

第一章 Bézier 曲线

Bézier 曲线是 CAGD 中最基本的造型工具之一. 我们将从几何直观的新角度, 用多种方法来生成这一曲线, 给予几何定义及代数定义, 并阐述其几何性质. 本章内容大部分取材于[WGJ, WGZ, 99]; 第 4.2 节内容取材于[LDY, 82]; 第 5 节内容取材于[SBQ, JTG, 82]; 第 6.3 节内容取材于[CGZ, 84].

1.1 自由曲线造型概论

在产品初始设计阶段, 描述其外形的曲线或曲面常常只有大致形状或只知道它通过一些空间点列 (称为型值点), 这类没有数学表达式的曲线或曲面称为自由曲线或自由曲面(Free form curve/surface). 计算机辅助几何设计的首要任务就是建立它们的数学模型. 其理论基础之一是样条函数(Spline function). 样条函数理论的创始人是 Schoenberg^[1].

1.1.1 样条函数插值的 Hermite 基表示

定义 1.1.1 设 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分割, 若函数 $g(x)$ 满足下列两条件: (1) 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, $g(x)$ 是 x 的 k 次多项式, $k > 0, i = 0, 1, \cdots, n-1$; (2) $g(x) \in C^{k-1}[a, b]$, 即 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有直到 $k-1$ 阶的连续导数; 则称 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上对于分割 Δ 的 k 次样条函数, $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 称为样条函数的节点.

定义 1.1.2 已给 xy 平面上的型值点列 $(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, n, x_0 < x_1 < \cdots < x_n$; 若 $y(x)$ 是 $[x_0, x_n]$ 上对于分割 Δ 的三次样条函数且 $y_i = y(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$, 则称 $y(x)$ 是 $[x_0, x_n]$ 上的三次插值样条函数.

容易证明 $[x_0, x_n]$ 上的三次插值样条函数的全体张成 $n+3$ 维的线性空间. 人们乐于选用定义 1.1.2 中的函数 $y(x)$ 作为通过点列 $(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, n$ 的平面自由曲线模型, 其原因是:

(1) 在小挠度条件下, $y(x)$ 是工程上木样条曲线的最佳力学模拟, 即弹性细梁在载荷 (压铁顶力) 作用下的形变曲线. 由材料力学知, 弹性曲线 $y(x)$, 其弯矩 $M(x)$, 曲率 $k(x)$, 截面惯性矩 I 与弹性模量 E 之间的关系为 $M(x) = EI k(x) = EI y''(x)(1 + y'^2(x))^{-3/2}$, 由小挠度假定, $|y'| \ll 1$, 因而上式简化为 $M(x) \approx EI y''(x)$; 又因两压铁间无外力 (相当于简支点的梁), $M(x)$ 为分段线性函数, 积分得 $y(x)$ 为分段三次函数且 $y''(x)$ 连续. (2) 这种数学表示符合工程应用中对曲线的三个要求: 一定的连续阶, 有拐点但不能太多, 计算简单. 一、二次曲线其连续阶低于 2 且没有拐点, 而直接应用 Lagrange 或 Newton 插值法得到的 n 次曲线可有多至 $n-2$ 个拐点, 波动多且计算量大.

下面构造 $y(x)$. 利用 Kronecker 记号 δ_{ij} , 设函数 $\varphi_i(t), \psi_i(t), i = 0, 1 \ (0 \leq t \leq 1)$ 满足

$$\begin{pmatrix} \varphi_i(j) & \varphi_i''(j) \\ \psi_i(j) & \psi_i''(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, \quad (1.1.1)$$

易知它们构成三次多项式空间的一组基, 称为两点两曲率式 Hermite 基. 显然上式等价于

$$(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \psi_0(t), \psi_1(t)) = (1-t, t, ((1-t)^3 - (1-t))/6, (t^3 - t)/6). \quad (1.1.2)$$

记待求常数 y_i'' 及子区间长度 h_i 为

$$y_i'' = y''(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n; \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \quad (1.1.3)$$

则可得到 $y(x)$ 的分段表示

$$y(x) = y_i \varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1} \varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_i'' h_i^2 \psi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1}'' h_i^2 \psi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right), \\ x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \quad (1.1.4)$$

容易知道上式蕴涵着 $y(x_i-) = y(x_i+)$, $y''(x_i-) = y''(x_i+)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$; 为求 y_i'' , 按 $y(x) \in C^2[x_0, x_n]$ 之条件 $y'(x_i-) = y'(x_i+)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, 我们有

$$h_{i-1}y_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i)y_i'' + h_i y_{i+1}'' = 6(m_i - m_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.1.5)$$

$$m_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.1.6)$$

因弹性线弯矩与 $y''(x)$ 成正比, (1.1.5) 称为三弯矩方程组.

类似地, 满足

$$\begin{pmatrix} F_i(j) & F_i'(j) \\ G_i(j) & G_i'(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1 \quad (1.1.7)$$

的函数 $F_i(t), G_i(t)$, $i = 0, 1$ ($0 \leq t \leq 1$) 称为两点两切线式 Hermite 基, 上式等价于

$$(F_0(t), F_1(t), G_0(t), G_1(t)) = ((t-1)^2(1+2t), t^2(3-2t), t(t-1)^2, t^2(t-1)) \quad (1.1.8)$$

由此得到 $y(x)$ 的另一种分段表示

$$y(x) = y_i F_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1} F_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_i' h_i G_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1}' h_i G_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.1.9)$$

为使 $y(x) \in C^2[x_0, x_n]$, 只须 $y''(x_i-) = y''(x_i+)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$; 由此得

$$h_i y_{i-1}' + 2(h_i + h_{i-1})y_i' + h_{i-1} y_{i+1}' = 3(h_i m_{i-1} + h_{i-1} m_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.1.10)$$

上式称为三转角方程组. 于是 $y(x)$ 的求解归结为 (1.1.5) 或 (1.1.10) 的求解.

1.1.2 端点条件及追赶法

三弯矩或三转角方程组的系数矩阵是 $(n-1) \times (n+1)$ 阶, 为使它有唯一解, 须增加两个端点条件(End conditions).

- 自由型端点条件: 木样条端点不受约束, 即 $y(x)$ 在端点 x_0, x_n 之曲率为 0, 也即 $y_0'' = 0, y_n'' = 0$.

- 抛物型端点条件: $y(x)$ 在 $[x_0, x_1]$, $[x_{n-1}, x_n]$ 上的两段曲线为抛物线, 即有 $y_0'' = y_1'', y_{n-1}'' = y_n''$.

- 夹持型端点条件: $y(x)$ 在端点的导数值被指定: $y'(x_0) = y_0'$, $y'(x_n) = y_n'$; 这时方程组 (1.1.5) 中首末增加了方程

$$2h_0 y_0'' + h_0 y_1'' = 6[(y_1 - y_0)/h_0 - y_0'], \quad h_{n-1} y_{n-1}'' + 2h_{n-1} y_n'' = 6[y_n' - (y_n - y_{n-1})/h_{n-1}]. \quad (1.1.11)$$

以上三种端点条件在实际应用中可混合使用. 容易看出, 加入端点条件后的方程组 (1.1.5) 或 (1.1.10) 中, 系数矩阵都是主对角线元素严格占优的三对角阵, 因而可用以下追赶法求得唯一解.

