

第十章 曲线曲面的几何连续性

复杂曲面造型的一个典型方法是逐片构造法,即整张曲面由一系列子曲面拼合而成.为了使最后产生的曲面具有光滑性,各曲面之间必须保持光滑拼接.这种光滑通常由某种连续性来描述和衡量.因此 CAGD 的一个研究课题就是讨论曲线或曲面间连续光滑的数学描述和度量方法.本章介绍的几何连续性,是其中最一般性的,并具有广泛的应用价值.

几何连续性 (Geometric Continuity) 是 CAGD 中的概念^[1],自八十年代以来得到了深入的研究.它的研究内容包括三个方面:一是研究几何连续性概念的分类、本质特征等理论性问题^[2-8];二是研究几何连续性的条件及其求解^[9-20];三是研究如何将几何连续性理论应用到几何造型中去,为造型系统提供灵活易用的造型工具^[21-25].

CAGD 中最典型的一类曲线曲面是多项式或有理多项式参数曲线曲面,它们通常表示成有理 B 样条或有理 Bézier 形式.考虑到 NURBS 的重要地位,研究有理曲线曲面的几何连续性大有必要^[16,18,20].但一张(条)有理 B 样条曲面(曲线)中,各片(段)曲面(曲线)间的连续性已由 B 样条基函数的连续性所保证,所以,我们主要研究有理 Bézier 曲线曲面的几何连续性,其中曲线曲面由控制顶点和权因子完全决定.控制顶点和权因子具有明显的几何意义,它们对于研究曲线曲面的造型、运算和其它操作具有直观的指导作用.因此将几何连续性条件表示成控制顶点和权因子之间的关系^[15-17],对于连续阶的判断、光滑拼接的曲线曲面的构造,以及它们在计算机上的实现,都将带来很大的方便.这是几何连续性研究的一项重要内容.

由于多项式是有理函数的一种特殊形式,因此本章着重介绍有理曲线曲面的几何连续性,其结果和方法均包含多项式曲线曲面(如 Bézier 形式)作为其特例.几何连续性条件涉及到导数的计算,而有理函数的求导计算比较复杂,导函数的表示也远远复杂于原有理函数,因此直接通过计算有理函数的(高阶)导数来研究几何连续条件是不太可行的.我们采用有理曲线曲面的齐次形式来研究其几何连续性,系统地推导出几何连续条件的各种具体形式以及它们的求解方法,其中有理曲面的二阶和 n 阶几何连续条件是在国际上首次给出的.由于齐次形式避免了分式表示,有理 Bézier 曲线曲面的几何连续条件可被简单地转化为控制顶点和权因子之间的关系.在这个基础上,我们提出了满足几何连续要求的光滑曲线曲面的拼接构造方法.

本章第 1, 2, 3 节内容取材于[LYD, 90], [LYD, YXZ, 89]; 第 4 节内容取材于[ZJM, 92], [ZJM, WGZ, LYD, 92]; 第 5,6 节内容取材于[ZJM, 92], [ZJM, WGZ, LYD, 95]; 第 7 节内容取材于[ZJM, 92], [ZJM, 93], [ZJM, WGZ, JTG, 94].

10.1 几何连续性概念的提出

当所需描述的几何形状比较复杂时,通常将其分为几个部分,再用数学方法描述每个部分,然后将它们“装配”起来,形成“光滑”形状.这就要求在装配时,拼接处必须满足一定的光滑性条件.那么,如何来衡量“光滑性”呢?

从 CAGD 的历史发展来看,对这一问题的理解和处理大体上分为两个阶段.第一阶段是直接函数的连续性概念应用到参数曲线曲面,用关于参数的连续性来度量光滑性.这是由于样条函数的理论和方法对 CAGD 的发展有着重要的影响,以至于多年来人们几乎总认为参数连续性和形状光滑性是一回事.曲线的参数连续性可归纳为

定义 10.1.1 设曲线 $\mathbf{r}_1(t)$, $t \in [a, c]$ 和 $\mathbf{r}_2(t)$, $t \in [c, b]$ 满足

$$\mathbf{r}_1^{(i)}(c-) = \mathbf{r}_2^{(i)}(c+), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (10.1.1)$$

其中 $\mathbf{r}^{(i)} = d^i \mathbf{r} / dt^i$, 则称 $\mathbf{r}_1(t)$ 和 $\mathbf{r}_2(t)$ 在对应于 $t = c$ 的公共点处为 n 阶参数连续,记为 C^n .

此定义初看一下似乎很自然,实际却不然.例如对于一条直线,按定义 10.1.1 就可能不是 C^1 连续.考虑由如下分段表示的连接 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{P}_1 的直线段 $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4, & 0 \leq t \leq 1, \\ \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4 + 3(t-1)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases} \quad (10.1.2)$$

因为 $\mathbf{r}'(1-) = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4 \neq 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4 = \mathbf{r}'(1+)$, 所以 $\mathbf{r}(t)$ 在 $\mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4$ 处不是 C^1 连

续. 连接两点的直线段竟然不是一阶光滑似乎难以理解. 究其原因, 是在定义 10.1.1 中 $\mathbf{r}(t)$ 的连续阶依赖于参数 t 的选取. 曲线的参数可以有无穷多种选取方法. 对同一条曲线, 参数取法不同, 连续阶可以不一样. 如果将 (10.1.2) 中的 $\mathbf{r}(t)$ 改为:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/2, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4 + (t - 1/2)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/2, & 1/2 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (10.1.3)$$

则 $\mathbf{r}(t)$ 由与上同样的两条线段组成, 但在公共点 $\mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/4$ 处却是 C^∞ 连续.

曲面的参数连续一直以来也是建立在关于参数的导矢相等上:

定义 10.1.2 若两参数曲面 $\mathbf{r}_1(u, v)$ 和 $\mathbf{r}_2(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 处满足:

$$\partial^{i+j} \mathbf{r}_1 / (\partial u^i \partial v^j) \Big|_{(u_0, v_0)} = \partial^{i+j} \mathbf{r}_2 / (\partial u^i \partial v^j) \Big|_{(u_0, v_0)}, \quad i + j = 0, 1, \dots, n \quad (10.1.4)$$

则称 $\mathbf{r}_1(u, v)$ 和 $\mathbf{r}_2(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 处为 n 阶参数连续, 记为 C^n .

同样, 如果将参数连续作为光滑性度量用于曲面造型, 也会产生一些严重问题. 例如, 图 10.1.1 给出一个由四张三角片拼接而成的光滑封闭曲面 \mathbf{r} , 其中左图所示的三角片的参数域中点 D_1 , D_2 和 D_3 均映射到空间一点 D . 现考虑曲面 \mathbf{r} 在参数域中 A 点处沿 $\ell = D_2 - A$ 和 $-\ell$ 方向的方向导数. 若它们都存在, 则有 $\partial \mathbf{r} / \partial \ell \Big|_A = -\partial \mathbf{r} / \partial (-\ell) \Big|_A$. 另一方面, 可再由封闭曲

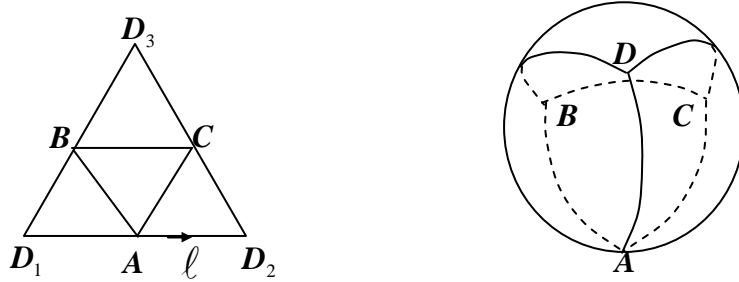


图 10.1.1 在三角参数域 (左图) 上定义的四张三角片组成光滑闭曲面 (右图)

面在 A 点的连续性推出 $\partial \mathbf{r} / \partial \ell \Big|_A = \partial \mathbf{r} / \partial (-\ell) \Big|_A$. 这意味着曲面在 A 点的导矢必须为零向量, 即 A 为奇异点. 然而在许多实际应用中, 经常要求曲面的导矢非零. 由此可以看出, 这种来源于函数连续的参数连续性并不能很好地解决曲线曲面的光滑拼接问题.

于是人们开始注意到参数连续与光滑性的差别^[26]. 例如在公共点处有相同单位切矢的两段曲线, 它们关于参数的导矢可以不相等; 有相同切平面的两曲面可以有不一致的偏导矢. 因此对于设计人员来说, 参数连续并无多大实用价值, “视觉”或“几何”上的光滑性才更为重要和实用. 八十年代以来, 有关曲线曲面连续性的研究进入了第二阶段, 人们发现几何理论具有很大的潜力. 他们借助微分几何的理论^[27], 对曲面造型中的“光滑”概念进行了广泛深入的理论研究和实践验证. 几何连续性的概念被正式提了出来, 它是切向量 (平面) 连续、曲率连续等几何概念的一般化. 1984 年, 在德国 Oberwolfach 召开的 “CAGD 中的曲面” 这一国际会议上, 几何设计专家 Barnhill 提出了八个有关曲面研究的热点问题^[28], 其中后三个为: 几何连续性, 闭曲面造型, 矩形面片和三角面片的混合使用. 这三个问题的核心是几何连续性, 后两个问题可借助于几何连续性予以解决. 从此, 有关几何连续性的研究掀起了一个高潮^[29-32]. 在几何造型的要求中, 参数连续性逐渐被几何连续性所取代.

对于参数曲线, 如果它的单位切向量连续变化, 则称其为一阶几何连续, 记为 G^1 ; 若进一步曲率也连续变化, 则称其为二阶几何连续, 记为 G^2 . 例如 Barsky 利用二阶几何连续性条件导出 β -样条作为 B 样条的推广并得到了成功的应用^[7]. 将几何连续性推广到高阶情形的典型方法有两种^[2,3,4,8]: 一种是选取只依赖于曲线本身的几何不变量——弧长作为参数, 定义 n 阶几何连续为关于弧长参数的 n 阶连续, 这本质上是基于重新参数化 (Reparameterization) 的思想; 另一种是建立在高维空间中的广义曲率概念之上, 称为 Frenet 标架连续, 它要求在连接点处的曲线的几何不变量 (即 Frenet 标架和曲率因子) 均相等. 一般, Frenet 标架连续比几何连续

条件要弱.

对于参数曲面, 如果切平面连续变化, 则称其为 G^1 ; G^2 连续则进一步要求其 Dupin 标形也连续变化. 如 Farin^[11] 和 Kahmann^[12] 分别给出了 Bézier 曲面片的切平面连续和曲率连续条件及求解方法. 至于一般 n 阶几何连续, 它是指存在一个 (局部) 参数变换使得重新参数化后的曲面为 C^n 连续. 曲面没有高阶 Frenet 标架连续的概念. 本章主要介绍有广泛应用意义的基于重新参数化的几何连续性.

由上面的讨论可看出, 曲线或曲面如果是 C^n 连续, 则亦是 G^n 连续; 反之则不然. 从表面上看, 似乎 G^n 连续的曲线或曲面没有 C^n 连续的光滑. 但实际上几何连续只是参数连续的松弛形式, 而不是“光滑性”的减弱, 且这种松弛在不损失连续性的前提下, 提供了更多的自由度或几何参数, 使设计人员能更自由地修改和控制设计对象的几何形状. 因此几何连续性刻划了曲线曲面的几何特性和本质特征, 这说明人们对参数曲线曲面的认识产生了飞跃.

10.2 曲线的几何连续性

10.2.1 曲线几何连续性的定义

为研究两条曲线间的几何拼接, 本节均假设所给曲线在拼接点附近为解析且正则, 即 $\mathbf{r}(t) \in C^\infty$, $\mathbf{r}'(t) \neq 0$; 并假设曲线的参数变换是解析和一一的. 在曲线的众多参数中, 弧长是一种特殊的参数, 它是曲线的内在不变量, 除了起点和取向外唯一确定. 因此对曲线的几何连续性有

定义 10.2.1 如果在适当的弧长方向选取下, 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 满足

$$\left(\frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} \right)_P = \left(\frac{d^i \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{s}^i} \right)_P, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (10.2.1)$$

其中 s 和 \bar{s} 分别为 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的弧长参数, 则称此两条曲线在公共点 P 处为 n 阶几何连续, 记为 G^n .

由上面的定义可知, n 阶几何连续实质上表示曲线关于弧长参数的 C^n 连续, 具有内在意义. 显然, $n = 0$ 表示曲线 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 在公共点 P 处位置连续; $n = 1$ 相当于曲线在点 P 处有相同的单位切向量; 而 $n = 2$ 则进一步意味着曲率向量也相等.

为了导出曲线几何连续性的等价特征, 首先给出高阶导数在变量变换下的相互关系:

引理 10.2.1 对于参数变换 $t = t(\bar{t})$, $t'(\bar{t}) \neq 0$, 函数 f 关于 t 和 \bar{t} 的高阶导数满足:

$$\frac{d^n f}{d\bar{t}^n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^k f}{dt^k} \cdot \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{d^{r_1} t}{d\bar{t}^{r_1}} \dots \frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} A_{r_1 \dots r_k}^{nk} \right), \quad (10.2.2)$$

其中 $A_{r_1 \dots r_k}^{nk} = n! / (k! r_1! \dots r_k!)$; n , k 和 r_i 都是正整数.

证 (10.2.2) 对 $n = 1$ 显然成立. 假设其对 n 成立, 于是对 (10.2.2) 两边关于 \bar{t} 求导数得到

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} f}{d\bar{t}^{n+1}} = & \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d^{k+1} f}{dt^{k+1}} \cdot \frac{dt}{d\bar{t}} \cdot \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{d^{r_1} t}{d\bar{t}^{r_1}} \dots \frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} A_{r_1 \dots r_k}^{nk} + \frac{d^k f}{dt^k} \times \right. \\ & \left. \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \left[(r_1 + 1) \frac{d^{r_1+1} t}{d\bar{t}^{r_1+1}} \cdot \frac{d^{r_2} t}{d\bar{t}^{r_2}} \dots \frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} A_{(r_1+1)r_2 \dots r_k}^{nk} + \dots + (r_k + 1) \frac{d^{r_1} t}{d\bar{t}^{r_1}} \dots \frac{d^{r_{k-1}+1} t}{d\bar{t}^{r_{k-1}+1}} \cdot \frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} A_{r_1 r_2 \dots (r_k+1)}^{nk} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{引入记号} \quad A_k = & \begin{cases} 0, & k = 1, \\ k \left(\frac{d^k f}{dt^k} \right) \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_k = n+1 \\ r_k = 1}} \left(\frac{d^{r_1} t}{d\bar{t}^{r_1}} \right) \dots \left(\frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} \right) A_{r_1 \dots r_k}^{nk}, & k > 1, \end{cases} \\ B_{kl} = & \begin{cases} \left(\frac{d^k f}{dt^k} \right) \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_k = n+1 \\ r_l > 1}} r_l \left(\frac{d^{r_1} t}{d\bar{t}^{r_1}} \right) \dots \left(\frac{d^{r_k} t}{d\bar{t}^{r_k}} \right) A_{r_1 \dots r_k}^{nk}, & 1 \leq l \leq k \leq n, \\ 0, & 1 \leq l \leq k = n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

于是 $d^{n+1}f/d\bar{t}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (A_k + B_{k1} + \cdots + B_{kk})$. 若又记 $A_{11} = 0$; 且当 $k > 1, 1 \leq l \leq k$ 时,

记 $A_{kl} = (d^k f/dt^k) \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_k=n+1 \\ r_l=1}} (d^{r_1}t/d\bar{t}^{r_1}) \cdots (d^{r_k}t/d\bar{t}^{r_k}) A_{r_1 \cdots r_k}^{nk}$, 则 $A_k = \sum_{l=1}^k A_{kl}$, 且

$$\begin{aligned} d^{n+1}f/d\bar{t}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^k (A_{kl} + B_{kl}) = \sum_{k=1}^{n+1} (d^k f/dt^k) \cdot \sum_{l=1}^k \sum_{r_1+\cdots+r_k=n+1} r_l (d^{r_1}t/d\bar{t}^{r_1}) \cdots (d^{r_k}t/d\bar{t}^{r_k}) A_{r_1 \cdots r_k}^{nk} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (d^k f/dt^k) \cdot \sum_{r_1+\cdots+r_k=n+1} (d^{r_1}t/d\bar{t}^{r_1}) \cdots (d^{r_k}t/d\bar{t}^{r_k}) A_{r_1 \cdots r_k}^{(n+1)k}. \end{aligned}$$

可见 (10.2.2) 对于 $n+1$ 亦成立, 由归纳法知引理成立. 证毕.

