

## 第二章 B 样条曲线

前章已展示了 Bézier 曲线的许多优美性质，这一章将研究 B 样条曲线，它既拥有 Bézier 曲线的几何特性，又拥有形状局部可调及连续阶数可调等 Bézier 曲线所没有的特性。它是 1974 年 Gordon 和 Riesenfeld<sup>[1]</sup>把 B 样条函数推广到矢值形式而得来的，这与先提出 Bézier 曲线，到后来才发现它就是 Bernstein 多项式矢值形式的过程有所不同。deBoor<sup>[2,3][DBC,78]</sup>，Cox<sup>[4]</sup>，Boehm<sup>[BW,80][5-7]</sup>，Cohen<sup>[8]</sup>和 Prautzsch<sup>[9]</sup>都对 B 样条曲线的理论作出了积极的贡献。本章除以下指明的各节外，内容均取材于[WGJ, WGZ, 99]；而第 2 节内容取材于[LYD, 82]；第 4 节内容取材于[DBC, 78]；第 8 节内容取材于[BW, 80]；第 10 节内容取材于[WGJ, WGZ, 99]，[LW, LYD, 90]；第 11 节内容取材于[WJY, WGZ, PQS, 84]。

### 2.1 B 样条基函数的递推定义及其性质

**定义 2.1.1**<sup>[2,4][DBC,78]</sup> 给定参数  $t$  轴的一个分割  $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$ , 用下列递推方式所确定的函数  $N_{i,k}(t) = N_i^{k-1}(t)$  称为相应于分割  $T$  的  $k$  阶 (Order  $k$ ) 即  $k-1$  次 (Degree  $k-1$ ) B 样条基函数:

$$\begin{cases} N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

这里规定，凡出现  $0/0$  的项均为 0。上式称为 deBoor—Cox 公式， $T$  称为节点序列或节点向量， $t_i$  称为节点 (Knot)；且若  $t_{j-1} < t_j = t_{j+1} = \dots = t_{j+l-1} < t_{j+l}$ ，则称  $t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+l-1}$  为  $T$  的  $l$  重节点。

由以上定义可得出 B 样条基函数的如下性质。

**性质 2.1.1** 正性 (Positivity) 与局部支柱性 (Local support):

$$N_{i,k}(t) \begin{cases} > 0, & t \in (t_i, t_{i+k}), \\ = 0, & t \notin [t_i, t_{i+k}]. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

换言之，当节点向量固定时，在同一节点区间  $(t_i, t_{i+1})$  上，只有  $k$  个  $k$  阶 B 样条基函数  $N_{i-k+1,k}(t), N_{i-k+2,k}(t), \dots, N_{i,k}(t)$  为正，其余均为零。至于在  $t_i$  或  $t_{i+k}$  处，若  $N_{i,k}(t)$  在此点连续，则其值为零；否则取右极限值为其值。

证  $k=1$  时由 (2.1.1) 知 (2.1.2) 为真。假设对  $k=l-1$ ，(2.1.2) 为真，把  $N_{i,l}(t)$  按 (2.1.1) 表为  $l-1$  阶函数的线性组合，则当  $t \in (t_i, t_{i+l})$  时， $N_{i,l-1}(t), N_{i+1,l-1}(t)$  均非负且至少有一为正，且线性组合的系数均为正，从而  $N_{i,l}(t) > 0$ ；当  $t \notin [t_i, t_{i+l}]$  时， $N_{i,l-1}(t) = N_{i+1,l-1}(t) = 0$ ，于是  $N_{i,l}(t) = 0$ 。由归纳法得证 (2.1.2)。

**性质 2.1.2** 权性 (Weighting property):

$$\sum_{i=r-(k-1)}^{s-1} N_{i,k}(t) \equiv \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) \equiv 1, \quad t \in (t_r, t_s), \quad s > r. \quad (2.1.3)$$

证  $k=1$  时显然为真，若  $k=l-1$  时为真，则应用 (2.1.1) 和 (2.1.2) 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=r-(l-1)}^{s-1} N_{i,l}(t) &= \frac{t-t_{r-l+1}}{t_r-t_{r-l+1}} N_{r-l+1,l-1}(t) + \sum_{i=r-(l-2)}^{s-1} \left( \frac{t-t_i}{t_{i+l-1}-t_i} + \frac{t_{i+l}-t}{t_{i+l}-t_{i+1}} \right) N_{i,l-1}(t) \\ &\quad + \frac{t_{s+l-1}-t}{t_{s+l-1}-t_s} N_{s,l-1}(t) = 0 + 1 + 0 = 1, \quad t \in (t_r, t_s); \end{aligned}$$

于是由归纳法及性质 2.1.1 得证 (2.1.3)。

**性质 2.1.3** 分段多项式 (Piecewise/Segmented polynomial) 性质:  $N_{i,k}(t)$  在每一非零区间  $(t_j, t_{j+1})$  上是次数不超过  $k-1$  的多项式. 当  $k=2$  时是山形折线, 当  $k>2$  时是山形曲线.

**性质 2.1.4** 微分—差分公式:

$$N'_{i,k}(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t). \quad (2.1.4)$$

证  $k=2$  时按(2.1.1)易知(2.1.4)为真, 假设  $k=l-1$  时, (2.1.4)为真, 则由(2.1.1),

$$\begin{aligned} N'_{i,l}(t) &= \frac{1}{t_{i+l-1}-t_i} [(t-t_i)N'_{i,l-1}(t) + N_{i,l-1}(t)] + \frac{-1}{t_{i+l}-t_{i+1}} [(t_{i+l}-t)N'_{i+1,l-1}(t) - N_{i+1,l-1}(t)] \\ &= \frac{1}{t_{i+l-1}-t_i} \left\{ (l-2) \left( \frac{t-t_i}{t_{i+l-2}-t_i} N_{i,l-2}(t) + \frac{t_{i+l-1}-t}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) \right) - \frac{l-2}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) \right. \\ &\quad \times [(t_{i+l-1}-t) + (t-t_i)] + N_{i,l-1}(t) \left. \right\} + \frac{1}{t_{i+l}-t_{i+1}} \left\{ \frac{l-2}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) [(t_{i+l}-t) + (t-t_{i+1})] \right. \\ &\quad \left. - (l-2) \left( \frac{t_{i+l}-t}{t_{i+l}-t_{i+2}} N_{i+2,l-2}(t) + \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) \right) - N_{i+1,l-1}(t) \right\} \\ &= \frac{l-2+1}{t_{i+l-1}-t_i} N_{i,l-1}(t) - \frac{l-2}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) + \frac{l-2}{t_{i+l-1}-t_{i+1}} N_{i+1,l-2}(t) - \frac{l-2+1}{t_{i+l}-t_{i+1}} N_{i+1,l-1}(t), \end{aligned}$$

于是  $k=l$  时(2.1.4)为真, 由归纳法知本性质成立.

**性质 2.1.5**<sup>[LYD,82]</sup> B 样条基函数及其  $r$  阶导数的一般递推公式:

$$N_{i,k}^{(r)}(t) = \frac{k-1}{k-r-1} \left( \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}^{(r)}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}^{(r)}(t) \right), r=0,1,\dots,k-2. \quad (2.1.5)$$

证  $r=0$  时(2.1.5)即(2.1.1), 假设(2.1.5)对求导次数是  $r-1$  时为真, 两端求导可得

$$N_{i,k}^{(r)}(t) = \frac{k-1}{k-r} \left[ \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}^{(r-1)}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}^{(r-1)}(t) + \frac{N_{i,k-1}^{(r-1)}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{-N_{i+1,k-1}^{(r-1)}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}} \right].$$

由(2.1.4)知上式括号内后两项之和等于  $N_{i,k}^{(r)}(t)/(k-1)$ , 代入整理即知(2.1.5)对求导次数是  $r$  时为真, 于是(2.1.5)得证.

**性质 2.1.6** 可退化性: 若取节点为  $t_{i-k+2}=t_{i-k+3}=\dots=t_i < t_{i+1}=t_{i+2}=\dots=t_{i+k-1}$ ,  $\tau=(t-t_i)/(t_{i+1}-t_i) \in [0,1]$ , 则  $N_{j,k}(t) = B_{j-i+k-1}(\tau)$ ,  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ,  $j=i-k+1, i-k+2, \dots, i$ ; 即定义在两端均为  $k-1$  重节点的子区间上的  $k$  个  $k$  阶 B 样条基必退化为  $k-1$  次 Bernstein 基, 其证与性质 2.6.3 之证类似, 一般的证明见 §4.4.3.

## 2.2 B 样条曲线的包络生成及几何定义

**定义 2.2.1** 假设  $\{p_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^3$ ,  $N_{i,k}(t)$  是相应于参数  $t$  轴上不均匀分割  $T = \{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$  的  $k$  阶 B 样条基函数, 则称

$$p(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) p_i, \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}, \quad n \geq k \quad (2.2.1)$$

为相应于节点向量  $T$  的  $k$  阶 ( $k-1$  次) 非均匀 (Non-uniform) B 样条曲线, 称  $p_i$  为控制顶点, 称  $p_1 p_2 \dots p_n$  为控制多边形或 B 网.