算法 1.1.1 (求解三对角线方程组的追赶法, 以 (1.1.5), (1.1.11) 为例)

追的过程: 由方程组第 i 个方程解出 y_i'' 代入第 $i+1$ 方程, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 得

$$y_i'' + a_i y_{i+1}'' = 6b_i / h_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.1.12)$$

$$(a_0, b_0) = (1/2, a_0(m_0 - y_0')),$$

$$(a_i, b_i) = (h_i / (2(h_{i-1} + h_i) - a_{i-1}h_{i-1}), a_i(m_i - m_{i-1} - b_{i-1})), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

赶的过程: 由 $i = n-1$ 时的方程 (1.1.12) 解出 y_{n-1}'' , 代入方程组中最后一个方程得

$$y_n'' = 6b_n = 6(y_n' - m_{n-1} - b_{n-1}) / ((2 - a_{n-1})h_{n-1}).$$

再由 (1.1.12) 递归地求 $y_{n-1}'', y_{n-2}'', \dots, y_0''$.

以上算法是稳定的, 原因如下: 首先有 $a_0 \in [0, 1/2]$, 假设 $a_{i-1} \in [0, 1/2]$, $1 \leq i < n-1$,

则 a_i 的分母不小于 $(2(h_{i-1} + h_i) - h_{i-1}) > 0$, 从而 $a_i > 0$, 又 $a_i \leq h_i / (2h_i) = 1/2$, 因而 $a_i \in [0, 1/2]$. 由数学归纳法知 $0 \leq a_i \leq 1/2, i = 0, 1, \dots, n-1$. 现设 a_i 的近似值为 a_i^* , 则可以得到它的绝对误差 $\delta a_i = a_i^* - a_i \approx h_{i-1} h_i \delta a_{i-1} / [2(h_{i-1} + h_i) - a_{i-1} h_{i-1}]^2$, 由此可知 $|\delta a_i| \leq h_{i-1} h_i |\delta a_{i-1}| / [2(h_{i-1} + h_i) - (h_{i-1} + h_i)/2]^2 \leq |\delta a_{i-1}|/9, i = 1, 2, \dots, i-1$; 同理 $|\delta b_i| = a_i |\delta b_{i-1}| \leq \delta b_{i-1}/2, i = 0, 1, \dots, n-1; |\delta y_i''| = a_i |\delta y_{i+1}''| \leq |\delta y_{i+1}''|/2, i = n-1, n-2, \dots, 0$. 这说明若方程组因某种原因引入误差, 导致某个 a_i 或 b_i, y_i 之值有误差时, 在递推求值中相应误差能递缩衰减.

1.1.3 样条曲线

如前所述, 三次插值样条函数有其力学背景和数学表示的优越性, 但它作为自由曲线模型仍有局限性. 这主要表现在: (1) 自由曲线是多值函数 (如封闭曲线或带圈曲线) 时; (2) 自由曲线是空间曲线时; (3) 自由曲线需要展示其几何不变性即坐标不变性时. 例如当样条函数的切线与坐标轴平行时, 切线斜率会无法计算. 为此需把原坐标系旋转, 在新坐标系下求原曲线的切线斜率. 其次, 对同一组几何型值点列, 在不同坐标系下产生的插值样条函数的图象是不一致的. 这一切说明样条函数缺乏几何不变性. 克服以上局限性的一个有效方法是采用参数样条曲线.

定义 1.1.3 设 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分割, $\mathbf{P}(t)$ 是满足下列两个条件的向量值函数: (1) 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上, $\mathbf{P}(t)$ 是 t 的向量值的 k 次多项式, $k > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$; (2) $\mathbf{P}(t) \in C^{k-1}[a, b]$, 即 $\mathbf{P}(t)$ 在 $[a, b]$ 上有直到 $k-1$ 阶的连续导向量; 则称 $\mathbf{P}(t)$ 是 $[a, b]$ 上对于分割 Δ 的 k 次参数样条曲线.

按上述定义, 易知 $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 为依次通过空间型值点列 $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, \dots, n$ 的三次参数样条曲线的充要条件是其分量 $x(t), y(t), z(t)$ 分别为通过平面型值点列 $(x_i, t_i), (y_i, t_i), (z_i, t_i), i = 0, 1, \dots, n$ 的三次插值样条函数. 这样, 利用三次样条曲线可以进行空间自由曲线和平面多值函数的插值造型, 且这一造型能轻松地转化为样条函数的插值, 其中型值点不必共面, 其分量也不必递增排列.

必须指出, 插值样条曲线的形状依赖于参数区间的分割. 等距分割较简单, 但效果不佳; 建议采用累加弦长 (Accumulated chord length) 法, 即 $t_0 = 0, t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i\|, i = 1, 2, \dots, n$.

1.2 割角多边形序列的生成及收敛 (Bézier 曲线的几何生成法 I)

1.2.1 简单割角法

上节展示了自由曲线造型的解析法, 本节展示自由曲线造型的另一类方法——几何法.

1974 年, Chaikin^[2] 提出对多边形割角的方法来产生自由曲线, 其中当边数为 2 时产生平面曲线的方法如下. 如图 1.2.1, 设 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 三点不共线, \mathbf{P}_i^1 是线段 $\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i$ 的中点, $i = 1, 2$; \mathbf{P}_2^2 是线段 $\mathbf{P}_1^1 \mathbf{P}_2^1$ 的中点; 今以多边形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1^1 \mathbf{P}_2^2 \mathbf{P}_2^1 \mathbf{P}_2$ 取代三角形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$, 再分别对 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2^2$ 三点和 $\mathbf{P}_2^2, \mathbf{P}_2^1, \mathbf{P}_2$ 三点不断重复这一过程. 易知第 i 次取代要割去 2^{i-1} 个角, $i = 1, 2, \dots$, 所得多边形序列将收敛到一条曲线. 1980 年, Lane 和 Riesenfeld^[3] 把以上方法推广到对空间多边形的所有边每次都同时取中点的递归割角. 如图 1.2.2, 设 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ 是空间多边形, 令

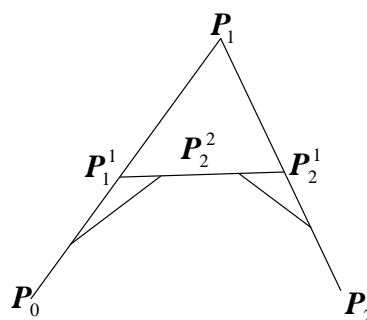


图 1.2.1 Chaikin 的割角法

$$\mathbf{P}_i^r = \begin{cases} \mathbf{P}_i, & r=0; i=0,1,\dots,n, \\ (\mathbf{P}_{i-1}^{r-1} + \mathbf{P}_i^{r-1})/2, & r=1,2,\dots,n; i=r,r+1,\dots,n, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

并以多边形 $\mathbf{P}_0^0 \mathbf{P}_1^1 \mathbf{P}_2^2 \dots \mathbf{P}_n^n \mathbf{P}_n^{n-1} \mathbf{P}_n^{n-2} \dots \mathbf{P}_n^0$ 取代多边形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ ，再分别对 $\mathbf{P}_0^0 \mathbf{P}_1^1 \mathbf{P}_2^2 \dots \mathbf{P}_n^n$ 和 $\mathbf{P}_n^n \mathbf{P}_n^{n-1} \mathbf{P}_n^{n-2} \dots \mathbf{P}_n^0$ 这两个 n 边形不断重复这一过程。易知第一次取代要经过 $n-1$ 层割角，其中第 r 层割去以 $\mathbf{P}_r^{r-1}, \mathbf{P}_{r+1}^{r-1}, \dots, \mathbf{P}_{n-1}^{r-1}$ 为顶点的 $n-r$ 个角， $r=1,2,\dots,n-1$ 。经过第 k 次取代后，得到一个 $2^k n$ 边形 $\mathbf{P}^{(k)}$ 。当 $k \rightarrow \infty$ ，这一多边形序列将收敛到一条空间曲线，称为割角曲线。显然 $n=2$ 时，这一方法退化为 Chaikin 方法。以上两种算法直观，简单，稳定，称为简单割角法。下一小节将重点研究后一种算法。

