线扫掠而成区域的凹向边界由  $m+1$  段同次 NURBS 曲线段组成.

**算法 16.6.2** (凹向等距曲线的逼近曲线生成)

Step 1. 同算法 16.6.1 Step1.

Step 2. 计算  $R^j, R^{j+1}$  的交点  $\tilde{R}^j(s_{j1}) = \tilde{R}^{j+1}(s_{j0}), j = 0, 1, \dots, m-1$ , 求得各交点的参数为  $s_{00} = 0 < s_{01} < s_{10} < s_{11} < \dots < s_{m0} < s_{m1} = 1$ .

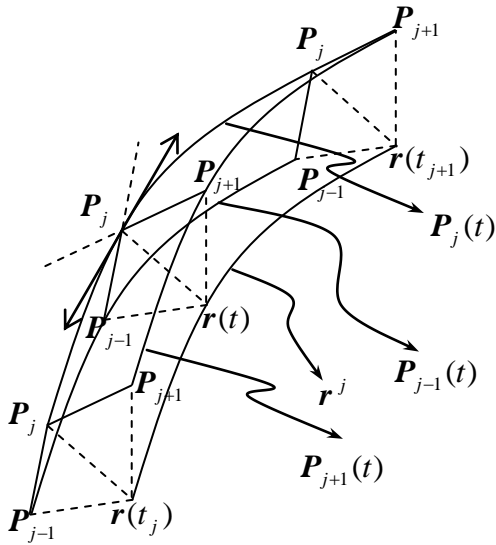


图 16.6.1. 基本段  $r^j$  处的扫掠边界

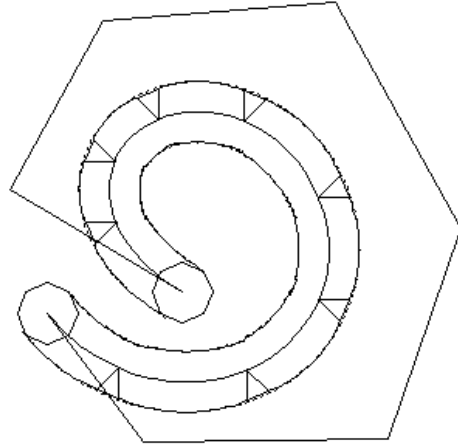


图 16.6.2 一条七次螺旋形 Bézier 曲线的等距逼近曲线, 其中用正八边形逼近基圆

Step 3. 将  $r(t), s_{j0} \leq t \leq s_{j1}$  平移向量值  $O\tilde{P}_j^n$  得到  $S^j, j = 0, 1, \dots, m$ .

Step 4. 将  $\{S^0, S^1, \dots, S^m\}$  作为凹向等距曲线的逼近曲线.

综合以上分析的结果, 并注意到在扫掠区域的两端, 正多边形  $P_d^n$  从顶点  $\tilde{P}_0^n$  到顶点  $P_0^n$  之间的边构成始末端点处扫掠区域的边界, 我们有:

**定理 16.6.5** 正多边形按中心沿正则  $r$  次 NURBS 基曲线运动而成的带状扫掠区域的边界曲线必由分段  $r$  次 NURBS 曲线和平行于正多边形各边且长度为正多边形边长的直线段构成, 即其边界是一条  $r$  次 NURBS 曲线.

应当注意的是, 对于曲线曲率半径小于基圆半径的点的凹向处, 用算法 16.6.2 求出的逼近边界有自交情况出现, 这时应从整体上对逼近边界再作求交判断, 以剔除多余的内环. 这一步在几乎所有等距逼近算法中都是不可避免的.

下面进行误差分析. 以内接正  $n$  边形逼近圆, 其最大逼近误差为  $\Delta = (1 - \cos \pi/n)d$ . 即此正  $n$  边形位于半径为  $d$  和  $d - \Delta$  的两圆间, 由此可知, 我们的逼近曲线位于此两圆扫掠区域的边界之间. 换言之, 若不考虑局部相交, 等距逼近曲线的误差不超过  $\Delta$ .

利用正多边形逼近圆还有外切和穿越等方法. 总之, 我们的算法具有以下优点: 逼近方法简单直观, 操作方便, 只需各切相点参数和交点参数, 就能构造逼近曲线. 逼近曲线形

式简单, 为与基曲线同次数的 NURBS 曲线, 误差估计具有整体性, 且误差控制容易, 容易推广到其他形式自由曲线的 offset 逼近.

图 16.6.2 为逼近一条七次螺旋形 Bézier 曲线的等距曲线逼近的例子, 其中用正八边形逼近基圆, 基曲线上的切相点有八个, 此时凸向等距逼近曲线由九段 Bézier 曲线段和八条直线段组成; 凹向等距逼近曲线由九条 Bézier 曲线段构成.

## 16.7 具有有理中心线的管道曲面

平面等距曲线的概念在空间的一个推广是管道曲面. 一般, 中心线为  $\mathbf{r}(t)$ , 半径为  $d$  的管道曲面定义为

$$\mathbf{r}_d(s, t) = \mathbf{r}(t) + d \cdot \mathbf{N}(s, t), \quad (s, t) \in I_1 \otimes I_2. \quad (16.7.1)$$

其中  $I_1, I_2$  为实区间; 对每个固定的参数  $t$ ,  $\mathbf{N}(s, t)$  表示以  $\mathbf{r}(t)$  为中心, 位于法平面  $\mathbf{r}'(t) \cdot ((x, y, z) - \mathbf{r}(t)) = 0$  上的一个单位圆.

