

# 第十七章 区间曲线与区间曲面

区间曲线与区间曲面(Interval curve/surface)是数值分析领域内作为误差分析主要工具的区间分析<sup>[1]</sup>方法在 CAGD 中的应用与推广. 八十年代中期, Mudur<sup>[2]</sup>和 Toth<sup>[3]</sup>在几何处理中开始使用区间算法. 1992 年, Sederberg 和 Farouki<sup>[4]</sup>首次提出区间 Bézier 曲线的概念, 正式把区间分析引入计算机辅助设计. 区间曲线曲面的研究至少出于以下三方面的实际需要: (1) CAD/CAM 系统和实体造型系统中以求交运算为主的几何操作的可靠性与稳定性. 曲线曲面求交的多种算法一度偏重于追求速度和效率, 然而后来发现, 由于数学模型所刻划的连续的有无穷多个点所组成的几何实体在计算机中只能被表示成离散的有限个点的集合, 同时算法采用的是精度有限的浮点算术, 因而实际求交计算往往丢失交点, 从而导致物体拓扑结构的改变. 特别当曲线曲面相切或部分重合时问题更显严重<sup>[5]</sup>, 若用区间点(向量值区间)的集合来表示曲线曲面, 就可保证求交等几何操作的稳定性. (2) 计算机图形学和机器人学中物体运动路径设计和碰撞检测的正确性与合理性. 从区间分析的观点来看, 质点的运动路径是一个被称为区间点的小长方体的扫掠轨迹, 这样就避免了运动物体之间碰撞的漏检. (3) 计算机辅助产品测量和计算机辅助工艺计划编制(CAPM/CAPP)的科学性与先进性. 按图纸加工出来的产品外壳曲面和切割线, 或代表标准模型的样本曲面, 只是落在以基准曲面曲线为中心的变动区域中, 这一区域在机械工程上称为形位公差带. 如何用 CAGD 的语言和手段来描述它, 使之规范化, 是 CAPM/CAPP 的当务之急. 而区间曲线曲面作为一种几何误差带, 正是刻划形位公差理想工具之一.[WGJ et al, 2000].

1993 年, Maekawa 和 Patrikalakis<sup>[6,7]</sup>在非线性系统的求解算法中引用了区间算法; 1992 年, Snyder<sup>[8]</sup>和 Duff<sup>[9]</sup>在计算机图形学的碰撞检测、可视化等问题中应用了区间算法; 1996 年, Hu 等<sup>[5,10,11]</sup>在 CAD 杂志连续发表三篇文章, 利用区间分析技术在改进曲线曲面求交、实体造型和可视化的稳定性方面做了一系列的工作; 近年来, 陈效群<sup>[12]</sup>利用区间曲线逼近等距曲线和有理曲线, 陈发来<sup>[13]</sup>研究了区间曲线的降阶逼近. 然而关于区间曲线曲面还有许多基本理论问题需要研究:

1. 为了用区间曲线曲面代替参数曲线曲面来求交, 必须研究区间曲线曲面的边界结构.
2. Offset (等距) 曲线/曲面由于结构复杂, 不能被 CAD/CAM 系统进行有效的处理, 但同样具有带状/壳状区域的区间曲线/曲面, 其边界结构相对简单, 可被通用的 CAD/CAM 系统来有效处理. 那么, 是否可用后者来代替前者进行运算, 而最终还原回前者? 如果可以的话, 该如何代替? 又该如何还原?
3. 区间曲面有哪些基本性质? 其中心表达形式和边界结构怎样? 如何利用区间曲面来表达和计算曲面的几何逼近, 例如可微参数曲面的 Taylor 逼近, 有理曲面的多项式逼近?

本章系统地介绍我们围绕以上问题开展研究的理论成果. 其中第 1 节内容取材于[SHH, WGJ, 98a]; 第 2 节内容取材于[SHH, WGJ, 98b]; 第 3 节和第 4 节内容取材于[LLG, WGJ, SHH, 2000], [WGJ, CGD, LLG, SHH, 2000].

## 17.1 区间 Bézier 曲线的边界

### 17.1.1 区间算术和区间点算术

区间是指有界闭区间  $[a, b] = \{t \mid a \leq t \leq b\}$ .  $a, b$  相等时  $a = [a, a]$  被称为一个退化的区间. 给定两个区间  $[a, b]$  和  $[c, d]$ , 区间算术定义为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} [a, b] * [c, d] = \{x * y \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}, * \in \{+, -, \times, \div\}, \\ [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \quad [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c], (0 \notin [c, d]). \end{cases} \quad (17.1.1)$$

数与区间的加法和乘法运算定义为<sup>[1]</sup>:

$$\lambda + [a, b] = [\lambda + a, \lambda + b], \quad \lambda[a, b] = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b], & \lambda \geq 0; \\ [\lambda b, \lambda a], & \lambda < 0. \end{cases} \quad (17.1.2)$$

区间点是实数区间的张量积. 如  $\mathfrak{R}^2$  中的区间点为  $[P] = ([a, b], [c, d]) = [a, b] \otimes [c, d]$ ,

其图形表示为  $\mathfrak{R}^2$  中的一个矩形.  $\mathfrak{R}^3$  中的区间点为  $[P] = ([a, b], [c, d], [e, f]) = [a, b] \otimes [c, d] \otimes [e, f]$ , 其图形表示为  $\mathfrak{R}^3$  中的一个长方体. 在  $\mathfrak{R}^2$  中, 设  $[P_1] = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$ ,  $[P_2] = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$ , 区间点的加法定义为:  $[P_1] + [P_2] = ([a_1 + a_2, b_1 + b_2], [c_1 + c_2, d_1 + d_2])$ , 数乘定义为:  $\lambda[P] = (\lambda[a, b], \lambda[c, d]) = ([\lambda a, \lambda b], [\lambda c, \lambda d]), \lambda \geq 0$ .