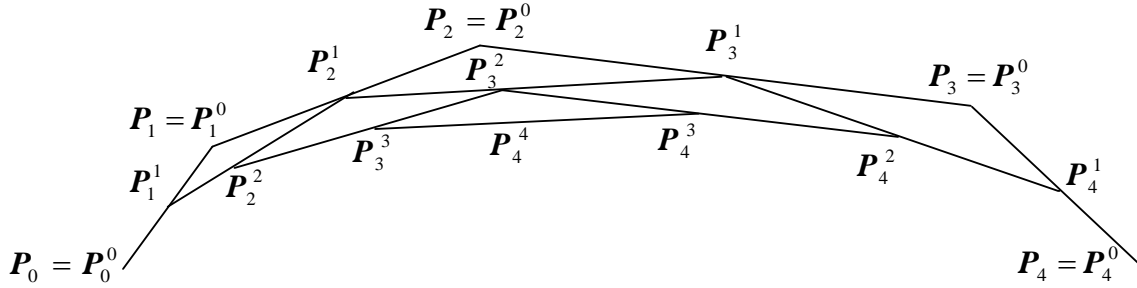


图 1.2.2 Lane 和 Riesenfeld 的割角法

1.2.2 割角多边形序列的两个性质

为了得到割角曲线的表达式，需要对多边形序列的顶点赋以 0 到 1 的参数。不妨采取分数指标的形式，其原则是：分母为顶点总个数减 1，分子为顶点序号，且割角以后所取中点的对应参数为前后两点之参数的平均值。于是为完成第 k ($k \geq 1$) 次取代的第 r 层递归割角关系可表为

$$\mathbf{P}^{k,r}\left(\frac{2nj+i}{2^k n}\right) = \begin{cases} \mathbf{P}^{k-1}\left(\frac{nj+i/2}{2^{k-1} n}\right), & r=0; i=0,2,\dots,2n, \\ \frac{1}{2} \left[\mathbf{P}^{k,r-1}\left(\frac{2nj+i-1}{2^k n}\right) + \mathbf{P}^{k,r-1}\left(\frac{2nj+i+1}{2^k n}\right) \right], & r=1,2,\dots,n; \\ & i=r,r+2,\dots,2n-r. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

而第 k ($k \geq 1$) 次取代以后的顶点可表为

$$\mathbf{P}^k\left((2nj+i)/(2^k n)\right) = \begin{cases} \mathbf{P}^{k,i}\left((2nj+i)/(2^k n)\right), & i=0,1,\dots,n, \\ \mathbf{P}^{k,2n-i}\left((2nj+i)/(2^k n)\right), & i=n+1,n+2,\dots,2n, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{P}^0(i/n) = \mathbf{P}_i, \quad i=0,1,\dots,n. \quad (1.2.4)$$

在(1.2.2),(1.2.3)中， $j=0,1,\dots,2^{k-1}-1$ ； $k=1,2,\dots$ 。在顶点参数化(Parameterization)以后，进一步，对第 k 次取代后所得多边形 $\mathbf{P}^{(k)}$ 的每一条边也施以参数化，即令

$$\mathbf{P}^k(t) = \mathbf{P}^k\left(i/(2^k n)\right) + (2^k nt - i) \left[\mathbf{P}^k\left((i+1)/(2^k n)\right) - \mathbf{P}^k\left(i/(2^k n)\right) \right], \quad (1.2.5)$$

$$i/(2^k n) \leq t \leq (i+1)/(2^k n), \quad i=0,1,\dots,2^k n-1; \quad k=0,1,\dots,$$

于是， $\mathbf{P}^{(k)}$ 被表为多边形 $\mathbf{P}^k(t)$ ($0 \leq t \leq 1$)。它有两个几何性质，可表述为

引理 1.2.1 第 k 次取代后所得的 $2^k n$ 边割角多边形 $\mathbf{P}^k(t)$ 中，每一个 n 边子多边形的首末顶点均为初始多边形顶点按 Bernstein 基函数 $B_j^n(t)$ 的加权平均(Weighted average)，即

$$\mathbf{P}^k(i/2^k) = \sum_{j=0}^n B_j^n(i/2^k) \mathbf{P}_j, \quad i=0,1,\dots,2^k; \quad (1.2.6)$$

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j; \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2.7)$$

证 按(1.2.1)的记号, 多边形 $\mathbf{P}^1(t)$ 的顶点是

$$\mathbf{P}^1(i/2n) = \mathbf{P}_i^1, \quad \mathbf{P}^1((n+i)/2n) = \mathbf{P}_n^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2.8)$$

今记 $\mathbf{P}^k(t) = \mathbf{P}^k(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, t)$, $0 \leq t \leq 1$; 用以表示 $\mathbf{P}^k(t)$ 是由多边形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ 经 k 次割角取代而得. 由此, 当 $k > 1$ 时, 有

$$\mathbf{P}^k(t) = \mathbf{P}^k(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n, t) = \begin{cases} \mathbf{P}^{k-1}(\mathbf{P}_0^0 \mathbf{P}_1^1 \dots \mathbf{P}_n^n, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \mathbf{P}^{k-1}(\mathbf{P}_n^n \mathbf{P}_n^{n-1} \dots \mathbf{P}_0^0, 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

当 $k=0$ 时易知(1.2.6)成立. 假设当 $k=m$ 时(1.2.6)成立, 则由(1.2.9)的第一式得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{m+1}\left(\frac{i}{2^{m+1}}\right) &= \mathbf{P}^m\left(\mathbf{P}_0^0 \mathbf{P}_1^1 \dots \mathbf{P}_n^n, \frac{i}{2^m}\right) = \sum_{j=0}^n B_j^n\left(\frac{i}{2^m}\right) \mathbf{P}_j^j = \sum_{j=0}^n B_j^n\left(\frac{i}{2^m}\right) \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^j \mathbf{P}_l \\ &= \sum_{l=0}^n \left[\sum_{j=l}^n \binom{n}{j} \binom{j}{l} \left(\frac{i}{2^m}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2^m}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \right] \mathbf{P}_l \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left(\frac{i}{2^{m+1}}\right)^l \left[\sum_{j=l}^n \binom{n-l}{j-l} \left(\frac{i}{2^{m+1}}\right)^{j-l} \left(1 - \frac{i}{2^m}\right)^{n-l-(j-l)} \right] \mathbf{P}_l = \sum_{l=0}^n B_l^n\left(\frac{i}{2^{m+1}}\right) \mathbf{P}_l, \quad i = 0, 1, \dots, 2^m. \end{aligned}$$

同理可证, $\mathbf{P}^{m+1}(i/2^{m+1}) = \sum_{l=0}^n B_l^n(i/2^{m+1}) \mathbf{P}_l$, $i = 2^m, 2^m + 1, \dots, 2^{m+1}$. 这表明当 $k=m+1$ 时

(1.2.6)亦成立. 由数学归纳法得证本引理.