考察以有理参数化曲线  $\mathbf{r}(t)$  作为中心线的管道曲面的可有理化性, 关键在于寻求有理向量值函数

$$\mathbf{N}(s, t) = (n_0(s, t), n_1(s, t), n_2(s, t)), \quad (16.7.2)$$

使得满足

$$n_0^2(s, t) + n_1^2(s, t) + n_2^2(s, t) = 1, \quad n_0(s, t) \cdot x'(t) + n_1(s, t) \cdot y'(t) + n_2(s, t) \cdot z'(t) = 0. \quad (16.7.3)$$

**引理 16.7.1** 设  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  为有理参数化曲线, 满足  $z'(t) \neq 0$ . 则以  $\mathbf{r}(t)$  为中心线的管道曲面可有理参数化为(16.7.1)形式, 当且仅当存在有理函数  $f = f(t), g = g(t)$  使得

$$x'^2(t) + z'^2(t) - f^2(t)(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)) = g^2(t). \quad (16.7.4)$$

证 容易验证, (16.7.3)等价于

$$\begin{cases} n_0(s, t) = (-n_1(s, t)x'(t)y'(t) \pm z'(t)\sqrt{\delta(s, t)})/(x'^2(t) + z'^2(t)), \\ n_2(s, t) = -(n_0(s, t)x'(t) + n_1(s, t)y'(t))/z'(t), \\ \delta(s, t) = x'^2(t) + z'^2(t) - n_1^2(s, t)(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)). \end{cases} \quad (16.7.5)$$

当  $\mathbf{N}(s, t)$  关于  $s$  和  $t$  为有理函数时, 由(16.7.5)的第一式可知

$$\delta(s, t) = \{(n_0(s, t)(x'^2(t) + z'^2(t)) + n_1(s, t)x'(t)y'(t))/z'(t)\}^2$$

为某个有理函数的平方. 选常数  $k$  和  $c$  使  $n_1(kt + c, t)$  有意义, 则  $f(t) = n_1(kt + c, t)$  和  $g(t) = \sqrt{\delta(kt + c, t)}$  为有理函数, 且满足(16.7.4).

反之, 在  $(t, \lambda, \mu)$  空间中考察隐式曲面

$$x'^2(t) + z'^2(t) - \lambda^2(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)) = \mu^2, \quad (16.7.6)$$

从上式减去(16.7.4), 省写变量  $t$ , 得  $-(\lambda - f)(\lambda + f)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (\mu - g)(\mu + g)$ . 令

$$-(\lambda - f)/(\mu + g) = (\mu - g)/((\lambda + f)(x'^2 + y'^2 + z'^2)) = s,$$

就可得到

$$\begin{cases} \lambda(s, t) = \frac{-2sg(t) + (1 - (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))s^2)f(t)}{1 + (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))s^2}, \\ \mu(s, t) = \frac{-2s(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))f(t) - (1 - (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))s^2)g(t)}{1 + (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))s^2}. \end{cases} \quad (16.7.7)$$

若令

$$n_1(s, t) = \lambda(s, t), \quad \delta(s, t) = \mu^2(s, t), \quad (16.7.8)$$

则由(16.7.5)解出  $n_0(s, t)$  和  $n_2(s, t)$ , 由此得到  $\mathbf{N}(s, t)$  的一个有理表达式, 此即所求. 证毕.

由复数域上的多项式因式分解定理, 可以简单地得出

**引理 16.7.2** 若对所有实数  $t$ , 有理函数  $F(t) \geq 0$ , 则必存在两个有理函数  $F_1(t)$  和  $F_2(t)$  使得

$$F(t) = F_1^2(t) + F_2^2(t).$$

借助于上述两个引理, 我们可以证明

**定理 16.7.1** 中心线为有理曲线的管道曲面可有理参数化.

证 设  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  为一条空间有理曲线. 不失一般性, 设  $y'(t) \neq 0$ ,  $z'(t) \neq 0$ . 由引理 16.7.1 可知, 我们只需找出满足(16.7.4)的有理函数  $f(t)$  和  $g(t)$  即可. 为此, 令

$$f(t) = (m^2(t) + n^2(t) - 1) / (m^2(t) + n^2(t) + 1), \quad g(t) = h(t) / (m^2(t) + n^2(t) + 1), \quad (16.7.9)$$

其中三个有理函数  $m(t), n(t)$  和  $h(t)$  待定. 将它们代入 (16.7.4) 可以得到  $4(m^2(t) + n^2(t))(x'^2(t) + z'^2(t)) = h^2(t) + (m^2(t) + n^2(t) - 1)^2 y'^2(t)$ . 在复数域中, 该式成立的一个充分条件是:

$$2(m(t) + n(t)I)(x'(t) + z'(t)I) = h(t) + (m^2(t) + n^2(t) - 1)y'(t)I. \quad (16.7.10)$$

这个条件等价于

$$\begin{cases} h(t) = 2(m(t)x'(t) - n(t)z'(t)), \\ (y'(t)m(t) - z'(t))^2 + (y'(t)n(t) - x'(t))^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t). \end{cases} \quad (16.7.11)$$

由引理 16.7.2, 存在有理函数  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$ , 使得  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$ . 所以, 如果假设

$$m(t) = (\alpha(t) + z'(t)) / y'(t), \quad n(t) = (\beta(t) + x'(t)) / y'(t), \quad (16.7.12)$$

则  $h(t)$ , 从而进一步  $f(t)$ ,  $g(t)$  均为  $t$  的有理函数. 这样就找到了所需的  $f(t)$ ,  $g(t)$ . 证毕.

**算法 16.7.1** (计算以有理参数曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  为中心线的半径为  $d$  的管道曲面)

Step 1. 求有理函数  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$ , 使得  $\mathbf{r}'^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$ .

Step 2. 按(16.7.12)和(16.7.11)置  $m(t), n(t), h(t)$ , 并按(16.7.9)计算  $f(t)$ ,  $g(t)$ .