由此可得曲线几何连续性的第一个等价定义:

定理 10.2.1 两条曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点 \mathbf{P} 处为 G^n 的充要条件是存在一个参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$, $\bar{t}'(t)|_{\mathbf{P}} \neq 0$, 使得

$$(d^i \mathbf{r}(t)/dt^i)|_{\mathbf{P}} = (d^i \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t))/d\bar{t}^i)|_{\mathbf{P}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (10.2.3)$$

证 充分性: 设 s 与 \bar{s} 分别为 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 的弧长参数, 则有 $ds/dt = \|\mathbf{dr}(t)/dt\|$ 以及 $d\bar{s}/d\bar{t} = \|\mathbf{d}\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})/d\bar{t}\|$. 于是

$$(ds/dt)^2 = (\mathbf{dr}/dt) \cdot (\mathbf{dr}/dt), \quad (10.2.4)$$

$$(d\bar{s}/d\bar{t})^2 = (d\bar{\mathbf{r}}/d\bar{t}) \cdot (d\bar{\mathbf{r}}/d\bar{t}) = (\mathbf{d}\bar{\mathbf{r}}/dt) \cdot (\mathbf{d}\bar{\mathbf{r}}/dt). \quad (10.2.5)$$

所以在公共点 \mathbf{P} 处成立着 $(ds/dt)^2 = (d\bar{s}/d\bar{t})^2$. 选取弧长方向使 s 和 \bar{s} 均为 t 的单调增加函数, 则

$$(ds/dt)|_{\mathbf{P}} = (d\bar{s}/d\bar{t})|_{\mathbf{P}} > 0. \quad (10.2.6)$$

进一步, 对 (10.2.4) 两边关于 t 求 $j-1$ 次导数, 并重新组合就有

$$\frac{d^j s}{dt^j} = - \left\{ \sum_{i=2}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \frac{d^i s}{dt^i} \frac{d^{j-i+1} s}{dt^{j-i+1}} - \sum_{i=1}^j \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \frac{d^i \mathbf{r}}{dt^i} \cdot \frac{d^{j-i+1} \mathbf{r}}{dt^{j-i+1}} \right\} / \left(2 \frac{ds}{dt} \right).$$

同理, 对 (10.2.5) 进行类似运算也得

$$\frac{d^j \bar{s}}{d\bar{t}^j} = - \left\{ \sum_{i=2}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \frac{d^i \bar{s}}{d\bar{t}^i} \frac{d^{j-i+1} \bar{s}}{d\bar{t}^{j-i+1}} - \sum_{i=1}^j \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \frac{d^i \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}^i} \cdot \frac{d^{j-i+1} \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}^{j-i+1}} \right\} / \left(2 \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} \right).$$

所以由 (10.2.3), (10.2.6), 并根据归纳法知在公共点 \mathbf{P} 处有

$$d^j s/dt^j = d^j \bar{s}/d\bar{t}^j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad (10.2.7)$$

现在对曲线 \mathbf{r} 应用引理 10.2.1, 我们有

$$\left. \frac{d^j \mathbf{r}}{dt^j} \right|_{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^j \left(\left. \frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} \right|_{\mathbf{P}} \cdot \sum_{k_1+\cdots+k_i=j} \left. \frac{d^{k_1} s}{dt^{k_1}} \right|_{\mathbf{P}} \cdots \left. \frac{d^{k_i} s}{dt^{k_i}} \right|_{\mathbf{P}} A_{k_1 \cdots k_i}^{ji} \right).$$

上式可改写为:

$$\left. \frac{d^j \mathbf{r}}{ds^j} \right|_{\mathbf{P}} = \left\{ \left. \frac{d^j \mathbf{r}}{dt^j} \right|_{\mathbf{P}} - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\left. \frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} \right|_{\mathbf{P}} \cdot \sum_{k_1+\cdots+k_i=j} \left. \frac{d^{k_1} s}{dt^{k_1}} \right|_{\mathbf{P}} \cdots \left. \frac{d^{k_i} s}{dt^{k_i}} \right|_{\mathbf{P}} A_{k_1 \cdots k_i}^{ji} \right) \right\} / \left(\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\mathbf{P}} \right)^j. \quad (10.2.8)$$

同样对于曲线 $\bar{\mathbf{r}}$ 有

$$\left. \frac{d^j \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{s}^j} \right|_{\mathbf{P}} = \left\{ \left. \frac{d^j \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}^j} \right|_{\mathbf{P}} - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\left. \frac{d^i \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{s}^i} \right|_{\mathbf{P}} \cdot \sum_{k_1+\cdots+k_i=j} \left. \frac{d^{k_1} \bar{s}}{d\bar{t}^{k_1}} \right|_{\mathbf{P}} \cdots \left. \frac{d^{k_i} \bar{s}}{d\bar{t}^{k_i}} \right|_{\mathbf{P}} A_{k_1 \cdots k_i}^{ji} \right) \right\} / \left(\left. \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} \right|_{\mathbf{P}} \right)^j. \quad (10.2.9)$$

当 $j=1$ 时, $(\mathbf{dr}/ds)|_{\mathbf{P}} = (\mathbf{dr}/dt)|_{\mathbf{P}} / (ds/dt)|_{\mathbf{P}} = (\mathbf{d}\bar{\mathbf{r}}/d\bar{t})|_{\mathbf{P}} / (d\bar{s}/d\bar{t})|_{\mathbf{P}} = (\mathbf{d}\bar{\mathbf{r}}/d\bar{s})|_{\mathbf{P}}$. 假设

当 $i \leq j$ 时成立着 $(d^i \mathbf{r}/ds^i)|_P = (d^i \bar{\mathbf{r}}/d\bar{s}^i)|_P$, 则由 (10.2.3), (10.2.7) – (10.2.9) 可以推得 $(d^{j+1} \mathbf{r}/ds^{j+1})|_P = (d^{j+1} \bar{\mathbf{r}}/d\bar{s}^{j+1})|_P$. 所以由归纳法知对 $i=1,2,\dots,n$ 有 $(d^i \mathbf{r}/ds^i)|_P = (d^i \bar{\mathbf{r}}/d\bar{s}^i)|_P$, 即 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点 P 处为 G^n 连续.

必要性: 设 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点 P 处为 G^n 连续, 并设对应于点 P 的参数分别为 t_0 和 \bar{t}_0 , 则在适当的弧长方向选定后, 有 $(d^i \mathbf{r}/ds^i)|_P = (d^i \bar{\mathbf{r}}/d\bar{s}^i)|_P$, $i=1,2,\dots,n$. 令

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{ds}{dt}\bigg|_P / \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}}\bigg|_P \neq 0, \\ \beta_j = \left\{ \frac{d^j s}{dt^j}\bigg|_P - \sum_{k=2}^j \frac{d^k \bar{s}}{d\bar{t}^k}\bigg|_P \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=j} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} A_{r_1 \dots r_k}^{jk} \right\} / \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}}\bigg|_P, \quad j > 1. \end{cases} \quad (10.2.10)$$

构造参数变换

$$\bar{t} = \bar{t}(t) = \bar{t}_0 + \beta_1(t-t_0) + \beta_2(t-t_0)^2/2! + \cdots + \beta_n(t-t_0)^n/n!, \quad (10.2.11)$$

易知它是解析的, 且在 t_0 附近是一一对应. 又由引理 10.2.1 可得到

$$\begin{aligned} \frac{d^j \bar{s}}{d\bar{t}^j}\bigg|_P &= \sum_{k=1}^j \frac{d^k \bar{s}}{d\bar{t}^k}\bigg|_P \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=j} \frac{d^{r_1} \bar{t}}{d\bar{t}^{r_1}}\bigg|_P \cdots \frac{d^{r_k} \bar{t}}{d\bar{t}^{r_k}}\bigg|_P A_{r_1 \dots r_k}^{jk} \\ &= \frac{d\bar{s}}{d\bar{t}}\bigg|_P \cdot \beta_j + \sum_{k=2}^j \frac{d^k \bar{s}}{d\bar{t}^k}\bigg|_P \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=j} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} A_{r_1 \dots r_k}^{jk} = \frac{d^j s}{dt^j}\bigg|_P, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d^i \mathbf{r}}{dt^i}\bigg|_P &= \sum_{k=1}^i \frac{d^k \mathbf{r}}{ds^k}\bigg|_P \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=i} \frac{d^{r_1} s}{dt^{r_1}}\bigg|_P \cdots \frac{d^{r_k} s}{dt^{r_k}}\bigg|_P A_{r_1 \dots r_k}^{ik} \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{d^k \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{s}^k}\bigg|_P \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=i} \frac{d^{r_1} \bar{s}}{d\bar{t}^{r_1}}\bigg|_P \cdots \frac{d^{r_k} \bar{s}}{d\bar{t}^{r_k}}\bigg|_P A_{r_1 \dots r_k}^{ik} = \frac{d^i \bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}^i}\bigg|_P. \end{aligned}$$

本定理证毕.

上面说明几何连续的特征是重新参数化后可成为参数连续. 下面引入全微分的概念.

定义 10.2.2 $\mathbf{r}(t)$ 的一阶全微分为 $d\mathbf{r} = (d\mathbf{r}/dt) \cdot dt$; 第 i 阶全微分由递推方式给出:

$d^i \mathbf{r} = d(d^{i-1} \mathbf{r})$; 特别, 还规定 $d^0 \mathbf{r} = \mathbf{r}$.

当 t 为自变量时, $d^i \mathbf{r} = (d^i \mathbf{r}/dt^i) \cdot (dt)^i$; 当 t 为中间变量时, 仿引理 10.2.1 的证明可得

$$d^i \mathbf{r} = \sum_{k=1}^i (d^k \mathbf{r}/dt^k) \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=i} d^{r_1} t \cdots d^{r_k} t A_{r_1 \dots r_k}^{ik}. \quad (10.2.12)$$

由微分几何可知 $d^i \mathbf{r}$ 与参数变量的选取无关, 所以在微分几何里称 $d\mathbf{r}, d^2 \mathbf{r}, \dots, d^i \mathbf{r}$ 的全体为 i 阶接触不变量. 下面的定理给出用接触不变量表示曲线几何连续性的等价定义.

定理 10.2.2 两条曲线 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点 P 为 G^n 当且仅当存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$, $\bar{t}'(t)|_P \neq 0$, 使得下式为关于 dt 的恒等式.

$$d^i \mathbf{r}(t)|_P = d^i \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t))|_P, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.2.13)$$

证 由

$$\begin{aligned} d^i \mathbf{r}(t) &= \sum_{k=1}^i (d^k \mathbf{r}/dt^k) \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=i} d^{r_1} t \cdots d^{r_k} t A_{r_1 \dots r_k}^{ik}, \\ d^i \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t)) &= \sum_{k=1}^i (d^k \bar{\mathbf{r}}/d\bar{t}^k) \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=i} d^{r_1} \bar{t} \cdots d^{r_k} \bar{t} A_{r_1 \dots r_k}^{ik}, \end{aligned}$$

知 (10.2.13) 与 (10.2.3) 等价. 因此由定理 10.2.1 即得证本定理. 证毕.

由定理 10.2.2 可知 n 阶几何连续性可定义为两条曲线在公共点处有相同的 n 阶接触不变量, 连续阶等同于接触阶. 接触阶愈高, 其连续阶亦愈高; 反之亦然.

10.2.2 曲线的有理连续性

假设 \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间. \mathbb{R}^3 中的有理参数曲线 $\mathbf{r}(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是每个坐标分量均为有理函数的参数曲线: $\mathbf{r}(t) = \{X(t)/\omega(t), Y(t)/\omega(t), Z(t)/\omega(t)\}$, $0 \leq t \leq 1$. 它可视为 \mathbb{R}^4 中曲线 $\mathbf{Q}(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \omega(t))$ 在平面 $\omega = 1$ 上的投影. 曲线 $\mathbf{Q}(t)$ 称作 $\mathbf{r}(t)$ 的齐次形式, 有理曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的许多性质可通过研究其齐次形式 $\mathbf{Q}(t)$ 的性质而得到.

为考虑有理曲线的几何连续性, 一种直接方法是应用 § 10.2.1 中的定义和定理, 但这涉及到计算各个有理分量的导数, 十分复杂, 通常很难得到实用的几何连续条件. 另一种方法是将几何连续性要求作用到有理曲线的齐次形式, 即齐次形式满足几何连续拼接. 这是由于几何连续具有射影不变性质:

定理 10.2.3 设 $\mathbf{Q}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 分别为有理曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 的齐次形式. 若 $\mathbf{Q}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 在公共点 $\mathbf{Q}(t_0) = \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)$ 处为 G^n 连续, 则 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 处亦满足 G^n 连续.

证 由定理 10.2.1 知存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 使 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 经重新参数化后变为 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}(t))$, 它与 $\mathbf{Q}(t)$ 在 t_0 处为 C^n 连续. 根据导数的四则运算法则知 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t))$ 在 t_0 处也是 C^n 连续, 所以 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 为 G^n 连续. 证毕.

这样, 齐次形式曲线的几何连续性保证了投影曲线的几何连续性. 然而这仅仅是个充分条件, 并非必要. 下面的例子说明了这一点.

例 10.2.1 一个整圆 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ 由它的齐次形式 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3$ 投影到 $\omega = 1$ 平面上来得到, 其中 \mathbf{Q} 由四段有理二次 Bézier 曲线组成, 参见图 10.2.1. \mathbf{Q} 的其中两段表示如下:

$$\mathbf{Q}_1(t) = (1-t^2, 2t, 1+t^2), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad \mathbf{Q}_2(\bar{t}) = (-2\bar{t}, 1-\bar{t}^2, 1+\bar{t}^2), \quad 0 \leq \bar{t} \leq 1.$$

于是 $\mathbf{Q}_1(1) = (0, 2, 2)$, $\mathbf{Q}_1'(1) = (-2, 2, 2)$, 而 $\mathbf{Q}_2(0) = (0, 1, 1)$, $\mathbf{Q}_2'(0) = (-2, 0, 0)$. 所以 $\mathbf{Q}_1(t)$ 与 $\mathbf{Q}_2(\bar{t})$ 在 $t=1$ 与 $\bar{t}=0$ 处不是 G^0 拼接, 更谈不上 G^1 连续了. 但它们在 $\omega = 1$ 平面上的投影是整圆的相邻两段, 从而至少是 G^1 .

进一步, 我们反过来问: 能否在 \mathbb{R}^3 中找出一系列 G^1 拼接的二次曲线段, 使它们的拼接组合在 $\omega = 1$ 平面上的投影表示一个整圆?

首先, 假设 \mathbf{Q} 是单段二次曲线. 要使投影曲线 \mathbf{r} 成为一个整圆, \mathbf{Q} 必须位于某一个圆锥上, 记这个圆锥为 K . 由于 \mathbb{R}^3 中的任何二次曲线都是平面曲线, 所以 \mathbf{Q} 又位于某一平面 π 上, 即 \mathbf{Q} 为圆锥 K 与平面 π 的交线. 这种交线只能是椭圆, 抛物线或双曲线. 若 \mathbf{Q} 为多项式曲线, 则 \mathbf{Q} 必为抛物线. 因此为了使投影曲线 \mathbf{r} 成为封闭曲线, 曲线 \mathbf{Q} 的参数 t 必须趋向 $\pm\infty$, 此时 $\mathbf{Q}(t)$ 发散, 同时 $\mathbf{r}(t)$ 收敛到一点 A .

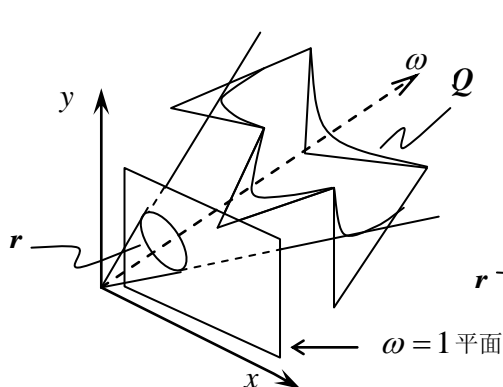


图 10.2.1 四段二次有理曲线表示整圆

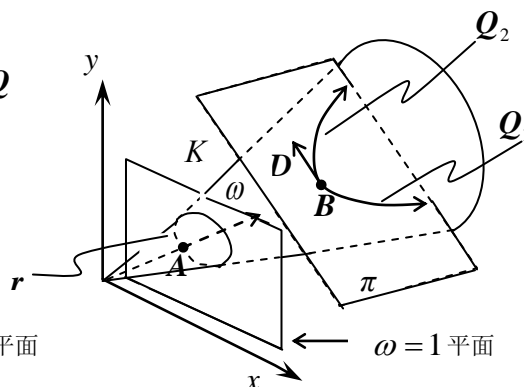


图 10.2.2 曲线 \mathbf{Q} 位于圆锥 K 与平面 π 上

其次, 如果 \mathbf{Q} 由两段二次曲线 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 组成, 且 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 在公共点 \mathbf{B} 处以 G^1 拼接, 见图 10.2.2. 设 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 在 \mathbf{B} 点的切向平行于向量 \mathbf{D} , 则 \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 分别位于过 \mathbf{B} 点与 \mathbf{D} 平行的平面族中的某两个. 由解析几何原理知这些平面中只有一个与圆锥相交成抛物线, 所以 \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 位于同一平面上, 从而属于同一条抛物线.

综上所述, 如果要求 \mathbf{Q} 为二次曲线且参数取值范围有限, 则其必由多段曲线 \mathbf{Q}_i 所组成, 而且此时 \mathbf{Q}_i 之间不可能达到 G^1 连续. 这个例子告诉我们, 将几何连续性条件作用到齐次形式来讨论有理曲线的连续性, 条件过于严格. 有时有理曲线之间的光滑拼接是不能由齐次形式之间的光滑拼接来解决的. 因此, 我们需要更一般的连续性条件——有理几何连续条件. 也就是说, 用有理曲线的齐次形式所满足的条件, 来保证有理曲线达到几何连续.

10.2.3 有理连续性条件

我们将用有理曲线的齐次形式代替原有理曲线形式, 来导出有理几何连续的约束条件.