引理 1.2.2 第 k 次取代所得多边形 $\mathbf{P}^k(t)$ 的第 i 条边的长度随取代次数 k 的增大而递缩, 即

$$\|\mathbf{P}^k(i/(2^k n)) \mathbf{P}^k((i+1)/(2^k n))\| \leq (1/2)^k M, \quad i = 0, 1, \dots, 2^k n - 1. \quad (1.2.10)$$

$$M = \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}\|. \quad (1.2.11)$$

证 当 $k=1$ 时, 由(1.2.1)知对于 $i = 0, 1, \dots, n$ 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_i^i \mathbf{P}_{i+1}^{i+1}\| &= \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i^i \mathbf{P}_{i+1}^i\| \leq \frac{1}{2^2} (\|\mathbf{P}_{i-1}^{i-1} \mathbf{P}_i^{i-1}\| + \|\mathbf{P}_i^{i-1} \mathbf{P}_{i+1}^{i-1}\|) \\ &\leq \frac{1}{2^3} \sum_{l=0}^2 \binom{2}{l} \|\mathbf{P}_{i-2+l}^{i-2} \mathbf{P}_{i-1+l}^{i-2}\| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} \|\mathbf{P}_l^0 \mathbf{P}_{l+1}^0\| \leq \frac{M}{2^{i+1}} \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} = \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

同理有 $\|\mathbf{P}_n^{n-i} \mathbf{P}_n^{n-i+1}\| \leq M/2$, 于是 $k=1$ 时 (1.2.10)成立. 对 k 作归纳不难证明本引理成立.

1.2.3 割角多边形序列的极限形式

定理 1.2.1 当割角多边形 $\mathbf{P}^k(t)$ 及其顶点如(1.2.2)–(1.2.5)所定义时, 由初始多边形 $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ 所产生的割角多边形序列 $\mathbf{P}^0(t), \mathbf{P}^1(t), \dots, \mathbf{P}^k(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 必一致收敛于曲线

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) \mathbf{P}_j, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.2.12)$$

证 对任一参数 $t_1 \in [0, 1]$, 必可确定 $g = [2^k t_1]$, $l = [2^k n t_1 - gn]$, 使得 $\mathbf{P}^k(t_1)$ 位于多边形 $\mathbf{P}^k(t)$ 的第 g 个子多边形的第 l 条边上, 也就是说 t_1 满足不等式 $g/2^k \leq t_1 \leq (g+1)/2^k$, $(gn+l)/(2^k n) \leq t_1 \leq (gn+l+1)/(2^k n)$, $0 \leq l \leq n-1$. 由(1.2.5)知

$$\mathbf{P}^k(t_1) = \mathbf{P}^k\left(\frac{gn+l}{2^k n}\right) + (2^k n t_1 - gn - l) \left[\mathbf{P}^k\left(\frac{gn+l+1}{2^k n}\right) - \mathbf{P}^k\left(\frac{gn+l}{2^k n}\right) \right], \quad (1.2.13)$$

于是应用引理 1.2.2, 1.2.1 以及求导公式 $(B_j^n(t))' = n(B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t))$ 可分别得到

$$\begin{aligned} \left\| P^k(t_1) - P^k\left(\frac{g}{2^k}\right) \right\| &\leq \sum_{i=0}^l \left\| P^k\left(\frac{gn+i}{2^k n}\right) P^k\left(\frac{gn+i+1}{2^k n}\right) \right\| \\ &\leq (l+1) \max_{0 \leq i \leq 2^k n-1} \left\| P^k\left(\frac{i}{2^k n}\right) P^k\left(\frac{i+1}{2^k n}\right) \right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k nM, \\ \left\| P^k\left(\frac{g}{2^k}\right) - P(t_1) \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^n B_j^n\left(\frac{g}{2^k}\right) P_j - \sum_{j=0}^n B_j^n(t_1) P_j \right\| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j \right\| \left\| t_1 - \frac{g}{2^k} \right\| \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) (P_{j+1} - P_j) \right\| \left\| t_1 - \frac{g}{2^k} \right\| \leq nM \left\| t_1 - \frac{g}{2^k} \right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k nM. \end{aligned}$$

最后由以上两式得

$$\left\| P^k(t_1) - P(t_1) \right\| \leq \left\| P^k(t_1) - P^k(g/2^k) \right\| + \left\| P^k(g/2^k) - P(t_1) \right\| \leq (1/2)^{k-1} nM.$$

上式右端与 t_1 无关, 因而定理得证.

(1.2.12)所定义的曲线称为 **Bézier** 曲线, 定理 1.2.1 表明割角曲线就是 **Bézier** 曲线. 特别当 $n=2$ 时为抛物线. **Bézier** 曲线系由法国工程师 **Bézier**(1910-1999)于 1962 年提出, 并据此在雷诺(Renault)汽车公司建立了著名的 UNISURF 自由曲线曲面设计系统^[4]. 然而当年 **Bézier** 提出的曲线表达式是

$$P(t) = \sum_{j=0}^n A_j^n(t) a_j \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.2.14)$$

$$A_0^n(t) = 1, \quad A_j^n(t) = \frac{(-t)^j}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \frac{(1-t)^{n-1} - 1}{t}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.15)$$

$$a_0 = P_0, \quad a_j = P_j - P_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.16)$$

这一定义十分奇特, 令人难以接受. 直到 1972 年, Forrest^[5]才提出形如(1.2.12)的定义, 指出它恰好就是 **Bernstein** 基与控制顶点的线性组合. 而我们用割角法引进并几何地定义 **Bézier** 曲线, 思想自然, 方法简单, 几何直观性强. 用割角法来研究曲线生成的另一好处是, 如果把简单割角法改为一般割角法, 即改动 (1.2.1) 中的割角系数, 还可产生 **B**-样条曲线, 有理 **Bézier** 曲线等其它自由曲线.

1.3 Bézier 曲线的基本几何性质及几何生成法 II 和 III

定义 1.3.1 设有函数 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$, 则与 $f(x)$ 相应的多项式函数

$$B^n(f; x) = \sum_{i=0}^n B_i^n(x) f(i/n), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.3.1)$$

称为 n 次 **Bernstein** 多项式, **Bernstein** 基 $B_i^n(x)$ 按(1.2.7)定义. $f(i/n) = f_i$ 称为 **Bézier** 纵标.

(1.3.1)由 **Bernstein** 所提出, 他还以此为工具, 构造性地证明了闭区间上的连续函数可用多项式来一致逼近的 **Weierstrass** 定理. 虽然 $B^n(f; x)$ 向 f 逼近的速度很慢, 但它具有保符号性、保单调性、保凸性等对 f 的大范围逼近性质, 且对 f 具有磨光性^[6]. 有关 **Bernstein** 多项式的理论可见[7,8].

定义 1.3.2 设有 $n+1$ 个点向量 $\{P_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3$, 则与其相应的曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.3.2)$$

称为 n 次 **Bézier** 曲线(Degree n **Bézier** curve), $P_0 P_1 \cdots P_n$ 称为控制多边形(Control polygon)或特征多边形(Characteristic polygon)或 **Bézier** 网(**Bézier** Mesh/Net), 简称 **B** 网, 记为 Γ_n ;

$P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 称为控制顶点(Control point).

易见 B ézier 曲线是 Bernstein 多项式的矢值形式, 两者性质极为相似. 作为研究工具, 下面我们引入 B ézier 曲线的算子表示, 显然, 定义 1.3.3 与定义 1.3.2 是等价的.

定义 1.3.3 设 E, I, Δ 分别是对于控制顶点 P_i 的位移算子, 恒等算子和向前差分算子,

$$EP_i = P_{i+1}, \quad IP_i = P_i, \quad \Delta P_i = (E - I)P_i = P_{i+1} - P_i, \quad (1.3.3)$$

则曲线

$$P(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0 = (I + t\Delta)^n P_0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.3.4)$$

称为由空间多边形 $P_0 P_1 \dots P_n$ 所确定的 n 次 B ézier 曲线.

B ézier 曲线 (1.3.2) 具有以下一些基本几何性质.

性质 1.3.1 几何不变性(Geometric invariability)和仿射不变性(Affine invariability): 曲线仅依赖于控制顶点而与坐标系的位置和方向无关, 即曲线的形状在坐标系平移和旋转后不变; 同时, 对控制多边形进行缩放或剪切等仿射变换后所对应的新曲线就是相同仿射变换后的曲线.