Step 3. 按(16.7.7)、(16.7.8)、(16.7.5)和(16.7.2)计算单位法向量  $\mathbf{N}(s, t)$ .

Step 4. 计算管道曲面  $\mathbf{r}_d(s, t) = \mathbf{r}(t) + d \cdot \mathbf{N}(s, t)$ .

显然, 在上述各步中, 计算  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  通常是最困难的. 然而, 在某些特殊情况下, 可直接写出  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$ . 如中心线为平面有理曲线时, 即  $\mathbf{r}(t) = (0, y(t), z(t))$  时, 则可取  $\alpha(t) = y'(t)$ ,  $\beta(t) = z'(t)$ . 又如中心线为空间 PH 曲线时, 即存在多项式  $w(t)$  使  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = w^2(t)$  时, 可取  $\alpha(t) = w(t)$ ,  $\beta(t) = 0$ . 当然, 有关函数(例如  $\alpha(t), \beta(t)$ )的选取并非唯一, 不同的选法将导致管道曲面不同的参数化.

## 16.8 二次曲面的等距曲面

**定义 16.8.1** 任何一张不可约的代数曲面  $S: F(x, y, z) = 0$  的距离为  $d$  的等距曲面是由

$$(x_d, y_d, z_d) = (x, y, z) + d \cdot \nabla F(x, y, z) / \|\nabla F(x, y, z)\|, \quad \forall (x, y, z) \in S, \quad (16.8.1)$$

$$\nabla F(x, y, z) = (F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)) \quad (16.8.2)$$

组成的集合.

与曲线情况类似, 代数曲面的等距曲面也是代数曲面, 但未必是有理曲面. 由以上定义有

**定理 16.8.1** 对于不可约代数曲面  $S: F(x, y, z) = 0$ , 当  $(x, y, z, \rho)$  空间中的代数曲面

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ F_x'^2(x, y, z) + F_y'^2(x, y, z) + F_z'^2(x, y, z) = \rho^2 \end{cases} \quad (16.8.3)$$

具有有理形式时, 曲面  $S$  的等距曲面也可有理参数化.

应用这个定理可分析常见二次曲面的等距曲面的可参数化性质. 首先看几种简单情况. 球面、正圆柱面和正圆锥面的等距曲面分别是球面、正圆柱面和正圆锥面, 从而可以有理参数

化. 下面分别讨论几种二次曲面的情形.

### 16.8.1 椭圆抛物面和双曲抛物面的等距曲面

当  $a$  和  $b$  同号或异号时, 方程  $z - ax^2 - by^2 = 0$  表示椭圆抛物面或双曲抛物面. 显然, 如果二次曲面  $1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2 = \rho^2$  在  $(x, y, z, \rho)$  空间中可有理参数化, 则在  $(x, y, z, \rho)$  空间中的代数曲面

$$\begin{cases} z = ax^2 - by^2 \\ 1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2 = \rho^2 \end{cases} \quad (16.8.4)$$

亦然. 所以下面仅讨论(16.8.4)的第二式. 当  $b \neq 0$ , 以变换  $\rho = 2by + s$  代入(16.8.4)的第二式可得  $y = (1 + 4a^2x^2 - s^2)/(4bs)$ , 于是二次曲面  $1 + 4a^2x^2 + 4b^2y^2 = \rho^2$  可表示成关于  $(x, s)$  的有理形式. 如果  $b = 0$ , 则  $a \neq 0$ , 可作类似变换. 这样, 根据定理 16.8.1, 我们用给出参数化公式的方法构造性地证明了

**定理 16.8.2** 椭圆抛物面或双曲抛物面的等距曲面为有理曲面.

### 16.8.2 椭球面的等距曲面

根据椭球面的形状对称性, 通过刚体变换和一致缩放变换, 不失一般性可把其方程写为

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = 1, \quad a > 0, b > 0, 0 < a \leq 1 \leq b. \quad (16.8.5)$$

根据定理 16.8.1, 我们只需将  $(x, y, z, r)$  空间中的曲面

$$\begin{cases} x^2 + ay^2 + bz^2 = 1 \\ x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 = r^2/4 \end{cases} \quad (16.8.6)$$

参数化即可. 作二次变换

$$x = \delta + 1, \quad y = u\delta, \quad z = v\delta, \quad r = 2(w\delta + 1), \quad (16.8.7)$$

则

$$\delta = -2/(1 + au^2 + bv^2) = 2(w-1)/(1 + a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) \quad (16.8.8)$$

在  $(u, v, w)$  空间中定义三次曲面

$$\Sigma: a(w-1+a)u^2 + b(w-1+b)v^2 + w(1-w) = 0. \quad (16.8.9)$$

于是(16.8.6)的有理参数化依赖于  $\Sigma$  的参数化. 由对称性, 只需考虑  $x \geq 0, r \geq 0$  的部分. 从(16.8.6)推知  $x \leq 1$  且  $x \leq r/2$ , 再由(16.8.7)得  $\delta \leq 0, w \leq 1$ . 在  $w \leq 1$  的情况下, 曲面  $\Sigma$  若有实像, 则必需  $1-a \geq w \geq 1-b$ .