由性质 2.1.1, 在每个节点区间  $(t_j, t_{j+1})$  上只有  $k$  个基函数  $N_{j-k+1,k}(t), N_{j-k+2,k}(t), \dots, N_{j,k}(t)$  非 0. 所以  $[t_j, t_{j+1})$  上对应着用以上基函数对  $k$  个控制顶点作加权平均所形成的一段曲线, 首末段曲线用到的基函数分别是  $N_{1,k}(t), \dots; \dots, N_{n,k}(t)$ , 因而与区间  $[t_j, t_{j+1})$  相应的

$j = k, n$ ，最后得到(2.2.1)的定义区间 $[t_k, t_{n+1}]$ 。反之，由定义区间也能确定和式的上下限。

上述定义缺乏直观的几何意义。下面我们对和式(2.2.1)进行分析，把它表为低阶非均匀 B 样条曲线族的包络，从而来诱导出非均匀 B 样条曲线新的直观的几何意义。

假设  $k \geq 3$ 。首先考察在  $[t_j, t_{j+1})$  ( $t_j < t_{j+1}$ ) 内的一段子曲线：

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=j-k+1}^j N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i, \quad j = k, k+1, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

由定义 2.1.1 和性质 2.1.1 可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \sum_{i=j-k+1}^j \left( \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right) \mathbf{p}_i \\ &= \sum_{i=j-k+2}^j N_{i,k-1}(t) \left( \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_i + \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_{i-1} \right), \quad t_j \leq t < t_{j+1}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

现在按上式构造以  $\tau$  为族参数的  $k-1$  阶非均匀 B 样条曲线族

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau) &= \sum_{i=j-k+2}^j N_{i,k-1}(t) \mathbf{p}_i^{[1]}(\tau), \quad t_j \leq t, \tau < t_{j+1}, \\ \mathbf{p}_i^{[1]}(\tau) &= \frac{t_{i+k-1}-\tau}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{\tau-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_i, \quad t_j \leq \tau < t_{j+1}; \quad i = j-k+2, j-k+3, \dots, j. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

这里，B 样条曲线族的控制顶点  $\mathbf{p}_i^{[1]}(\tau)$  是  $k$  阶非均匀 B 样条曲线(2.2.2)的控制多边形  $\mathbf{p}_{j-k+1} \mathbf{p}_{j-k+2} \cdots \mathbf{p}_j$  中边  $\mathbf{p}_{i-1} \mathbf{p}_i$  上的一个内分点，其内分比是  $(\tau-t_i):(t_{i+k-1}-\tau)$ ； $i = j-k+2, j-k+3, \dots, j$ 。当  $\tau$  在区间  $[t_j, t_{j+1})$  上变动时，控制多边形族  $\mathbf{p}_{j-k+2}^{[1]}(\tau) \mathbf{p}_{j-k+3}^{[1]}(\tau) \cdots \mathbf{p}_j^{[1]}(\tau)$  生成  $k-1$  阶非均匀 B 样条曲线族  $\mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau)$ 。

类似地，可以构造  $k-1$  阶非均匀 B 样条曲线族

$$\mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau) = \sum_{i=2}^n N_{i,k-1}(t) \mathbf{p}_i^{[1]}(\tau), \quad t_k \leq t, \tau \leq t_{n+1}, \quad (2.2.6)$$

$\mathbf{p}_i^{[1]}(\tau)$  如(2.2.5)所示， $t_k \leq \tau \leq t_{n+1}$ ， $i = 2, 3, \dots, n$ ，我们可证明  $\mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau)$  的包络是(2.2.1)。

**定理 2.2.1**

$$\mathbf{p}(t) = \text{env} \left\{ \mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau), t_k \leq t \leq t_{n+1} \mid t_k \leq \tau \leq t_{n+1} \right\}, \quad k \geq 3. \quad (2.2.7)$$

证 易知  $\mathbf{p}^{[k-1]}(t, t) = \mathbf{p}(t)$ ， $t_k \leq t \leq t_{n+1}$ ，其次，因为  $N_{1,k-2}(t) = N_{2,k-2}(t) = N_{n+1,k-2}(t) = N_{n+2,k-2}(t) = 0$ ， $t_k \leq t \leq t_{n+1}$ ，应用性质 2.1.4，2.1.5 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau) \Big|_{\tau=t} &= \sum_{i=2}^n N'_{i,k-1}(t) \left( \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \mathbf{p}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N'_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N'_{i+1,k-1}(t) \right) \mathbf{p}_i = \frac{k-2}{k-1} \mathbf{p}'(t) // \mathbf{p}'(t), \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}. \end{aligned}$$

这样，根据定理 1.5.1 证明中同样的理由，得证本定理。更一般地，可以得到

**定理 2.2.2**

$$\mathbf{p}(t) = \text{env} \left\{ \mathbf{p}^{[k-r]}(t, \tau), t_k \leq t \leq t_{n+1} \mid t_k \leq \tau \leq t_{n+1} \right\}, \quad k \geq 3, r = 1, 2, \dots, k-2. \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{p}^{[k-r]}(t, \tau) = \sum_{i=r+1}^n N_{i,k-r}(t) \mathbf{p}_i^{[r]}(\tau), \quad t_k \leq t, \tau \leq t_{n+1}, \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{p}_i^{[r]}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{p}_i, & r = 0, \\ \frac{t_{i+k-r} - \tau}{t_{i+k-r} - t_i} \mathbf{p}_{i-1}^{[r-1]}(\tau) + \frac{\tau - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} \mathbf{p}_i^{[r-1]}(\tau), & r \geq 1, \\ t_k \leq \tau \leq t_{n+1}; \quad i = r+1, r+2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

且曲线  $\mathbf{p}(t)$  与  $\mathbf{p}^{[k-r]}(t, \tau)$  在接触点  $\tau = t$  处有  $k-1-r$  阶切触.

容易证明曲线族(2.2.6)或(2.2.9)的包络是唯一的(见定理 4.3.2, 4.3.3), 于是有

**定义 2.2.2** 假设  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{R}^3$ ,  $T = \{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$  是参数  $t$  轴的一个分割,  $t_j \leq t_{j+1}$ , 则称多边形  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n$  是相应于节点向量  $T$  的以  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n$  为控制顶点的二阶(一次)非均匀 B 样条曲线  $\mathbf{p}(t)$  ( $t_2 \leq t \leq t_{n+1}$ ), 其每一段曲线  $\mathbf{p}(t)$  ( $t_j \leq t < t_{j+1}$ ) 是直线段  $\mathbf{p}_{j-1} \mathbf{p}_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ , 合记为  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,2}(t) \mathbf{p}_i$ ,  $t_2 \leq t \leq t_{n+1}$ ; 其次, 称  $\text{env}\{\mathbf{p}^{[2]}(t, \tau), t_3 \leq t \leq t_{n+1} | t_3 \leq \tau \leq t_{n+1}\}$  为

相应于  $T$  和  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n$  的三阶(二次)非均匀 B 样条曲线, 记为  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,3}(t) \mathbf{p}_i$ ,  $t_3 \leq t \leq t_{n+1}$ .

一般地, 若  $k-1$  阶( $k-2$  次)非均匀 B 样条曲线  $\mathbf{p}(t)$  ( $t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}$ ) 已经定义, 则称  $\text{env}\{\mathbf{p}^{[k-1]}(t, \tau), t_k \leq t \leq t_{n+1} | t_k \leq \tau \leq t_{n+1}\}$  为相应于  $T$  和  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n$  的  $k$  阶( $k-1$  次)非均匀 B

样条曲线, 记为  $\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i$ ,  $t_k \leq t \leq t_{n+1}$ . 这就是基于定理 2.2.1 的 B 样条曲线递归的几何定义. 基于定理 2.2.2 的几何定义类似地可给出.

## 2.3 B 样条曲线的基本几何性质及连续阶

**性质 2.3.1** 表示唯一性: 以  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n$  为控制顶点的  $k$  阶 B 样条曲线可唯一地表为(2.2.1), 即若

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \mathbf{q}_i, \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}, \quad \text{必有 } \mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

证 仅需证零向量  $\mathbf{0}$  表示是唯一的. 当阶数  $k = 2$  时, 由定义 2.2.2, 二阶 B 样条曲线是空间折线多边形  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n$ , 若它缩为一点  $\mathbf{0}$ , 则必有  $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 今假定阶数为  $k-1$  时, 零向量 B 样条曲线 (2.2.1) 有  $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}$ , 再假设

$$\sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{应用(2.1.4)可得}$$

$$\left( \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i \right)' = (k-1) \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) \mathbf{p}_i = (k-1) \sum_{i=1}^n N_{i,k-1}(t) \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i}. \quad (2.3.1)$$

由归纳假设得  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_n$ , 于是  $\mathbf{p}_1 \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) = \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_n = \mathbf{0}$ , 这表明

阶数为  $k$  时零向量  $\mathbf{0}$  表示唯一, 于是本性质得证.

由性质 2.3.1 和定理 2.8.1 可得出以下的推论.

**推论 2.3.1** B 样条基函数  $\{N_{i,k}(t)\}_{i=1}^n$  线性无关.

**性质 2.3.2** 凸包性: 由性质 2.1.1, 2.1.2, 知曲线(2.2.2)即  $\mathbf{p}(t)$  ( $t_j \leq t < t_{j+1}$ ;  $j = k, k+1, \dots, n$ ), 位于  $k$  个控制顶点  $\mathbf{p}_{j-k+1}, \mathbf{p}_{j-k+2}, \dots, \mathbf{p}_j$  的凸包  $H_j$  内, 整条曲线(2.2.1)即

$\mathbf{p}(t)$  ( $t_k \leq t \leq t_{n+1}$ ) 位于这些凸包  $H_j$  的并集  $H = \bigcup_{j=k}^n H_j$  之内. 显然, 以  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^n$  为顶点的

$n-1$  次 Bézier 曲线位于点  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的凸包  $R$  内, 但  $H \subset R$ . 这表明 B 样条曲线逼近控制多边形的程度优于 Bézier 曲线.

**性质 2.3.3** 几何不变性和仿射不变性: 曲线(2.2.1)的形状与位置与坐标系的选择无关; 曲线作仿射变换, 只须把其控制多边形作此仿射变换.

**性质 2.3.4** B 网逼近性质: B 网大致反映了 B 样条曲线的形状, 这有利于人机交互设计.

**性质 2.3.5** 交互能力与局部调整性: 根据 B 样条基函数的局部支柱性, 改动一个控制顶点  $p_i, 1 \leq i \leq n$ , 曲线(2.2.1)上仅有点  $p_i$  参加控制的那  $l$  段 ( $l \leq k$ ) 曲线 ( $t \in [t_i, t_{i+k})$ ) 的形状发生变化. 反之, 曲线上每点  $p(t), t \in [t_j, t_{j+1})$ , 仅与  $k$  个控制顶点  $p_{j-k+1}, p_{j-k+2}, \dots, p_j$  有关. 这有利于交互设计.