性质 1.3.2 关于参数 t 与 $(1-t)$ 具有对称性, 即以 $P_n P_{n-1} \dots P_0$ 为控制多边形的 B ézier 曲线就是以 $P_0 P_1 \dots P_n$ 为控制多边形的 B ézier 曲线, 只不过定向相反: 因为 $B_i^n(1-t) = B_{n-i}^n(t)$, 令

$$u = 1 - t \text{ 可得 } P(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{n-i}^n(t) P_{n-i} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j = P(t).$$

性质 1.3.3 假设控制顶点无重点(下同), 则其 k 阶导矢曲线是以 $\{(n!/(n-k)!) \Delta^k P_i\}_{i=0}^{n-k}$ 为控制顶点的 $n-k$ 次 B ézier 曲线:

$$\frac{d^k}{dt^k} (I + t\Delta)^n P_0 = \frac{n!}{(n-k)!} (I + t\Delta)^{n-k} \Delta^k P_0 = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} B_i^{n-k}(t) \Delta^k P_i, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3.5)$$

性质 1.3.4 两端点处的 k 阶导矢(Hodograph, 也称速端曲线)只与前、后 $k+1$ 个控制顶点有关:

$$P^{(k)}(0) = (n!/(n-k)!) \Delta^k P_0, \quad P^{(k)}(1) = (n!/(n-k)!) \Delta^k P_{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3.6)$$

性质 1.3.5 端点插值性质: 在 (1.3.6) 中取 $k=0$ 和 $k=1$ 可知, 曲线在两端点与控制多边形端点重合, 端边相切.

性质 1.3.6 凸包(Convex hull)性: 曲线位于控制顶点 P_0, P_1, \dots, P_n 的凸包内, 即位于包含这

$n+1$ 个点的最小凸集内. 这是因为 Bernstein 基具有非负性和权性, $B_i^n(t) \geq 0, \sum_{i=0}^n B_i^n(t) =$

$((1-t) + t)^n = 1$, 于是曲线是 P_0, P_1, \dots, P_n 的凸线性组合(Linear convex combination), 从而它位于其凸包内.

性质 1.3.7 特征造型性质与交互能力: 输入控制顶点可显示曲线或人机交互修改曲线形状. 特别, 注意到 i/n 是基函数 $B_i^n(t)$ 的最大值点, 可知改动顶点 P_{i_0} 时, 曲线上点 $P(i_0/n)$ 处变动最大, $0 \leq i_0 \leq n$.

性质 1.3.8 升阶(Degree elevation)公式: n 次 B ézier 曲线可形式上看作 $n+1$ 次 B ézier 曲线,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) \hat{P}_i, \quad \hat{P}_i = \left[\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i + \frac{i}{n+1} P_{i-1} \right], \quad P_{-1} = P_{n+1} = 0. \quad (1.3.7)$$

换言之, 利用升阶算子 $A = A_{n+1}$ 可把曲线 (1.3.2) 升阶到 $n+1$ 次, 其控制顶点表为

$$A_{n+1}(P_0, P_1, \dots, P_n)^T = (\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+1})^T, \quad (1.3.8)$$

$$\mathbf{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n+1} & \frac{n-1}{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+2) \times (n+1)}. \quad (1.3.9)$$

升阶公式可由下列恒等式直接推出:

$$B_i^n(t) = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) B_i^{n+1}(t), \quad i=0,1,\dots,n. \quad (1.3.10)$$

升阶公式的几何意义可解释为对于控制多边形 Γ_n 的割角, 即用升阶算子 \mathbf{A} 作用一次得到割角多边形 $\mathbf{A}\Gamma_n$, 它产生了对原曲线更紧的界定和逼近; 多了一个控制顶点, 也增加了调整曲线形状的柔韧性, 这是其两个优点. 但须注意, 割角时在每条边上所取内分点的比例 (割角系数) 是不一样的, 见图 1.3.1. 当升阶不断进行时, B ézier 网被密化, 最后它的升阶序列 $\mathbf{A}^0\Gamma_n, \mathbf{A}^1\Gamma_n, \dots, \mathbf{A}^k\Gamma_n$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时收敛到原始 B ézier 网 Γ_n 所定义的 B ézier 曲线^[9] (这也可看作定理 7.3.1 的推论), 且收敛阶为一阶^[10]. 这是 B ézier 曲线的几何生成法 II.

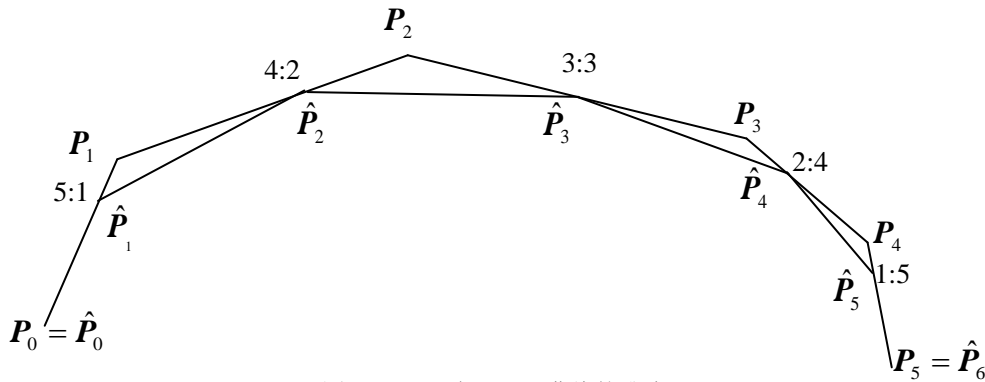


图 1.3.1 五次 Bezier 曲线的升阶

性质 1.3.9 递归求值与作图方法, 这是 B ézier 曲线的几何生成法 III: B ézier 在给出 B ézier 曲线的同时, 提出求曲线上一点之值及其切线的递归算法, 其几何意义是著名的作图定理^[11]. 它可视作 (1.2.1) 的直接推广, 也是递归割角, 因而我们也可用它作为 B ézier 曲线的几何定义. 但事实上, 早于 B ézier, 1959 年前后, 法国雪铁龙汽车公司的 de Casteljau 已经发现了这种曲线的表示法和算法^[12], 因此人们常称这种递归求值法为 de Casteljau 算法: 如图 1.3.2, 1.3.3, 递归地计算

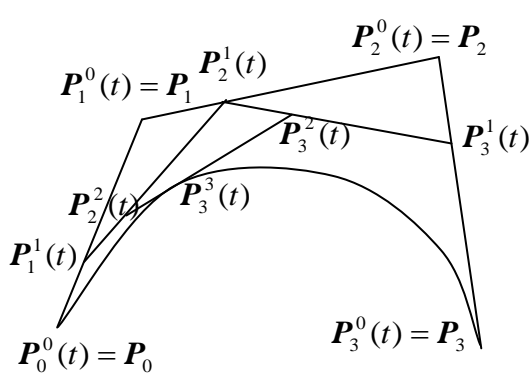


图 1.3.2 Bezier 曲线作图法 ($n=3$)

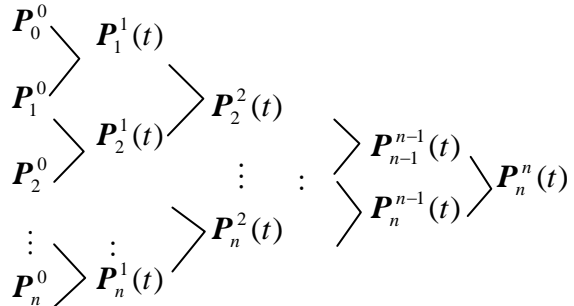


图 1.3.3 割角算法的顶点示意图

$$\begin{cases} P_i^r(t) = (1-t)P_{i-1}^{r-1}(t) + tP_i^{r-1}(t), & r=1,2,\dots,n; i=r,r+1,\dots,n, \\ P_i^0(t) \equiv P_i^1 = P_i, & i=0,1,\dots,n, \end{cases} \quad (1.3.11)$$