当  $a = b$  时, 椭球面为球面. 此时  $a = b = 1, w = 0$ , 显然(16.8.6)有如下的参数化:

$$\begin{cases} x = (au^2 + bv^2 - 1)/(au^2 + bv^2 + 1) = (u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1), \\ y = -2u/(au^2 + bv^2 + 1) = -2u/(u^2 + v^2 + 1), \\ z = -2v/(au^2 + bv^2 + 1) = -2v/(u^2 + v^2 + 1), \\ r = 2. \end{cases} \quad (16.8.10)$$

当  $a \neq b$  时, 容易验证, 若  $w = 1-b, w = 1-a$ , 则曲面  $\Sigma$  无实像. 因此仅需考虑  $w \in (1-b, 1-a)$ . 此时  $a(w-1+a)$  和  $b(w-1+b)$  异号. 则固定  $w$ ,  $\Sigma$  为一条双曲线. 令

$$a(w-1+a)/(b(w-1+b)) = -t^2, \quad (16.8.11)$$

$$w = (t^2(b-b^2) + a - a^2)/(bt^2 + a), \quad (16.8.12)$$

则(16.8.9)成为

$$v^2 - t^2u^2 = \rho(t), \quad \rho(t) = (b^2t^2 + a^2)(b(b-1)t^2 + a(a-1))/((a-b)bat^2 + (bt^2 + a)). \quad (16.8.13)$$

容易验证(16.8.13)有如下参数表示:

$$u = (s^2\rho(t) - 1)/(2st), \quad v = (s^2\rho(t) + 1)/(2s). \quad (16.8.14)$$

由(16.8.11)可知, 对任何  $w \in (1-b, 1-a)$ , 总可以找到实数  $t$  使  $w$  如(16.8.12)所示. 因此(16.8.12)和(16.8.14)组成了曲面  $\Sigma$  的有理表示式. 从而(16.8.6)可参数化, 即得到

**定理 16.8.3** 椭球面的等距曲面为有理曲面.

### 16.8.3 单叶双曲面的等距曲面

通过刚体变换和一致缩放变换, 单叶双曲面也可写成(16.8.5), 只是  $a$  与  $b$  异号. 同理, 只需考虑由(16.8.6)定义的超曲面的参数化. 通过二次变换(16.8.7), 我们研究(16.8.9)关于  $u, v$  和  $w$  的三次曲面  $\Sigma$  的参数化.

对于每一个固定值  $w'$ , 曲面  $\Sigma$  与平面  $w = w'$  相交为两次曲线. 特别地有

$$w = 0, \quad a(a-1)u^2 + b(b-1)v^2 = 0;$$

$$w = 1-a, \quad b(b-a)v^2 + (1-a)a = 0;$$

$$w = 1-b, \quad a(a-b)u^2 + (1-b)b = 0.$$

不难发现, 只要  $a$  与  $b$  异号, 在上面三条二次曲线中, 总可以找到两条, 它们均退化为两条实直线. 从中各自选取一条直线, 记为  $L_1$  和  $L_2$ , 则它们可写成参数形式

$$\begin{cases} L_1: (u_1(s), v_1(s), w_1(s)) = (a_1 + c_1s, b_1 + d_1s, w_1), \\ L_2: (u_2(t), v_2(t), w_2(t)) = (a_2 + c_2t, b_2 + d_2t, w_2). \end{cases} \quad (16.8.15)$$

进一步, 定义

$$(u, v, w) = ((1-k)u_1(s) + ku_2(t), (1-k)v_1(s) + kv_2(t), (1-k)w_1(s) + kw_2(t)). \quad (16.8.16)$$

把上式代入方程(16.8.9), 得到关于  $k$  的一个三次方程, 其系数是  $s$  和  $t$  的有理函数. 显然  $k=0$  和  $k=1$  是它的根, 因而其第三个根  $k=k(t, s)$  必可表示成  $s$  和  $t$  的有理函数. 从而结合(16.8.7), (16.8.8)和(16.8.16)就给出了(16.8.6)的一个有理参数表示. 由此我们得出

**定理 16.8.4** 单叶双曲面的等距曲面为有理曲面.

### 16.8.4 双叶双曲面的等距曲面

与椭球面和单叶双曲面情形类似, 我们只需考虑(16.8.9)定义的三次曲面  $\Sigma$  的有理参数化. 此时  $a < 0, b < 0$ . 不失一般性, 设  $a \leq b$ , 并且仅考虑  $x \geq 0, r \geq 0$  的部分. 此时  $1 \leq x \leq r/2$ , 所以  $w \geq 1$ . 仔细分析(16.8.9), 知  $\Sigma$  有实像对应于  $w \in [1, 1-a]$ . 现将区间  $[1, 1-a]$  分为两个子区间  $[1, 1-b]$  和  $(1-b, 1-a)$ , 分别讨论对应的  $\Sigma$  的参数化问题.

当  $w \in (1-b, 1-a)$  时, 对固定的  $w$ ,  $\Sigma$  为一条双曲线. 仿椭球面情形, 按(16.8.11)的方法得到(16.8.12)和(16.8.14), 它们为(16.8.9)的一个参数化.

当  $w \in [1, 1-b]$  时, 对固定的  $w$ ,  $\Sigma$  为一个椭圆. 容易发现, 参数曲线

$$(\bar{u}(\theta), \bar{v}(\theta), \bar{w}(\theta)) = ((\sqrt{-b/a})\sin\theta, \sqrt{(a-1)/a}\sin\theta\tan\theta, 1-b\sin^2\theta) \quad (16.8.17)$$

位于曲面(16.8.9)上. 令

$$(u, v, w) = (\alpha + \bar{u}(\theta), s\alpha + \bar{v}(\theta), \bar{w}(\theta)), \quad (16.8.18)$$

代入(16.8.9), 解出唯一非零根

$$\alpha(s, \theta) = \frac{2\sqrt{-b}((b-a)\sin\theta + sb\sqrt{b(1-a)/a}\sin^2\theta\cos\theta - b\sin\theta\cos^2\theta)}{a(a-b) + b(bs^2 + a)\cos^2\theta}. \quad (16.8.19)$$