### 17.1.2 $n$ 次区间 Bézier 曲线及其边界

**定义 17.1.1** 设  $[P_i] = ([a_i, b_i], [c_i, d_i])$ ,  $B_i^n(t)$  为  $n$  次 Bernstein 基, 则称

$$[P](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) [P_i], \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (17.1.3)$$

为  $n$  次区间 Bézier 曲线. 其几何意义是: 所有控制顶点落在矩形域  $[P_i]$  内的  $n$  次 Bézier 曲线的全体组成的一条带子(见图 17.1.1 和 17.1.2).

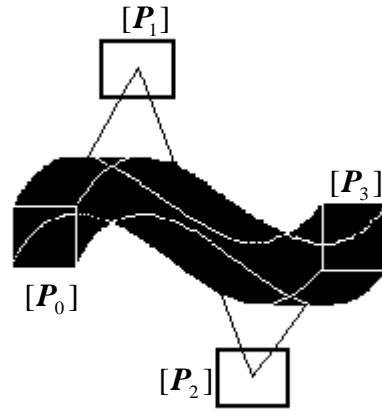
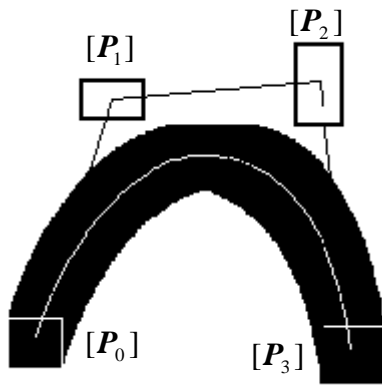


图 17.1.1 三次区间 Bézier 曲线的边界 (情形 1)

图 17.1.2 三次区间 Bézier 曲线的边界 (情形 2)

#### 定义 17.1.2

$$[P_k] = ([a_k, b_k], [c_k, d_k]) = \tilde{P}_k + e_k[i], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.1.4)$$

称为二维区间点  $[P_k]$  的中心表达形式, 其中点向量  $\tilde{P}_k = (a_k + b_k, c_k + d_k)/2$  称为  $[P_k]$  的中心, 向量  $e_k = (b_k - a_k, d_k - c_k)/2$  称为  $[P_k]$  的误差, 其分量非负,  $[i] = [-1, +1]$ .

#### 定义 17.1.3

$$[P](t) = \tilde{P}(t) + e(t)[i], \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (17.1.5)$$

称为区间 Bézier 曲线(17.1.3)的中心表达形式, 其中

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \tilde{P}_i = (x(t), y(t)), \quad e(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) e_i = (dx(t), dy(t)). \quad (17.1.6)$$

**定理 17.1.1**  $n$  次区间 Bézier 曲线(17.1.3)的边界必由分段  $n$  次 Bézier 曲线和平行于坐标轴的直线段所构成.

证 由定义 17.1.2 和 17.1.3 可知, 一条区间 Bézier 曲线可由两条 Bézier 曲线, 即一条中心曲线  $\tilde{P}(t)$  和一条误差曲线  $e(t)$  所决定. 在时刻  $t$ ,  $[P](t)$  表示了一个中心在  $\tilde{P}(t)$ , 长宽由  $e(t)$  决定的这么一个矩形; 当  $t$  从 0 变到 1 时, 上述矩形的长宽随  $e(t)$  而变化, 且其中心  $\tilde{P}(t)$  沿中心曲线而运动, 由此产生的矩形的运动轨迹就构成了  $n$  次区间 Bézier 曲线这个带形区域, 所以其边界必由此矩形的边界运动生成.

易知此矩形为:  $([x(t) - dx(t), x(t) + dx(t)], [y(t) - dy(t), y(t) + dy(t)])$ , 其四个角点可分别记为: 左上角点  $P_1(t) = (x(t) - dx(t), y(t) + dy(t)) = (x_-(t), y_+(t))$ , 右上角点

$P_2(t) = (x_+(t), y_+(t))$ , 左下角点  $P_3(t) = (x_-(t), y_-(t))$ , 右下角点  $P_4(t) = (x_+(t), y_-(t))$ .

四个角点运动的轨迹是四条  $n$  次 Bézier 曲线. 我们先考虑区间 Bézier 曲线的上边界. 显然它必由连接左上角点和右上角点的线段即矩形的上边界运动生成, 由于左上角点的运动轨迹是一条连续光滑、分段单调的  $n$  次 Bézier 曲线, 它最多只有  $n-1$  个极值点, 所以我们不妨设它是先单调增加至参数  $t_0$  处达到极大值, 然后单调下降至  $t_1$  处达到极小值, 再单调上升至  $t_2$  处取得极大值, ... 如图 17.1.3 所示. 于是区间 Bézier 曲线的上边界先是由左上角点运动生成的一段  $n$  次 Bézier 曲线  $P_1(t)$  (从  $t=0$  到  $t=t_0$  这一段), 然后是一段平行于  $x$  轴的直线段  $y = y_+(t_0), x_-(t_0) \leq x \leq x_+(t_0)$ , 接下去是一段由右上角点运动生成的  $n$  次 Bézier 曲线  $P_2(t)$  (从  $t=t_0$  到  $t=t'_0$  这一段). 这里假设  $t=t'_0$  时的右上角点  $P_2(t)$  与  $t=t'_1$  时的左上角点  $P_1(t)$  重合, 即  $(x_+(t'_0), y_+(t'_0)) = (x_-(t'_1), y_+(t'_1))$ ,  $t'_0 < t_1 < t'_1$ . 事实上此点为右上角点运动生成的  $n$  次 Bézier 曲线  $P_2(t)$  从  $t_0$  到  $t_1$  这一段与左上角点运动生成的  $n$  次 Bézier 曲线  $P_1(t)$  从  $t_1$  到  $t_2$  这一段的交点. 再接下去是一段由左上角点运动生成的  $n$  次 Bézier 曲线  $P_1(t)$  (从  $t=t'_1$  到  $t=t_2$  这一段), 如此循环往复, 所以区间 Bézier 曲线的上边界必由分段  $n$  次 Bézier 曲线和平行于水平轴的直线段组成.