则 $P_n^n(t)$ 就是欲求的 $P(t)$ ，且直线 $P_{n-1}^{n-1}(t)P_n^{n-1}(t)$ 是曲线 (1.3.2) 在点 $P_n^n(t)$ 的切线。

下面利用定义 1.3.3 和性质 1.3.3 来简洁地证明上述结论。

因为 $P_i^r(t) = [(1-t)I + tE]P_{i-1}^{r-1}(t) = [(1-t)I + tE]^r P_{i-r}^0(t)$, $i=r, r+1, \dots, n$, 特别地取 $r=n$ 即得 $P_n^n(t) = [(1-t)I + tE]^n P_0^0(t) = P(t)$; 再取 $r=n-1, i=n-1, n$, 就可得到 $P_n^{n-1}(t) - P_{n-1}^{n-1}(t) = [(1-t)I + tE]^{n-1} [P_1^0(t) - P_0^0(t)] = (I + t\Delta)^{n-1} \Delta P_0 = P'(t)/n // P'(t)$ 。

性质 1.3.10 变差缩减性 (Variation Diminishing, 简称 V.D.): 平面 Bézier 曲线与此平面内任一直线的交点个数不多于其相应的控制多边形与该直线的交点个数。这里交点个数指跨越直线而不是接触直线的次数。其几何意义是, 若以围绕任一直线摆动的次数来刻画光滑性, 则平面 Bézier 曲线的光滑性不低于其 B 网的光滑性。证明与性质 3.2.7 之证明类似。

性质 1.3.11 平面三次 Bézier 曲线的分类及形状可控性^[13,14]:

对平面三次 Bézier 曲线 (1.3.2) 建立如图 1.3.4 的仿射坐标系 XOY , 取 X 轴与 Y 轴分别平行于向量 P_0P_1 与 P_3P_2 , $P_0 = (0,1), P_3 = (1,0), P_1 = (x,1), P_2 = (1,y)$, 再以 C 表示此仿射坐标系中双曲线的两支, 用来作为区域 B, D 的分界线; 以 E 和 F 表示抛物线 $3y^2 - 3y + x = 0$ 和 $3x^2 - 3x + y = 0$, 用来作为区域 D, N 的分界线。直线 l_1, l_2 分别合于 P_0P_1, P_3P_2 ; 称坐标为 (x, y) 的点 A 为特征点, 当点

$$A \in \begin{cases} N, & \text{则曲线上无拐点, 也无奇点(即尖点或二重点),} \\ S, & \text{则曲线上有一个拐点} \\ B, & \text{则曲线上有两个拐点} \\ C, & \text{则曲线上有一个尖点} \\ D, & \text{则曲线上有一个二重点} \end{cases}$$

为实现形状控制, 只要让点 P_1 和 P_2 沿平行于 X 轴和 Y 轴的方向改动位置, 这样点 $A(x, y)$ 的位置也随之改变, 从而控制新曲线的形状达到预想要求。

复旦大学苏步青、刘鼎元教授和山东大学汪嘉业教授引进几何不变量的方法, 彻底解决了平面三次参数曲线的分类和形状控制问题, 对 CAGD 作出了重要贡献。

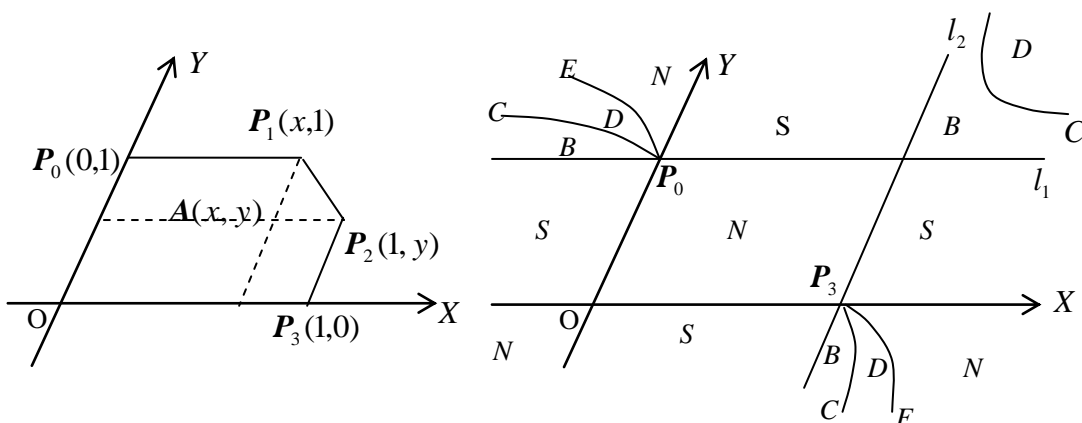


图 1.3.4 平面三次 Bézier 曲线的分类和形状控制

1.4 Bézier 曲线的离散构造与平面 Bézier 曲线的保凸性质

1.4.1 离散公式的导出

定理 1.4.1^[15] 任一 Bézier 曲线 $P(t)(a \leq t \leq b)$ 在其定义区间内任一点 c 处可被离散

(Subdivision, 也称为分割或子分) 为两条同次 Bézier 子曲线, 即对 $c \in (a, b)$, $\lambda = (c-a)/(b-a) \in [0, 1]$, 只要按照割角算法(1.3.11) 法算得 $\mathbf{P}_i^r(\lambda), r = 0, 1, \dots, n; i = r, r+1, \dots, n$, 就有

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \mathbf{P}_i = \begin{cases} \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-a}{c-a} \right) \mathbf{P}_i^i(\lambda), & a \leq t \leq c, \\ \sum_{i=0}^n B_i^n \left(\frac{t-c}{b-c} \right) \mathbf{P}_i^{n-i}(\lambda), & c \leq t \leq b. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

换言之, (1.4.1) 不但蕴涵着性质 1.3.9 中的 Bézier 曲线作图定理 (根据性质 1.3.5), 而且指明了两条子曲线的 B 网由图 1.3.3 顶点表中外框线所形成的三角形的上下斜边的元素所组成.

证 易知 $n=1$ 时定理为真, 设对自然数 $k, 1 \leq k < n$, 定理为真. 我们先建立三个恒等式

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \binom{n}{0} \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^n \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] \frac{(b-t)^{n-i} (t-a)^i}{(b-a)^n} \mathbf{P}_i + \binom{n}{n} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^n \mathbf{P}_n \\ &= \frac{b-t}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \mathbf{P}_i + \frac{t-a}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \mathbf{P}_{i+1}, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{b-t}{b-a} = \frac{c-t}{c-a} + \frac{t-a}{c-a} (1-\lambda), \quad \frac{t-a}{b-a} = \frac{t-a}{c-a} \lambda, \quad (1.4.3)$$

再应用归纳法的假设得到

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-a)/(b-a) \right) \mathbf{P}_i = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-a)/(c-a) \right) \mathbf{P}_i^i(\lambda), & a \leq t \leq c, \\ \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-c)/(b-c) \right) \mathbf{P}_{n-1}^{n-1-i}(\lambda), & c \leq t \leq b, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-a)/(b-a) \right) \mathbf{P}_{i+1} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-a)/(c-a) \right) \mathbf{P}_{i+1}^i(\lambda), & a \leq t \leq c, \\ \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left((t-c)/(b-c) \right) \mathbf{P}_n^{n-1-i}(\lambda), & c \leq t \leq b. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

于是注意到 $(1-\lambda)\mathbf{P}_i^i(\lambda) + \lambda\mathbf{P}_{i+1}^i(\lambda) = \mathbf{P}_{i+1}^{i+1}(\lambda)$, 就由 (1.4.2)–(1.4.5) 得出

$$\mathbf{P}(t) = \frac{c-t}{c-a} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left(\frac{t-a}{c-a} \right) \mathbf{P}_i^i(\lambda) + \frac{t-a}{c-a} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1} \left(\frac{t-a}{c-a} \right) \mathbf{P}_{i+1}^{i+1}(\lambda), \quad a \leq t \leq c.$$

根据恒等式(1.4.2), 我们得证定理在 $t \in [a, c]$ 时为真, 同理可证 $t \in [c, b]$ 时为真. 证毕.