注意到  $\sin\theta, \cos\theta$  可以表示成有理函数

$$\sin\theta = 2t/(1+t^2), \quad \cos\theta = (1-t^2)/(1+t^2), \quad (16.8.20)$$

这样, (16.8.17)–(16.8.20)就组成(16.8.9)的一个关于  $s$  和  $t$  的有理参数表示. 因此又得到

**定理 16.8.5** 双叶双曲面的等距曲面为有理曲面.

## 16.9 有理直纹面的等距曲面

由单参数直线族生成的曲面为直纹面. 经典几何对直纹面作了深刻的研究. 近年来, 直纹面, 尤其是有理直纹面在 CAGD 界引起了浓厚的兴趣. 一般, 有理直纹面可表示为:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{g}(u), \quad (u, v) \in I \otimes R. \quad (16.9.1)$$

其中有理向量函数  $\mathbf{a}(u)$  表示准线, 有理向量函数  $\mathbf{g}(u)$  表示母线方向,  $I, R$  为实区间.

在直纹面上每点处的法向为:

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}_1(u) + v\mathbf{n}_2(u); \quad \mathbf{n}_1(u) = \mathbf{a}'(u) \times \mathbf{g}(u), \mathbf{n}_2(u) = \mathbf{g}'(u) \times \mathbf{g}(u). \quad (16.9.2)$$

当  $\mathbf{n}_1(u)$  和  $\mathbf{n}_2(u)$  为线性相关时, 直纹面  $\mathbf{r}(u, v)$  必为可展曲面. 如果记向量  $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{n}(u, v) / \|\mathbf{n}(u, v)\|$  为曲面的单位法向量, 则直纹面  $\mathbf{r}(u, v)$  的距离为  $d$  的等距面可写为

$$\mathbf{r}_d(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d \cdot \mathbf{N}(u, v). \quad (16.9.3)$$

通常  $\mathbf{N}(u, v)$  不是  $u, v$  的有理函数, 从而  $\mathbf{r}_d(u, v)$  也不是. 但正如 §16.3 中讨论的曲线情形一样, 在某些条件下, 等距面  $\mathbf{r}_d(u, v)$  可表示成两个新的参数(如  $s$  和  $t$ )的有理形式. 这一节就讨论这样的条件.

为了方便, 将参数  $v$  用齐次参数  $(\alpha, \beta)$  来表示, 它们的关系为  $v = \alpha/\beta$ . 这样,  $I \otimes R$  推广到  $I \otimes P$ , 其中  $P$  为对应于实仿射直线  $R$  的射影直线. 由此,  $\mathbf{N}(u, v)$  可改写成

$$\mathbf{N}(u; \alpha, \beta) = (\beta \mathbf{n}_1(u) + \alpha \mathbf{n}_2(u)) / \|\beta \mathbf{n}_1(u) + \alpha \mathbf{n}_2(u)\|. \quad (16.9.4)$$

**引理 16.9.1** 单位法向量  $\mathbf{N}(u; \alpha, \beta)$  可有理参数化的充要条件是存在一条有理曲线

$$\Gamma: (u, \alpha, \beta) = (\bar{u}(t), \bar{\alpha}(t), \bar{\beta}(t)), \quad t \in \bar{I} \quad (16.9.5)$$

满足:

- (a)  $\mathbf{N}(\bar{u}(t); \bar{\alpha}(t), \bar{\beta}(t))$  关于  $t$  为一个分段有理向量函数;
- (b)  $\Gamma$  在  $\mathbf{r}(u, v)$  上的像与直纹面  $\mathbf{r}(u, v)$  的所有母线都相交.

证 必要性显然. 现证充分性. 由条件(a)可知存在一个有理函数  $\bar{w}(t)$ , 使得

$$a(\bar{u}(t))\bar{\alpha}^2(t) + 2b(\bar{u}(t))\bar{\alpha}(t)\bar{\beta}(t) + c(\bar{u}(t))\bar{\beta}^2(t) = \bar{w}^2(t). \quad (16.9.6)$$

其中  $a(u) = \mathbf{n}_2(u) \cdot \mathbf{n}_2(u)$ ,  $b(u) = \mathbf{n}_1(u) \cdot \mathbf{n}_2(u)$ ,  $c(u) = \mathbf{n}_1(u) \cdot \mathbf{n}_1(u)$ . 由(16.9.4)可以看出, 如果能够找到定义在  $I \otimes P \otimes R$  上的关于  $u, \alpha, \beta, w$  的代数曲面

$$a(u)\alpha^2 + 2b(u)\alpha\beta + c(u)\beta^2 = w^2 \quad (16.9.7)$$

的一个有理参数化, 则充分性得证.

为此, 当  $\bar{\beta}(t) \neq 0$  时, 令  $u(s, t) = \bar{u}(t)$ , 并让(16.9.7)除以  $\beta^2$  减去(16.9.6)除以  $\bar{\beta}^2$ , 得到

$$\left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right) \left[ a \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right) + 2b \right] = \left( \frac{w}{\beta} - \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}} \right) \left( \frac{w}{\beta} + \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}} \right).$$

令

$$\left( a \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right) + 2b \right) / \left( \frac{w}{\beta} + \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}} \right) = \left( \frac{w}{\beta} - \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}} \right) / \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right) = s, \quad (16.9.8)$$

可得

$$\begin{cases} u(s, t) = \bar{u}(t), \\ \alpha(s, t) = -\bar{\alpha}(t) \left( a(\bar{u}(t)) + s^2 \right) + 2\bar{w}(t)s - 2\bar{\beta}(t)b(\bar{u}(t)), \\ \beta(s, t) = \bar{\beta}(t) \left( a(\bar{u}(t)) - s^2 \right), \\ w(s, t) = \bar{w}(t) \left( a(\bar{u}(t)) - s^2 \right) + 2s \left( \bar{w}(t)s - \bar{\alpha}(t)a(\bar{u}(t)) - \bar{\beta}(t)b(\bar{u}(t)) \right). \end{cases} \quad (16.9.9)$$