**性质 2.3.6** 分段参数多项式: 曲线(2.2.1)在每一节点区间  $[t_j, t_{j+1})$  上是  $t$  的  $k-1$  次多项式曲线,  $j = k, k+1, \dots, n$ .

**性质 2.3.7** 连续阶性: 曲线(2.2.1)在重数(Multiplicities)为  $m (m \geq 0)$  的节点处, 连续阶  $C = k-1-m$ , 整条曲线的连续阶  $d$ .

证 记  $k$  阶 B 样条曲线(2.2.1)为  $p_k(t), p'_k(t) = q_{k-1}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k-1}(t)q_i$ , 因此对  $l < k-1$ , 有

$$p_k^{(l)}(t) = q_{k-1}^{(l-1)}(t), \quad q_i = (k-1) \frac{p_i - p_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.2)$$

上式表明,  $k$  阶 B 样条曲线  $p_k(t)$  的  $l$  阶导矢 ( $l < k-1$ ) 就是在相同节点向量上定义的  $k-1$  阶 B 样条曲线  $q_{k-1}(t)$  的  $l-1$  阶导矢, 所以  $p_k(t)$  的连续阶  $C_k^p$  比  $q_{k-1}(t)$  的连续阶  $C_{k-1}^q$  高 1. 若本性质对  $k-1$  阶 B 样条曲线为真, 即在  $m$  重节点处  $C_{k-1}^q = (k-1) - m - 1$ , 则必在相同节点处有  $C_k^p = C_{k-1}^q + 1 = k - m - 1$ ; 又当  $k=2$  时按定义 2.2.2,  $p_k(t)$  为折线多边形, 节点重数  $m$  为 1 (顶点处) 或 0 (非顶点处), 连续阶  $C_k^p$  为 0 (节点处) 或 1 (非节点处), 即本性质当  $k=2$  时为真, 于是由归纳法知本性质成立.

**性质 2.3.8** 可退化性: 当  $t_2 = t_3 = \dots = t_k < t_{k+1} = t_{k+2} = \dots = t_{2k-1}$ ,  $n = k$  时, 曲线(2.1.1)退化为  $k-1$  次 Bézier 曲线(证明见性质 2.6.3 或 §4.4.3)

$$p(t) = \sum_{i=1}^k B_{i-1}^{k-1} \left[ \frac{(t - t_k)}{(t_{k+1} - t_k)} \right] p_i, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

## 2.4 B 样条曲线求值和求导的 deBoor 算法

$k$  阶 B 样条曲线 (2.2.1) 的求值与求导是 CAGD 中的基本运算. 基于(2.1.1), deBoor 递归地把它化为低阶 B 样条曲线的求值.

把参数  $t$  固定在区间  $[t_j, t_{j+1})$ ,  $k \leq j \leq n$ , 则按 (2.2.2), (2.2.3) 有

**算法 2.4.1** ( $k$  阶 B 样条曲线的求值)

$$p(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t)p_i = \sum_{i=j-k+1}^j N_{i,k}(t)p_i = \sum_{i=j-k+2}^j N_{i,k-1}(t)p_i^{[1]}(t) = \dots = p_j^{[k-1]}(t), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad (2.4.1)$$

$$p_i^{[r]}(t) = \begin{cases} p_i & r=0; \quad i = j-k+1, j-k+2, \dots, j, \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i} p_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i} p_{i-1}^{[r-1]}(t), & r=1, 2, \dots, k-1; \quad i = j-k+r+1, j-k+r+2, \dots, j. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

算法 2.4.1 表明,  $p(t)$  之值可按(2.4.2)递推  $k-1$  次来求得. 其几何意义是从控制多边形  $p_{j-k+1}, p_{j-k+2}, \dots, p_j$  开始进行  $k-1$  层割角, 第  $r$  层割角是用线段  $p_i^{[r]}(t)p_{i+1}^{[r]}(t)$  割去角  $p_i^{[r-1]}$ ,  $r=1, 2, \dots, k-1; i = j-k+r+1; j-k+r+2, \dots, j-1$ . 割角系数(内分点比例数)不仅与求值参数  $t$  有关, 且与节点值(依赖于割角层数  $r$  和割角边序号)有关, 最后得到的割角点

$p_j^{[k-1]}(t)$  就是所求的  $p(t)$ ，由此可得出求点  $p(t)$  的几何作图法，见图 2.4.1 和图 2.4.2。可以看出，这个割角过程比 B ézier 曲线 de Casteljau 求值的割角过程复杂。但因是割角算法，计算仍是简单、稳定的。

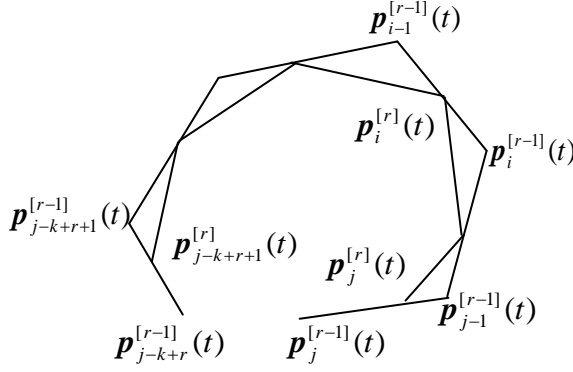


图 2.4.1 B 样条曲线的 de Boor 求值算法

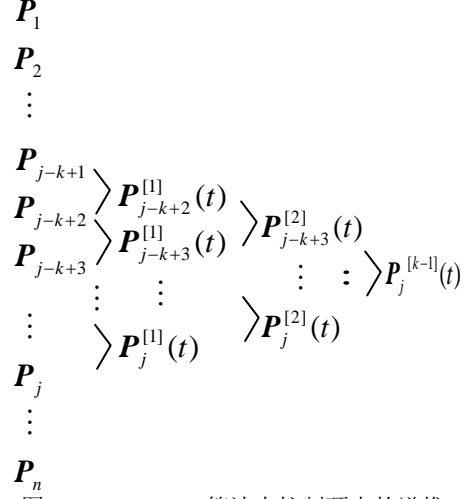


图 2.4.2 de Boor 算法中控制顶点的递推

同样，依据(2.3.1)和数学归纳法可立即得出

**算法 2.4.2** ( $k$  阶 B 样条曲线的  $l$  ( $l < k-1$ ) 阶求导)

$$p^{(l)}(t) = \left( \sum_{i=j-k+1}^j N_{i,k}(t) p_i \right)^{(l)} = \sum_{i=j-k+l+1}^j N_{i,k-l}(t) p_i^{(l)}, \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad (2.4.3)$$

$$p_i^{(l)} = \begin{cases} p_i & l = 0, \\ \frac{(k-l)(p_i^{(l-1)} - p_{i-1}^{(l-1)})}{t_{i+k-l} - t_i}, & l = 1, 2, \dots, k-2. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

算法 2.4.2 表明， $k$  阶 B 样条曲线(2.2.2)的  $l$  ( $l < k-1$ ) 阶求导可简化为  $k-l$  阶曲线的求值。其优越性在于降低了基函数的次数。基函数次数越低，其非零区域就越小，计算也就越简单。同时此算法避免了直接求导，确保了计算的稳定性和精度。

## 2.5 三次均匀 B 样条曲线的几何作图及设计技巧

当节点间距相等时，不妨设  $t_i = i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，曲线(2.2.1)便成为均匀(Uniform)B 样条曲线。其中四阶(三次)均匀 B 样条曲线是最简单又最常用的，可用 (2.1.1) 求出其中  $[0,1]$  上的一段：

$$p(t) = \sum_{i=1}^4 N_{i,4}(t) p_i = \frac{1}{6} (t^3, t^2, t^1, 1) \mathbf{M}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_4, t_5] = [0,1]. \quad (2.5.1)$$

容易算得

$$\begin{cases} p(0) = [(p_1 + p_3)/2]/3 + 2p_2/3, & p(1) = [(p_2 + p_4)/2]/3 + 2p_3/3, \\ p'(0) = (p_3 - p_1)/2, & p'(1) = (p_4 - p_2)/2, \\ p''(0) = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_2), & p''(1) = (p_4 - p_3) + (p_2 - p_3). \end{cases} \quad (2.5.2)$$

由此我们可以勾画出曲线(2.5.1)的大致形状和位置,见图 2.5.1.

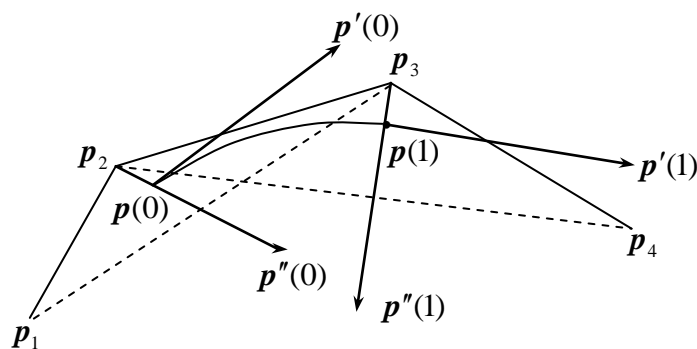


图 2.5.1 三次均匀 B 样条曲线的几何作图

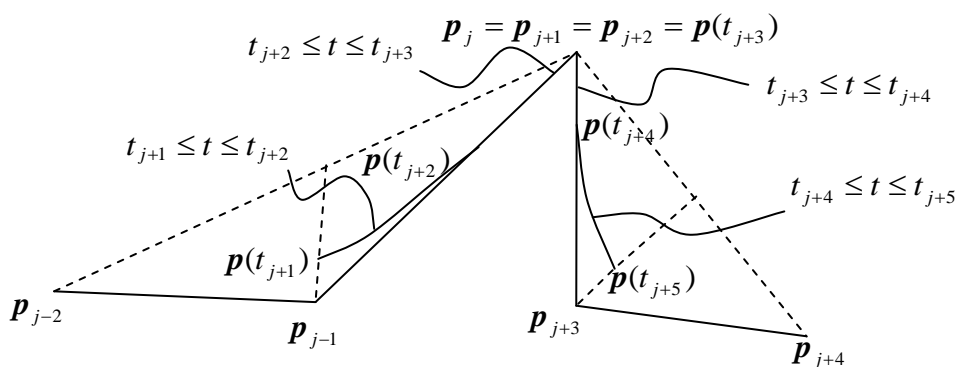


图 2.5.2 重顶点技巧产生带尖点的曲线

用三次均匀 B 样条曲线造型时,可充分运用顶点配置的技巧. (1)置  $p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, p_{j+3}$  四点共直线  $L$ , 则  $[t_{j+3}, t_{j+4}]$  上的曲线段  $p(t)$  落在  $L$  上, 即整条曲线  $p(t)$  被光滑地嵌入了一段直线段. (2) 置  $p_j, p_{j+1}, p_{j+2}$  重合, 则由(2.5.2)可知, 曲线段  $(t_{j+2} \leq t \leq t_{j+3})$  的始点和终点分别是  $p_{j-1}/6 + 5p_j/6$  和  $p_j$ , 即此曲线段是直线段  $p_{j-1}p_j$  的后小半段, 而曲线段