应用(1.3.4)可把定理 1.4.1 的证明写得简洁些^[6]. 当 $a \leq t \leq c$ 时记 $(t-a)/(c-a) = s$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_i^n(s) \mathbf{P}_i^i(\lambda) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-s)^{n-i} s^i [(1-\lambda)\mathbf{I} + \lambda\mathbf{E}]^i \mathbf{P}_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-s)^{n-i} [(1-\lambda)s\mathbf{I} + \lambda s\mathbf{E}]^i \mathbf{P}_0 \\ &= [(1-s)\mathbf{I} + (1-\lambda)s\mathbf{I} + \lambda s\mathbf{E}]^n \mathbf{P}_0 = [(1-\lambda)s\mathbf{I} + \lambda s\mathbf{E}]^n \mathbf{P}_0 = \sum_{i=0}^n B_i^n(\lambda s) \mathbf{P}_i, \end{aligned}$$

此即(1.4.1)的第一式; 当 $c \leq t \leq b$ 时, 记 $(t-c)/(b-c) = s$, $\mathbf{P}_i^* = \mathbf{P}_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n$, 则按

性质 1.3.2 有 $\sum_{i=0}^n B_i^n(s) \mathbf{P}_i^{n-i}(\lambda) = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-s) \mathbf{P}_i^i(\lambda)$, 再利用刚证明的表达式, 视 s 为 $1-s$,

λ 为 $1-\lambda$, 则上式就是 $\sum_{i=0}^n B_i^n((1-\lambda)(1-s)) \mathbf{P}_i^* = \sum_{i=0}^n B_i^n(1-(1-\lambda)(1-s)) \mathbf{P}_i$, 此即(1.4.1)

的第二式.

必须指出, 定理 1.4.1 中 $c \in (a, b)$ 的限制其实是可以取消的. 这首先是因为多项式在全实轴上都有意义, (1.3.4) 中 t 的取值可以任意; 其次是因为上述证明中对 λ 的取值没有限制. 我

们还要指出, 对这一定理, 实际应用时, 常取(1.4.1)中的 $\lambda = 1/2$, 称之为在中点离散. 这样, (1.3.11)中的除以 2 的运算在计算机二进制中可以用右移一位来实现, 速度快, 也便于固化. 定理 1.4.1 的几何意义是递归割角. 若应用此定理 k 次, 则生成 2^k 条子曲线和具有 $2^k n$ 边的多边形. 可以证明, 当此多边形的最大边长趋于零时, 多边形本身一致收敛到原 B ézier 曲线.

1.4.2 离散公式的应用(平面 B ézier 曲线的保凸性)

定理 1.4.2 若控制多边形 $P_0 P_1 \cdots P_n$ 是平面凸多边形, 则与其相应的 B ézier 曲线(1.3.2)是平面凸曲线且 $P'(t) \neq 0, 0 < t < 1$. 即平面 B ézier 曲线具有保凸性(Convexity preserving property). 这里, 多边形凸系指它恒位于任一边所在直线之同侧, 曲线凸系指它恒位于任一点处切线之同侧.

证 由性质 1.3.10 可知曲线(1.3.2)与其所在平面上任一直线之交点个数不超过 2, 因而得证为凸. 但这里我们建议应用曲线分段定理 1.4.1 来给出本定理的严格证明. 假设存在 $c \in (0,1)$ 使得 $P'(c) = 0$, 把曲线在 c 点处分段得

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i = \begin{cases} \sum_{i=0}^n B_i^n(t/c) P_i^i(c), & 0 \leq t \leq c, \\ \sum_{i=0}^n B_i^n((t-c)/(1-c)) P_n^{n-i}(c), & c \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

因为凸多边形割角后仍为凸多边形, 所以第 r 层割角以后得到的多边形 $P_0^0(c) P_1^1(c) \cdots P_r^r(c) P_{r+1}^r(c) \cdots P_n^r(c) P_n^{r-1}(c) \cdots P_0^0(c)$ 仍凸, $r = 1, 2, \cdots, n$ (参见图 1.3.3). 但因 $P'(c) = 0$, 可知 $P_{n-1}^{n-1}(c) = P_n^{n-1}(c) = P_n^n(c)$, 于是由(1.3.11)得到

$$P_n^{n-2}(c) = P_{n-1}^{n-2}(c) + (1-c)[P_{n-2}^{n-2}(c) - P_{n-1}^{n-2}(c)]/c.$$

这表明若 $P_{n-2}^{n-2}(c) \neq P_{n-1}^{n-2}(c)$, 则必 $P_{n-2}^{n-2}(c), P_{n-1}^{n-2}(c), P_n^{n-2}(c)$ 三点共线且排列次序为点 $P_{n-2}^{n-2}(c)$ 居中或点 $P_{n-1}^{n-2}(c)$ 居中, 这与 $P_0^0(c) P_1^1(c) \cdots P_{n-2}^{n-2}(c) P_{n-1}^{n-2}(c) P_n^{n-2}(c) P_n^{n-3}(c) \cdots P_0^0(c)$ 为凸多边形矛盾. 所以 $P_{n-2}^{n-2}(c) = P_{n-1}^{n-2}(c) = P_n^{n-2}(c)$. 同理, 由上式可推得 $P_{n-3}^{n-3}(c) = P_{n-2}^{n-3}(c) = P_{n-1}^{n-3}(c) = P_n^{n-3}(c)$. 这样在图 1.3.3 中, 从右边第二列开始可依次往左推得每列上的元素当 $t = c$ 时均相等, 最后得到 $P_0 = P_1 = \cdots = P_n$, 从而与 $P_0 P_1 \cdots P_n$ 是多边形的假设相矛盾. 这表明 $P'(c) \neq 0$. 其次, 由 $P_{n-1}^{n-1}(c) \neq P_n^{n-1}(c)$ 的条件知直线 $L = P_{n-1}^{n-1}(c) P_n^{n-1}(c)$ 是曲线 $P(t)$ 在点 $P(c)$ 处的切线. 因多边形 $P^{(1)} = P_0^0(c) P_1^1(c) \cdots P_n^n(c) P_n^{n-1}(c) \cdots P_0^0(c)$ 为凸, 所以它位于 L 的同侧; 但由(1.4.6)知曲线 $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 位于 $P^{(1)}$ 的凸包内即 $P^{(1)}$ 内, 因而 $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 位于 L 的同侧即为凸, 证毕.

必须指出, 上述定理的逆定理不真. 但有时, 不凸的多边形升阶后成为凸多边形, 据此仍可判断相应的曲线为凸曲线.