当  $\bar{\beta}(t) \equiv 0$  时, 则  $a(\bar{u}(t)) = (\bar{w}(t)/\bar{\alpha}(t))^2$ . 取  $u(s, t) = \bar{u}(t)$ , 并令  $w = \alpha(\bar{w}/\bar{\alpha}) + \beta s$ , 代入(16.9.7), 可得如下参数表示:



$$\begin{cases} u(s,t) = \bar{u}(t), \\ \alpha(s,t) = \bar{\alpha}(t)(c(\bar{u}(t)) - s^2), \\ \beta(s,t) = 2(\bar{w}(t)s - b(\bar{u}(t))\bar{\alpha}(t)), \\ w(s,t) = \bar{w}(t)(c(\bar{u}(t)) - s^2) + 2s(\bar{w}(t)s - b(\bar{u}(t))\bar{\alpha}(t)). \end{cases} \quad (16.9.10)$$

因此单位法向量  $\mathbf{N}$  总可以表示成  $s$  和  $t$  的有理函数:

$$\mathbf{N}(s,t) = \mathbf{N}(u(s,t); \alpha(s,t), \beta(s,t)) = (\beta(s,t)\mathbf{n}_1(u(s,t)) + \alpha(s,t)\mathbf{n}_2(u(s,t))) / w(s,t). \quad (16.9.11)$$

另外, 这里所导出的参数表示包含满足(16.9.7)的所有点. 事实上, 条件(b)意味着, 对每一个  $u \in I$ , 至少有一个  $t \in \bar{I}$  使得  $u = \bar{u}(t)$ . 于是对于满足(16.9.7)的每一点  $(u, \alpha, \beta, w)$ , 必有  $(s, t)$  与之对应. 证毕.

由上面的分析可知, 为了讨论直纹面的等距曲面的参数化, 我们要去寻找满足引理 16.9.1 中条件的那种曲线  $\Gamma$ . 对于有理直纹面(16.9.1), 首先构造有理单位向量  $\mathbf{e}(u)$ , 使之与  $\mathbf{g}(u)$  正交. 对于有理曲线  $\mathbf{g}(u)$ , 单位向量  $\mathbf{e}(u)$  的存在性已由 §16.7 给予证明, 并且 §16.7 还提供了一个算法来构造  $\mathbf{e}(u)$ . 一旦求出  $\mathbf{e}(u)$ , 可构造有理曲线

$$\Gamma: (\alpha, \beta, u) = (-\mathbf{a}'(u) \cdot \mathbf{e}(u), \mathbf{g}'(u) \cdot \mathbf{e}(u), u). \quad (16.9.12)$$

显然  $\|\beta\mathbf{n}_1(u) + \alpha\mathbf{n}_2(u)\| = \|[(\mathbf{g}'(u) \times \mathbf{a}'(u)) \cdot \mathbf{g}(u)] \cdot \mathbf{e}(u)\| = \|(\mathbf{g}'(u) \times \mathbf{a}'(u)) \cdot \mathbf{g}(u)\|$  为一个分段有理函数. 于是当  $\mathbf{n}_1(u)$  和  $\mathbf{n}_2(u)$  线性无关时, 除有限个  $u$  值外,  $\beta\mathbf{n}_1(u) + \alpha\mathbf{n}_2(u)$  在  $\Gamma$  上均非零, 从而由(16.9.12)定义的曲线  $\Gamma$  满足引理 16.9.1 的要求, 相应的直纹面的等距面可有理参数化. 因此我们得到

**定理 16.9.1** 不可展有理直纹面的等距曲面为有理曲面.

## 16.10 基于球面三角网格逼近的等距曲面逼近算法

鉴于参数曲面的等距曲面一般不能精确表示为有理参数曲面, 必须借助于逼近法, 本节把 §16.6 的方法推广到曲面, 用细分三角网格逼近基球面, 再用前者的扫掠边界代替后者的扫掠边界. 逼近算法具有与曲线情况类似的优点. 不同于平面上圆的内接正  $n$  边形, 在空间中, 由于欧拉公式的限制, 正多面体只有正四面体, 正方体, 正八面体, 正十二面体和正二十面体这五种. 为此我们采用球面的内接三角网格来逼近球面. 文献[56]给出了这种逼近的多种方法及度量条件: 棱长和最小, 表面积最大, 体积最大. 我们采用第三种.

基球面的三角细分网格按中心沿曲面扫掠而成的空间区域边界由三角网格边界的轨迹构成. 三角网格的边界包括顶点、直线棱和三角面. 由于假定在沿曲面运动过程中三角网格的各面方向保持不变, 所以其每个顶点的轨迹都是一张与原曲面同形状的 NURBS 曲面, 每条棱的轨迹都是一张以此棱为母线的柱面, 它们两两相交, 互相裁剪成为分片裁剪(Trimmed) NURBS 曲面片和柱面片, 又因它的面为三角形, 于是我们有:

**定理 16.10.1** 三角网格按中心沿 NURBS 曲面刚体运动扫掠而成空间区域的边界由同次分片裁剪 NURBS 曲面片、柱面片和三角片组成.

通过引入曲面的法矢映射、法矢映象、三角网格的对偶球面网格等概念, 我们可以发现, 等距逼近曲面的分片可以由原曲面的法矢映像集和三角网格的对偶球面网格决定.