定理 10.2.4 两条有理曲线 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}(t)/\omega(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}) = \bar{\mathbf{P}}(\bar{t})/\bar{\omega}(\bar{t})$ 在公共点 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 处为 G^n 的充要条件是存在满足 $\bar{t}_0 = \bar{t}(t_0)$, $\bar{t}'(t_0) \neq 0$ 的参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 和数量函数 $e(t)$, 使得

$$d^k \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}(t)) \Big|_{t_0} = d^k (e(t) \cdot \mathbf{Q}(t)) \Big|_{t_0}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (10.2.14)$$

对任意 dt 均成立, 其中 $\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{P}(t), \omega(t))$, $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}) = (\bar{\mathbf{P}}(\bar{t}), \bar{\omega}(\bar{t}))$ 分别为 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式. 证 必要性: 假设 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 为 G^n 连续, 则存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 满足 $\bar{t}'(t_0) \neq 0$, $\bar{t}_0 = \bar{t}(t_0)$ 和 $d^k \mathbf{r}(t) \Big|_{t_0} = d^k \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t)) \Big|_{t_0}$. 由于 $(\mathbf{r}(t), 1) = \mathbf{Q}(t)/\omega(t)$, $(\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}), 1) = \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})/\bar{\omega}(\bar{t})$, 省去参数 t (下同), 可写出

$$d^k (\mathbf{Q}/\omega) \Big|_{t_0} = d^k (\mathbf{r}(t), 1) \Big|_{t_0} = d^k (\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t)), 1) \Big|_{t_0} = d^k (\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}(t))/\bar{\omega}(\bar{t}(t))) \Big|_{t_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{根据函数乘积求导的 Leibniz 公式, 有 } d^k \bar{\mathbf{Q}} \Big|_{t_0} &= d^k \left(\bar{\omega} \cdot \frac{\bar{\mathbf{Q}}}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i \bar{\omega} \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{\bar{\mathbf{Q}}}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i \bar{\omega} \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{\bar{\mathbf{Q}}}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = d^k \left(\bar{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0}. \text{ 取 } e(t) = \frac{\bar{\omega}(\bar{t}(t))}{\omega(t)} \text{ 即证明了必要性.} \end{aligned}$$

充分性: 若存在参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 和函数 $e(t)$ 使 (10.2.14) 成立, 则下面两式成立:

$$d^k (\bar{\omega}(\bar{t}(t)) \cdot \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t))) \Big|_{t_0} = d^k (e(t) \cdot \omega(t) \cdot \mathbf{r}(t)) \Big|_{t_0}, \quad d^k \bar{\omega}(\bar{t}(t)) \Big|_{t_0} = d^k (e(t) \cdot \omega(t)) \Big|_{t_0}.$$

$$\text{于是 } d^k \left(e \cdot \frac{\omega}{\omega} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i (e \cdot \omega) \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{1}{\omega} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i \bar{\omega} \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = d^k 1,$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } d^k (\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}(t))) \Big|_{t_0} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i (\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\omega}) \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i (e \cdot \mathbf{r} \cdot \omega) \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} \\ &= d^k \left(\mathbf{r} \cdot e \cdot \frac{\omega}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i \mathbf{r} \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} \left(e \cdot \frac{\omega}{\bar{\omega}} \right) \Big|_{t_0} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} d^i \mathbf{r} \Big|_{t_0} \cdot d^{k-i} 1 = d^k \mathbf{r} \Big|_{t_0}. \end{aligned}$$

由定理 10.2.2 知 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在公共点 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 为 G^n 连续. 证毕.

交换 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的位置, 同理可得

定理 10.2.5 两条有理曲线 $\mathbf{r}(\bar{t}) = \mathbf{P}(\bar{t})/\omega(\bar{t})$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}) = \bar{\mathbf{P}}(\bar{t})/\bar{\omega}(\bar{t})$ 在公共点 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 处为 G^n 连续当且仅当存在满足 $\bar{t}'(t_0) \neq 0$, $\bar{t}_0 = \bar{t}(t_0)$ 的参数变换 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 和数量函数 $e(t)$, 使得

$$d^k \mathbf{Q}(t) \Big|_{t_0} = d^k (e(t) \cdot \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}(t))) \Big|_{t_0}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (10.2.15)$$

对任意 dt 均成立, 其中 $\mathbf{Q}(t)$, $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 分别为 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式.

通常, 定理 10.2.4 和定理 10.2.5 中的参数变换称为实现两曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点处为 G^n 的连续变换, 简称为 G^n 连续变换. 至此, 我们建立了有理曲线的几何连续性条件和其对应的齐次形式之间的联系, 把两条曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点处达到 G^n 连续的问题归结为是否存在一个 G^n 连续变换和一个数量函数 $e(t)$, 使得其对应的齐次形式满足 (10.2.14) 或 (10.2.15). 进一步的问题是: 这种变换和数量函数 $e(t)$ 如何决定?

定理 10.2.6 设 $\mathbf{Q}(t)$, $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 分别为有理曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 的齐次形式, 则 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在公共点 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 为 G^n 的充要条件是存在两组实数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 满足

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(t_0) = \alpha_0 \cdot \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0), \\ \frac{1}{i!} \frac{d^i \mathbf{Q}(t_0)}{dt^i} = \alpha_i \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0) + \sum_{l=1}^i \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \frac{d^k \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)}{d\bar{t}^k} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k}, i=1,2,\dots,n. \end{cases} \quad (10.2.16)$$

证 首先设曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在 $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$ 处为 G^n 连续. 由定理 10.2.5 可知存在参数变换

$$\bar{t} = \bar{t}(t) \text{ 和数量函数 } e(t), \text{ 使得 } d^i \mathbf{Q}(t_0) = d^i(e\bar{\mathbf{Q}})|_{t_0} = \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} d^{i-l} e(t_0) \cdot d^l \bar{\mathbf{Q}}|_{t_0}, i=0,1,\dots,n.$$

于是当 $i=0$ 时, $\mathbf{Q}(t_0) = e(t_0) \cdot \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)$, 取 $\alpha_0 = e(t_0)$ 得 $\mathbf{Q}(t_0) = \alpha_0 \cdot \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)$. 当 $i>0$ 时, 应

$$\text{用 (10.2.12), 知在 } t=t_0 \text{ 处成立着 } \frac{d^i \mathbf{Q}}{dt^i} = \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} \frac{d^{i-l} e}{dt^{i-l}} \cdot \frac{d^l \bar{\mathbf{Q}}}{d\bar{t}^l} = \frac{d^i e}{dt^i} \cdot \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0) + \sum_{l=1}^i \binom{i}{l} \frac{d^{i-l} e}{dt^{i-l}}$$

$$\times l! \sum_{k=1}^l \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)}{d\bar{t}^k} \cdot \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \left(\frac{1}{r_1!} \frac{d^{r_1} \bar{t}}{dt^{r_1}} \cdots \frac{1}{r_k!} \frac{d^{r_k} \bar{t}}{dt^{r_k}} \right). \text{ 令}$$

$$\alpha_i = \left(\frac{d^i e}{dt^i} \right)_{t_0} / i!, \quad \beta_i = \left(\frac{d^i \bar{t}}{dt^i} \right)_{t_0} / i!, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (10.2.17)$$

则得到 (10.2.16) 的第二式.

反之, 作函数 $e(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t-t_0) + \dots + \alpha_n(t-t_0)^n$ 和参数变换 $\bar{t} = \bar{t}_0 + \beta_1(t-t_0) + \beta_2(t-t_0)^2 + \dots + \beta_n(t-t_0)^n$, 则上式过程可逆. 从而也就证明了充分性. 证毕.

把以上定理用于几种低阶的有理曲线, 可得其几何连续性条件的展开式

$$\mathbf{Q}(t_0) = \alpha_0 \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0), \quad (10.2.18)$$

$$\mathbf{Q}'(t_0) = \alpha_1 \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0) + \alpha_0 \beta_1 \bar{\mathbf{Q}}'(\bar{t}_0), \quad (10.2.19)$$

$$\mathbf{Q}''(t_0) = 2\alpha_2 \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0) + 2(\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1) \bar{\mathbf{Q}}'(\bar{t}_0) + \alpha_0 \beta_1^2 \bar{\mathbf{Q}}''(\bar{t}_0). \quad (10.2.20)$$

其中 (10.2.18) 保证位置连续, (10.2.18)–(10.2.19) 保证切向连续, (10.2.18)–(10.2.20) 为曲率连续条件.

于是, 判断两条有理曲线在公共点是否为 G^n 连续的问题归结为关于 α_i, β_j 的代数方程组 (10.2.16) 是否有解的问题. 这是一个非线性方程组, 它可以简化成一系列线性方程组求解. 实际上, 设 $\mathbf{Q}(t) = (\omega(t)\mathbf{r}(t), \omega(t))$, $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}) = (\bar{\omega}(\bar{t})\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}), \bar{\omega}(\bar{t}))$, 改写 (10.2.16) 为

$$(\omega(t_0)\mathbf{r}(t_0), \omega(t_0)) = \alpha_0 (\bar{\omega}(\bar{t}_0)\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0), \bar{\omega}(\bar{t}_0)), \quad (10.2.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0) + \alpha_0 \beta_i \cdot \frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{d\bar{t}} \bigg|_{\bar{t}_0} &= \frac{1}{i!} \frac{d^i \mathbf{Q}}{dt^i} \bigg|_{t_0} - \sum_{l=1}^{i-1} \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \left(\frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \right) \frac{d^k \bar{\mathbf{Q}}}{d\bar{t}^k} \bigg|_{\bar{t}_0} \\ &\quad - \alpha_0 \sum_{k=2}^i \left(\frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=i} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \right) \frac{d^k \bar{\mathbf{Q}}}{d\bar{t}^k} \bigg|_{\bar{t}_0}, \end{aligned} \quad (10.2.22)$$

于是 $\alpha_0 = \omega(t_0)/\bar{\omega}(\bar{t}_0) \neq 0$. 对于 $i \geq 1$, (10.2.22) 可视为关于两个未知量 α_i, β_i 的四个线

性方程. 因为假设曲线 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 为正则曲线, 所以 $\bar{\mathbf{r}}'(\bar{t}) = (\bar{\mathbf{P}}'(\bar{t})\bar{\omega}(\bar{t}) - \bar{\mathbf{P}}(\bar{t})\bar{\omega}'(\bar{t})) / \bar{\omega}^2(\bar{t}) \neq \mathbf{0}$, 向量 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{t}_0)$ 与 $\bar{\mathbf{Q}}'(\bar{t}_0)$ 不平行, 从而线性方程组(10.2.22)的系数矩阵的秩为 2. 因此当(10.2.22)有解时, 解必唯一. 这样就证明了:

定理 10.2.7 满足(10.2.16)的系数 α_i, β_j 是唯一确定的.

算法 10.2.1 (检查两段曲线在公共点处达到几阶几何连续)

输入: 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$; 对应参数值 t_0 和 \bar{t}_0 ;
最大连续阶值 Nmax; /* 设置此值是为了避免无限循环 */

Step 1. 置 $I = -1$

Step 2. if $\mathbf{r}(t_0) = \bar{\mathbf{r}}(\bar{t}_0)$, then 置 $I = 0$
else return (I)

Step 3. 计算 $\alpha_0 = \omega(t_0) / \bar{\omega}(\bar{t}_0)$

Step 4. for ($i=1; i < \text{Nmax}; i++$) do
判断方程组(10.2.22)是否有解
if 有解 then 求出 α_i, β_i ; 置 $I \leftarrow I + 1$; 继续循环
else return (I)

输出: 几何连续阶 I .

例 10.2.2 用此算法检查例 10.2.1 中表示圆弧的有理二次 Bézier 曲线 $\mathbf{Q}_1(t)$ 和 $\mathbf{Q}_2(\bar{t})$. 此时 $t_0 = 1, \bar{t}_0 = 0$. 经计算得 $\alpha_0 = 2; \alpha_1 = 2, \beta_1 = 1/2; \alpha_2 = 1/2, \beta_2 = -1$; 而当 $i = 3$ 时, 方程组(10.2.22)无解. 所以曲线 $\mathbf{Q}_1(t)$ 和 $\mathbf{Q}_2(\bar{t})$ 在公共点达到二阶几何连续.

10.3 几何光滑拼接曲线的构造

在 § 10.2 中所讨论的两条曲线在公共点的几何连续阶实际上就是微分几何中的接触阶, 它反映曲线在公共点近傍互相贴近的程度, 见图 10.3.1a. 在 CAGD 中通常考虑两个有向曲线段的首尾连接且使它们在公共点处具有一定阶数的几何连续. 如图 10.3.1b 所示, 设曲线段 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 分别定义在区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 上. 若对应于 $t = b, \bar{t} = c$ 的点为同一点 P , 则对 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在点 P 近傍作自然延拓, 延拓后的曲线分别为 $\mathbf{r}^*(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}^*(\bar{t})$. 这时若 $\mathbf{r}^*(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}^*(\bar{t})$ 在点 P 处达到 n 阶接触, 并且切向量 $\mathbf{r}^*(b)/dt$ 和 $\bar{\mathbf{r}}^*(c)/d\bar{t}$ 的正向一致, 则称 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在点 P 为 G^n 连接. 这里要求 $\mathbf{r}^*(b)/dt$ 和 $\bar{\mathbf{r}}^*(c)/d\bar{t}$ 的正向一致表明连接后的曲线在点 P 为正常点而非尖点, 见图 10.3.1c. 于是将此条件加到几何连续条件中, 由定理 10.2.6 得

定理 10.3.1 设 $\mathbf{Q}(t), \bar{\mathbf{Q}}(\bar{t})$ 分别为有理曲线 $\mathbf{r}(t), \bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$, $t \in [a, b]$ 和 $\bar{t} \in [c, d]$ 的齐次形式, 则 $\mathbf{r}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t})$ 在对应于 $t = b, \bar{t} = c$ 的公共点 P 处为 G^n 拼接当且仅当存在两组实数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 其中 $\beta_1 > 0$, 使得

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}(c+) = \alpha_0 \mathbf{Q}(b-), \\ \frac{1}{i!} \bar{\mathbf{Q}}^{(i)}(c+) = \alpha_i \mathbf{Q}(b-) + \sum_{l=1}^i \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \left(\frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \right) \mathbf{Q}^{(k)}(b-), i=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (10.3.1)$$

上面的条件(10.3.1)包含两组系数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. 在许多文献中, 称 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 及其所要满足的条件为 β 约束, 称 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 及相关条件为 α 约束. β 约束来自于曲线重新参数化过程中的参数变换. 特别, β_1 描述一阶切矢的大小关系, 当 $\beta_1 = 1$ 时, 表明两曲线段一阶(参数)导数相等, 达到 C^1 连续. β_2 用于描述二阶切矢的差异, 若 $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$, 则曲线达到 C^2 连续. 一般, 当 $\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, 则 n 阶几何连续变为 C^n 连续. 由此也可看出参数连续比几何连续要严格得多. α 约束是由“有理形式”引起的, 它放松了对齐次形式不必要的严格要求. 而当 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ 时, (10.3.1)则要求齐次

曲线本身亦达到 G^n 连续. α 约束和 β 约束在不增加曲线次数、不降低曲线光滑性的前提下, 为控制曲线形状提供了许多额外的自由度. 修改某一个 α_i 或 β_i 的值会改变曲线的形状, 但不会影响其几何光滑阶, 因此 α_i , β_i 称为形状参数.

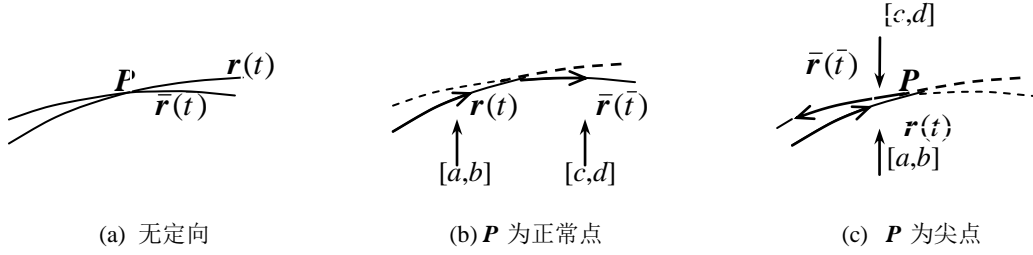


图 10.3.1 不同的接触方式

下面考察有理 Bézier 曲线的几何连续拼接. 设 n 次有理 Bézier 曲线如 (3.2.2) 所示. 它也可以写成齐次形式 $Q(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot (\omega_i R_i, \omega_i)$. 为了简化表达式, 引入算子表示 (1.3.3),

于是按性质 1.3.3, $Q(t)$ 的 j 阶导数可写作 $Q^{(j)}(t) = (n!/(n-j)!) \cdot \sum_{i=0}^{n-j} B_i^{n-j}(t) \Delta^j(\omega_i R_i, \omega_i)$.

将定理 10.3.1 应用到两段 n 次有理 Bézier 曲线, 可得

定理 10.3.2 由控制顶点 R_i , 权因子 ω_i 和控制顶点 \bar{R}_i , 权因子 $\bar{\omega}_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 定义的两条 n 次有理 Bézier 曲线在公共顶点 $\bar{R}_0 = R_n$ 处 G^n 连接的充要条件是存在两组实数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1(>0), \beta_2, \dots, \beta_n$, 使得

$$\begin{cases} (\bar{\omega}_0 \bar{R}_0, \bar{\omega}_0) = \alpha_0 (\omega_n R_n, \omega_n), \\ \binom{n}{i} \Delta^i(\bar{\omega}_0 \bar{R}_0, \bar{\omega}_0) = \alpha_i (\omega_n R_n, \omega_n) + \sum_{l=1}^i \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \binom{n}{k} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \Delta^k(\omega_{n-k} R_{n-k}, \omega_{n-k}), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.3.2)$$

这样, 两条相同次数的有理 Bézier 曲线在端点连接处为 G^n 连接的条件就由控制顶点和权因子的关系式表示出来. 对于不同次数的曲线, 通过升阶可转化为同次有理 Bézier 曲线. 于是利用不同的连续阶和不同的形状参数可以构造出许多光滑拼接的样条曲线.

一般, 有理 Bézier 曲线几何连续拼接的问题陈述为: 给定一条 n 次有理 Bézier 曲线 $R(t)$, $t \in [0, 1]$, 给定形状参数 $\alpha_0(>0), \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1(>0), \beta_2, \dots, \beta_m$, 构造另一条 n 次有理 Bézier 曲线 $\bar{R}(\bar{t}) = \sum_{i=0}^n B_i^n(\bar{t}) \bar{\omega}_i \bar{R}_i / \sum_{i=0}^n B_i^n(\bar{t}) \bar{\omega}_i$, $\bar{t} \in [0, 1]$ 使得 $R(t)$ 与 $\bar{R}(\bar{t})$ 在 $R(1) = R_n$ 处为关于 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 β_1, \dots, β_m 的 G^m 拼接.