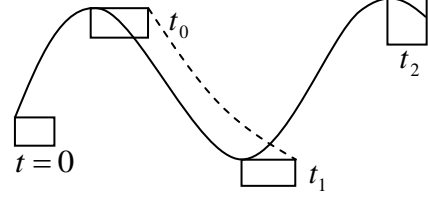


图 17.1.3 区间 Bézier 曲线的上边界

同理可证  $n$  次区间 Bézier 曲线的下边界、左边界、右边界均由分段  $n$  次 Bézier 曲线和平行于坐标轴的直线段构成, 证毕.

### 17.1.3 二次区间 Bézier 曲线的边界分段表示

为给出二次区间 Bézier 曲线边界的分段表示式, 先设控制顶点  $[P_i] = (x_i, y_i) + (dx_i, dy_i)[i]$ ,  $i = 0, 1, 2$ . 为简化符号, 记  $x_{i\pm} = x_i \pm dx_i, y_{i\pm} = y_i \pm dy_i$ ,  $g_\alpha(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) g_{i\alpha}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $g = x, y$ ,  $\alpha = +, -$ . 若  $2g_{1\alpha} - g_{0\alpha} - g_{2\alpha} \neq 0$ , 则由  $g'_\alpha(t) = 0$ , 可解得:  $t^{g\alpha} = (g_{1\alpha} - g_{0\alpha}) / (2g_{1\alpha} - g_{0\alpha} - g_{2\alpha})$ , 如果  $t^{g\alpha} \notin [0, 1]$ , 则舍去.

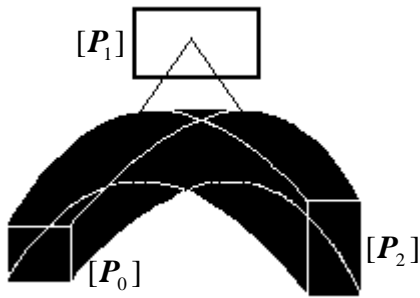


图 17.1.4 二次区间 Bézier 曲线的边界 (情形 1)

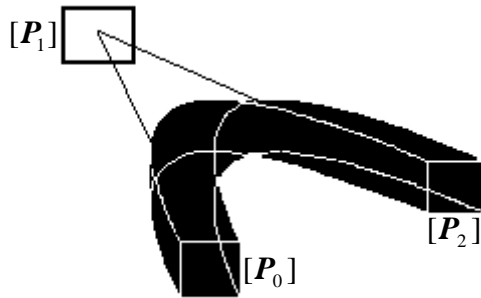


图 17.1.5 二次区间 Bézier 曲线的边界 (情形 2)

先考虑第一种情形. 不失一般性, 假设  $y_{1-} > y_{0+}, y_{1-} > y_{2+}, x_{0+} < x_{1-}, x_{1+} < x_{2-}$ , 如图 17.1.4 所示. 则此二次区间 Bézier 曲线  $[P](t)$  的边界可以表示为:

$$Be1 \cup Ln1 \cup Be2 \cup Ln2 \cup Ln3 \cup Be3 \cup Be4 \cup Ln4 \cup Ln5,$$

其中  $Be1: P_1(t), (0 \leq t \leq t^{y+})$ ;  $Be2: P_2(t), (t^{y+} \leq t \leq 1)$ ;  $Be3: P_3(t), (t_1 \leq t \leq 1)$ ;  $Be4: P_4(t), (0 \leq t \leq t_2)$  为四条二次 Bézier 曲线.  $Ln1: y = y_+(t^{y+}), (x_-(t^{y+}) \leq x \leq x_+(t^{y+}))$ ;  $Ln2: x = x_{2+}, (y_{2-} \leq y \leq y_{2+})$ ;  $Ln3: y = y_{2-}, (x_{2-} \leq x \leq x_{2+})$ ;  $Ln4: y = y_{0-}, (x_{0-} \leq x \leq x_{0+})$ ;

$Ln5: x = x_{0-}, (y_{0-} \leq y \leq y_{0+})$  为五条平行于坐标轴的直线段. 这里  $t_1, t_2$  满足  $P_3(t_1) = P_4(t_2)$ , 可利用文献[14]中所述的各种 Bézier 曲线求交算法求得.

再考虑第二种情形. 假设  $x_{1+} < x_{0-}, x_{0+} < x_{2-}, y_{1-} > y_{0+}, y_{1-} > y_{2+}$ , 如图 17.1.5 所示. 则此二次区间 Bézier 曲线  $[P](t)$  的边界可以表示为:

$Be1 \cup Ln1 \cup Be2 \cup Ln2 \cup Be3 \cup Ln3 \cup Ln4 \cup Be4 \cup Be5 \cup Be6 \cup Ln5 \cup Ln6$ , 其中  $Be1: P_3(t), (0 \leq t \leq t^{x-})$ ;  $Be2: P_1(t), (t^{x-} \leq t \leq t^{y+})$ ;  $Be3: P_2(t), (t^{y+} \leq t \leq 1)$ ;  $Be4: P_3(t), (t_3 \leq t \leq 1)$ ;  $Be5: P_4(t), (t_2 \leq t \leq t_4)$ ;  $Be6: P_2(t), (0 \leq t \leq t_1)$  为六条二次 Bézier 曲线.  $Ln1: x = x_-(t^{x-}), (y_-(t^{x-}) \leq y \leq y_+(t^{x-}))$ ;  $Ln2: y = y_+(t^{y+}), (x_-(t^{y+}) \leq x \leq x_+(t^{y+}))$ ;  $Ln3: x = x_{2+}, (y_{2-} \leq y \leq y_{2+})$ ;  $Ln4: y = y_{2-}, (x_{2-} \leq x \leq x_{2+})$ ;  $Ln5: x = x_{0+}, (y_{0-} \leq y \leq y_{0+})$ ;  $Ln6: y = y_{0-}, (x_{0-} \leq x \leq x_{0+})$  为六条平行于坐标轴的直线段. 这里  $t_1, t_2, t_3, t_4$  满足  $P_2(t_1) = P_4(t_2), P_3(t_3) = P_4(t_4)$ , 可由一般 Bézier 曲线求交算法求得.