由于三角网格对球面的逼近误差为  $\varepsilon_T = \max_{i=0,1,\dots,m} |d - \text{dist}(\mathbf{O}, \mathbf{F}_i)|$ , 其中  $\text{dist}(\mathbf{O}, \mathbf{F}_i)$  为球心  $\mathbf{O}$  到三角片  $\mathbf{F}_i$  的距离, 所以此三角网格位于半径为  $d$  和半径为  $d - \varepsilon_T$  的两球面之间, 由此可知我们的逼近曲面位于这两个球面扫掠区域的边界之间, 换言之, 等距逼近曲面的误差不超过  $\varepsilon_T$ .

### 主要文献

- [FRT, NCA, 90] Farouki, R.T., Neff, C.A., Algebraic properties of plane offset curves, Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4): 101-127  
[FRT, ST, 90] Farouki, R.T., Sakkalis, T. Pythagorean hodographs, IBM Journal of Research and Development, 1990, 34(5): 736-752

- [LW, 93] 吕伟, 有理等距参数曲线及其应用, 浙江大学学报(自然科学版), 1993 年 12 月增刊, 29-37
- [LW, 95] Lü Wei, Offset-rational parametric plane curves, Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(6): 601-616
- [ZJM, 95] Zheng Jianmin, On rational representation of offset curves, Chinese Science Bulletin, 1995, 40(1): 9-10
- [CGD, WGJ, 2000a] 陈国栋, 王国瑾, 五次 PH 曲线的  $GC^2$  Hermite 插值, 软件学报, 即将发表
- [CGD, WGJ, 2000b] 陈国栋, 王国瑾, 双三次 PH 曲线的  $C^1$  Hermite 插值, Submitted
- [CGD, WGJ, 2000c] 陈国栋, 王国瑾, 有理等距曲线的  $C^2$  Hermite 插值, 工程图学学报, 2000, 21(3): 64-69
- [LLG, WGJ, 2000a] 刘利刚, 王国瑾, 基于控制顶点偏移的等距曲线最优逼近, 软件学报, 即将发表
- [SHH, LLG, WGJ, 2000] 寿华好, 刘利刚, 王国瑾, 基于刘徽割圆术的等距曲线逼近算法, 高校应用数学学报, 即将发表
- [LW, PH, 96] Lü Wei, Pottmann, H., Pipe surfaces with rational spine curve are rational, Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(7): 621-628
- [LW, 94] Lü Wei, Rationality of the offsets to algebraic curves and surfaces, Applied Mathematics, Journal of Chinese Universities, 1994, 9B(3): 265-278
- [LW, 96] Lü Wei, Rational parameterization of quadrics and their offsets, Computing, 1996, 57(2): 135-147
- [PH, LW, RB, 96] Pottmann, H., Lü Wei, Ravani, B., Rational ruled surfaces and their offsets, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1996, 58(6): 544-552
- [LLG, WGJ, 2000b] 刘利刚, 王国瑾, 基于球面三角网格逼近的等距曲线逼近算法, 工程图学学报, 2000, 21(3): 70-75

## 参考文献

- 1 Farouki, R.T., Neff, C.A., Analytic properties of plane offset curves, Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4): 83-99
- 2 Pham, B., Offset curves and surfaces: a brief survey, Computer Aided Design, 1992, 24(4): 223-229
- 3 Maekawa, T., An overview of offset curves and surfaces, Computer Aided Design, 1999, 31(3): 165-173
- 4 Farouki, R.T., Sakkalis, T., Pythagorean hodographs spaces curves, Advances in Computational Mathematics, 1994, 2: 41-46
- 5 Farouki, R.T., The conformal map  $z \mapsto z^2$  of the hodograph plane, Computer Aided Geometric Design, 1994, 11(4): 363-390
- 6 Farouki, R.T., Pythagorean-hodograph curves in practical use, in: Barnhill, R.E. ed., *Geometry Processing For Design and Manufacturing*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992, 3-33
- 7 Farouki, R.T., Shah, S., Real-time CNC interpolators for Pythagorean hodograph curves, Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(7): 583-600
- 8 Pottmann, H., Rational curves and surfaces with rational offsets, Computer Aided Geometric design, 1995, 12(2): 175-192
- 9 Martin, R.R., Stephenson, P.C., Sweeping of three-dimensional objects, Computer Aided Design, 1990, 22(4): 223-234
- 10 Farouki, R.T., Exact offset procedures for simple solids, Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(4): 257-279
- 11 Martin, R.R., Principal patches-a new class of surface patch based on differential geometry. in: Hagen P.J., ed., *Proceeding of Eurographics'83*, North-Holland, Amsterdam
- 12 Peternell, M., Pottmann, H., A Laguerre geometric approach to rational offsets, Computer Aided Geometric design, 1998, 15(3): 223-249
- 13 deBoor, C., Hollig, K., Sabin, M., High accuracy geometric Hermite interpolation, Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 269-278
- 14 Farouki, R.T., Neff, C.A., Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics, Mathematics of Computation, 1995, 64(212): 1589-1609
- 15 Meek, D.S., Walton, D.J., Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics, Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 81(2): 299-309
- 16 Cobb, E.S., Design of sculptured surfaces using the B-spline representation, Ph.D. Dissertation, University of Utah, USA, Jun, 1984
- 17 Coquillart, S., Computing offsets of B-spline curves, Computer Aided design, 1987, 19(6): 305-309