首先考虑位置连续. 由于有理 Bézier 曲线插值端点, 为了达到 G^0 , 必须取 $\bar{R}_0 = R_n$. 于是对于给定的参数 α_0 , 取 $\bar{\omega}_0 = \alpha_0 \omega_n$. 其次, 分析一阶光滑曲线的构造. 这时进一步的约束条件为 $n(\bar{\omega}_1 \bar{R}_1 - \bar{\omega}_0 \bar{R}_0, \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0) = \alpha_1 (\omega_n R_n, \omega_n) + \alpha_0 \beta_1 n (\omega_n R_n - \omega_{n-1} R_{n-1}, \omega_n - \omega_{n-1})$. 经化简和重新组织后, 第二步得到

$$\bar{\omega}_1 = (\alpha_0 + \alpha_1/n + \alpha_0 \beta_1) \omega_n - \alpha_0 \beta_1 \omega_{n-1}, \quad \bar{R}_1 = R_n + (\alpha_0 \beta_1 \omega_{n-1} / \bar{\omega}_1) (R_n - R_{n-1}).$$

为了保证 $\bar{\omega}_1$ 为正, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 须满足 $(\alpha_0 + \alpha_1/n + \alpha_0 \beta_1) \omega_n > \alpha_0 \beta_1 \omega_{n-1}$. 此时 \bar{R}_1 位于从 R_n 出发沿 $R_{n-1} R_n$ 方向的射线上, 向量 $\bar{R}_1 R_n$ 的长度是 $R_{n-1} R_n$ 长度的 $\alpha_0 \beta_1 \omega_{n-1} / \bar{\omega}_1$ 倍.

若 $\bar{\mathbf{R}}(\bar{t})$ 与 $\mathbf{R}(t)$ 已达到 G^{i-1} 阶连接, 则 $\bar{\mathbf{R}}(\bar{t})$ 的控制顶点 $\bar{\mathbf{R}}_0, \dots, \bar{\mathbf{R}}_{i-1}$ 和权因子 $\bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_{i-1}$ 也就确定, 其余控制顶点和权因子可任意选取, 它们不会影响连续阶. 如果进一步要求 G^i 连接, 还需考虑 (10.3.3) 中第 i 个约束. 注意到差分算子 Δ 满足 (1.6.5), 就可以在第 $i+1$ 步得到

$$\bar{\omega}_i = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^{i-k-1} \bar{\omega}_k + \left(\alpha_i \omega_n + \sum_{l=1}^i \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \binom{n}{k}_{r_1+\dots+r_k=l} \sum \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \Delta^k \omega_{n-k} \right) / \binom{n}{i},$$

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{\bar{\omega}_i} \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} (-1)^{i-k-1} \bar{\omega}_k \bar{\mathbf{R}}_k + \left(\alpha_i \omega_n \mathbf{R}_n + \sum_{l=1}^i \alpha_{i-l} \sum_{k=1}^l \binom{n}{k}_{r_1+\dots+r_k=l} \sum \beta_{r_1} \cdots \beta_{r_k} \Delta^k (\omega_{n-k} \mathbf{R}_{n-k}) \right) / \binom{n}{i} \right\}.$$

10.4 曲面的曲率连续

曲面片之间的拼接通常也要求达到一定的光滑性. § 10.1 已经分析过, 使用参数连续性作为光滑性的度量在应用中会造成许多不便, 因此有必要引入与参数无关的几何连续性. 常见的几何连续约束为切平面连续和曲率连续. 这一节讨论曲面 (尤其是有理曲面) 的曲率连续性. 至于切平面连续, 下面将会看到, 只需将曲率连续性中有关二阶偏导数的约束条件去掉即可, 因此不单独予以分析. 与曲线情形类似, 我们总假定所讨论的曲面为正则, 即曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 满足 $(\partial \mathbf{r} / \partial u) \times (\partial \mathbf{r} / \partial v) \neq \mathbf{0}$. 另外, 还假设各曲面片本身至少 C^2 连续.

10.4.1 曲率连续的一般条件

定义 10.4.1

- (1) 若曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 拥有一条公共边界曲线 CB : $\mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$, $0 \leq v = \bar{v} \leq 1$, 则称 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上位置连续, 或 G^0 .
- (2) 若 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在公共边界 CB 上每一点处都有一致的切平面, 则称 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 为切平面连续, 或 G^1 .
- (3) 若曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上切平面连续, 并且在 CB 上每一点的任何方向均具有相同的法曲率, 则称 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上曲率连续, 或 G^2 .

容易看出, 曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 沿 CB 切平面连续当且仅当 $\det(\bar{\mathbf{r}}'_u(0, v), \mathbf{r}'_u(0, v), \mathbf{r}'_v(0, v)) = 0$ 对所有的 $v \in [0, 1]$ 都成立, 这等价于存在函数 $\alpha = \alpha(v) \neq 0$ 和 $\beta = \beta(v)$ 使得

$$\bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v}) = \mathbf{r}(0, v), \quad \partial \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v}) / \partial \bar{u} = \alpha(v) \cdot \partial \mathbf{r}(0, v) / \partial u + \beta(v) \cdot \partial \mathbf{r}(0, v) / \partial v. \quad (10.4.1)$$

由此可知, 对 CB 上任一点的任一方向 $\mathbf{t} = \mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv = \bar{\mathbf{r}}'_u d\bar{u} + \bar{\mathbf{r}}'_v d\bar{v}$, 成立着

$$du = \alpha d\bar{u}, \quad dv = \beta d\bar{u} + d\bar{v}. \quad (10.4.2)$$

为研究曲率连续, 假设曲面的法向为 \mathbf{n} , 考虑曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 在 (u, v) 处的法曲率

$$k(u, v) = (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) / (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2), \quad (10.4.3)$$

其中 E, F, G 和 L, M, N 分别定义为曲面的第一、第二基本量,

$$(E, F, G) = (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v), \quad (L, M, N) = (\mathbf{r}''_{uu} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{r}''_{uv} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{r}''_{vv} \cdot \mathbf{n}), \quad (10.4.4)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v / \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|.$$

对曲面 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 也有类似的公式. 根据 (10.4.1) 和 (10.4.2) 容易验证下列等式成立:

$$\bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (10.4.5)$$

$$\bar{L}d\bar{u}^2 + 2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{N}d\bar{v}^2 = (\alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N)d\bar{u}^2 + (\alpha M + \beta N)d\bar{u}d\bar{v} + Nd\bar{v}^2. \quad (10.4.6)$$

由方向 \mathbf{t} 的任意性, 可知法曲率相等, 即 $k(u, v) = \bar{k}(\bar{u}, \bar{v})$ 相当于

$$\bar{L} = \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N, \quad \bar{M} = \alpha M + \beta N, \quad \bar{N} = N. \quad (10.4.7)$$

后两式由 (10.4.1) 和 (10.4.4) 直接得到, 而第一式则要求

$$(\bar{\mathbf{r}}_{uu}'' - (\alpha^2 \mathbf{r}_{uu}'' + 2\alpha\beta \mathbf{r}_{uv}'' + \beta^2 \mathbf{r}_{vv}'')) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

这相当于存在函数 $\gamma(v)$ 和 $\eta(v)$, 使得 $\bar{\mathbf{r}}_{uu}'' = \alpha^2 \mathbf{r}_{uu}'' + 2\alpha\beta \mathbf{r}_{uv}'' + \beta^2 \mathbf{r}_{vv}'' + \gamma \mathbf{r}_u' + \eta \mathbf{r}_v'$. 总结上述分析的结果, 得到

定理 10.4.1 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 沿公共边界 $CB: \mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 曲率连续的充要条件是存在函数 $\alpha(v) \neq 0$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$, $\eta(v)$ 使得下列表达式沿 CB 成立:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v}) = \mathbf{r}(0, v), \\ \bar{\mathbf{r}}_u'(0, \bar{v}) = \alpha \mathbf{r}_u'(0, v) + \beta \mathbf{r}_v'(0, v), \\ \bar{\mathbf{r}}_{uu}''(0, \bar{v}) = \alpha^2 \mathbf{r}_{uu}''(0, v) + 2\alpha\beta \mathbf{r}_{uv}''(0, v) + \beta^2 \mathbf{r}_{vv}''(0, v) + \gamma \cdot \mathbf{r}_u'(0, v) + \eta \cdot \mathbf{r}_v'(0, v). \end{cases} \quad (10.4.8)$$

这个结果面向一般形式的曲面. 对于有理曲面, 特别地有

定理 10.4.2 设有理曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 与 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 的齐次形式为 $\mathbf{Q}(u, v) = \{\mathbf{P}(u, v), \omega(u, v)\}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}, \bar{v}) = \{\bar{\mathbf{P}}(\bar{u}, \bar{v}), \bar{\omega}(\bar{u}, \bar{v})\}$, 其中 $\mathbf{P}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{P}}(\bar{u}, \bar{v})$ 为三维向量函数, 则 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在公共边界 $CB: \mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$, ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 上曲率连续当且仅当存在函数 $c_0(v)$, $c_i(v)$, $p_i(v)$ 和 $q_i(v)$, $i = 1, 2$, 使得在 CB 上成立着

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Q}} = c_0 \mathbf{Q}, \\ \bar{\mathbf{Q}}_u' = c_1 \mathbf{Q} + c_0 p_1 \mathbf{Q}_u' + c_0 q_1 \mathbf{Q}_v', \\ \bar{\mathbf{Q}}_{uu}'' = c_2 \mathbf{Q} + p_2 \mathbf{Q}_u' + q_2 \mathbf{Q}_v' + c_0 p_1^2 \mathbf{Q}_{uu}'' + 2c_0 p_1 q_1 \mathbf{Q}_{uv}'' + c_0 q_1^2 \mathbf{Q}_{vv}''. \end{cases} \quad (10.4.9)$$

证 必要性: 设 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 曲率连续, 则 (10.4.8) 成立. 取 $c_0 = \bar{\omega}(0, v)/\omega(0, v)$ 得 (10.4.9) 的第一式. 其次, 由 $\partial(\mathbf{r}, 1)/\partial u = (\mathbf{Q}_u' \omega - \mathbf{Q} \omega_u')/\omega^2$ 及 (10.4.8) 的第二式得

$$\bar{\mathbf{Q}}_u' = c_0 \alpha \mathbf{Q}_u' + c_0 \beta \mathbf{Q}_v' + \mathbf{Q}(\bar{\omega}_u' - c_0 \alpha \omega_u' - c_0 \beta \omega_v')/\omega.$$

取

$$\begin{cases} p_1(v) = \alpha(v), \quad q_1(v) = \beta(v), \\ c_1(v) = (\bar{\omega}_u'(0, v) - c_0 \alpha \omega_u'(0, v) - c_0 \beta \omega_v'(0, v))/\omega(0, v), \end{cases} \quad (10.4.10)$$

即得 (10.4.9) 的第二式. 同理, 由 (10.4.8) 的第三式推出

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{uu}'' &= c_0 p_1^2 \mathbf{Q}_{uu}'' + 2c_0 p_1 q_1 \mathbf{Q}_{uv}'' + c_0 q_1^2 \mathbf{Q}_{vv}'' + (c_0 \gamma + 2c_1 p_1) \mathbf{Q}_u' + (c_0 \eta + 2c_1 q_1) \mathbf{Q}_v' + \\ &\quad \mathbf{Q}(\bar{\omega}_{uu}'' - (c_0 p_1^2 \omega_{uu}'' + 2c_0 p_1 q_1 \omega_{uv}'' + c_0 q_1^2 \omega_{vv}'') + (c_0 \gamma + 2c_1 p_1) \omega_u' + (c_0 \eta + 2c_1 q_1) \omega_v')/\omega. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} p_2(v) = c_0 \gamma + 2c_1 p_1, \quad q_2(v) = c_0 \eta + 2c_1 q_1, \\ c_2(v) = (\bar{\omega}_{uu}'' - (c_0 p_1^2 \omega_{uu}'' + 2c_0 p_1 q_1 \omega_{uv}'' + c_0 q_1^2 \omega_{vv}'' + p_2 \omega_u' + q_2 \omega_v'))/\omega, \end{cases} \quad (10.4.11)$$

则得 (10.4.9) 的第三式.

充分性: 取 $\alpha = p_1$, $\beta = q_1$, $\gamma = (p_2 - 2c_1 \alpha)/c_0$, $\eta = (q_2 - 2c_1 \beta)/c_0$, 则由 (10.4.9) 直接推得 (10.4.8), 因而 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上曲率连续. 证毕.

必须指出, 定理 10.4.1 给出的是曲面间 G^2 的最一般的结果. 例如, 当 (10.4.9) 中取 $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = p_2 = q_2 = 0$ 时, 就得出 Kahmann 在文献[12]中的结果; 若仅取 (10.4.9) 的前面两式, 即考虑曲面 G^1 , 令 $c_0 = 1$ 时, 就得出 Liu, DeRose 在文献[16], [18]中的结果.

10.4.2 矩形域上有理 Bézier 曲面的 G^2 条件

引理 10.4.1 若有理曲面 $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{P}(u, v)/\omega(u, v)$ 在点 (u, v) 处正则, 则 \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_u' , \mathbf{Q}_v' 在该点处线性独立, 其中 $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}(u, v), \omega(u, v))$ 为 \mathbf{r} 的齐次形式

证 假设 R_i 表示 \Re^4 中的向量 \mathbf{R} 的第 i 个分量. 如果 $i > 4$, 则 $R_i = R_{\text{mod}(i-1, 4)+1}$. 引进记号

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T} \rangle_i = (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} R_{i+1} & S_{i+1} & T_{i+1} \\ R_{i+2} & S_{i+2} & T_{i+2} \\ R_{i+3} & S_{i+3} & T_{i+3} \end{pmatrix}, \quad (10.4.12)$$

省写变量 (u, v) , 则对于有理曲面 \mathbf{r} 有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v &= (\omega \mathbf{R}'_u - \omega'_u \mathbf{R}) \times (\omega \mathbf{R}'_v - \omega'_v \mathbf{R}) / \omega^4 \\ &= (\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_1, \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_2, \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_3) / \omega^3. \end{aligned}$$

由 \mathbf{r} 的正则性知在点 (u, v) 处至少有一个 $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, 因而引理得证.

设 $m \times n$ 次和 $\bar{m} \times n$ 次的有理 Bézier 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$, $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 表示成如下的齐次形式:

$$\begin{cases} \mathbf{r} : \mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{Q}_{ij}, & 0 \leq u, v \leq 1, \\ \bar{\mathbf{r}} : \bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=0}^{\bar{m}} \sum_{j=0}^n B_i^{\bar{m}}(\bar{u}) B_j^n(\bar{v}) \bar{\mathbf{Q}}_{ij}, & 0 \leq \bar{u}, \bar{v} \leq 1, \end{cases} \quad (10.4.13)$$

其中 $\mathbf{Q}_{ij} = (\omega_{ij} \mathbf{R}_{ij}, \omega_{ij})$, $\bar{\mathbf{Q}}_{ij} = (\bar{\omega}_{ij} \bar{\mathbf{R}}_{ij}, \bar{\omega}_{ij})$; \mathbf{R}_{ij} , $\bar{\mathbf{R}}_{ij}$ 为控制顶点, ω_{ij} , $\bar{\omega}_{ij}$ 为权. 一旦 \mathbf{Q}_{ij} 已知, \mathbf{R}_{ij} 和 ω_{ij} 也就确定. 这里不妨假定 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的 v 向次数相等; 否则可用升阶公式使之相等.

定理 10.4.1 和 10.4.2 中的系数 α , β , γ 或 c_i , p_i , q_i 都是 v 的函数, 它们称为曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的拼接函数. 下面将说明, 对于有理 Bézier 曲面, 它们都是有理函数.

定理 10.4.3 设 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 为 $m \times n$ 和 $\bar{m} \times n$ 次有理 Bézier 曲面, 它们在公共边界 CB : $\mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$, $(0 \leq v = \bar{v} \leq 1)$ 上达到曲率连续的充要条件是对于 CB 上每一点有

$$\begin{cases} G(v) \bar{\mathbf{Q}} = H(v) \mathbf{Q}, \\ D \bar{\mathbf{Q}}'_u = \bar{c}_1 \mathbf{Q} + \bar{p}_1 \mathbf{Q}'_u + \bar{q}_1 \mathbf{Q}'_v, \\ D^3 H \bar{\mathbf{Q}}''_{uu} = \bar{c}_2 \mathbf{Q} + \bar{p}_2 \mathbf{Q}'_u + \bar{q}_2 \mathbf{Q}'_v + G D (\bar{p}_1^2 \mathbf{Q}''_{uu} + 2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 \mathbf{Q}''_{uv} + \bar{q}_1^2 \mathbf{Q}''_{vv}). \end{cases} \quad (10.4.14)$$

其中 D , G , H , \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 为 v 的多项式, $D(v) \neq 0$, $\bar{p}_1(v) \neq 0$, 它们的次数如下表:

多项式	G, H	D, \bar{c}_1, \bar{p}_1	\bar{q}_1	\bar{c}_2, \bar{p}_2	\bar{q}_2
次数 \leq	n	$3n-1$	$3n$	$10n-3$	$10n-2$

证 必要性: 如果 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 曲率连续, 则由定理 10.4.2, 知存在 c_i , p_i 和 q_i 使 (10.4.9) 成立. 于是取 $H(v) = \bar{\omega}(0, v)$, $G(v) = \omega(0, v)$, 可得 $c_0 = H/G$ 和 (10.4.14) 的第一式, H 和 G 的次数 $\leq n$. 其次, 由 $\mathbf{r}(u, v)$ 的正则性, 根据引理 10.4.1, 可知存在 i , $1 \leq i \leq 3$, 使得 $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} \neq 0$. 令

$$\begin{cases} D(v) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{CB}, & \bar{c}_1(v) = \langle \bar{\mathbf{Q}}'_u, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{CB}, \\ \bar{p}_1(v) = \langle \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{CB}, & \bar{q}_1(v) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'_u, \bar{\mathbf{Q}}'_u \rangle_i \Big|_{CB}. \end{cases} \quad (10.4.15)$$

则 $D(v)$, $\bar{c}_1(v)$, $\bar{p}_1(v)$ 和 $\bar{q}_1(v)$ 的次数分别不超过 $3n-1, 3n-1, 3n-1$ 和 $3n$, 并满足

$$D \cdot \bar{\mathbf{Q}}'_u(0, \bar{v}) = \bar{c}_1 \mathbf{Q}(0, v) + \bar{p}_1 \cdot \mathbf{Q}'_u(0, v) + \bar{q}_1 \mathbf{Q}'_v(0, v).$$

显然有 $\bar{c}_1 = D \cdot c_1$, $\bar{p}_1 = D \cdot c_0 p_1$, $\bar{q}_1 = D \cdot c_0 q_1$.