二次区间 Bézier 曲线的边界除了以上二种基本形态以外, 还有一些特殊的形状, 例如当  $[P_0]$  缩为一点时的情形. 限于篇幅在此不再列举.

#### 17.1.4 三次区间 Bézier 曲线的边界分段表示

应用与上一小节类似的方法, 我们可得到三次区间 Bézier 曲线的边界分段表示. 共分四种基本形态, 其中情形 1 如图 17.1.1 所示, 边界曲线由四条三次 Bézier 曲线和五条平行于坐标轴的直线段构成; 情形 2 如图 17.1.2 所示, 边界曲线由六条三次 Bézier 曲线和六条平行于坐标轴的直线段构成; 情形 3 如图 17.1.6 所示, 边界曲线由八条三次 Bézier 曲线和七条平行于坐标轴的直线段构成; 情形 4 如图 17.1.7 所示, 边界曲线由十二条三次 Bézier 曲线和七条平行于坐标轴的直线段构成.

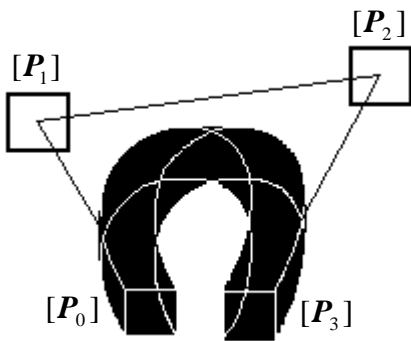


图 17.1.6 三次区间 Bézier 曲线的边界(情形 3)

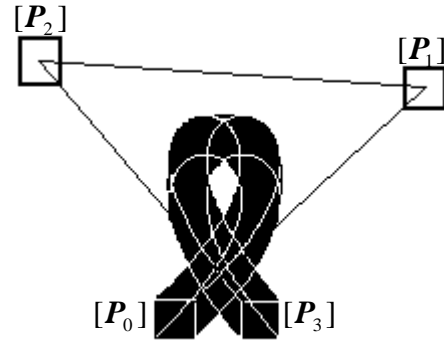


图 17.1.7 三次区间 Bézier 曲线的边界(情形 4)

## 17.2 区间 Bézier 曲线与 Offset 曲线之间的关系

**定理 17.2.1** 对距离为  $d$ , 基曲线为  $n$  次 Bézier 曲线  $P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 的 Offset 曲线带 (记为  $OFC$ ), 必有两条  $n$  次区间 Bézier 曲线

$$IBC1: [P]_1(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \left[ P_i + \left( \sqrt{2}d/2, \sqrt{2}d/2 \right) i \right], \quad (17.2.1)$$

$$IBC2: [P]_2(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) [P_i + (d, d) i], \quad (17.2.2)$$

使  $IBC1 \subset OFC \subset IBC2$ , 且以上  $IBC1, IBC2$  是最佳的.

证 显然  $OFC$  是一个中心在点  $P(t)$ , 半径为  $d$  的圆盘, 沿基曲线  $P(t)$  运动而成的带状区域.

而区间 Bézier 曲线  $[P](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)[P_i + (dx_i, dy_i)[i]]$  可看成是一个中心在点  $P(t)$ ，水平方向长  $2dx = 2\sum_{i=0}^n B_i^n(t)dx_i$ ，垂直方向高  $2dy = 2\sum_{i=0}^n B_i^n(t)dy_i$  的矩形，沿着中心曲线  $P(t)$  运动而生成一个带状区域。在任何一个时刻  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )，由于矩形  $\Pi_1: (x(t), y(t)) + (\sqrt{2}d/2, \sqrt{2}d/2)[i] \subset$  圆盘  $\Gamma: (X-x(t))^2 + (Y-y(t))^2 \leq d^2 \subset$  矩形  $\Pi_2: (x(t), y(t)) + (d, d)[i]$ ，如图 17.2.1 所示，所以  $IBC1 \subset OFC \subset IBC2$ 。显然  $IBC1, IBC2$  是最佳的，它们无法再改进。证毕。

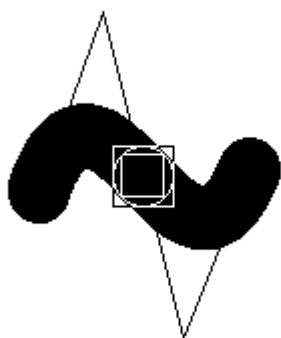


图 17.2.1 Offset 曲线介于两条区间 Bézier 曲线之间

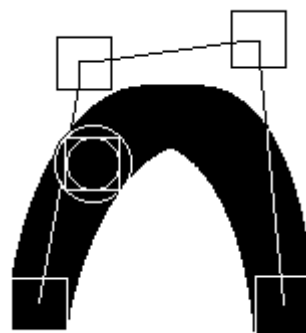


图 17.2.2 Offset 曲线介于两条区间 Bézier 曲线之间

**定理 17.2.2** 对  $n$  次区间 Bézier 曲线（记为  $IBC$ ） $[P](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)[P_i]$  ( $0 \leq t \leq 1$ )，其中  $[P_i] = (x_i, y_i) + (dx_i, dy_i)[i]$ ， $dx_i > 0, dy_i > 0$ ，必存在两条基曲线同为  $P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)(x_i, y_i)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 的 Offset 曲线带：

$$OFC1: \text{距离 } d_1 = \min_{0 \leq i \leq n} \{\min\{dx_i, dy_i\}\}, \quad (17.2.3)$$

$$OFC2: \text{距离 } d_2 = \left( \left( \max_{0 \leq i \leq n} dx_i \right)^2 + \left( \max_{0 \leq i \leq n} dy_i \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (17.2.4)$$