- 18 Tiller, W., Hanson, E.G., Offsets of two-dimensional profiles, *IEEE Computer Graphics and Application*, 1984, 4(9): 36-46
- 19 Elber, G., Cohen, E., Offset approximation improvement by control points perturbation, in: Lyche T., Schumaker L.L., eds., *Mathematical methods in computer aided geometric design II*, 1992, 229-237, New York
- 20 Elber, G., Cohen, E., Error bounded variable distance offset operator for free form curves and surfaces, *International Journal of Computational Geometry and Application*, 1991, 1(1): 67-78
- 21 Lee, I.K., Kim, M.S., Elber, G., Planar curve offset based on circle approximation, *Computer Aided Design*, 1996, 28(8): 617-630
- 22 Klass, R., An offset spline approximation for plane cubic splines, *Computer Aided design*, 1983, 15(4): 297-299
- 23 Pham, B., Offset approximation of uniform B-splines, *Computer Aided design*, 1988, 20(8): 471-474
- 24 Hoscheck, J., Spline approximation of offset curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1988, 20(1): 33-40
- 25 Hoscheck, J., Wissel, N., Optimal approximate conversion of spline curves and spline approximation of offset curves, *Computer Aided Design*, 1988, 20(8): 475-483
- 26 Sederberg, T.W., Buehler, D.B., Offsets of polynomial Bézier curves: Hermite approximation with error bounds, in: Lyche, T., Schumaker, L.L., eds., *Mathematical methods in computer aided geometric design II*, 1992, 549-558
- 27 Piegl, L.A., Tiller, W., Computing offsets of NURBS curves and surfaces, *Computer Aided Design*, 1999, 31(2):147-156
- 28 Li, Y.M., Hsu, V.Y., Curve offsetting based on Legendre series, *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15(7): 711-720
- 29 Farouki, R.T., The approximation of non-degenerate offset surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1986, 3(1): 15-43
- 30 Chiang, C.S., Hoffmann, C.M., Lynch, R.E., How to compute offsets without self-intersection, in: Silberman, M.J., Tagare, D., eds., *Proceedings of SPIE conference on curves and surfaces in computer vision and graphics II*, Boston, Massachusetts, 1991, 76-87
- 31 Kimmel, R., Bruckstein, A.M., Shape offsets via level sets, *Computer Aided Design*, 1993, 25(3): 154-162
- 32 Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Computation of singularities and intersections of offsets of planar curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1993, 10(5): 407-429
- 33 Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Sakalis, T., Yu, G., Analysis and applications of pipe surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15(5): 437-458
- 34 Maekawa, T., Self-intersections of offsets of quadratic surfaces: Part I, explicit surfaces, *Engineering with Computers*, 1998, 14: 1-13
- 35 Maekawa, T., Self-intersections of offsets of quadratic surfaces: Part II, implicit surfaces, *Engineering with Computers*, 1998, 14: 14-22
- 36 Chen, Y.I., Ravani, B., Offset surface generation and contouring in computer aided design, *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design: ASME Transactions*, 1987, 109(3): 133-142
- 37 Aomura, S., Uehara, T., Self-intersection of an offset surface, *Computer Aided Design*, 1990, 22(7): 417-422
- 38 Vafiadou, M.E., Patrikalakis, N.M., Interrogation of offsets of polynomial surface patches, in: Post, F.H., Barth, W., eds., *Eurographics'91, Proceedings of the 12<sup>th</sup> Annual European Association for Computer Graphics Conference and Exhibition*, (Vienna, Austria), North Holland, Amsterdam, 1991, 247-259 and 538
- 39 Maekawa, T., Cho, W., Patrikalakis, N.M., Computation of self-intersections of offsets of Bézier surface patches, *Journal of Mechanical Design: ASME Transactions*, 1997, 119(2): 275-283
- 40 Pottmann, H., General offset surfaces, *Neural Parallel and scientific Computations*, 1997, 5: 55-80
- 41 Patrikalakis, N.M., Bardis, L., Offsets of curves on rational B-spline surfaces, *Engineering with Computers*, 1989, 5: 39-46
- 42 Rausch, T., Wolter, F.E., Sniehotta, O., Computation of medial curves on surfaces, in: Goodman, T., Martin, R., eds., *The Mathematics of Surfaces VII*, Information Geometers, 1997, 43-68
- 43 Kunze, R., Wolter, F.E., Rausch, T., Geodesic Voronoi diagrams on parametric surfaces, in: *Proceedings of Computer Graphics International, CGI'97, June 1997*, IEEE Computer Society Press, 1997, 230-237
- 44 Brechner, E.L., General tool offset curves and surfaces, in: Barnhill, R.E., ed., *Geometry processing for design and manufacturing*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992, 101-121
- 45 Pottmann, H., Wallner, J., Glaeser, G., Ravani, B., Geometric criteria for gouge free three axis milling of sculptured surfaces, in: *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia., September, 1998, 13-16
- 46 Alhanaty, M., Bercovier, M., Shapes with offsets of nearly constant surface area, *Computer Aided Design* 1999, 31(4): 287-296
- 47 Elber, G., Lee, I.K., Kim, M.S., Comparing offset curve approximation methods, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1997, 17(3): 62-71
- 48 Farouki, R.T., Sederberg, T.W., Analysis of the offset to a parabola, *Computer Aided Geometric Design*, 1995, 12(6): 639-645
- 49 Van, Der., Waerden B., *Modern Algebraic*, 2<sup>nd</sup> Edition, Frederick Ungar, New York, 1950
- 50 Walker, R.J., *Algebraic Curves*, Dover, New York, 1962
- 51 do Carmo, M.P., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, W.J., 1976
- 52 Davis, P.J., *Interpolation and Approximation*, Dover Pub., New York, 1975
- 53 Watson, G.A., *Approximation Theory and Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1980

- 54 徐利治, 王仁宏, 周蕴时, 函数逼近的理论与方法, 上海科学技术出版社, 上海, 1983
- 55 Borwein, P., Erdelyi, T., *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1995
- 56 Akkiraju, N., Approximating sphere and sphere patches, *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15(7): 739-756