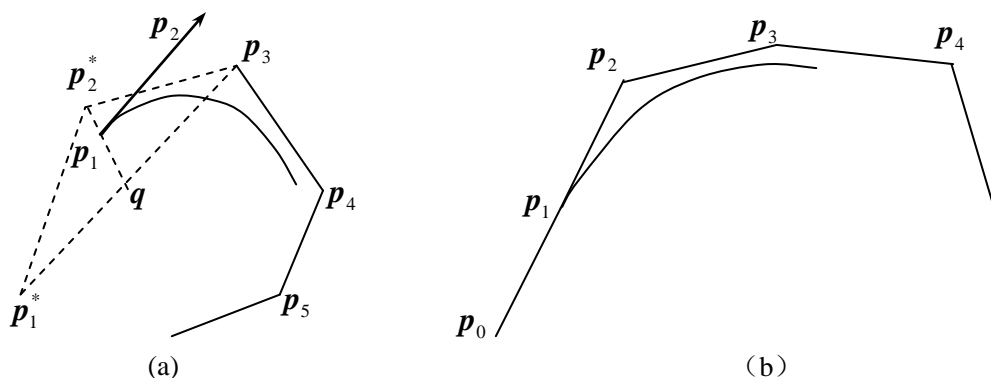


图 2.5.3 引入辅助控制顶点改善曲线的端点插值情况

$p(t)$  ( $t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}$ ) 的始点在  $\Delta p_{j-2} p_{j-1} p_j$  的底边  $p_{j-2} p_j$  的中线上 (见图 2.5.2); 在  $[t_{j+3}, t_{j+4}]$ ,  $[t_{j+4}, t_{j+5}]$  上亦有类似的结果, 这样整条曲线  $p(t)$  就在  $p(t_{j+3})$  处产生了一个尖点. (3) 虽然曲线段(2.5.1)不插值首末控制顶点, 但我们可引入辅助控制顶点  $p_1^*, p_2^*$  (见图 2.5.3(a)) 使  $p_1^* p_3 // p_1 p_2$ ,  $p_1^* p_3 = 2 p_1 p_2$ , 且  $3 p_2^* p_1 = p_2^* q$ ,  $q$  为  $p_1^* p_3$  的中点, 则以  $p_1^* p_2^* p_3 p_4 \cdots$  为控制顶点的曲线  $p(t)$  必与原控制多边形  $p_1 p_2 p_3 p_4 \cdots$  在端点  $p_1$  插值, 在端边  $p_1 p_2$  相切. 我们也可引入辅助控制顶点  $p_0$  (见图 2.5.3(b)) 使  $p_0 p_1 = p_1 p_2$ , 则以  $p_0 p_1 p_2 p_3 \cdots$  为控制顶点的曲线  $p(t)$  也过原控制多边形  $p_1 p_2 p_3 p_4 \cdots$  的端点  $p_1$  且与端边  $p_1 p_2$  相切.

## 2.6 带重节点的三次 B 样条曲线的基本性质

灵活地应用 B 样条基函数的局部支柱性、权性、连续阶性和微分一差分公式, 我们可以简捷地观察到并严格地证明有关带重节点的三次 B 样条曲线的一些基本性质. 这些性质是第九章中带有尖点和尖边、夹有直线段和平面片的复杂曲线曲面设计方法的理论基础.

为曲线曲面插值计算中的符号对应起见, 我们不妨记三次 B 样条曲线为

$$p(t) = \sum_j N_{j,4}(t) p_{j+2}, \quad t_0 \leq t \leq t_n. \quad (2.6.1)$$

这里  $N_{j,4}(t)$  是定义在节点向量  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  上的三次四阶 B 样条基. 注意到  $N_{-4,4}(t)$  与  $N_{n,4}(t)$  的非零域分别是  $(t_{-4}, t_0)$  与  $(t_n, t_{n+4})$ , 或者注意到  $(t_0, t_1)(t_{n-1}, t_n)$  中最小(大)序号的非零基是  $N_{-3,4}(t)$  ( $N_{n-1,4}(t)$ ), 我们立即知道(2.6.1)就是

$$p(t) = \sum_{j=-3}^{n-1} N_{j,4}(t) p_{j+2}, \quad t_0 \leq t \leq t_n. \quad (2.6.2)$$

**性质 2.6.1** 当节点区间  $[t_0, t_n]$  的左端点取为三重节点或四重节点, 即当  $t_{-2} = t_{-1} = t_0$  或  $t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0$  时, 虽然在全节点区间上基  $N_{j,4}(t)$  的构造不尽相同, 但在  $[t_0, t_n]$  中两条对应曲线(2.6.1)的形状完全相同. 节点区间右端情况类似.

证 由(2.1.1), 易知  $\{N_{j,4}(t)\}_{j=-3}^{n-1}$  中只有一个基  $N_{-3,4}(t) = \frac{t-t_{-3}}{t_0-t_{-3}} N_{-3,3}(t) + \frac{t_1-t}{t_1-t_{-2}} N_{-2,3}(t)$  在形式上与节点  $t_{-3}$  有关, 其余基均与节点  $t_{-3}$  无关. 但因  $N_{-3,3}(t) \equiv 0$  ( $t_0 \leq t \leq t_n$ ), 所以  $N_{-3,4}(t)$  实质上与  $t_{-3}$  无关, 即不论  $t_{-3} \neq t_0$  或  $t_{-3} = t_0$ , 都不影响  $[t_0, t_n]$  上曲线(2.6.1)的形状. 对右端点为重节点的情况类似可证. 证毕.

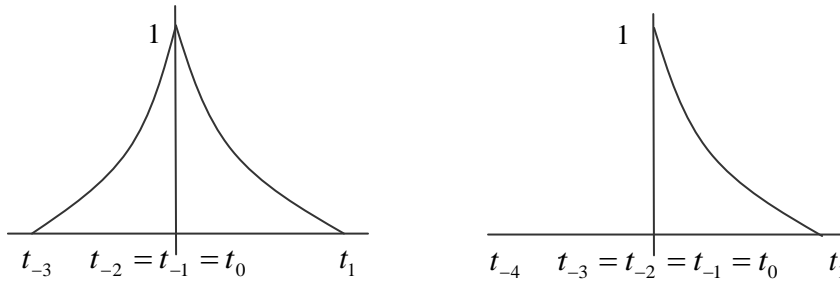


图 2.6.1 三重或四重节点时的三次 B 样条基

图 2.6.1 给出了三重或四重节点时的两种基函数图形, 由图可见在区间  $[t_0, t_1]$  中两种基完全一致. 这一性质使我们在曲线插值计算中不必去关心  $t_{-3}$  的定义.

**性质 2.6.2** 当节点区间  $[t_0, t_n]$  的端点取为三重节点时, 曲线(2.6.1)插值控制多边形  $p_{-1} p_0 \cdots p_{n+1}$  的端点并与端边相切, 即当  $t_{-2} = t_{-1} = t_0$  时  $p(t_0+) = p_{-1}$ ,  $p'(t_0+) // p_{-1} p_0$ .



区间右端情况类似.

证 对于  $j = -2, -1, 0$ , 基  $N_{j,4}(t)$  的非零域分别是  $(t_j, t_{j+4}) = (t_0, t_2), (t_0, t_3), (t_0, t_4)$ , 从而  $N_{j,4}(t_0-) = 0$ . 又因为  $N_{j,4}(t)$  在  $t_0$  点的连续阶是  $k-1-m = 4-1-3 = 0$ , 所以知道  $N_{j,4}(t_0) = N_{j,4}(t_0-) = 0$ ,  $j = -2, -1, 0$ , 最后由基的权性得知  $N_{-3,4}(t_0) = 1$ . 以上推导的原始思想基于图 2.6.2 中均匀节点基(a)变到三重节点基(b)时的图形对比. 当基为二次时, 由于在三重节点处连续阶降为-1, 上述推理方法不适用, 且节点处的基函数值必须区分左右极限值. 但这时我们可由(2.1.1)知  $N_{-2,3}(t_0+) = N_{-1,2}(t_0+) = N_{0,1}(t_0+) = 1$ , 进一步由基的权性得到  $N_{j,3}(t_0+) = 0, j \neq -2$ . 这样就有  $\mathbf{p}(t_0) = \sum_j N_{j,4}(t_0) \mathbf{p}_{j+2} = N_{-3,4}(t_0) \mathbf{p}_{-1} = \mathbf{p}_{-1}$ , 且有

$$\mathbf{p}'(t_0) = 3 \sum_j (\mathbf{p}_{j+2} - \mathbf{p}_{j+1}) N_{j,3}(t_0+) / (t_{j+3} - t_j) = 3(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{-1}) / (t_1 - t_{-2}) // \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_{-1}.$$

同样地, 考察区间右端, 因  $t_n = t_{n+1} = t_{n+2}$ , 由(2.1.1)知  $N_{n-1,3}(t_n-) = N_{n-1,2}(t_n-) = N_{n-1,1}(t_n-) = 1$ , 进而由基函数的权性知  $N_{j,3}(t_n-) = 0, j \neq n-1$ . (注意, 这时有  $N_{n,3}(t_n+) = N_{n+1,2}(t_n+) = N_{n+2,1}(t_n+) = 1; N_{j,3}(t_n+) = 0, j \neq n$ ). 同时, 对于  $j = n-4, n-3, n-2$ ,  $N_{j,4}(t)$  的非零域分别是  $(t_{n-4}, t_n), (t_{n-3}, t_n), (t_{n-2}, t_n)$ , 因而  $N_{n-1,4}(t_n) = 1 - \sum_{j=n-4}^{n-2} N_{j,4}(t_n) = 1 - \sum_{j=n-4}^{n-2} N_{j,4}(t_n+) = 1$ . 这样就得到  $\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{p}_{n+1}$ ,  $\mathbf{p}'(t_n-) = 3(\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n) / (t_{n+2} - t_{n-1}) // \mathbf{p}_n \mathbf{p}_{n+1}$ . 证毕.