最后, 乘 $D^2 H$ 于 (10.4.9) 的第三式两端, 得

$$D^2 H (c_2 \mathbf{Q}(0, v) + p_2 \mathbf{Q}'_u(0, v) + q_2 \mathbf{Q}'_v(0, v)) = \delta(v),$$

其中 $\delta(v) = D^2 H \bar{\mathbf{Q}}''_{uu}(0, v) - G (\bar{p}_1^2 \mathbf{Q}''_{uu}(0, v) + 2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 \mathbf{Q}''_{uv}(0, v) + \bar{q}_1^2 \mathbf{Q}''_{vv}(0, v))$. 容易验证 $\delta(v)$ 的次数不超过 $8n-2$. 再令 $\bar{c}_2 = \langle \delta, \mathbf{Q}'_u, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{CB}$, $\bar{p}_2 = \langle \mathbf{Q}, \delta, \mathbf{Q}'_v \rangle_i \Big|_{CB}$,

$\bar{q}_2 = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_u, \delta \rangle_i|_{CB}$. 则 \bar{c}_2 , \bar{p}_2 , \bar{q}_2 的次数分别不超过 $10n-3$, $10n-3$, $10n-2$, 且对 CB 上每一点有 $D \cdot \delta = \bar{c}_2 \mathbf{Q} + \bar{p}_2 \mathbf{Q}'_u + \bar{q}_2 \mathbf{Q}'_v$. 从而必要性得证.

充分性: 取 $c_0 = H/G$, 设 $D(v)$ 在 $[0,1]$ 中有 λ 个根 v_1, \dots, v_λ , 则由 (10.4.14) 知它们也是 \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 的 $(2i-1)$ 重根, $i=1,2$. 记 $VM = (v-v_1) \cdots (v-v_\lambda)$, 去掉零因子有

$$\tilde{D}(v) = D(v)/VM, \quad \tilde{c}_i = \bar{c}_i/VM^{2i-1}, \quad \tilde{p}_i = \bar{p}_i/VM^{2i-1}, \quad \tilde{q}_i = \bar{q}_i/VM^{2i-1},$$

易知用 \tilde{D} , \tilde{c}_i , \tilde{p}_i , \tilde{q}_i 分别代替 D , \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 以后, (10.4.14) 仍成立. 于是取 $c_i = \tilde{c}_i/(\tilde{D}^{2i-1} H^{i-1})$, $p_i = \tilde{p}_i/(\tilde{D}^{2i-1} H^{i-1} c_0)$, $q_i = \tilde{q}_i/(\tilde{D}^{2i-1} H^{i-1} c_0)$ 就得到 (10.4.9), 所以 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上曲率连续. 证毕.

上述证明过程也提供了计算拼接函数的一种方法, 利用该方法, 可以设计一个简单的计算机程序, 来判别两个给定的有理 Bézier 曲面是否位置连续, 切平面连续或曲率连续.

值得一提的是: 即使 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上达到曲率连续, 其齐次形式 \mathbf{Q} 与 $\bar{\mathbf{Q}}$ 未必相连接, 由 (10.4.9) 看出它们可以相差 $c_0(v)$ 倍. 在实际设计中, 经常将 c_0 设置为 1, 于是 $\bar{\mathbf{Q}}(0, v) = \mathbf{Q}(0, v)$. 这样的有理 Bézier 曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 称为满足齐次位置连续. 此时, 不妨取 $H(v) = G(v) = 1$, 则条件 (10.4.14) 简化为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}|_{CB} = \mathbf{Q}|_{CB}, \\ D\bar{\mathbf{Q}}'_u|_{CB} = (\bar{c}_1 \mathbf{Q} + \bar{p}_1 \mathbf{Q}'_u + \bar{q}_1 \mathbf{Q}'_v)|_{CB}, \\ D^3 \bar{\mathbf{Q}}''_{uu}|_{CB} = (\bar{c}_2 \mathbf{Q} + \bar{p}_2 \mathbf{Q}'_u + \bar{q}_2 \mathbf{Q}'_v + D(\bar{p}_1^2 \mathbf{Q}''_{uu} + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \mathbf{Q}''_{uv} + \bar{q}_1^2 \mathbf{Q}''_{vv}))|_{CB}. \end{cases} \quad (10.4.16)$$

此外, 仿定理 10.4.3 的证明, 易得此时拼接函数的次数.

定理 10.4.4 如果 $m \times n$, $\bar{m} \times n$ 次的有理 Bézier 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 在 $CB: \mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$, $(0 \leq v = \bar{v} \leq 1)$ 上为齐次位置连续, 则它们为曲率连续的充要条件是存在次数分别不超过 $3n-1$ 的多项式 $D(v) \neq 0$, $\bar{p}_1(v) \neq 0$, $\bar{c}_1(v)$ 以及次数分别不超过 $3n$, $9n-3$, $9n-3$, $9n-2$ 的多项式 $\bar{q}_1(v)$, $\bar{c}_2(v)$, $\bar{p}_2(v)$ 和 $\bar{q}_2(v)$ 使得 (10.4.16) 成立.

如果将拼接函数的次数减低, 还可以得到一系列曲率连续的充分条件, 如下述的

定理 10.4.5 由 (10.4.13) 表示的有理 Bézier 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 在某一公共边界上达到曲率连续的一个充分条件是 (10.4.16) 成立, 其中 $D(\neq 0)$, $\bar{p}_1(\neq 0)$, \bar{p}_2 , \bar{c}_i , $\bar{q}_i (i=1,2)$ 为 v 的多项式, 次数如下表:

多项式	D, \bar{c}_1, \bar{p}_1	\bar{q}_1	\bar{c}_2, \bar{p}_2	\bar{q}_2
次数 \leq	σ	$\sigma+1$	3σ	$3\sigma+1$

这里 σ 是介于 0 与 $3n-1$ 之间的一个固定整数.

10.4.3 曲率连续拼接的有理 Bézier 曲面的构造

为进一步揭示曲率连续条件的本质并便于构造曲率连续的曲面, 前面推导出来的条件还须转换成控制顶点和权因子之间的关系. 下面讨论曲面 (10.4.13) 在公共边界 CB 上为齐次位置连续的情形.

首先将拼接函数 $D(v)$, \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 表示成 Bernstein 多项式形式:

$$\begin{cases} D(v) = \sum_{j=0}^{3n-1} B_j^{3n-1}(v) d_j, & \bar{c}_1 = \sum_{j=0}^{3n-1} B_j^{3n-1}(v) c_j^{(1)}, \\ \bar{p}_1 = \sum_{j=0}^{3n-1} B_j^{3n-1}(v) p_j^{(1)}, & \bar{q}_1 = \sum_{j=0}^{3n} B_j^{3n}(v) q_j^{(1)}, \\ \bar{c}_2 = \sum_{j=0}^{9n-3} B_j^{9n-3}(v) c_j^{(2)}, & \bar{p}_2 = \sum_{j=0}^{9n-3} B_j^{9n-3}(v) p_j^{(2)}, & \bar{q}_2 = \sum_{j=0}^{9n-2} B_j^{9n-2}(v) q_j^{(2)}. \end{cases} \quad (10.4.17)$$

然后令

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{Q}_{1i} - \mathbf{Q}_{0i}, \mathbf{b}_i = \mathbf{Q}_{2i} - \mathbf{Q}_{1i}, i = 0, 1, \dots, n; \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}_{0,i+1} - \mathbf{Q}_{0i}, i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (10.4.18)$$

对于曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 也类似, 见图 10.4.3.

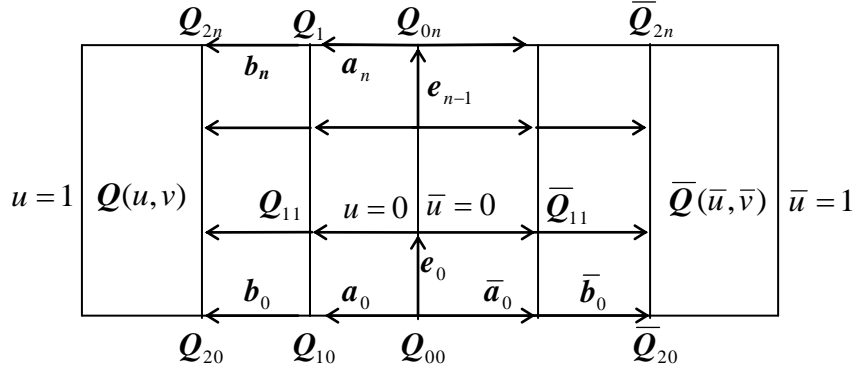


图 10.4.3 有理 Bézier 曲面 $\mathbf{Q}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}, \bar{v})$ 的控制顶点关系

于是齐次位置连续意味着:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{0i} = \mathbf{Q}_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10.4.19)$$

其次, 考虑一阶偏导数约束条件即 (10.4.16) 的第二式, 将 (10.4.17) 代入并化简后, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ i+j=s}}^{3n-1} \binom{3n-1}{j} \binom{n}{i} \bar{m} d_j \bar{\mathbf{a}}_i &= \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ i+j=s}}^{3n-1} \binom{3n-1}{j} \binom{n}{i} (c_j^{(1)} \mathbf{Q}_{0i} + m p_j^{(1)} \mathbf{a}_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j=s}}^{3n} \binom{3n}{j} \binom{n-1}{i} n q_j^{(1)} \mathbf{e}_i, \quad s = 0, 1, \dots, 4n-1. \end{aligned} \quad (10.4.20)$$

再引入如下记号:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \bar{\mathbf{a}}_0 \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \bar{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix}, \mathbf{C}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \mathbf{C}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} \mathbf{e}_0 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} \mathbf{e}_{n-1} \end{pmatrix}, \mathbf{C}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \mathbf{Q}_{00} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \mathbf{Q}_{0n} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{(n+1) \times (n+1)}^{11} \\ \mathbf{D}_{(3n-1) \times (n+1)}^{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{d}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{d}_0 \\ \bar{d}_{3n-1} & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & \bar{d}_{3n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{(n+1) \times (n+1)}^{11} \\ \mathbf{C}_{(3n-1) \times (n+1)}^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_0^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{c}_0^{(1)} \\ \bar{c}_{3n-1}^{(1)} & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & \bar{c}_{3n-1}^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (10.4.21)$$

类似地定义矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n+1) \times (n+1)}^{11} \\ \mathbf{P}_{(3n-1) \times (n+1)}^{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{(n+1) \times n}^{11} \\ \mathbf{Q}_{(3n-1) \times n}^{12} \end{pmatrix}$, 其中

$$\bar{d}_i = \bar{m} \binom{3n-1}{i} d_i, \bar{c}_i^{(1)} = \binom{3n-1}{i} c_i^{(1)}, \bar{p}_i = m \binom{3n-1}{i} p_i^{(1)}, \bar{q}_i^{(1)} = n \binom{3n}{i} q_i^{(1)}. \quad (10.4.22)$$

于是方程 (10.4.20) 可改写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{11} \\ \mathbf{D}^{12} \end{pmatrix} \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{11} \\ \mathbf{C}^{12} \end{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{Q} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{11} \\ \mathbf{P}^{12} \end{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{11} \\ \mathbf{Q}^{12} \end{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{E}. \quad (10.4.23)$$

观察 (10.4.15) 中 $D(v)$ 的定义, 容易发现 $d_0 \neq 0$, 因而 $\bar{d}_0 \neq 0$. 记 $\mathbf{H}^1 = (\mathbf{D}^{11})^{-1}$, 则有

$$\mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & & \\ \vdots & \ddots & \\ h_n^{(1)} & \cdots & h_0^{(1)} \end{pmatrix}, \quad h_0^{(1)} = \frac{1}{d_0}, \quad h_i^{(1)} = -h_0^{(1)} \sum_{j=0}^{i-1} \bar{d}_{i-j} h_j^{(1)}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (10.4.24)$$

因此求解方程 (10.4.23) 可得

$$\mathbf{CA} = \mathbf{H}^1 \mathbf{C}^{11} \mathbf{CQ} + \mathbf{H}^1 \mathbf{P}^{11} \mathbf{CA} + \mathbf{H}^1 \mathbf{Q}^{11} \mathbf{CE}, \quad (10.4.25)$$

或

$$\binom{n}{i} \bar{a}_i = \sum_{j=0}^i \sum_{k=j}^i h_{i-k}^{(1)} \left(\binom{n}{j} \bar{c}_{k-j}^{(1)} \mathbf{Q}_{0j} + \binom{n}{j} \bar{p}_{k-j}^{(1)} \mathbf{a}_j + \binom{n-1}{j} \bar{q}_{k-j}^{(1)} \mathbf{e}_j \right), \quad i=0,1,\dots,n. \quad (10.4.26)$$

同时, 系数 d_i , $c_i^{(1)}$, $p_i^{(1)}$, $q_i^{(1)}$ 一般不是相互独立的, 它们应该满足约束方程

$$(\mathbf{D}^{12} \mathbf{H}^1 \mathbf{C}^{11} - \mathbf{C}^{12}) \mathbf{CQ} + (\mathbf{D}^{12} \mathbf{H}^1 \mathbf{P}^{11} - \mathbf{P}^{12}) \mathbf{CA} + (\mathbf{D}^{12} \mathbf{H}^1 \mathbf{Q}^{11} - \mathbf{Q}^{12}) \mathbf{CE} = \mathbf{0}. \quad (10.4.27)$$

同理, 考虑二阶偏导矢约束方程即 (10.4.16) 的第三式, 将 (10.4.17) 代入, 整理后得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{21} \\ \mathbf{D}^{22} \end{pmatrix} \mathbf{CBA} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{21} \\ \mathbf{C}^{22} \end{pmatrix} \mathbf{CQ} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{21} \\ \mathbf{P}^{22} \end{pmatrix} \mathbf{CA} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{21} \\ \mathbf{Q}^{22} \end{pmatrix} \mathbf{CE} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{pmatrix} \mathbf{CBA} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix} \mathbf{CAA} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}^1 \\ \mathbf{T}^2 \end{pmatrix} \mathbf{CEE}. \quad (10.4.28)$$

这里

$$\mathbf{CBA} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} (\bar{b}_0 - \bar{a}_0) \\ \vdots \\ \binom{n}{n} (\bar{b}_n - \bar{a}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CAA} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} (a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} (a_n - a_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CEE} = \begin{pmatrix} \binom{n-2}{0} (e_1 - e_0) \\ \vdots \\ \binom{n-2}{n-2} (e_{n-1} - e_{n-2}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{(n+1) \times (n+1)}^{21} \\ \mathbf{D}_{(9n-3) \times (n+1)}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_0^{(2)} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \bar{d}_0^{(2)} & \\ \bar{d}_{9n-3}^{(2)} & & \vdots & \\ & & & \bar{d}_{9n-3}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{(n+1) \times (n+1)}^1 \\ \mathbf{F}_{(9n-3) \times (n+1)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \bar{f}_0 & \\ \bar{f}_{9n-3} & & \vdots & \\ & & & \bar{f}_{9n-3} \end{pmatrix}.$$

类似地定义矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{(n+1) \times (n+1)}^{21} \\ \mathbf{C}_{(9n-3) \times (n+1)}^{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n+1) \times (n+1)}^{21} \\ \mathbf{P}_{(9n-3) \times (n+1)}^{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{(n+1) \times n}^{21} \\ \mathbf{Q}_{(9n-3) \times n}^{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{(n+1) \times n}^1 \\ \mathbf{G}_{(9n-3) \times n}^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{T}_{(n+1) \times (n-1)}^1 \\ \mathbf{T}_{(9n-3) \times (n-1)}^2 \end{pmatrix}$ 和

\mathbf{CBA} , 其中

$$\bar{c}_i^{(2)} = \binom{9n-3}{i} c_i^{(2)}, \quad \bar{p}_i^{(2)} = m \binom{9n-3}{i} p_i^{(2)}, \quad \bar{q}_i^{(2)} = n \binom{9n-2}{i} q_i^{(2)},$$

$$\bar{d}_i^{(2)} = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3=i}}^{3n-1} \bar{d}_{j_1} \bar{d}_{j_2} \bar{d}_{j_3} (\bar{m}-1)/\bar{m}^2, \quad \bar{f}_i = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3=i}}^{3n-1} \bar{d}_{j_1} \bar{p}_{j_2}^{(1)} \bar{p}_{j_3}^{(1)} (m-1)/(m\bar{m}),$$

$$\bar{g}_i = 2 \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1+j_2+j_3=i}}^{3n-1} \sum_{j_3=0}^{3n} \bar{d}_{j_1} \bar{p}_{j_2}^{(1)} \bar{q}_{j_3}^{(1)} / \bar{m}, \quad \bar{t}_i = \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+j_2+j_3=i}}^{3n-1} \sum_{\substack{j_2, j_3=0 \\ j_1+j_2+j_3=i}}^{3n} \bar{d}_{j_1} \bar{q}_{j_2}^{(1)} \bar{q}_{j_3}^{(1)} (n-1)/(\bar{m}n).$$

明显地, $\bar{d}_0^{(2)} \neq 0$. 记 $\mathbf{H}^2 = (\mathbf{D}^{21})^{-1}$, 则方程 (10.4.28) 等价于

$$\binom{n}{i} (\bar{b}_i - \bar{a}_i) = \sum_{j=0}^i \sum_{k=j}^i h_{i-k}^{(2)} \left(\binom{n}{j} \bar{c}_{k-j}^{(2)} \mathbf{Q}_{0j} + \binom{n}{j} \bar{p}_{k-j}^{(2)} \mathbf{a}_j + \binom{n-1}{j} \bar{q}_{k-j}^{(2)} \mathbf{e}_j + \binom{n}{j} \bar{f}_{k-j} (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) \right)$$

$$+ \binom{n-1}{j} \bar{g}_{k-j} (\mathbf{a}_{j+1} - \mathbf{a}_j) + \binom{n-2}{j} \bar{t}_{k-j} (\mathbf{e}_{j+1} - \mathbf{e}_j), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (10.4.29)$$

和约束方程

$$\begin{aligned} & (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{C}^{21} - \mathbf{C}^{22}) \mathbf{CQ} + (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{P}^{21} - \mathbf{P}^{22}) \mathbf{CA} + (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{Q}^{21} - \mathbf{Q}^{22}) \mathbf{CE} \\ & + (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{F}^1 - \mathbf{F}^2) \mathbf{CBA} + (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{G}^1 - \mathbf{G}^2) \mathbf{CAA} + (\mathbf{D}^{22} \mathbf{H}^2 \mathbf{T}^1 - \mathbf{T}^2) \mathbf{CEE} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10.4.30)$$

其中 $h_0^{(2)} = 1/\bar{d}_0^{(2)}$, $h_i^{(2)} = -h_0^{(2)} \sum_{j=0}^{i-1} \bar{d}_{i-j}^{(2)} h_j^{(2)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

总结上述讨论结果, 再注意到正则曲面要求 $p_0^{(1)} \neq 0$, 我们得出

定理 10.4.6 沿公共边界 CB 满足齐次位置连续的两张有理 Bézier 曲面 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 达到曲率连续的充要条件是存在实数组 $\{d_i\}_0^{3n-1}$, $\{c_i^{(1)}\}_0^{3n-1}$, $\{p_i^{(1)}\}_0^{3n-1}$, $\{q_i^{(1)}\}_0^{3n}$, $\{c_i^{(2)}\}_0^{9n-3}$, $\{p_i^{(2)}\}_0^{9n-3}$, $\{q_i^{(2)}\}_0^{9n-2}$ 满足 (10.4.23) 和 (10.4.28), 其中 $d_0 p_0^{(1)} \neq 0$.