使  $OFC1 \subset IBC \subset OFC2$ 。

证 在时刻  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )，形成  $[P](t)$  的矩形域为  $\Pi: (x(t), y(t)) + (dx(t), dy(t))[i]$ ，其中  $g(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)g_i$ ， $dg(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)dg_i$ ， $g = x, y$ ； $dg(t) \geq \min_{0 \leq i \leq n} \{dg_i\} \geq d_1$ ， $g = x, y$ ，可得  $\min\{dx(t), dy(t)\} \geq d_1$ ，从而圆盘  $\Gamma_1: (X-x(t))^2 + (Y-y(t))^2 \leq d_1^2 \subset$  矩形  $\Pi$ 。又由  $\sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2} \leq d_2$ ，可得矩形  $\Pi \subset$  圆盘  $\Gamma_2: (X-x(t))^2 + (Y-y(t))^2 \leq d_2^2$ ，如图 17.2.2 所示，所以  $OFC1 \subset IBC \subset OFC2$ 。证毕。

### 17.3 区间 Bézier 曲面及其中心表达形式和边界结构

**定义 17.3.1** 给定  $\mathbb{R}^3$  中  $(m+1) \times (n+1)$  个区间点  $[P_{ij}]$  ( $i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$ )，称下列张量积形式的区间参数曲面

$$[P](u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) [P_{ij}], \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (17.3.1)$$

为  $m \times n$  次区间 Bézier 曲面， $[P_{ij}]$  为其区间控制顶点。

对任何  $(u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]$ , 区间 B ézier 曲面上的一点  $[P](u, v)$  为空间的一个区间点, 并且对任何控制顶点满足  $p_{ij} \in [P_{ij}], i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$  的 B ézier 曲面  $p(u, v)$  有  $p(u, v) \subset [P](u, v)$ ; 整个  $m \times n$  次区间 B ézier 曲面(17.3.1)定义了所有控制顶点满足以上要求的  $m \times n$  次 B ézier 曲面  $p(u, v)$  的一个集合, 是一个空间区域, 它可以认为是一张带有“厚度”的 B ézier 曲面. 图 17.3.1 表示一张双三次区间 B ézier 曲面的生成过程.

B ézier 曲面的许多算法和性质, 如 de Casteljau 算法、离散算法、升阶算法、变差缩减性质和凸包性质等, 都可以推广到区间 B ézier 曲面. 特别地, 应用以下关于区间 B ézier 曲面的中心表达形式可以很容易地得到以上性质.

### 定义 17.3.2

$$[P_k] = ([a_k, b_k], [c_k, d_k], [e_k, f_k]) = \tilde{P}_k + e_k[i], \quad k = 0, 1, \dots \quad (17.3.2)$$

称为三维区间点  $[P_k]$  的中心表达形式, 其中  $\tilde{P}_k = (a_k + b_k, c_k + d_k, e_k + f_k)/2$  称为区间点的中心点,  $e_k = (b_k - a_k, d_k - c_k, f_k - e_k)/2$  称为区间点的误差向量, 其分量非负,  $[i]$  为区间  $[-1, 1]$ .

### 定义 17.3.3

$$[P](u, v) = \tilde{P}(u, v) + e(u, v)[i], \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (17.3.3)$$

称为区间 B ézier 曲面(17.3.1)的中心表达形式, 其中

$$\tilde{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \tilde{P}_{ij}, \quad e(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) e_{ij}. \quad (17.3.4)$$

上述定义表明区间 B ézier 曲面  $[P](u, v)$  可以分解成两部分: 一张中心 B ézier 曲面  $\tilde{P}(u, v)$  和一张误差 B ézier 曲面  $e(u, v)$ , 其中  $e(u, v)$  的控制顶点  $e_{ij}$  全部位于第一象限. 不难看出,  $\tilde{P}(u, v)$  描述了  $[P](u, v)$  的空间位置和形状,  $e(u, v)$  则描述了  $[P](u, v)$  的“厚度”范围.

为剖析区间 B ézier 曲面 (17.3.1) 的边界结构, 我们利用 (17.3.3), 设

$$\tilde{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad e(u, v) = (dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v)), \quad (17.3.5)$$

$$\underline{g}(u, v) = g(u, v) - dg(u, v), \quad \bar{g}(u, v) = g(u, v) + dg(u, v), \quad g = x, y, z. \quad (17.3.6)$$

对任意  $(u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]$ , 定义长方体

$$[B](u, v) = [\underline{x}(u, v), \bar{x}(u, v)] \otimes [\underline{y}(u, v), \bar{y}(u, v)] \otimes [\underline{z}(u, v), \bar{z}(u, v)]. \quad (17.3.7)$$

由定义 17.3.3 可知, 在时刻  $u, v$ ,  $[P](u, v)$  表示一个中心在  $\tilde{P}(u, v)$ , 长、宽、高分别为  $dx(u, v)$ 、 $dy(u, v)$ 、 $dz(u, v)$  的长方体  $[B](u, v)$ . 当  $u, v$  在  $[0, 1] \otimes [0, 1]$  内变动时, 上述长方体的中心沿中心曲面  $\tilde{P}(u, v)$  运动, 其长  $dx(u, v)$ 、宽  $dy(u, v)$ 、高  $dz(u, v)$  随  $e(u, v)$  的变化而变化, 由此产生的长方体  $[B](u, v)$  的运动轨迹就构成了  $[P](u, v)$  的壳状区域, 且其边界必由此长方体  $[B](u, v)$  的边界  $\partial[B](u, v)$  运动而产生. 换言之, 区间 B ézier 曲面  $[P](u, v)$  为长方体  $[B](u, v)$  在空间扫过的轨迹  $\{[B](u, v) | (u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]\}$ , 其边界包含于集合

$$\bigcup_{(u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]} \partial[B](u, v).$$

基于以上的分析, 我们可给出

**定理 17.3.1**  $m \times n$  次区间 B ézier 曲面 (17.3.1) 的边界必由分片裁剪(Trimmed)形式的  $m \times n$  次 B ézier 曲面片, 母线平行于坐标轴的柱面片和平行于坐标平面的矩形平面片构成.