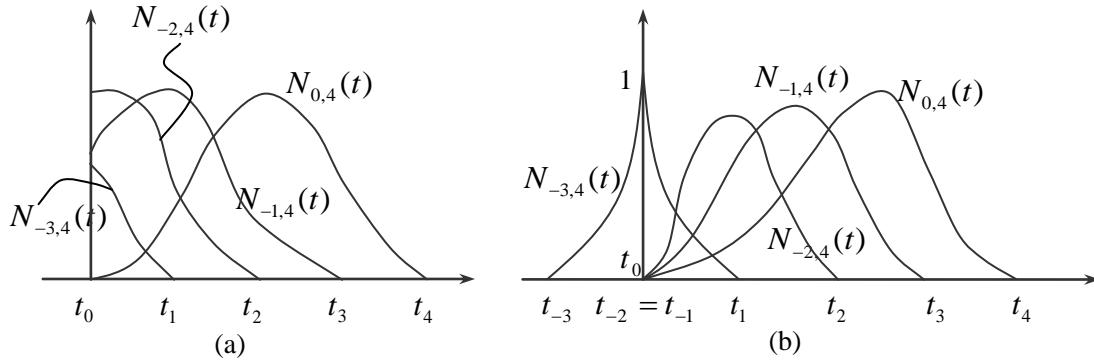


图 2.6.2 三次 B 样条基: (a) 均匀节点 (b) 区间左端为三重节点

**推论 2.6.1** 当曲线(2.6.1)的一个内节点  $t_i$  为三重, 即当  $t_{i-1} = t_i = t_{i+1}$ ,  $1 < i < n-1$  时必有  $\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{p}_i$ , 且  $\mathbf{p}'(t_i-) // \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}'(t_i+) // \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}$ , 即曲线(2.6.1)在控制顶点  $\mathbf{p}_i$  处插值并且  $\mathbf{p}(t_i)$  是曲线的角点.

**性质 2.6.3** 若  $t_{i-2} = t_{i-1} = t_i < t_{i+1} = t_{i+2} = t_{i+3}$ , 则曲线(2.6.1)在区间  $[t_i, t_{i+1}]$  内的一段恰是以  $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{p}_{i+2}$  为控制顶点的三次 Bézier 曲线.

证 当  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  时, 曲线(2.6.1)成为  $\mathbf{p}(t) = \sum_{j=i-3}^i N_{j,4}(t) \mathbf{p}_{j+2}$ . 引入参数变换

$\tau = (t - t_i) / (t_{i+1} - t_i) \in [0, 1]$ , 反复应用(2.1.1)易算得  $N_{j,4}(t) = B_{j-(i-3)}^3(\tau)$  ( $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ),  $j = i-3, i-2, i-1, i$ ; 且  $N_{j,4}(t) = 0$  ( $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ ),  $j \leq i-4$  或  $j \geq i+1$ . 于是得到

$$\mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{p}}(\tau) = \sum_{k=0}^3 B_k^3(\tau) \mathbf{p}_{k+i-1}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \text{ 证毕.}$$

## 2.7 广义差商及 B 样条基函数的差商定义

为了更好地研究 B 样条曲线, 必须引入非均匀 B 样条函数的广义差商定义. 为此先有

**定义 2.7.1** 设有严格递增的节点序列  $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ , 对函数  $f(t)$ , 称  $f(t_0, t_1) = [f(t_1) - f(t_0)]/(t_1 - t_0)$  为  $f(t)$  在节点  $t_0, t_1$  处的一阶差商; 一般地, 若  $f(t)$  在节点处的  $k-1$  阶差商已经定义, 则  $f(t)$  在节点  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$  ( $t_0 \leq t_i < \dots < t_{i+k} \leq t_N$ ) 处的  $k$  阶差商 ( $k \geq 1$ ) 为

$$f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) \equiv [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]f = [f(t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+k}) - f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1})]/(t_{i+k} - t_i). \quad (2.7.1)$$

差商也称为均差. 其主要性质有

**性质 2.7.1**

$$\begin{aligned} f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_i & t_{i+1} & \dots & t_{i+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i^{k-1} & t_{i+1}^{k-1} & \dots & t_{i+k}^{k-1} \\ f(t_i) & f(t_{i+1}) & \dots & f(t_{i+k}) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_i & t_{i+1} & \dots & t_{i+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i^{k-1} & t_{i+1}^{k-1} & \dots & t_{i+k}^{k-1} \\ t_i^k & t_{i+1}^k & \dots & t_{i+k}^k \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^k f(t_{i+j})/\omega'(t_{i+j}), \quad \omega(t) = \prod_{j=0}^k (t - t_{i+j}). \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

**性质 2.7.2** 若  $(i_0, i_1, \dots, i_k)$  是  $(i, i+1, \dots, i+k)$  的任一置换, 则

$$f(t_{i_0}, t_{i_1}, \dots, t_{i_k}) = f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}). \quad (2.7.3)$$

**性质 2.7.3** 满足  $pf(t_{i+j}) = f(t_{i+j})$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$  的  $k$  次 Newton 插值多项式可表示为

$$\begin{aligned} pf(t) &= f(t_i) + f(t_i, t_{i+1})(t - t_i) + f(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})(t - t_i)(t - t_{i+1}) \\ &\quad + \dots + f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k})(t - t_i)(t - t_{i+1}) \dots (t - t_{i+k-1}). \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

**性质 2.7.4** 若  $f(t) \in C^k$ , 则必存在一点  $\xi \in (t_i, t_{i+k})$ , 使  $f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) = f^{(k)}(\xi)/k!$ .

证 由性质 2.7.3 知插值余项  $R(t) = pf(t) - f(t)$  在  $k+1$  个点  $t_{i+j}$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) 处为零, 所以有点  $\xi \in (t_i, t_{i+k})$  使  $R^{(k)}(\xi) = k! f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) - f^{(k)}(\xi) = 0$ . 证毕.

由性质 2.7.4 可知, 当  $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k}$  且  $f(t) \in C^k$  时可定义  $f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) =$

$$\lim_{\substack{t_{i+j} \rightarrow t_i \\ 1 \leq j \leq k}} f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_i), \text{ 于是按性质 2.7.2 我们有}$$

**定义 2.7.2** 下式称为函数  $f(t)$  在一般节点情况下的  $k$  阶广义差商:

$$f(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}) = \begin{cases} f^{(k)}(t_i)/k! & t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k}, \\ \frac{f(t_i, \dots, t_{r-1}, t_{r+1}, \dots, t_{i+k}) - f(t_i, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_{i+k})}{t_s - t_r}, & t_r \neq t_s. \end{cases} \quad (2.7.5)$$

下面给出  $k$  阶 B 样条函数在均匀节点下的中心差分定义, 并进一步诱导出它在非均匀节点下的广义差商定义.

**定义 2.7.3** 设  $t_j = j$ ,  $j = i, i+1, \dots, i+k$ , 即  $\{t_j\}$  为整数节点; 又设  $\delta$  为中心差分,

$$\delta f(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad \delta^k f(t) = \delta(\delta^{k-1} f(t)) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f\left(t + \frac{k}{2} - j\right);$$

并设  $x_+^{k-1} = \max(x_+^{k-1}, 0)$  为截断幂函数(Truncated power function), 则整数节点上的  $k$  阶均匀 B 样条函数可定义为

$$N_{i,k}(t) = (-1)^k \delta^k(t_i + k/2 - t)_+^{k-1} / (k-1)!. \quad (2.7.6)$$

根据上述定义容易得到

$$\begin{aligned} N_{i,k}(t) &= k \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (t_{i+j} - t)_+^{k-1} / j!(k-j)! \\ &= k \sum_{j=0}^k \frac{(t_{i+j} - t)_+^{k-1}}{(t_{i+j} - t_i)(t_{i+j} - t_{i+1}) \cdots (t_{i+j} - t_{i+j-1})(t_{i+j} - t_{i+j+1}) \cdots (t_{i+j} - t_{i+k})} \\ &= (t_{i+k} - t_i) \sum_{j=0}^k (t_{i+j} - t)_+^{k-1} / \omega'(t_{i+j}). \end{aligned}$$

把上式中的节点序列拓广为不等距, 应用差商性质 2.7.1, 我们可给出

**定义 2.7.4** 不等距节点  $\{\cdots, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}, \cdots\}$  上的  $k$  阶 ( $k-1$  次) B 样条基函数可定义为截断幂函数  $(t_{i+k} - t_i)(x - t)_+^{k-1}$  相对于变量  $x$  在节点  $t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}$  处的  $k$  阶广义差商, 记为

$$N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i)(x - t)_+^{k-1}(t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}), \quad (2.7.7)$$

$$N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}](x - t)_+^{k-1}. \quad (2.7.8)$$

## 2.8 嵌入一个节点改变 B 样条基函数和 B 样条曲线表示

由上节知识, 可导出 Boehm 关于嵌入一个节点的著名算法. 虽然它仅是离散 B 样条理论中嵌多节点算法的特例, 但因几何意义鲜明, 推导简单方便, 在 CAGD 中占有重要地位.