定理 10.4.7 给出一张正则有理 Bézier 曲面 \mathbf{r} 和一组实数 $\{d_i\}$, $\{c_i^{(j)}\}$, $\{p_i^{(j)}\}$, $\{q_i^{(j)}\}$, $j = 1, 2$, 它们满足约束方程 (10.4.27) 和 (10.4.30). 若另一张有理 Bézier 曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 的前三排控制顶点和权因子由 (10.4.19), (10.4.26) 和 (10.4.29) 所确定, 则拼接曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 与 \mathbf{r} 曲率连续.

10.4.4 简单曲率连续拼接曲面的构造

定理 10.4.6 提供了 $39n - 4$ 个可调参数, 即 $\{d_i\}$, $\{c_i^{(j)}\}$, $\{p_i^{(j)}\}$, $\{q_i^{(j)}\}$, $j = 1, 2$, 同时也列出了一系列约束方程. 就实际应用而言, 过多的参数会使设计者无所适从, 复杂的约束条件给实际构造带来很大的困难. 因此, 我们建议使用曲率连续的充分条件来构造曲率连续拼接的曲面. 例如应用定理 10.4.5, 取 $\sigma = 0$, 则 D , \bar{c}_i , \bar{p}_i 为常数, \bar{q}_i 为线性函数. 假设 $D(v) \equiv 1$, $\bar{c}_i = \gamma_i \bar{m}! / (\bar{m} - i)!$, $\bar{p}_i = \alpha_i \bar{m}! / (\bar{m} - i)!$, $\bar{q}_i = (\beta_i^0 (1 - v) + \beta_i^1 v) \bar{m}! / (\bar{m} - i)!$. 容易验证此时这些参数所需满足的约束方程自然成立. 于是与给定曲面 \mathbf{r} 达到 G^2 拼接的曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 的前三排控制顶点和权因子为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{0i} &= \mathbf{Q}_{0i}, \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\omega}_{0i} = \omega_{0i}, \quad \bar{\mathbf{P}}_{0i} = \mathbf{P}_{0i}; \\ \bar{\mathbf{a}}_i &= \gamma_1 \mathbf{Q}_{0i} + \alpha_1 \mathbf{a}_i + \beta_1^1 i \mathbf{e}_{i-1} + \beta_1^0 (n - i) \mathbf{e}_i, \\ \bar{\mathbf{b}}_i &= \bar{\mathbf{a}}_i + \gamma_2 \mathbf{Q}_{0i} + \alpha_2 \mathbf{a}_i + \beta_2^1 i \mathbf{e}_{i-1} + \beta_2^0 (n - i) \mathbf{e}_i \\ &\quad + \bar{m}(\bar{m} - 1)^{-1} \left((m - 1) \alpha_1^2 (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) / m + 2\alpha_1 (\beta_1^1 i (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i-1}) + \beta_1^0 (n - i) (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)) \right. \\ &\quad \left. + (n - i)(n - i - 1) (\beta_1^0)^2 (\mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i) + 2i(n - i) \beta_1^0 \beta_1^1 (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i-1}) + i(i - 1) (\beta_1^1)^2 (\mathbf{e}_{i-1} - \mathbf{e}_{i-2}) \right), \\ i &= 0, 1, \dots, n; \text{ 系数 } \gamma_i, \alpha_i, \beta_i^0, \beta_i^1, i = 1, 2, \text{ 可任意选取.} \end{aligned}$$

10.5 曲面的任意阶几何连续

10.5.1 曲面 G^n 连续的定义

现在讨论一般 N 维曲面的几何连续性. 设 $M > N$, \mathbf{r} 代表 \mathfrak{R}^M 中点的坐标向量, D 为 \mathfrak{R}^N 中一个区域. \mathfrak{R}^M 中的 N 维曲面 \mathbf{r} 定义为 $D \rightarrow \mathfrak{R}^M$ 的连续映射且表示为变量 u_1, \dots, u_N 的 C^n 连续函数, 即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, \dots, u_N) \in C^n(D), \quad (10.5.1)$$

简记作 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$. 再记矩阵

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}\right)_{M \times N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} & \frac{\partial r_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u_1} & \frac{\partial r_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_M}{\partial u_1} & \frac{\partial r_M}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial r_M}{\partial u_N} \end{pmatrix}, \quad (10.5.2)$$

其中 r_i 为 \mathbf{r} 的第 i 个分量. 当 $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u})_{M \times N}$ 的秩为 N 时, 曲面 \mathbf{r} 为正则的. 当 $N=1$ 或 2 时, (10.5.1) 定义一条 C^n 正则曲线或一张 C^n 正则曲面.

在曲线情形, 由于存在弧长这种只依赖于曲线本身的不变量参数, 曲线的几何连续性定义为关于弧长的连续性. 对于曲面, § 10.4 利用其切平面和曲率等几何量定义了曲面的切平面连续和曲率连续, 但由此很难推广定义高阶几何连续性. 注意到定理 10.2.1 描述了曲线几何连续性的重新参数化特征, 下面用重新参数化思想给出高维曲面的任意阶几何连续定义.

定义 10.5.1 设 $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}})$ 为 \mathbb{R}^M 中的两个 N 维曲面, 它们的交曲面为 $N-1$ 维曲面, 称为 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的公共边界, 记为 CB . 若存在满足

$$\det \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_j} \right) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial u_N} \end{pmatrix} \neq 0$$

的参数变换

$$\varphi: \bar{u}_i = u_i(u_1, \cdots, u_N) \in C^N, \quad i=1, 2, \cdots, N, \quad (10.5.3)$$

使得

$$\left. \frac{\partial^s \mathbf{r}}{\partial u_{\alpha_1} \cdots \partial u_{\alpha_s}} \right|_{CB} = \left. \frac{\partial^s \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{u}_{\alpha_1} \cdots \partial \bar{u}_{\alpha_s}} \right|_{CB}, \quad s=0, 1, \cdots, n, \quad 1 \leq \alpha_i \leq N, \quad i=1, 2, \cdots, N, \quad (10.5.4)$$

则称曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上为 n 阶几何连续, 简记作 G^n . 同时称由 (10.5.3) 所确定的点变换为实现 G^n 的几何连续变换.

后面将会看到, 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时, 上述定义的 G^n 就是 § 10.4 中的切平面连续和曲率连续. 此外, 这个定义有比较直观的几何意义: 如果曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上 G^n 连续, 则存在一个点变换 (10.5.3), 使得在 CB 上任一点 P_0 的邻域内, 在 \mathbf{r} 上的点 P 和其在点变换下对应于 $\bar{\mathbf{r}}$ 上的点 \bar{P} 满足 $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\|P\bar{P}\|}{\|P_0 P\|^n} = 0$, 即连续阶 n 表示曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的密切程度 (见图 10.5.1).

为了以后叙述方便, 对于曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}})$, 引入如下记号:

$$\mathbf{r}_{\alpha_1 \cdots \alpha_s}^s = \frac{\partial^s \mathbf{r}}{\partial u_{\alpha_1} \cdots \partial u_{\alpha_s}}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{\beta_1 \cdots \beta_s}^s = \frac{\partial^s \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{u}_{\beta_1} \cdots \partial \bar{u}_{\beta_s}}, \quad u_{\alpha, \beta_1 \cdots \beta_s}^s = \frac{\partial^s u_{\alpha}}{\partial \bar{u}_{\beta_1} \cdots \partial \bar{u}_{\beta_s}}. \quad (10.5.5)$$

定义 10.5.2 曲面 \mathbf{r} 的一阶全微分向量 $d\mathbf{r}$ 定义为

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^1 du_i, \quad (10.5.6)$$

\mathbf{r} 的高阶全微分向量定义为 $d^k \mathbf{r} = d(d^{k-1} \mathbf{r})$, 并约定 $d^0 \mathbf{r} = \mathbf{r}$.

由归纳法可得到

引理 10.5.1 当 $s > 0$ 时, 成立着关系式

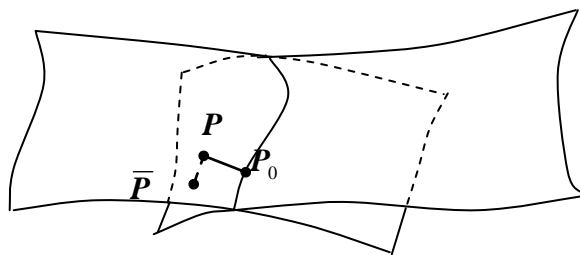


图 10.5.1 曲面 G^n 的几何意义

$$d^s \mathbf{r} = s! \sum_{k=1}^s \frac{\mathbf{r}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = s} \frac{d^{r_1} u_{\alpha_1}}{r_1!} \dots \frac{d^{r_k} u_{\alpha_k}}{r_k!} \quad (10.5.7)$$

上面和式中采用了张量运算符号，即当上下指标相同时，表示对相应的项从 1 到 N 作和。这种约定以后将不再另作说明。

由微分几何理论知道，方程 (10.5.7) 决定了 n 阶切空间向量 du_1, \dots, du_n 到 n 阶全微分向量 $d\mathbf{r}, \dots, d^n \mathbf{r}$ 的一一连续映射，并且 $d\mathbf{r}, \dots, d^n \mathbf{r}$ 是一组几何不变量，它与参数的选取无关。因此，我们有

定理 10.5.1 曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在公共边界 CB 上为 G^n 连续，当且仅当存在满秩点变换 (10.5.3)，使得

$$d^k \mathbf{r}|_{CB} = d^k \bar{\mathbf{r}}|_{CB}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (10.5.8)$$

为关于 $d^j u_i$ 的恒等式。

10.5.2 有理几何连续的一般条件

对于 \mathfrak{R}^M 中的 N 维有理曲面，可视作一个 \mathfrak{R}^{M+1} 中的 N 维曲面在某一超平面上的投影。在高一维空间中的这张曲面为原有理曲面的齐次形式。现在的目标是将有理曲面的 G^n 连续的充要条件用其齐次形式给出。按照定理 10.2.4 证明的思路，可以得到

定理 10.5.2 设 $\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}(u)/\omega(u)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}) = \bar{\mathbf{P}}(\bar{u})/\bar{\omega}(\bar{u})$ 为两张有理曲面，它们的公共边界为 CB ，则 $\mathbf{r}(u)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u})$ 在 CB 上为 G^n 连续当且仅当存在一个满秩参数变换 (10.5.3) 和一个数量函数 $e(u)$ ，使得

$$d^k \bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}(u))|_{CB} = d^k (e(u) \cdot \mathbf{Q}(u))|_{CB}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (10.5.9)$$

对于任意 $d^i u_j$ 都成立，其中 $\mathbf{Q}(u) = (\mathbf{P}(u), \omega(u))$ ， $\bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}) = (\bar{\mathbf{P}}(\bar{u}), \bar{\omega}(\bar{u}))$ 分别为 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式。

特别地，如果取 $e(u) \equiv 1$ ，则 (10.5.9) 成为 $d^k \bar{\mathbf{Q}}|_{CB} = d^k \mathbf{Q}|_{CB}$ ，即齐次曲面 $\bar{\mathbf{Q}}$ 和 \mathbf{Q} 在 CB 上为 G^n 连续。这表明如果齐次曲面本身为 G^n 连续，则有理曲面也满足 G^n 连续，但反之不然。

仔细论证定理 10.5.2，还可以发现，数量函数 $e(u)$ 可以取作 $\bar{\omega}(\bar{u}(u))/\omega(u)$ 。即有

定理 10.5.3 有理曲面 $\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}(u)/\omega(u)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}) = \bar{\mathbf{P}}(\bar{u})/\bar{\omega}(\bar{u})$ 沿它们的公共边界 CB 达到 G^n 连续的充要条件是存在满秩参数变换 (10.5.3) 使得

$$d^k \bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}(u))|_{CB} = d^k (\mathbf{Q}(u) \cdot \bar{\omega}(\bar{u}(u))/\omega(u))|_{CB}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (10.5.10)$$

为关于 $d^i u_j$ 的恒等式，其中 \mathbf{Q} ， $\bar{\mathbf{Q}}$ 分别为 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式。

类似地，还有对称形式的条件：

定理 10.5.4 有理曲面 $\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}(u)/\omega(u)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}) = \bar{\mathbf{P}}(\bar{u})/\bar{\omega}(\bar{u})$ 沿着公共边界 CB 为 G^n 的充要条件是存在变换 (10.5.3) 使得下式成立

$$d^k(\omega(u)\bar{P}(\bar{u}(u)))_{CB} = d^k(\bar{\omega}(\bar{u}(u))P(u))_{CB}, \quad k=0,1,\dots,n. \quad (10.5.11)$$

10.5.3 有理几何连续条件的求解

引理 10.5.2 假设曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{P}/\omega$ 为 $D \in \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^M$ 中的有理曲面 ($M > N$), $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}, \omega)$ 为它的齐次形式. 如果矩阵 $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u})_{M \times N}$ 的秩为 N , 则矩阵

$$\left(\mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{(M+1) \times (N+1)} = \begin{pmatrix} P_1 & \frac{\partial P_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial u_N} \\ P_2 & \frac{\partial P_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_M & \frac{\partial P_M}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial P_M}{\partial u_N} \\ \omega & \frac{\partial \omega}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial u_N} \end{pmatrix} \quad (10.5.12)$$

的秩数为 $N+1$.

证 由于 $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u})_{M \times N}$ 的秩为 N , 不妨设

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial u_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial u_N} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (10.5.13)$$

今假设存在实数 α_i , $i=0,1,\dots,N$, 使得以下两式成立:

$$\alpha_0 P_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j (\partial P_i / \partial u_j) = 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (10.5.14)$$

$$\alpha_0 \omega + \sum_{j=1}^N \alpha_j (\partial \omega / \partial u_j) = 0. \quad (10.5.15)$$

由 $r_i = P_i / \omega$ 得 $\partial P_i / \partial u_j = \omega \cdot (\partial r_i / \partial u_j) + P_i \omega^{-1} (\partial \omega / \partial u_j)$. 代入 (10.5.14), 整理后得

$$P_i \omega^{-1} \left[\alpha_0 \omega + \sum_{j=1}^N \alpha_j (\partial \omega / \partial u_j) \right] + \omega \sum_{j=1}^N \alpha_j (\partial r_i / \partial u_j) = 0.$$

注意到 (10.5.15) 以及 $\omega \neq 0$ 知 $\sum_{j=1}^N \alpha_j (\partial r_i / \partial u_j) = 0$, $i=1,2,\dots,N$. 由 (10.5.13) 知

$$\alpha_j = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \text{ 从而又有 } \alpha_0 = 0. \text{ 于是 } \det \begin{pmatrix} P_1 & \frac{\partial P_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_N & \frac{\partial P_N}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial u_N} \\ \omega & \frac{\partial \omega}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \omega}{\partial u_N} \end{pmatrix} \neq 0, \text{ 引理得证.}$$

现在我们将几何连续性问题转化为代数方程组的求解问题.