证 先考虑区间 B ézier 曲面的上边界, 显然它必由长方体  $[B](u, v)$  的上边界, 即上矩形片

$$R_T(u, v): \underline{x}(u, v) \leq x \leq \bar{x}(u, v), \underline{y}(u, v) \leq y \leq \bar{y}(u, v), z = \bar{z}(u, v) \quad (17.3.8)$$

运动生成, 此上矩形片的四个角点为  $(\underline{x}(u, v), \underline{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$ ,  $(\underline{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$ ,  $(\bar{x}(u, v), \underline{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$ ,  $(\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$ . 四个角点的运动轨迹是四片  $m \times n$  次 B ézier 曲面片, 它们两两相交, 互相裁剪成为分片裁剪  $m \times n$  次 B ézier 曲面片. 如果交线不在区间 B ézier 曲面的上边界上, 则在此交线之上必是由上矩形片的四条边界直线之一作为母线

运动而成的柱面片，且母线平行于  $x$  轴或  $y$  轴；特别当  $\bar{z}(u, v)$  在  $(u_0, v_0)$  处取得极大值时，形成平行于坐标平面  $xOy$  的矩形平面片  $R_T(u_0, v_0)$ 。总之， $m \times n$  次区间 Bézier 曲面(17.3.1)的上边界必由分片裁剪  $m \times n$  次 Bézier 曲面片，母线平行于  $x$  轴或  $y$  轴的柱面片和平行于坐标平面  $xOy$  的矩形平面片组成。

同理可证曲面(17.3.1)的下边界，左边界，右边界，前边界和后边界均由分片裁剪  $m \times n$  次 Bézier 曲面片，母线平行于坐标轴的柱面片和平行于坐标平面的矩形平面片组成。证毕。

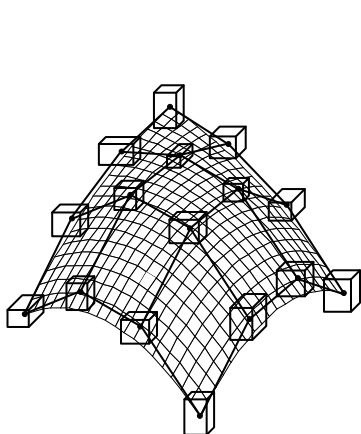


图 17.3.1 双三次区间 Bézier 曲面的生成过程

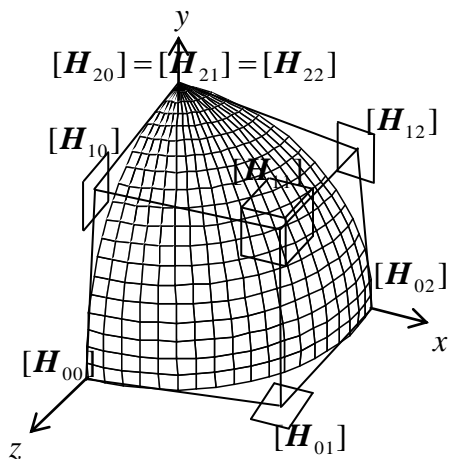


图 17.5.1 八分之一球面的区间 Bézier 逼近

## 17.4 区间 Bézier 曲面与 Offset 曲面之间的关系

**定理 17.4.1** 对距离为  $d$ ，基曲面为  $m \times n$  次 Bézier 曲面  $P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij}$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) 的 Offset 曲面片 (记为  $OFS$ )，必有两张  $m \times n$  次区间 Bézier 曲面：

$$IBS1: [P]_1(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) [P_{ij} + (\sqrt{3}d/3, \sqrt{3}d/3, \sqrt{3}d/3)[i]], \quad (17.4.1)$$

$$IBS2: [P]_2(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) [P_{ij} + (d, d, d)[i]], \quad (17.4.2)$$

使  $IBS1 \subset OFS \subset IBS2$ ，且上述  $IBS1, IBS2$  是最佳的。

证  $OFS$  是一个中心在点  $P(u, v)$ ，半径为  $d$  的球体沿基曲面  $P(u, v)$  运动而成的壳体区域。而

区间 Bézier 曲面  $[P](u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) [P_{ij} + (dx_{ij}, dy_{ij}, dz_{ij})[i]]$  可看成是一个中心在

点  $P(u, v)$ ， $g$  轴方向长  $2dg = 2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) dg_{ij}$ ， $g = x, y, z$  的长方体，沿基曲面

$P(u, v)$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) 运动而成的壳体区域。在任一时刻  $(u, v)$ ， $0 \leq u, v \leq 1$ ，由于长方体  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + (\sqrt{3}d/3, \sqrt{3}d/3, \sqrt{3}d/3)[i] \subset$  球体  $(X - x(u, v))^2 + (Y - y(u, v))^2 + (Z - z(u, v))^2 \leq d^2 \subset$  长方体  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + (d, d, d)[i]$ ，所以，我们必有  $IBS1 \subset OFS \subset IBS2$ ，显然  $IBS1, IBS2$  是最佳的，它们无法再改进。证毕。

**定理 17.4.2** 对  $m \times n$  次区间 Bézier 曲面 (记为  $IBS$ )  $[P](u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) [P_{i,j}]$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ )，其中  $[P_{ij}] = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) + (dx_{ij}, dy_{ij}, dz_{ij})[i]$ ， $dx_{ij} > 0, dy_{ij} > 0, dz_{ij} > 0$ ，必

存在如下这样两张 Offset 曲面片，它们的基曲面同为  $\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$   
 $= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (0 \leq u, v \leq 1)$ :

$$OFS1: \text{距离 } d_1 = \min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \{dx_{ij}, dy_{ij}, dz_{ij}\}, \quad (17.4.3)$$

$$OFS2: \text{距离 } d_2 = \left[ \left( \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} dx_{ij} \right)^2 + \left( \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} dy_{ij} \right)^2 + \left( \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} dz_{ij} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (17.4.4)$$

使  $OFS1 \subset IBS \subset OFS2$ .