**定理 2.8.1** 假设节点向量  $T = \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ , 其中  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i < t_{i+k-1}$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ , 即  $\{t_i\}$  为非减序列且节点重数  $l < k$ ; 再假设  $t' = t_{\mu+1} > t_\mu$  已是  $T$  中的  $l$  重 ( $l < k$ ) 节点, 这里若  $l = 0$  表示  $t' \notin (t_\mu, t_{\mu+1}]$ . 今把  $t'$  作为新节点加入  $T$ , 由此得到新的节点向量为  $T^{[1]} = \{t_i^{[1]}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ , 记在  $T$  和  $T^{[1]}$  上定义的  $k$  阶 B 样条基函数分别是  $N_{i,k}(t)$  和  $N_{i,k}^{[1]}(t)$ , 则新旧基函数的关系如下:

$$N_{i,k}(t) = N_{i,k}^{[1]}(t), \quad i \leq \mu + l - k, \quad (2.8.1)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t' - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} N_{i,k}^{[1]}(t) + \frac{t_{i+k+1}^{[1]} - t'}{t_{i+k+1}^{[1]} - t_{i+1}^{[1]}} N_{i+1,k}^{[1]}(t), \quad \mu + l - k + 1 \leq i \leq \mu, \quad (2.8.2)$$

$$N_{i,k}(t) = N_{i+1,k}^{[1]}(t), \quad i \geq \mu + 1. \quad (2.8.3)$$

证  $T$  和  $T^{[1]}$  中的部分节点可分别表为

$$t_\mu < t_{\mu+1} = t_{\mu+2} = \cdots = t_{\mu+l} < t_{\mu+l+1}, \quad t_\mu^{[1]} < t_{\mu+1}^{[1]} = t_{\mu+2}^{[1]} = \cdots = t_{\mu+l+1}^{[1]} < t_{\mu+l+2}^{[1]}. \quad (2.8.4)$$

这里  $t_\mu = t_\mu^{[1]}$ ,  $t_{\mu+1} = t_{\mu+2}^{[1]}$ . 当  $i \leq \mu + l - k$  时显然有  $i < \mu$ ,  $i + k \leq \mu + l$ , 所以  $t_j = t_j^{[1]}$ ,  $j \leq i + k$ ; 于是按(2.7.8)知(2.8.1)成立. 同理可证(2.8.3)成立. 当  $\mu + l - k + 1 \leq i \leq \mu$  时, 由(2.8.4)可得  $t_{i+k+1}^{[1]} - t_i^{[1]} > t_{i+k+1}^{[1]} - t_{\mu+1}^{[1]} > 0$ ,  $t_{\mu+1}^{[1]} - t_i^{[1]} > 0$ , 因此按(2.7.5)可用两种方法写出  $k+1$  阶广义差商

$$\begin{aligned} &[t_i^{[1]}, t_{i+1}^{[1]}, \cdots, t_{i+k+1}^{[1]}](x - t)_+^k \\ &= \{[t_{i+1}^{[1]}, t_{i+2}^{[1]}, \cdots, t_{i+k+1}^{[1]}](x - t)_+^{k-1} - [t_i^{[1]}, t_{i+1}^{[1]}, \cdots, t_{i+k}^{[1]}](x - t)_+^{k-1}\} / (t_{i+k+1}^{[1]} - t_i^{[1]}) \\ &= \{[t_{i+1}^{[1]}, t_{i+2}^{[1]}, \cdots, t_{i+k+1}^{[1]}](x - t)_+^{k-1} - [t_i^{[1]}, \cdots, t_\mu^{[1]}, t_{\mu+2}^{[1]}, \cdots, t_{i+k+1}^{[1]}](x - t)_+^{k-1}\} / (t_{\mu+1}^{[1]} - t_i^{[1]}). \end{aligned}$$

从上式解出

$$(t_{i+k+1}^{[1]} - t_i^{[1]})[t_i^{[1]}, \cdots, t_\mu^{[1]}, t_{\mu+2}^{[1]}, \cdots, t_{i+k+1}^{[1]}](x - t)_+^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t_{\mu+1}^{[1]} - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} (t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}) [t_i^{[1]}, t_{i+1}^{[1]}, \dots, t_{i+k}^{[1]}] (x-t)_+^{k-1} \\
&+ \frac{t_{i+k+1}^{[1]} - t_{\mu+1}^{[1]}}{t_{i+k+1}^{[1]} - t_{i+1}^{[1]}} (t_{i+k+1}^{[1]} - t_{i+1}^{[1]}) [t_{i+1}^{[1]}, t_{i+2}^{[1]}, \dots, t_{i+k+1}^{[1]}] (x-t)_+^{k-1}.
\end{aligned}$$

注意到  $t_i^{[1]} = t_i$ ,  $t_{i+k+1}^{[1]} = t_{i+k}$ ,  $t_{\mu+1}^{[1]} = t'$ , 按(2.7.8)知上式就是(2.8.2). 证毕.

**定理 2.8.2** 假设节点向量  $T, T^{[1]}$ , B 样条基函数  $N_{i,k}(t), N_{i,k}^{[1]}(t)$  以及  $t', \mu, k, l$  的含义如定理 2.8.1 中所示, 则  $k$  阶 B 样条曲线用新旧基函数均可表示为

$$p(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) p_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}^{[1]}(t) p_i^{[1]} \quad (2.8.5)$$

的充要条件是

$$p_i^{[1]} = \begin{cases} p_i, & i \leq \mu + l - k + 1, \\ \frac{t_{i+k}^{[1]} - t'}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} p_{i-1} + \frac{t' - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} p_i, & \mu + l - k + 2 \leq i \leq \mu, \\ p_{i-1}, & i \geq \mu + 1. \end{cases} \quad (2.8.6)$$

证 由定理 2.8.1, 注意到  $t_{\mu+1}^{[1]} = t_{\mu+l+1}^{[1]}$ , 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\mu+l-k+1}^{\mu} N_{i,k}(t) p_i &= \sum_{i=\mu+l-k+1}^{\mu} \frac{t' - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} N_{i,k}^{[1]}(t) p_i + \sum_{i=\mu+l-k+2}^{\mu+1} \frac{t_{i+k}^{[1]} - t'}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} N_{i,k}^{[1]}(t) p_{i-1} \\
&= N_{\mu+l-k+1,k}^{[1]}(t) p_{\mu+l-k+1} + \sum_{i=\mu+l-k+2}^{\mu} \left( \frac{t_{i+k}^{[1]} - t'}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} p_{i-1} + \frac{t' - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} p_i \right) N_{i,k}^{[1]}(t) + N_{\mu+1,k}^{[1]}(t) p_{\mu}.
\end{aligned}$$

由此, 按 B 样条曲线的表示唯一性 (性质 2.3.1), 即知(2.8.6)与(2.8.5)等价. 证毕.

定理 2.8.2 的几何意义是: 若在节点向量  $T$  中嵌入一个节点, 则引起控制多边形的改变就是用  $k-l-1$  个新顶点  $p_i^{[1]}$  ( $i = \mu + l - k + 2, \mu + l - k + 3, \dots, \mu$ ) 代替  $k-l-2$  个老顶点  $p_j$  ( $j = \mu + l - k + 2, \mu + l - k + 3, \dots, \mu - 1$ ), 即相当于割去以  $p_j$  为顶点的一层角, 而点  $p_i^{[1]}$  是边  $p_{i-1}p_i$  上的一个内分点, 内分比是  $(t' - t_i^{[1]}):(t_{i+k}^{[1]} - t')$ . 见图 2.8.1.

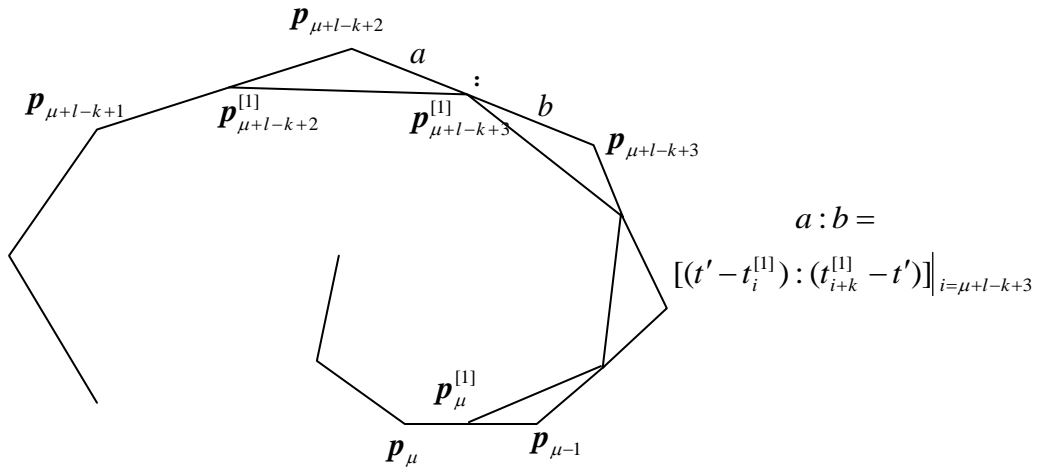


图 2.8.1 嵌入节点  $t'$  引起  $k$  阶 B 样条曲线的控制多边形的改变

## 2.9 连续嵌入同一个节点达 $k-1$ 重时的 B 样条曲线

本节深化上节的研究. 不妨令初始状态时  $l=0$ , 在  $(t_\mu, t_{\mu+1}]$  中嵌入节点  $t'$ , 则根据定理 2.8.2, 有且仅有  $k-1$  个不为零或 1 的实数  $\alpha_i^{[1]}$ , 使得

$$\mathbf{p}_i^{[1]} = (1 - \alpha_i^{[1]})\mathbf{p}_{i-1} + \alpha_i^{[1]}\mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}(t) = \sum_i N_{i,k}(t)\mathbf{p}_i = \sum_i N_{i,k}^{[1]}(t)\mathbf{p}_i^{[1]}, \quad (2.9.1)$$

$$\alpha_i^{[1]} = \alpha_i^{[1]}(t') = \begin{cases} 1, & i \leq \mu - k + 1, \\ \frac{t' - t_i^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} = \frac{t' - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & \mu - k + 2 \leq i \leq \mu, \\ 0, & i \geq \mu + 1. \end{cases} \quad (2.9.2)$$