定理 10.5.5 设有理曲面 $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}})$ 有一公共边界 CB , 它对应于 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的参数方程分别为 $u_i = u_i^0(v_1, \dots, v_{N-1})$ 和 $\bar{u}_i = \bar{u}_i^0(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{N-1})$. 则 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上为 G^n 连续的充分必要条件是

对于满足

$$\det\left(\bar{p}_i^1, \frac{\partial \bar{u}_i^0}{\partial \bar{v}_j}\right) := \det \begin{pmatrix} \bar{p}_1^1 & \frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial \bar{v}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial \bar{v}_{N-1}} \\ \bar{p}_2^1 & \frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial \bar{v}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial \bar{v}_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_N^1 & \frac{\partial \bar{u}_N^0}{\partial \bar{v}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_N^0}{\partial \bar{v}_{N-1}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (10.5.16)$$

的 $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$, 下述方程组有解 $c_i(\mathbf{v})$ 和 $p_i^j(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Q}}|_{CB} &= c_0(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{Q}|_{CB}, \\ \sum_{k=1}^s \frac{\bar{\mathcal{Q}}_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}^k|_{CB}}{k!} \sum_{r_1 + \cdots + r_k = s} \frac{\bar{p}_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{\bar{p}_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!} &= c_s(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{Q}|_{CB} \\ &+ \sum_{l=1}^s c_{s-l}(\mathbf{v}) \cdot \sum_{k=1}^l \frac{\mathcal{Q}_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}^k|_{CB}}{k!} \sum_{r_1 + \cdots + r_k = l} \frac{p_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{p_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!}, \quad s \geq 1. \end{aligned} \quad (10.5.17)$$

其中 $\mathcal{Q}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathcal{Q}}(\bar{\mathbf{u}})$ 分别为 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式, 并且此时 $p_i^j(\mathbf{v})$ 满足

$$\det\left(p_i^1, \frac{\partial u_i^0}{\partial v_j}\right) \neq 0. \quad (10.5.18)$$

证 首先注意到公共边界 CB 的方程是

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(\mathbf{v}) = \mathbf{r}_0(u_1^0(v_1, \cdots, v_{N-1}), \cdots, u_N^0(v_1, \cdots, v_{N-1})), \\ \bar{\mathbf{r}}_0 &= \bar{\mathbf{r}}_0(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{r}}_0(\bar{u}_1^0(\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{N-1}), \cdots, \bar{u}_N^0(\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{N-1})). \end{aligned}$$

由 $\mathbf{r}_0 = \bar{\mathbf{r}}_0$ 及曲面的正则性假设, 知存在一个满秩变换

$$\varphi_0: \bar{v}_i = \bar{v}_i(v_1, \cdots, v_{N-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, N-1. \quad (10.5.19)$$

必要性: 对于给定的 $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$, 作参数变换

$$\psi_1: \bar{u}_i = \bar{u}_i^0(\bar{\mathbf{v}}) + \sum_{j=1}^n \bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}}) t^j / j!, \quad (10.5.20)$$

由 (10.5.16) 知变换 ψ_1 为一满秩变换. 若 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上为 G^n 连续, 则由定理 10.5.2 知存在满秩变换 $\varphi: \bar{u}_i = u_i(\mathbf{u})$ 及数量函数 $e(\mathbf{u})$, 使得 $d^s \bar{\mathcal{Q}}|_{CB} = d^s(e \cdot \mathcal{Q})|_{CB}$. 于是有

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{Q}}|_{CB} = c_0(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{Q}|_{CB}, & c_0(\mathbf{v}) = e(\mathbf{u})|_{CB}, \\ d^s \bar{\mathcal{Q}}|_{CB} = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} d^{s-j} e|_{CB} \cdot d^j \mathcal{Q}|_{CB}, & s = 1, 2, \cdots, N-1. \end{cases} \quad (10.5.21)$$

变换 φ_0 可拓广为 $\varphi_0: (v_1, \cdots, v_{N-1}, t) \rightarrow (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{N-1}, t)$, 即

$$\varphi_0: \begin{cases} \bar{v}_i = \bar{v}_i(v_1, \cdots, v_{N-1}), & i = 1, 2, \cdots, N-1, \\ t = t. \end{cases} \quad (10.5.22)$$

复合 $\varphi_0, \varphi, \psi_1$, 产生新的变换 $\varphi^{-1} \circ \psi_1 \circ \varphi_0: (v_1, \cdots, v_{N-1}, t) \rightarrow (u_1, \cdots, u_N)$, 它也是一个满秩变换, 且将 $(v_1, \cdots, v_{N-1}, 0)$ 映射为 (u_1^0, \cdots, u_N^0) . 因此

$$\frac{\partial^s \bar{\mathcal{Q}}}{\partial t^s} \Big|_{CB} = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{\partial^{s-j} e}{\partial t^{s-j}} \Big|_{CB} \cdot \frac{\partial^j \mathcal{Q}}{\partial t^j} \Big|_{CB}. \quad (10.5.23)$$

根据引理 10.5.1,

$$\left. \frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^s} \right|_{CB} = s! \sum_{k=1}^s \frac{\bar{\mathbf{Q}}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = s} \frac{\bar{p}_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{\bar{p}_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!}. \quad (10.5.24)$$

记

$$c_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i e(\mathbf{u})}{\partial t^i} \right|_{CB}, \quad p_i^j = \left. \frac{\partial^j u_i}{\partial t^j} \right|_{CB}. \quad (10.5.25)$$

对 $(\partial^j \mathbf{Q} / \partial t^j)_{CB}$ 也有类似的公式, 且 (10.5.18) 成立. 将这些式子代入 (10.5.23) 即得 (10.5.17), 从而完成了必要性证明.

充分性: 当 $n=0$ 时, $\bar{\mathbf{Q}}|_{CB} = c_0 \cdot \mathbf{Q}|_{CB}$, 结论显然成立. 因此设 $n \geq 1$. 首先用反证法证明 (10.5.18) 成立. 若不然, 则存在函数 $a^h(\mathbf{v})$, 使得 $p_i^1 = \sum_{h=1}^{N-1} a^h \frac{\partial u_i^0}{\partial v_h}$. 若记 $\bar{a}^j = \sum_{h=1}^{N-1} a^h \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_h}$, 则 $p_i^1 = \sum_{j,h,k=1}^{N-1} a^h \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_h} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \bar{v}_j} \cdot \frac{\partial u_i^0}{\partial v_k} = \sum_{j,k=1}^{N-1} \bar{a}^j \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \bar{u}_j} \cdot \frac{\partial u_i^0}{\partial v_k}$. 又当 $s=1$ 时, (10.5.17) 可改写成

$$-\frac{c_1}{c_0} \bar{\mathbf{Q}}|_{CB} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_i}{\partial \bar{u}_i} \Big|_{CB} \cdot \bar{p}_i^1 = c_0 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u_i} \Big|_{CB} \cdot p_i^1. \quad (10.5.26)$$

另外, 对 $\bar{\mathbf{Q}}|_{CB} = c_0 \cdot \mathbf{Q}|_{CB}$ 关于 \bar{v}_h 求偏导可得

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \bar{u}_i} \Big|_{CB} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i^0}{\partial \bar{v}_h} = c_0 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u_i} \Big|_{CB} \cdot \frac{\partial u_i^0}{\partial v_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \bar{v}_h} + \mathbf{Q}|_{CB} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial c_0}{\partial v_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \bar{v}_h}.$$

将上式两边乘上 \bar{a}^h , 并对 h 从 1 到 $N-1$ 作和, 得到

$$-\frac{1}{c_0} \sum_{k,h=1}^{N-1} \frac{\partial c_0}{\partial v_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \bar{v}_h} \bar{a}^h \cdot \mathbf{Q}|_{CB} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_i}{\partial \bar{u}_i} \Big|_{CB} \cdot \sum_{h=1}^{N-1} \bar{a}^h \frac{\partial \bar{u}_i^0}{\partial \bar{v}_h} = c_0 \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u_i} \Big|_{CB} \cdot p_i^1.$$

比较此式和 (10.5.26), 并注意到曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 为正则曲面, 由引理 10.5.2 知矩阵 $(\bar{\mathbf{R}}, \partial \bar{\mathbf{R}} / \partial \bar{\mathbf{u}})_{M \times N}$ 的秩

为 $N+1$, 所以 $\bar{p}_i^1 = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{a}^j \frac{\partial \bar{u}_i^0}{\partial \bar{v}_j}$, 这与 (10.5.16) 矛盾, 因此反证法的假设不成立.

现作两个非奇异变换 ψ_1 和 ψ_2 : ψ_1 由 (10.5.20) 定义, ψ_2 定义为

$$\psi_2: u_i = u_i^0(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^n p_i^j(\mathbf{v}) t^j / j!. \quad (10.5.27)$$

对给出的 $c_i(\mathbf{v})$, 构造函数 $e(\mathbf{v})$ 使得 $(\partial^i e / \partial t^i)_{CB} = c_i(\mathbf{v}) \cdot i!$. 于是由 (10.5.17) 和 (10.5.24) 得

$$\left. \frac{\partial^m \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^m} \right|_{CB} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left. \frac{\partial^{m-j} e}{\partial t^{m-j}} \right|_{CB} \cdot \left. \frac{\partial^j \mathbf{Q}}{\partial t^j} \right|_{CB} = \left. \frac{\partial^m (e \cdot \mathbf{Q})}{\partial t^m} \right|_{CB}.$$

再对此式两端关于 v_1, \dots, v_{N-1} 求偏导矢得出

$$\left. \frac{\partial^{m+1} \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t^m \partial v_{\alpha_1} \dots \partial v_{\alpha_l}} \right|_{CB} = \left. \frac{\partial^{m+1} (e \cdot \mathbf{Q})}{\partial t^m \partial v_{\alpha_1} \dots \partial v_{\alpha_l}} \right|_{CB}, \quad \begin{matrix} 0 \leq m \leq n, \\ 0 \leq l \leq n-m, \quad 1 \leq \alpha_i \leq N-1. \end{matrix}$$

由 m 和 l 的任意性, 以及全微分向量不依赖于参数选择的特性, 知 $d^k \bar{\mathbf{Q}}|_{CB} = d^k (e \cdot \mathbf{Q})|_{CB}$. 所以 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上 G^n 连续. 证毕.

对称地, 同样可以证明

定理 10.5.6 有理曲面 $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}})$ 在 CB 上为 G^n 当且仅当对于满足 (10.5.18) 的 $p_i^j(\mathbf{v})$, 存在 $c_0(\mathbf{v}), \dots, c_n(\mathbf{v})$ 使得 (10.5.17) 有解 $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$, 其中 $u_i^0, \bar{u}_i^0, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}$ 的意义如定理 10.5.5

所示, 且此时 $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$ 满足 (10.5.16).

显然, $\psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2^{-1}$ 是实现 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 为 n 阶几何连续的满秩参数变换. 系数 $c_i(\mathbf{v})$, $p_i^j(\mathbf{v})$, $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$ 为拼接函数. 对于给定的 $\bar{p}_i^j(\bar{\mathbf{v}})$, \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的几何连续问题就转化为求解 $c_i(\mathbf{v})$, $p_i^j(\mathbf{v})$. 这是一个非线性方程组. 为了解出 $c_i(\mathbf{v})$ 和 $p_i^j(\mathbf{v})$, 可将 (10.5.17) 改写成

$$\begin{cases} c_0 \mathbf{Q}|_{CB} = \bar{\mathbf{Q}}|_{CB}, \\ c_s \mathbf{Q}|_{CB} + c_0 \sum_{\alpha_1=1}^N \mathbf{Q}'_{\alpha_1}|_{CB} \cdot p_{\alpha_1}^s = \mathbf{F}^s(\mathbf{v}, \bar{p}_1^s, \dots, \bar{p}_1^1, c_{s-1}, \dots, c_0, p_i^{s-1}, \dots, p_i^1), \end{cases} \quad (10.5.28)$$

$$\mathbf{F}^s = \sum_{k=1}^s \frac{\bar{\mathbf{Q}}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k|_{CB}}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=s} \frac{\bar{p}_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{\bar{p}_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!} - \sum_{l=1}^{s-1} c_{s-l}(\mathbf{v}) \sum_{k=1}^l \frac{\mathbf{Q}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k|_{CB}}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \frac{p_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{p_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!} - c_0 \sum_{k=2}^s \frac{\mathbf{Q}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k|_{CB}}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \frac{p_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{p_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!}. \quad (10.5.29)$$

可以看出, 方程组 (10.5.28) 的左端关于 c_s , p_i^s 为线性, 且由引理 10.5.2 知其系数矩阵满秩. 因此, 判别两张曲面在公共边界上是否 G^n 连续, 可通过逐次递归检查线性方程组 (10.5.28) 是否相容; 并且如果有解, 则其解必唯一. 于是又有

定理 10.5.7 有理曲面 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上为 G^n 的充要条件是 $\mathbf{Q}|_{CB}$ 与 $\bar{\mathbf{Q}}|_{CB}$ 仅相差一个比例因子, 且由 (10.5.29) 所定义的向量 \mathbf{F}^s , $s=1, 2, \dots, n$ 位于由 $\mathbf{Q}|_{CB}$, $\mathbf{Q}'_{\alpha_1}|_{CB}$, $\alpha_1=1, 2, \dots, N$ 所张成的超平面上.

10.5.4 有理几何连续的简单形式

在前面的讨论中, 公共边界 CB 非常一般, 没有很多的限制. 现在考虑一种简单情形: CB 上的点对于 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 的参数坐标相同, 即 $u_i = \bar{u}_i$, $i=1, \dots, N$; 并且 $u_1 = \bar{u}_1 = 0$. 这种坐标有时称为公共边界 CB 的法坐标. 于是可自然地取

$$\bar{p}_i^j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j=1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (10.5.30)$$

此时条件 (10.5.16) 满足. 这样, 定理 10.5.5 就简化为

定理 10.5.8 设有理曲面 $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$ 的齐次形式分别为 $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})$, 它们的公共边界 CB 可表示成法坐标, 则 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上 G^n 连续当且仅当存在 $c_i(u_2, \dots, u_N)$ 和 $p_i^j(u_2, \dots, u_N)$, 其中 $c_0 \neq 0$, $p_1^1 \neq 0$, 使得

$$\frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \bar{u}_1^s} \Big|_{\bar{u}_1=0} = c_s \mathbf{Q}|_{u_1=0} + \sum_{l=1}^s \binom{s}{l} c_{s-l} \cdot l! \sum_{k=1}^l \frac{\mathbf{Q}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k|_{\bar{u}_1=0}}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=l} \frac{p_{\alpha_1}^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{p_{\alpha_k}^{r_k}}{r_k!}. \quad (10.5.31)$$

而且此时的几何连续变换表示成 $u_i = u_i(\bar{\mathbf{u}})$:

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{j=1}^n p_1^j(\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N) \bar{u}_1^j / j! + \Delta_1, \\ u_i = \bar{u}_i + \sum_{j=1}^n p_i^j(\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N) \bar{u}_1^j / j! + \Delta_i, \quad i=2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (10.5.32)$$

其中 Δ_i 为 $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ 的函数, 且 $\lim_{\bar{u}_1 \rightarrow 0} \Delta_i / \bar{u}_1^n = 0$.

在 CAGD 中, 所讨论的曲面大都是 \mathcal{R}^3 中含有两个参数的曲面, 即 $M=3$, $N=2$. 下面给出这种情形下曲面的几何连续条件. 首先由归纳法可证

引理 10.5.3 对于曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, 有

$$d^s \mathbf{r} = \sum_{k=1}^s \sum_{r_1+\dots+r_k=s} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{skh} \cdot d^{r_1} u \dots d^{r_h} u d^{r_{h+1}} v \dots d^{r_k} v \cdot \frac{\partial^k \mathbf{r}}{\partial u^h \partial v^{k-h}}, \quad s \geq 1. \quad (10.5.33)$$

这里

$$A_{r_1 \dots r_k}^{skh} = s! / (h!(k-h)!r_1! \dots r_k!). \quad (10.5.34)$$

于是可以得到

定理 10.5.9 有理曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 沿着公共边界 $CB: \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v}) = \mathbf{r}(0, v)$ ($v = \bar{v}$) 为 G^n 连续的充要条件是存在 $c_i(v)$, $p_i(v)$, $q_i(v)$ 使得

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}(0, \bar{v}) = c_0 \cdot \mathbf{Q}(0, v), \\ \frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}(0, \bar{v})}{\partial \bar{u}^s} = c_s \mathbf{Q}(0, v) + \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} c_{s-j}(v) \sum_{k=1}^j \sum_{r_1+\dots+r_k=j} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{jkh} p_{r_1} \dots p_{r_h} q_{r_{h+1}} \dots q_{r_k} \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_{CB}. \end{cases} \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (10.5.35)$$

其中 $c_0 \neq 0$, $p_1 \neq 0$, 且 \mathbf{Q} , $\bar{\mathbf{Q}}$ 分别为 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式.

下面考察几个低阶的几何连续条件:

- $s=0$: $\bar{\mathbf{Q}}(0, \bar{v}) = c_0 \cdot \mathbf{Q}(0, v)$.
- $s=1$: $\bar{\mathbf{Q}}'_u(0, \bar{v}) = c_1 \mathbf{Q}(0, v) + c_0 p_1 \mathbf{Q}'_u(0, v) + c_0 q_1 \mathbf{Q}'_v(0, v)$.
- $s=2$: $\bar{\mathbf{Q}}''_{uu}(0, \bar{v}) = c_2 \mathbf{Q}(0, v) + (2c_1 p_1 + c_0 p_2) \mathbf{Q}'_u(0, v) + (2c_1 q_1 + c_0 q_2) \mathbf{Q}'_v(0, v) + c_0 (p_1^2 \mathbf{Q}''_{uu}(0, v) + 2p_1 q_1 \mathbf{Q}''_{uv}(0, v) + q_1^2 \mathbf{Q}''_{vv}(0, v))$.

把以上结果与 § 10.4 中的结果相比较, 可以发现: $s=1$ 对应于切平面连续; $s=2$ 对应于曲率连续.

10.6 矩形域上有理 Bézier 曲面的 G^n 拼接

10.6.1 有理 Bézier 曲面几何连续拼接的判定

定理 10.6.1 设 $m \times n$ 次和 $\bar{m} \times n$ 次有理 Bézier 曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 由(10.4.13)定义, 则它们沿公共边界 $CB: \mathbf{r}(1, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 为 G^l ($l=1, 2, \dots, n$) 拼接的充要条件是在 CB 上成立着

$$\begin{cases} G(v) \cdot \bar{\mathbf{Q}} = H(v) \cdot \mathbf{Q}, \\ D^{2s-1} H^{s-1} \frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \bar{u}^s} = \bar{c}_s \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^s \sum_{r_1+\dots+r_k=s} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{s k h} G^{k-1} D^{k-1} \bar{p}_{r_1} \dots \bar{q}_{r_k} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \\ + \sum_{d=1}^{s-1} \binom{s}{d} \bar{c}_{s-d} \sum_{k=1}^d \sum_{r_1+\dots+r_k=d} \sum_{h=0}^d A_{r_1 \dots r_k}^{d k h} G^k D^k \bar{p}_{r_1} \dots \bar{q}_{r_k} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}}, \end{cases} \quad s=1, 2, \dots, l. \quad (10.6.1)$$

其中 G , H , D , \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 为 v 的多项式, $G(v)$, $H(v)$, $D(v)$, $\bar{p}_1(v)$ 不恒为零, 并且它们的次数如下表:

多项式	G, H	D	\bar{c}_i, \bar{p}_i	\bar{q}_i
次数 \leq	n	$3n-1$	$(2i-1)(3n-1) + (i-1)n$	$(2i-1)(3n-1) + (i-1)n + 1$

这一定理的证明与定理 10.4.3 类似, 限于篇幅而略去. 由此可知, § 10.5 中所讨论的拼接函数 c_i , p_i , q_i 此时均为有理多项式, 它们可由 H , G , D , \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 表示出来. 这样, 给出两个有理曲面 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 以及它们的公共边界 CB , 可简单地以递归方式判定它们是否达到几阶连续, 并求出相应的拼接函数.