证 容易看出，在时刻  $(u, v)$ ， $0 \leq u, v \leq 1$ ，形成区间 Bézier 曲面  $[\mathbf{P}](u, v)$  的立方体为

$$\Omega: (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + (dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v))[\mathbf{i}], \quad g(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) g_{ij},$$

$$dg(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) dg_{ij}, \quad g = x, y, z. \quad \text{由 } dg(u, v) \geq \min_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \{dg_{ij}\} \geq d_1, \quad g = x, y, z,$$

可得  $\min \{dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v)\} \geq d_1$ ，从而球体  $(X - x(u, v))^2 + (Y - y(u, v))^2 + (Z - z(u, v))^2 \leq d_1^2 \subset \text{立方体 } \Omega$ 。又由  $\sqrt{(dx(u, v))^2 + (dy(u, v))^2 + (dz(u, v))^2} \leq d_2$ ，可得立方体  $\Omega \subset \text{球体 } (X - x(u, v))^2 + (Y - y(u, v))^2 + (Z - z(u, v))^2 \leq d_2^2$ ，所以  $OFS1 \subset IBS \subset OFS2$ 。证毕。

## 17.5 区间 Bézier 曲面逼近

### 17.5.1 利用区间 Bézier 曲面对可微参数曲面作 Taylor 逼近

设  $\mathbf{p}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$  为定义在  $[0, 1] \otimes [0, 1]$  上的  $n$  次可微张量积曲面，取  $\mathbf{p}(u, v)$  在点  $(0, 0)$  的  $n-1$  阶 Taylor 展开的部分和为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n-1}(u, v) &= (X_{n-1}(u, v), Y_{n-1}(u, v), Z_{n-1}(u, v)) \\ &= \mathbf{p}(0, 0) + \left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right) \mathbf{p}(0, 0) + \frac{1}{2!} \left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \mathbf{p}(0, 0) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right)^{n-1} \mathbf{p}(0, 0), \end{aligned} \quad (17.5.1)$$

其中

$$\left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right)^l \mathbf{p}(0, 0) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \frac{\partial^l \mathbf{p}(0, 0)}{\partial u^k \partial v^{l-k}} u^k v^{l-k}, \quad l = 1, 2, \dots, n-1. \quad (17.5.2)$$

则有

$$g(u, v) = G_{n-1}(u, v) + \frac{1}{n!} \left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right)^n g(\xi_g, \eta_g), \quad (17.5.3)$$

$$g = x, y, z; \quad G_{n-1} = X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1}; \quad (\xi_g, \eta_g) \in [0, 1] \otimes [0, 1].$$

由闭区间上连续函数的性质，知必存在  $g_{\min}^{(n)}, g_{\max}^{(n)}$ ，使得

$$\partial^n g(u, v) / (\partial u^i \partial v^{n-i}) \in [g_{\min}^{(n)}, g_{\max}^{(n)}], \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (u, v) \in [0, 1] \otimes [0, 1]; \quad g = x, y, z. \quad (17.5.4)$$

定义如下形式的向量值区间

$$[\mathbf{p}^{(n)}] = [x_{\min}^{(n)}, x_{\max}^{(n)}] \otimes [y_{\min}^{(n)}, y_{\max}^{(n)}] \otimes [z_{\min}^{(n)}, z_{\max}^{(n)}], \quad (17.5.5)$$

我们就可得出



**定理 17.5.1** 空间一张  $n$  次可微曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  可以用  $n \times n$  次区间多项式曲面

$$[\mathbf{P}](u, v) = \mathbf{P}_{n-1}(u, v) + (u + v)^n [\mathbf{p}^{(n)}] / n! \quad (17.5.6)$$

或  $n \times n$  次区间 Bézier 曲面

$$[\mathbf{P}](u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) [\mathbf{P}_{ij}] \quad (17.5.7)$$

来逼近, 其中  $\mathbf{P}_{n-1}(u, v), [\mathbf{p}^{(n)}]$  分别如(17.5.1), (17.5.5)所示, 且

$$[\mathbf{P}_{ij}] = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^l \frac{1}{l!} \binom{l}{k} \frac{\partial^l \mathbf{p}(0, 0)}{\partial u^k \partial v^{l-k}} f_{ik} f_{j, l-k} + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\mathbf{p}^{(n)}] f_{ik} f_{j, n-k}. \quad (17.5.8)$$

$$f_{ij} = \begin{cases} i!(n-j)! / ((i-j)!n!) & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (17.5.9)$$

证 仅需证 (17.5.7). 由 (1.6.11) 知  $(1, t, \dots, t^n) = (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) (f_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$ , 所以

$t^j = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) f_{ij}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . 由此有  $u^k, v^{l-k}$  的 Bernstein 表示, 从而(17.5.7)成立. 证毕.

必须指出, (17.5.6) 中仅有  $n$  次项的系数非退化区间, (17.5.7) 中仅  $i + j \geq n$  时即矩阵  $(\mathbf{P}_{ij})$  的反下三角阵部分非退化区间. 作为实例, 应用定理 17.5.1, 对曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  作一阶 Taylor 展开可得到其  $2 \times 2$  次区间 Bézier 逼近(17.5.7), 其中

$$([\mathbf{P}_{ij}]) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u / 2 & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_v + [\mathbf{p}'] \\ \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u / 2 & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u / 2 + \mathbf{p}_v / 2 + [\mathbf{p}'] / 2 & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u / 2 + \mathbf{p}_v + 2[\mathbf{p}'] \\ \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u + [\mathbf{p}'] & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u + \mathbf{p}_v / 2 + 2[\mathbf{p}'] & \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_u + \mathbf{p}_v + 4[\mathbf{p}'] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0, 0), \quad \mathbf{p}_u = \partial \mathbf{p}(0, 0) / \partial u, \quad \mathbf{p}_v = \partial \mathbf{p}(0, 0) / \partial v.$$

## 17.5.2 利用区间 Bézier 曲面对有理曲面作多项式逼近

在 § 12.11 和 § 12.12.1, 我们已经把  $m \times n$  次有理 Bézier 曲面 (12.11.1) 表成  $(r + p) \times (s + q)$  次的 Hybrid 曲面(12.11.2), 即

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{H}^{r, p; s, q}(u, v) = \mathbf{H}^*(u, v) + \mathbf{H}(u, v), \quad (17.5.10)$$

这里  $\mathbf{H}(u, v)$  为(12.12.5)右端三项中各被减向量之和, 且

$$\mathbf{H}^*(u, v) = \sum_{i=0}^{r+p} \sum_{j=0}^{s+q} B_i^{r+p}(u) B_j^{s+q}(v) \mathbf{M}_{ij}^{r, p; s, q}, \quad (17.5.11)$$

即当  $i = r$  或  $j = s$  时,  $\mathbf{H}_{ij}^{r, p; s, q}(u, v)$  为移动控制顶点; 当  $i \neq r$  且  $j \neq s$  时,  $\mathbf{H}_{ij}^{r, p; s, q} = \mathbf{M}_{ij}^{r, p; s, q}(u, v)$  为固定控制顶点.