进一步在  $(t_\mu, t_{\mu+1}]$  中第二次嵌入节点  $t' = t_{\mu+1}^{[1]}$ , 则有且仅有  $k-2$  个不为零或 1 的  $\alpha_i^{[2]}$ , 使得

$$\mathbf{p}_i^{[2]} = (1 - \alpha_i^{[2]})\mathbf{p}_{i-1}^{[1]} + \alpha_i^{[2]}\mathbf{p}_i^{[1]}, \quad \mathbf{p}(t) = \sum_i N_{i,k}(t)\mathbf{p}_i = \sum_i N_{i,k}^{[2]}(t)\mathbf{p}_i^{[2]}, \quad (2.9.3)$$

$$\alpha_i^{[2]} = \alpha_i^{[2]}(t') = \begin{cases} 1, & i \leq \mu - k + 2, \\ \frac{t' - t_i^{[2]}}{t_{i+k}^{[2]} - t_i^{[2]}} = \frac{t' - t_i}{t_{i+k-2} - t_i}, & \mu - k + 3 \leq i \leq \mu, \\ 0, & i \geq \mu + 1. \end{cases} \quad (2.9.4)$$

如此重复进行, 当  $t'$  取成  $k-1$  重节点时, 有且仅有一个不为零或 1 的  $\alpha_i^{[k-1]}$ , 使得

$$\mathbf{p}_i^{[k-1]} = (1 - \alpha_i^{[k-1]})\mathbf{p}_{i-1}^{[k-2]} + \alpha_i^{[k-1]}\mathbf{p}_i^{[k-2]}, \quad \mathbf{p}(t) = \sum_i N_{i,k}(t)\mathbf{p}_i = \sum_i N_{i,k}^{[k-1]}(t)\mathbf{p}_i^{[k-1]}, \quad (2.9.5)$$

$$\alpha_i^{[k-1]} = \alpha_i^{[k-1]}(t') = \begin{cases} 1, & i \leq \mu - 1, \\ \frac{t' - t_\mu^{[k-1]}}{t_{\mu+k}^{[k-1]} - t_\mu^{[k-1]}} = \frac{t' - t_\mu}{t_{\mu+1} - t_\mu}, & i = \mu, \\ 0, & i \geq \mu + 1. \end{cases} \quad (2.9.6)$$

把上述割角算法与算法 2.4.1 相比, 可知两者实质完全相同. 也就是说, 用 Boehm 定理第  $r$  次嵌入节点  $t'$  于  $(t_\mu, t_{\mu+1}]$ , 相当于用 deBoor 算法求  $\mathbf{p}(t')$  之值时对控制多边形的第  $r$  层割角,  $r=1, 2, \dots, k-1$ , 最后有  $\mathbf{p}(t') = \mathbf{P}_\mu^{[k-1]}$ . 不但如此, 由性质 2.1.6 可知, 若我们又在  $(t_\mu, t_{\mu+1}]$  中嵌入  $k-1$  重节点  $t'' < t'$ , 则曲线  $\mathbf{p}(t)$  在  $[t'', t']$  间的一段必退化为  $k-1$  次 B ézier 曲线, 于是由性质 1.3.5 可知, 直线段  $\mathbf{P}_{\mu-1}^{[k-2]}\mathbf{P}_\mu^{[k-2]}$  与曲线  $\mathbf{p}(t)$  相切. 这一现象与 B ézier 作图定理极为相似, 只不过割角系数稍为复杂而已. 总结以上的分析, 我们有:

**定理 2.9.1** 运用定理 2.8.2 对  $k$  阶 B 样条曲线  $\mathbf{p}(t)$  的节点向量  $T$  按(2.9.1)—(2.9.6)连续嵌入节点  $t' \in (t_\mu, t_{\mu+1}]$  使成  $k-1$  重以后, 所得的最后割角顶点  $\mathbf{P}_\mu^{[k-1]}$  恰在曲线  $\mathbf{p}(t)$  上, 且必然等于  $\mathbf{p}(t')$ ; 而两条割角边  $\mathbf{P}_{\mu-1}^{[k-2]}\mathbf{P}_\mu^{[k-1]} = \mathbf{P}_{\mu-1}^{[k-1]}\mathbf{P}_\mu^{[k-1]}$  和  $\mathbf{P}_\mu^{[k-1]}\mathbf{P}_\mu^{[k-2]} = \mathbf{P}_\mu^{[k-1]}\mathbf{P}_{\mu+1}^{[k-1]}$  恰为曲线  $\mathbf{p}(t)$  在点  $\mathbf{p}(t')$  处的左右切线. 再重复运用这一过程于另一节点  $t'' < t'$ , 则子曲线  $\mathbf{p}(t)$  ( $t'' \leq t \leq t'$ ) 必是一条  $k-1$  次 B ézier 曲线.

## 2.10 离散 B 样条及离散 B 样条曲线

由前两节可知, 嵌入一个节点  $t'$  于  $T$ , 则新旧 B 样条基函数或 B 样条曲线新旧控制顶点之间的关系为线性组合关系, 如(2.8.2)或(2.8.6)所示. 若嵌入多个节点于  $T$ , 则上述结论也成

立. 由此便抽象出离散 B 样条(Discrete B-spline)或离散 B 样条曲线的概念.

**定义 2.10.1** 假设  $T = \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  为严格递增节点的集合,  $T' = \{t'_i\}_{i=1}^h$  为有限个嵌入节点的集合,  $T \oplus T'$  为  $T \cup T'$  中递增有序元素的集合, 再假设  $N_{i,k}^{(T)}$  是定义在  $T$  上的  $k$  阶 B 样条基函数. 由基函数性质,  $N_{i,k}^{(T)}(t)$  能表为  $N_{i,k}^{(T \oplus T')}(t)$  的线性组合,

$$N_{i,k}^{(T)}(t) = \sum_j \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j) N_{j,k}^{(T \oplus T')}(t), \quad (2.10.1)$$

则称  $\alpha_{i,k}^{(T,T')}(j)$  为  $k$  阶离散 B 样条, 称矩阵  $\mathbf{A}_k^{(T,T')} = (\alpha_{i,k}^{(T,T')}(j))$  为离散 B 样条矩阵. 又称对  $T$  加入  $T'$  的变换为嵌节点变换, 仍记为  $T'$ .

**定义 2.10.2** 假设  $T, T'$  等如定义 2.10.1 所示,  $k$  阶 B 样条曲线为

$$\mathbf{p}_k(t) = \sum_i N_{i,k}^{(T)}(t) \mathbf{p}_{i,k}^{(T)} = \sum_i N_{i,k}^{(T \oplus T')}(t) \mathbf{p}_{i,k}^{(T,T')}, \quad (2.10.2)$$

则按顺序联接所有控制顶点  $\mathbf{p}_{i,k}^{(T,T')}, \mathbf{p}_{i+1,k}^{(T,T')}$  后所得的连续折线多边形  $\mathbf{r}_k^{(T)}(T')$  称为节点集  $T$  上基于节点集  $T'$  的  $k$  阶离散 B 样条曲线<sup>[3,5,8]</sup>.

从形式上来说,  $\mathbf{r}_k^{(T)}(T')$  与  $\mathbf{p}_k(t)$  相似, 只是把  $T'$  看作类似于  $t$  的“参数”; 当  $T'_m \subseteq T'_{m+1}$ ,  $m \rightarrow \infty$  时, 多边形序列  $\{\mathbf{r}_k^{(T)}(T'_m)\}$  是对曲线  $\mathbf{p}_k(t)$  的一个逼近.

**定理 2.10.1** 假设  $T' = T_1 \oplus T_2$ , 则嵌节点变换  $T', T_1, T_2$  的离散 B 样条矩阵之间有关系式

$$\mathbf{A}_k^{(T,T')} = \mathbf{A}_k^{(T,T_1)} \mathbf{A}_k^{(T \oplus T_1, T_2)}. \quad (2.10.3)$$

证 按(2.10.1) 可写出

$$N_{i,k}^{(T)}(t) = \sum_l \alpha_{i,k}^{(T,T_1)}(l) N_{l,k}^{(T \oplus T_1)}(t), \quad N_{l,k}^{(T \oplus T_1)}(t) = \sum_j \alpha_{l,k}^{(T \oplus T_1, T_2)}(j) N_{j,k}^{(T \oplus T')}(t),$$

所以有

$$N_{i,k}^{(T)}(t) = \sum_j \left[ \sum_l \alpha_{i,k}^{(T,T_1)}(l) \alpha_{l,k}^{(T \oplus T_1, T_2)}(j) \right] N_{j,k}^{(T \oplus T')}(t).$$

把上式与(2.10.1) 比较, 由 B 样条基函数的线性无关性可得

$$\alpha_{i,k}^{(T,T')}(j) = \sum_l \alpha_{i,k}^{(T,T_1)}(l) \alpha_{l,k}^{(T \oplus T_1, T_2)}(j). \quad (2.10.4)$$

此即(2.10.3), 证毕.