10.6.2 有理 Bézier 曲面几何连续拼接的构造

如果将曲面和拼接函数表示成 Bernstein 多项式形式, 代入 (10.6.1), 就产生用控制顶点

和权因子表示的 G^l 条件. 通常, 这些条件包含很多参数和约束条件, 不适合实际应用, 因此经常对 G^l 条件加些限制, 产生一些比较简单、实用的充分条件. 如: 降低拼接函数次数, 要求有理曲面满足齐次位置连续等. 下面的定理就是加上这些要求而产生的.

定理 10.6.2 设有理 Bézier 曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 和 \mathbf{r} 分别为 $\bar{m} \times n$ 和 $m \times n$ 次, 如果它们在公共边界 CB : $\mathbf{r}(1, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 上满足如下条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}, \\ D^{2s-1} \frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \bar{u}^s} = \bar{c}_s \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^s \sum_{r_1+\dots+r_k=s} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{skh} D^{k-1} \bar{p}_{r_1} \dots \bar{q}_{r_k} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \\ \quad + \sum_{d=1}^{s-1} \binom{s}{d} \bar{c}_{s-d} \sum_{k=1}^d \sum_{r_1+\dots+r_k=d} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{dkh} D^k \bar{p}_{r_1} \dots \bar{q}_{r_k} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}}, \quad s=1, 2, \dots, l, \end{array} \right. \quad (10.6.2)$$

其中 $D(\neq 0)$, \bar{c}_i , $\bar{p}_i(\neq 0)$, \bar{q}_i 分别为次数不超过 σ , $(2i-1)\sigma$, $(2i-1)\sigma$, $(2i-1)\sigma+1$ 的关于 v 的多项式, σ 为在 $[0, 3n-1]$ 中取值的整数, 那么 \mathbf{r} 和 $\bar{\mathbf{r}}$ 在 CB 上为 G^l 连续, $l=1, 2, \dots, n$.

作为一个特例, 考虑 $\sigma=0$ 情形, 此时 D , \bar{c}_i , \bar{p}_i 均为常数, \bar{q}_i 为线性多项式. 不妨设 $D(v) \equiv 1$, $\bar{c}_i = \gamma_i$, $\bar{p}_i = \alpha_i$ ($\alpha_i \neq 0$), $\bar{q}_i = \beta_i^0(1-v) + \beta_i^1 v$, 于是条件 (10.6.2) 变为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}(0, v) = \mathbf{Q}(1, v), \quad \frac{\partial^s \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \bar{u}^s} \Big|_{CB} &= \gamma_s \mathbf{Q} \Big|_{CB} + \sum_{d=1}^s \binom{s}{d} \gamma_{s-d} \sum_{k=1}^d \sum_{r_1+\dots+r_k=d} \sum_{h=0}^k A_{r_1 \dots r_k}^{dkh} \cdot \{\alpha_{r_1} \dots \alpha_{r_h} \\ &\quad \times (\beta_{r_{h+1}}^0(1-v) + \beta_{r_{h+1}}^1 v) \dots (\beta_{r_k}^0(1-v) + \beta_{r_k}^1 v)\} \frac{\partial^k \mathbf{Q}}{\partial u^h \partial v^{k-h}} \Big|_{CB}, \quad s=1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

注意到 $B_{i_1}^{l_1}(v) \dots B_{i_s}^{l_s}(v) = B_{i_1+\dots+i_s}^{l_1+\dots+l_s}(v) \binom{l_1}{i_1} \dots \binom{l_s}{i_s} / \binom{l_1+\dots+l_s}{i_1+\dots+i_s}$ 和 Bernstein 基函数的独立性,

由上式可以得到与曲面 \mathbf{r} 沿 CB 达 G^l 连续的曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 的前 $l+1$ 排控制顶点:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{0i} &= \mathbf{Q}_{mi}, \quad i=0, 1, \dots, n; \\ \bar{\mathbf{Q}}_{si} &= -\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} (-1)^{s-j} \bar{\mathbf{Q}}_{ji} + \frac{(\bar{m}-s)!}{m!} \left[\gamma_s \mathbf{Q}_{mi} + \sum_{d=1}^s \sum_{k=1}^d \sum_{r_1+\dots+r_k=d} \sum_{h=0}^k \sum_{j=0}^{l-k+h} \sum_{i_{h+1}=0}^1 \dots \sum_{i_k=0}^1 \binom{s}{d} A_{r_1 \dots r_k}^{dkh} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{m!}{(m-h)!} \cdot \frac{l!}{(l-k+h)!} \cdot \binom{l-k+h}{j} / \binom{l}{i} \right) \gamma_{s-d} \alpha_{r_1} \dots \alpha_{r_h} \beta_{r_{h+1}}^{i_{h+1}} \dots \beta_{r_k}^{i_k} \Delta_1^h \Delta_2^{k-h} \mathbf{Q}_{m-h, j} \right], \\ &\quad s=1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

这里参数 γ_i , α_i , β_i^0 , β_i^1 可自由选取. 修改这些参数, 可以调整 $\bar{\mathbf{r}}$ 的形状, 但不会改变其与 \mathbf{r} 的几何连续阶.

10.7 三角域和矩形域上有理 Bézier 曲面的拼接

三角域上的 Bézier 曲面也是一类常见的曲面形式, 尤其在设计任意拓扑网格上的曲面时, 三角片的作用就显得更为突出. 这一节简单地给出三角片及矩形片之间的有理几何连续拼接, 其基本思想和推导方法与矩形域情形相似, 具体证明中需使用方向导数.

定理 10.7.1 假设 $\mathbf{r}(u, v)$ 和 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$ 为矩形域或三角域上的有理 Bézier 曲面片, 它们在公共边界 CB : $\mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 上满足齐次位置连续, 即 $\mathbf{Q}(0, v) = \bar{\mathbf{Q}}(0, \bar{v})$, 其中 \mathbf{Q} , $\bar{\mathbf{Q}}$ 为 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 的齐次形式, 则 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 为 G^n 连续当且仅当 (10.6.1) 成立, 其中 $D(\neq 0)$, $\bar{c}_i(v)$, $\bar{p}_i(v)$, $\bar{q}_i(v)$ 为 v 的多项式, 它们的次数如下表:

次数 \leq	三角片 $\bar{\mathbf{r}}:l$ 次 三角片 $\mathbf{r}:l$ 次	矩形片 $\bar{\mathbf{r}}:\bar{m} \times l$ 次 三角片 $\mathbf{r}:l$ 次	三角片 $\bar{\mathbf{r}}:l$ 次 矩形片 $\mathbf{r}:m \times l$ 次
多项式 D	$3l-2$	$3l-2$	$3l-1$
多项式 \bar{c}_i	$(2i-1)(3l-2)-i$	$(2i-1)(3l-2)$	$(2i-1)(3l-1)-i$
多项式 \bar{p}_i	$(2i-1)(3l-2)+1-i$	$(2i-1)(3l-2)+1$	$(2i-1)(3l-1)-i+1$
多项式 \bar{q}_i	$(2i-1)(3l-2)+1-i$	$(2i-1)(3l-2)+1$	$(2i-1)(3l-1)-i+1$

这一定理的证明与定理 10.4.3 完全类似, 不再赘述. 通常, 拼接函数 $D(v)$, $\bar{c}_i(v)$, $\bar{p}_i(v)$, $\bar{q}_i(v)$ 包含很多可调参数和约束方程. 就实际应用而言, 一些充分条件更为实用. 下面就是两张三角片满足 G^n 的一个充分条件.

定理 10.7.2 三角域上 l 次有理 Bézier 曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 沿公共边界 $CB: \mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ ($0 \leq v = \bar{v} \leq 1$) 为 G^n 的一个充分条件是存在关于 v 的多项式 $D(\neq 0)$, \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 使得 (10.6.1) 成立, 其中 D , \bar{c}_i , \bar{p}_i , \bar{q}_i 的次数分别不超过 σ , $(2i-1)\sigma-i$, $(2i-1)\sigma+1-i$ 和 $(2i-1)\sigma+1-i$, σ 为 0 到 $3l-2$ 间的一个固定整数, 并约定次数小于 0 的多项式为 0.

应用上述定理, 特别, 让 $\sigma = 0$, 则 D , \bar{p}_1 , \bar{q}_1 为常数, 其余拼接函数全为零. 因此不妨设 $D=1$, $\bar{p}_1 = \alpha(\neq 0)$, $\bar{q}_1 = \beta$, α 、 β 为任选的参数. 例如, 设曲面 \mathbf{r} 与 $\bar{\mathbf{r}}$ 表示为

$$\mathbf{r}: \mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i+j \leq l} (l!/(i!j!(l-i-j)!)) u^i v^j (1-u-v)^{l-i-j} (\omega_{ij} \mathbf{R}_{ij}, \omega_{ij}),$$

$$\bar{\mathbf{r}}: \bar{\mathbf{Q}}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i+j \leq l} (l!/(i!j!(l-i-j)!)) \bar{u}^i \bar{v}^j (1-\bar{u}-\bar{v})^{l-i-j} (\bar{\omega}_{ij} \bar{\mathbf{R}}_{ij}, \bar{\omega}_{ij}),$$

如果曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 的控制顶点和权按下列式子构造:

- $\bar{\omega}_{0i} = \omega_{0i}$, $\bar{\mathbf{R}}_{0i} = \mathbf{R}_{0i}$,
- $\bar{\omega}_{1i} = \alpha \omega_{1i} + \beta \omega_{0,i+1} + \gamma \omega_{0i}$, $\bar{\mathbf{R}}_{1i} = (\alpha \omega_{1i} \mathbf{R}_{1i} + \beta \omega_{0,i+1} \mathbf{R}_{0,i+1} + \gamma \omega_{0i} \mathbf{R}_{0i}) / \bar{\omega}_{1i}$,
- $\bar{\omega}_{2i} = \alpha \omega_{2i} + \beta \bar{\omega}_{1,i+1} + \gamma \bar{\omega}_{1i}$, $\bar{\mathbf{R}}_{2i} = (\alpha \omega_{2i} \mathbf{R}_{2i} + \beta \bar{\omega}_{1,i+1} \bar{\mathbf{R}}_{1,i+1} + \gamma \bar{\omega}_{1i} \bar{\mathbf{R}}_{1i}) / \bar{\omega}_{2i}$,

其中

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta, \quad \omega_d = \alpha \omega_{2i} + \beta \omega_{1,i+1} + \gamma \omega_{1i},$$

$$\mathbf{R}_d = (\alpha \omega_{2i} \mathbf{R}_{2i} + \beta \omega_{1,i+1} \mathbf{R}_{1,i+1} + \gamma \omega_{1i} \mathbf{R}_{1i}) / \omega_d,$$

则曲面 $\bar{\mathbf{r}}$ 与 \mathbf{r} 在 $CB: \mathbf{r}(0, v) = \bar{\mathbf{r}}(0, \bar{v})$ 上曲率连续. 这个构造十分直观, 参见图 10.7.1.

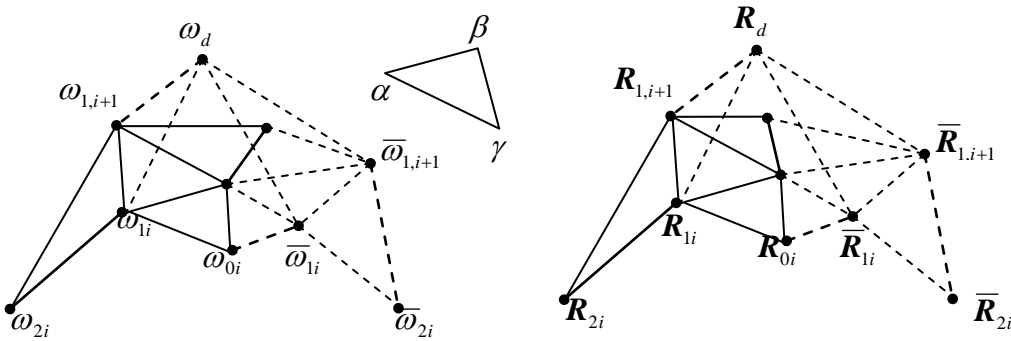


图 10.7.1 G^2 连续的三角片构造

主要文献

- [LYD, 90] 梁友栋, 曲线曲面几何连续性问题, 数学年刊, 1990, 11A(3): 374-386
 [LYD, YXZ, 89] 梁友栋, 叶修梓, 曲线几何连续性及其应用, 计算数学, 1989, 11(4): 394-404
 [ZJM, 92] 郑建民, 曲面造型中的有理连续性和求交的研究, 浙江大学博士学位论文, 1992

年 5 月, 杭州

[ZJM, WGZ, LYD, 92] Zheng Jianmin, Wang Guozhao, Liang Youdong, Curvature continuity between adjacent rational Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design*, 1992, 9(5): 321-335

[ZJM, WGZ, LYD, 95] Zheng Jianmin, Wang Guozhao and Liang Youdong, GC^n continuity conditions for adjacent rational parametric surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1995, 12(2): 111-129

[ZJM, 93] 郑建民, 三角域上有理 Bézier 曲面的曲率连续拼接, *浙江大学学报(自然科学版)*, 1993, 27(5): 621-633

[ZJM, WGZ, JTG, 94] 郑建民, 汪国昭, 金通洸, 三角域上有理参数曲面的几何连续条件, *高等学校计算数学学报*, 计算几何专辑, 1993, 120-127

参考文献

- 1 Nielson, G., CAGD's top ten: what to watch, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1993, 13(1): 35-37
- 2 Dyn, N., Micchelli, C., Piecewise polynomial spaces and geometric continuity of curves, *Numerische Mathematik*, 1988, 54(3): 319-337
- 3 Goldman, R., Micchelli, C., Algebraic aspects of geometric continuity, in: Lyche, T. and Schumaker, L., eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, 1989
- 4 Habib, A., Goldman, R., Notions of geometric continuity based on geometric invariants, in: Daehlen, M., Lyche, T., Schumaker, L. eds., *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Vanderbilt University Press, 1995
- 5 Pottmann, H., Projectively invariant classes of geometric continuity for CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, 1989, 6(4): 307-321
- 6 Barsky, B., DeRose, T., Geometric continuity of parametric curves: three equivalent characterizations, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1989, 9(6): 60-68
- 7 Barsky, B., The beta-spline: a local representation based on shape parameters and fundamental geometric measures, Ph.D. Thesis, University Of Utah, Salt Lake City, Utah, 1981
- 8 Gregory, J., Geometric continuity, in: Lyche, T. and Schumaker, L., eds., *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, 1989
- 9 刘鼎元, Bézier 曲面片光滑连接的几何条件, *应用数学学报*, 1986, 9(4): 432-442
- 10 Barsky, B., DeRose, T., Geometric continuity of parametric curves: constructions of geometrically continuous splines, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1990, 10(1): 60-68
- 11 Farin, G., A construction for visual C^1 continuity of polynomial surface patches, *Computer Graphics and Image Processing*, 1982, 20(3): 272-282
- 12 Kahmann, J., Continuity of curvature between adjacent Bézier patches, in: Barnhill, R.E. and Boehm, W. eds., *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, The Netherlands, 1983
- 13 Veron, M, Ris, G, Musse, J.P., Continuity of biparametric surface patches, *Computer Aided Design*, 1976, 8(4): 267-273
- 14 Hahn, J., Geometric continuous patch complexes, *Computer Aided Geometric Design*, 1989, 6(1): 55-67
- 15 Liu, D., Hoschek, J., GC^1 continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches, *Computer Aided Design*, 1989, 21(4): 194-200
- 16 Liu, D., GC^1 continuity conditions between two adjacent rational Bézier surface patches, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 7(1-4): 151-163
- 17 叶修梓, 梁友栋, Bézier 曲面间几何连续拼接与拼接曲面构造, *数学年刊*, 1991, 12A(3): 316-324
- 18 DeRose, T., Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 7(1-4): 165-179
- 19 Ye, X., Liang, Y., Nowacki, H., Geometric continuity between adjacent Bézier patches and their constructions, *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(6): 521-548
- 20 Kiciak, P., Conditions for geometric continuity between polynomial and rational surface patches, *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(8): 709-741
- 21 吴怀军, 计算机辅助几何设计中连续性算法的研究与实现, 清华大学博士学位论文, 1997 年 5 月, 北京
- 22 Du, W.H., Schmitt, F., On the G^1 continuity of piecewise Bézier surfaces: a review with new results, *Computer Aided Design*, 1990, 22(9): 556-573
- 23 Jones, A., Nonrectangular surface patches with curvature continuity, *Computer Aided Design*, 1988, 20(6): 325-335
- 24 Sarraga, R., G^1 interpolation of generally unrestricted cubic Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1987, 4(1): 23-39
- 25 Herron, G., Smooth closed surfaces with discrete triangular interpolants, *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(4): 297-306
- 26 Nielson, G., Some piecewise polynomial alternatives to splines under tension, in: Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R. F., eds., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, 1974
- 27 Spivak, M., *Differential Geometry*, Publish or Perish Inc., Boston, 1975
- 28 Barnhill, R., Surfaces in computer aided geometric design: a survey with new results, *Computer Aided*

-
- Geometric Design, 1985, 2 (1-3): 1-17
- 29 Watkin, M., Problems in geometric continuity, Computer Aided Design, 1988, 20 (8): 499-502
 - 30 Veltkamp, R., Survey of continuity of curves and surfaces, Computer Graphics Forum, 1992, 11(2): 93-112
 - 31 Goodman, T.N.T., Properties of beta-splines, Journal of Approximation Theory, 1985, 44(2): 132-153
 - 32 Hohmeyer, M. and Barsky, B., Rational continuity: parametric, geometric, and Frenet frame continuity of rational curves, ACM Transactions on Graphics, 1989, 8(4): 335-359