将(17.5.10)中各移动控制顶点  $\mathbf{H}_{ij}^{r, p; s, q}(u, v)$  的包围盒取为区间点, 记为  $[\mathbf{H}_{ij}]$ , 则得到

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u, v) \in [\mathbf{H}](u, v) &= \sum_{i=0}^{r+p} \sum_{j=0}^{s+q} B_i^{r+p}(u) B_j^{s+q}(v) \mathbf{M}_{ij}^{r, p; s, q} + \sum_{i=0}^{r+p} B_i^{r+p}(u) B_s^{s+q}(v) [\mathbf{H}_{is}] \\ &+ \sum_{j=0}^{s+q} B_r^{r+p}(u) B_j^{s+q}(v) [\mathbf{H}_{rj}] + B_r^{r+p}(u) B_s^{s+q}(v) [\mathbf{H}_{rs}]. \end{aligned} \quad (17.5.12)$$

**定理 17.5.2**  $m \times n$  次有理曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  可用  $(r + p) \times (s + q)$  次的区间 Bézier 曲面  $[\mathbf{H}](u, v)$  来逼近, 如(17.5.12)所示, 其区间控制顶点网格中仅在第  $r + 1$  行 ( $i = r$ ) 或第  $s + 1$  列 ( $j = s$ ) 时为非退化区间顶点.

作为实例, 考察单位球面在第一卦限内部分的双二次区间 Bézier 逼近. 先按例 7.6.1 将其表为双二次有理 Bézier 曲面(7.4.2), 其中  $m = n = 2$ ,  $\omega_{ij} = g_i h_j$ ,

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (R_{ij}) = \begin{pmatrix} (0,0,1) & (1,0,1) & (1,0,0) \\ (0,1,1) & (1,1,1) & (1,1,0) \\ (0,1,0) & (0,1,0) & (0,1,0) \end{pmatrix}.$$

用 § 12.11 中的计算方法, 可求得这一球面片的  $(1+1) \times (1+1)$  次的 Hybrid 曲面表示, 从而得到它的双二次区间 Bézier 逼近(17.5.12), 见图 17.5.1, 其中区间控制顶点为

$$([H_{ij}]) = \begin{pmatrix} (0,0,1) & ([0.7,1],0,[0.7,1]) & (1,0,0) \\ (0,[0.7,1],[0.7,1]) & ([0.5,1],[0.7,1],[0.5,1]) & ([0.7,1],[0.7,1],0) \\ (0,1,0) & (0,1,0) & (0,1,0) \end{pmatrix}.$$

### 主要文献

- [WGJ, CGD, LLG, SHH, 2000] 王国瑾, 陈国栋, 刘利刚, 寿华好, 形位公差的计算几何模型, 中国学术期刊文摘, 2000, 6(2): 197-200
- [SHH, WGJ, 98a] 寿华好, 王国瑾, 区间 Bézier 曲线的边界, 高校应用数学学报, 1998, 13A(增刊): 37-44
- [SHH, WGJ, 98b] 寿华好, 王国瑾, 区间曲线曲面与 Offset 曲线曲面的关系, 工程图学学报, 1998, 19(3): 55-59
- [LLG, WGJ, SHH, 2000] 刘利刚, 王国瑾, 寿华好, 区间 Bézier 曲面逼近, 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(9): 645-650

### 参考文献

- 1 Moore, R.E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966
- 2 Mudur, S.P., Koparkar, P.A., Interval methods for processing geometric objects, *IEEE Computer Graphics and its Applications*, 1984, 4(2): 7-17
- 3 Toth, D.L., On ray tracing parametric surfaces, *Computer Graphics*, 1985, 19(3): 171-179
- 4 Sederberg, T.W., Farouki, R.T., Approximation by interval Bézier curves, *IEEE Computer Graphics and its Applications*, 1992, 12(5): 87-95
- 5 Hu, C.Y., Maekawa, T., Sherbrooke, E.C., Patrikalakis, N.M., Robust interval algorithm for curve intersections, *Computer Aided Design*, 1996, 28(6-7): 495-506
- 6 Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Computation of singularities and intersections of offsets of planar curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1993, 10(5): 407-429
- 7 Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Interrogation of differential geometry properties for design and manufacture, *The Visual Computer*, 1994, 10(4): 216-237
- 8 Snyder, J.M., Interval analysis for computer graphics, *Computer Graphics*, 1992, 26(2): 121-130
- 9 Duff, T., Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry, *Computer Graphics*, 1992, 26(2): 131-138
- 10 Hu, C.Y., Patrikalakis, N.M., Ye, X.Z., Robust interval solid modeling-Part I: Representations, *Computer Aided Design*, 1996, 28(10): 807-817
- 11 Hu, C.Y., Patrikalakis, N.M., Ye, X.Z., Robust interval solid modeling-Part II: Boundary evaluation, *Computer Aided Design*, 1996, 28(10): 819-830
- 12 陈效群, 区间 Bézier 曲线曲面造型, 中国科学技术大学博士学位论文, 1999 年 4 月, 合肥
- 13 Chen, F.L., Lou, W.P., Degree reduction of interval Bézier curves, *Computer Aided Design*, 2000, 32(10): 571-582
- 14 Sederberg, T.W., Parry, S.R., Comparison of three curve intersection algorithms, *Computer Aided Design*, 1986, 18(1): 58-63