关于离散 B 样条更一般的讨论可参阅文献[8,10]. [8]所阐明的 OSLO 算法一次嵌入多个节点, 不过其效率并不比 Boehm 算法的效率<sup>[7]</sup>. [10]指出了  $\mathbf{A}_k^{(T,T')}$  的非零元素范围, 给出了  $\alpha_{i,k}^{(T,T')}$  的两套平行计算公式, 可加快计算速度并节省存储空间. 下面给出 B 样条曲线的离散构造. 比较(2.8.2)和(2.8.6), 可知嵌入一个节点以后, 老基用新基来表示或新顶点用老顶点来表示的系数可合用同一个表达式. 当嵌入多个节点后亦然. 在这个前提下, 我们有

**定理 2.10.2** 记连续嵌入节点  $t' \in (t_\mu, t_{\mu+1}]$  达  $k-1$  次的变换是  $\{t'\}^{k-1}$ , 又设  $T' = T_1 \oplus T_2$ , 记嵌节点变换  $T'$  以后新的控制顶点为

$$\mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')} = \sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j) \mathbf{p}_{i,k}^{(T)}, \quad (2.10.5)$$

则必有

$$\mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')} = \sum_l \alpha_{l,k}^{(T \oplus T_1, T_2)}(j) \mathbf{p}_{l,k}^{(T,T_1)}, \quad (2.10.6)$$

$$\mathbf{p}_k(t) = \sum_j N_{j,k}^{(T \oplus T')}(t) \mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')}, \quad (2.10.7)$$

$$\mathbf{p}_k(t') = \mathbf{p}_{\mu,k}^{(T, \{t'\}^{k-1})}. \quad (2.10.8)$$

证 把(2.10.4)代入(2.10.5), 再把(2.10.1)代入(2.10.2), 可分别有

$$\mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')} = \sum_l \left[ \sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T_1)}(l) \mathbf{p}_{i,k}^{(T)} \right] \alpha_{l,k}^{(T \oplus T_1, T_2)}(j), \quad \mathbf{p}_k(t) = \sum_j \left[ \sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j) \mathbf{p}_{i,k}^{(T)} \right] N_{j,k}^{(T \oplus T')}(t).$$

利用(2.10.5) 就可得出(2.10.6)和(2.10.7). 再注意到  $N_{j,k}^{(T \oplus \{t'\}^{k-1})}(t') = \delta_{\mu j}$ , 就由(2.10.7)得到(2.10.8), 证毕.

定理 2.10.2 具有鲜明的几何直观性. (2.10.6) 的几何意义是, 只要  $T' = T_1 \oplus T_2$ , 则点  $\mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')}$  总能表为点  $\mathbf{p}_{l,k}^{(T,T_1)}$  的凸线性组合; (2.10.7) 则是说任意加入节点集  $T'$  以后, 原曲线恒可表为以  $\mathbf{p}_{j,k}^{(T,T')}$  为控制顶点, 以  $T \oplus T'$  为节点向量的 B 样条形式; 特别当在  $t'$  处重复地嵌入  $k-1$  个节点以后, 则割角顶点  $\mathbf{p}_{\mu,k}^{(T \oplus \{t'\}^{k-1})}$  就是曲线上的点  $\mathbf{p}_k(t')$ . 由此, 依定义 2.10.2 可得

**推论 2.10.1** 存在节点集序列  $\{T'_m\}$ ,  $T'_m \subseteq T'_{m+1}, m=1,2,\dots$ , 使得离散 B 样条曲线序列  $\{\Gamma_k^{(T)}(T'_m)\}$  满足  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_k^{(T)}(T'_m) = \mathbf{p}_k(t)$ .

此外, 由(2.10.7)和定义 2.10.2 可得  $\Gamma_k^{(T)}(T') = \Gamma_k^{(T \oplus T')}(T')$ ,  $T'$  为空集.

## 2.11 平面 B 样条曲线的保凸性和变差缩减性(V.D.)性

**定理 2.11.1** 若平面上  $k$  个点  $\mathbf{p}_{\mu-k+1}, \mathbf{p}_{\mu-k+2}, \dots, \mathbf{p}_\mu$  构成满足定理 1.4.2 中定义的凸的控制多边形, 则  $k$  阶 B 样条曲线(2.2.2) ( $j = \mu$ ) 为满足定理 1.4.2 中定义的平面凸曲线. 同样地, 若控制多边形  $\mathbf{p}_{\mu-n+1} \mathbf{p}_{\mu-n+2} \dots \mathbf{p}_\mu$  ( $n > k$ ) 为凸, 则结论在区间  $[t_{\mu-n+k}, t_{\mu+1})$  上也成立.

证 在曲线(2.2.2)上任取一点, 设此点对应着参数  $t' \in (t_\mu, t_{\mu+1})$ . 在  $t'$  处嵌入一个节点, 则曲线可表为(2.9.1). 因新的控制多边形  $\mathbf{p}_{\mu-k+1}^{[1]} \mathbf{p}_{\mu-k+2}^{[1]} \dots \mathbf{p}_{\mu+1}^{[1]}$  为原控制多边形的内接多边形, 所以仍凸. 再在  $t'$  处依次嵌入  $k-2$  个节点, 则  $\mathbf{p}_{\mu-k+1}^{[k-1]} \mathbf{p}_{\mu-k+2}^{[k-1]} \dots \mathbf{p}_{\mu+k-1}^{[k-1]}$  仍是凸多边形. 由定理 2.9.1, 可知  $\mathbf{p}(t') = \mathbf{p}_\mu^{[k-1]}$  且  $\mathbf{p}_{\mu-1}^{[k-1]} \mathbf{p}_{\mu+1}^{[k-1]}$  是  $\mathbf{p}(t)$  在  $t = t'$  处的切线, 根据 B 样条曲线的凸包性(性质 2.3.2), 曲线段  $\mathbf{p}(t)(t_\mu \leq t < t_{\mu+1})$  必落在凸多边形  $\mathbf{p}_{\mu-k+1}^{[k-1]} \mathbf{p}_{\mu-k+2}^{[k-1]} \dots \mathbf{p}_{\mu+k-1}^{[k-1]}$  中, 因而必位于切线  $\mathbf{p}_{\mu-1}^{[k-1]} \mathbf{p}_{\mu+1}^{[k-1]}$  之同侧, 即其为凸. 证毕.

**定理 2.11.2** 平面  $k$  阶 B 样条曲线(2.2.1)和此平面上任一直线的交点个数不多于该直线和控制多边形  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n$  的交点个数.

证 嵌入节点后产生的新的控制多边形是原多边形的内接多边形, 因而这一过程为 V.D.. 若定理之结论不真, 则必存在一条直线  $L$ , 它和曲线(2.2.1) 相交于  $l$  个点, 这些点对应的参数为  $t'_m, m=1,2,\dots,l, t_k \leq t'_1 < t'_2 < \dots < t'_l \leq t_{n+1}$ ; 但  $L$  和多边形  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n$  的交点个数少于  $l$ . 今把  $t = t'_1$  分次作为新节点嵌入, 使成为  $k-1$  重节点, 这时依定理 2.9.1,  $\mathbf{p}(t)$  可表示为  $\mathbf{p}(t) = \sum_i N_{i,k}^{[k-1]}(t) \mathbf{p}_i^{[k-1]}$ , 且有  $\mathbf{p}(t'_1) = \mathbf{p}_{i_1}^{[k-1]}$ . 再把  $t = t'_2$  分次嵌入, 使成  $k-1$  重节点,

则  $\mathbf{p}(t)$  可表示为  $\mathbf{p}(t) = \sum_i N_{i,k}^{[2k-2]}(t) \mathbf{p}_i^{[2k-2]}$ , 且同时又有  $\mathbf{p}_{i_1}^{[k-1]} = \mathbf{p}_{i_1}^{[2k-2]} = \mathbf{p}(t'_1)$ ,

$\mathbf{p}(t'_2) = \mathbf{p}_{i_2}^{[2k-2]}$ . 再依次把  $t'_3, t'_4, \dots, t'_l$  嵌入成为  $k-1$  重节点, 最后形成一个新的控制多边形  $\mathbf{p}_1^{[kl-l]} \mathbf{p}_2^{[kl-l]} \dots$ , 并有  $\mathbf{p}(t'_m) = \mathbf{p}_{i_m}^{[kl-l]}, m=1,2,\dots,l$ . 这表明  $L$  和此新的控制多边形的交点至少有  $l$  个. 但嵌节点过程是 V.D.的, 据此推断  $L$  和原控制多边形的交点个数至少为  $l$  个, 与上矛盾. 由此定理得证.

## 主要文献

[WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学数学系研究生学位课程讲义, 1999  
[LYD, 82] 梁友栋, B-样条曲线曲面的几何理论及其保凸性保形性, 浙江大学学报, 计算几

何论文集, 1982, 77-96

[DBC, 78] de Boor, C., *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 1978

[BW, 80] Boehm W., Inserting new knots into B-spline curve, *Computer Aided Design*, 1980, 12(4): 199-201

[LW, LYD, 90] 吕伟, 梁友栋, 有理 B 样条曲线的离散构造与保形性问题, *应用数学学报*, 1990, 13(2): 129-136

[WJY, WGZ, PQS, 84] 汪嘉业, 汪国昭, 彭群生, 参数 B-Spline 曲线的几何性质和逼近阶, *数学年刊*, 1984, 5A(5): 625-632

### 参考文献

- 1 Gordon, W.J., Riesenfeld, R.F., B-spline curves and surfaces, in: Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. eds., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, 1974, 95-126
- 2 deBoor, C., On Calculation with B-spline, *Journal of Approximation Theory*, 1972, 6(1): 50-62
- 3 deBoor, C., *Splines as Linear Combinations of B-splines*, Academic Press, New York, 1976
- 4 Cox, M., G., The numerical evaluation of B-spline, Report No. NPL-DNACS-4, National Laboratory, 1971
- 5 Boehm, W., Farin, G., Kahmann, J., A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, 1984, 1(1): 1-60
- 6 Boehm, W., Prautzsch, H., The insertion algorithm, *Computer Aided Design*, 1985, 17(2): 58-59
- 7 Boehm, W., On the efficiency of knot insertion algorithms, *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(1-3), 141-143
- 8 Cohen, E., Lyche, T., Riesenfeld, R.F., Discrete B-spline and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics, *Computer Graphics and Image Processing*, 1980, 14(2): 87-111
- 9 Prautzsch, H., Piper, B., A fast algorithm to raise the degree of spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1991, 8(4), 253-265
- 10 梁友栋, 离散 B-样条的代数构造( I ), ( II ), *浙江大学学报, 计算几何专辑*, 1984, 13-33