1.5 B ézier 曲线的包络性质(几何生成法IV)

递推公式(1.3.11)中所求得的各割角点, 其中 $P_0^0(c), P_1^1(c), \cdots, P_n^n(c), P_n^{n-1}(c), \cdots, P_0^0(c)$ 的几何意义已由定理 1.4.1 指明. 自然会问, 其余割角点, 如 $P_1^1(c), P_2^2(c), \cdots, P_n^n(c)$ 等的几何意义如何? 我们有

定理 1.5.1 如(1.3.2)所示的 n 次 ($n \geq 2$) B ézier 曲线 $P(t)$ 是以(1.3.11)定义的 $P_{i+1}^1(c)$ 为控制顶点的 $n-1$ 次 B ézier 曲线族的包络(Envelop), 即

$$P(t) = \text{env} \left\{ P^{[n-1]}(t, c) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) P_{i+1}^1(c), 0 \leq t \leq 1 \mid 0 \leq c \leq 1 \right\}. \quad (1.5.1)$$

证 利用算子(1.3.3)容易把(1.3.11)和(1.5.1)表为

$$\mathbf{P}_i^r(t) = (\mathbf{I} + t\Delta)\mathbf{P}_{i-1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad i = r, r+1, \dots, n, \quad (1.5.2)$$

$$\mathbf{P}^{[n-1]}(t, c) = (\mathbf{I} + t\Delta)^{n-1} \mathbf{P}_1^1(c), \quad 0 \leq t, c \leq 1. \quad (1.5.3)$$

由此即得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{[n-1]}(t, c)|_{c=t} &= (\mathbf{I} + t\Delta)^{n-1} \mathbf{P}_1^1(t) = (\mathbf{I} + t\Delta)^n \mathbf{P}_0^0(t) = (\mathbf{I} + t\Delta)^n \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}^{[n-1]}(t, c)|_{c=t} &= (n-1)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-2} \Delta \mathbf{P}_1^1(t) = (n-1)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-2} \Delta (\mathbf{I} + t\Delta) \mathbf{P}_0 \\ &= (n-1)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-1} \Delta \mathbf{P}_0 // n(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-1} \Delta \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}'(t). \end{aligned}$$

这里应用了性质 1.3.3, 而区间端点处导矢理解为内侧极限值. 由以上两式可知, 对曲线 $\mathbf{P}(t)$ 上每一点, 都可在曲线族 $\{\mathbf{P}^{[n-1]}(t, c)\}$ 中找到一条族参数 $c = t$ 的曲线通过这点, 且在这点与曲线 $\mathbf{P}(t)$ 相切, 因而^[16](1.5.1)成立, 证毕.

$$\text{定理 1.5.2 } \mathbf{P}(t) = \text{env} \left\{ \mathbf{P}^{[n-r]}(t, c) = \sum_{i=0}^{n-r} B_i^{n-r}(t) \mathbf{P}_{i+r}^r(c), \quad 0 \leq t \leq 1 \middle| 0 \leq c \leq 1 \right\}, \quad (1.5.4)$$

$r = 1, 2, \dots, n-1$, 且曲线 $\mathbf{P}(t)$ 与 $\mathbf{P}^{[n-r]}(t, c)$ 在接触点 $c = t$ 处有 $n-r$ 阶切触(Contact of order $n-r$, 也称为 $n-r$ 阶接触).

证 $\mathbf{P}^{[n-r]}(t, c) = (\mathbf{I} + t\Delta)^{n-r} \mathbf{P}_r^r(c) = (\mathbf{I} + t\Delta)^{n-r} (\mathbf{I} + c\Delta)^r \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}^{[n-r]}(t, c)|_{c=t} = \mathbf{P}(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}^{[n-r]}(t, c)|_{c=t} &= (n-r)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-r-1} \Delta \mathbf{P}_r^r(t) = (n-r)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-r-1} \Delta (\mathbf{I} + t\Delta)^r \mathbf{P}_0 \\ &= (n-r)(\mathbf{I} + t\Delta)^{n-1} \Delta \mathbf{P}_0 // \mathbf{P}'(t), \end{aligned}$$

$$\text{同理, } \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{P}^{[n-r]}(t, c)|_{c=t} = \frac{(n-r)!}{(n-r-i)!} (\mathbf{I} + t\Delta)^{n-i} \Delta^i \mathbf{P}_0 = \frac{(n-r)!(n-i)!}{(n-r-i)!n!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{P}(t),$$

$i = 0, 1, \dots, n-r$. 于是本定理得证.

根据以上两个定理及包络的唯一性(见定理 4.3.2, 4.3.3), 用直线段定义一次 B ézier 曲线族以后, 则二次 B ézier 曲线可用其包络生成; 进一步用二次 B ézier 曲线族又可包络生成三次 B ézier 曲线; 如此递归进行, 就可用包络方式几何地定义 n 次 B ézier 曲线.

1.6 B ézier 曲线的代数性质

1.6.1 B ézier 曲线两种代数定义的等价性

这一小节证明基于控制多边形边矢量表示和顶点表示的 B ézier 曲线(1.2.14)–(1.2.16)与(1.3.2)的等价性. 计算表明

$$\sum_{i=0}^j \mathbf{a}_i = \mathbf{P}_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.6.1)$$

$$\sum_{i=j}^n B_i^n(t) = A_j^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.6.2)$$

所以

$$B_j^n(t) = A_j^n(t) - A_{j+1}^n(t), \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad B_n^n(t) = A_n^n(t). \quad (1.6.3)$$

于是得到

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \mathbf{P}_j = (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)^T$$

$$= (A_0^n(t), A_1^n(t), \dots, A_n^n(t)) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^n A_j^n(t) a_j.$$

1.6.2 B ézier 曲线的幂基表示

这一小节推导 B ézier 曲线与幂基(Monomial basis)形式表示的 Ferguson^[17]曲线之间的互化公式. 后者名称的由来是 Ferguson 于 1963 年首次在飞机设计中使用了 $(1, t, t^2, t^3)$ 为基函数的三次参数曲线. 利用算子表示可得

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i = (\mathbf{I} + t\Delta)^n \mathbf{P}_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i \mathbf{P}_0 t^i, \quad (1.6.4)$$

$$\Delta^i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \mathbf{E}^j. \quad (1.6.5)$$

由幂基的线性无关性可推知 Ferguson 曲线的表示唯一性, 因而 n 次 B ézier 曲线 $\mathbf{P}(t)$ 所对应的 n 次 Ferguson 曲线

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n t^i \mathbf{N}_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.6.6)$$

的控制顶点是

$$\mathbf{N}_i = \binom{n}{i} \Delta^i \mathbf{P}_0 = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \mathbf{P}_j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.6.7)$$

即

$$(B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)^T = (1, t, \dots, t^n) (b_{ij}^F)_{(n+1) \times (n+1)} (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)^T, \quad (1.6.8)$$

$$b_{ij}^F = \begin{cases} 0, & i < j, \\ (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{i}{j}, & i \geq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.6.9)$$

于是根据控制顶点的任意性得到

$$(B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) = (1, t, \dots, t^n) (b_{ij}^F)_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (1.6.10)$$

另一方面, 为把 t^j 表为 n 次 Bernstein 基的线性组合, 可利用表达式 $1 = [(1-t) + t]^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (1-t)^{n-i-j} t^i$, $j = 0, 1, \dots, n$, 得到

$$t^j = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (1-t)^{n-i-j} t^{i+j} = \sum_{i=j}^n B_i^n(t) \binom{n-j}{i-j} / \binom{n}{i}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.6.11)$$

$$(1, t, \dots, t^n) = (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) (f_{ij}^B)_{(n+1) \times (n+1)},$$

$$f_{ij}^B = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \binom{n-j}{i-j} / \binom{n}{i}, & i \geq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.6.12)$$

这里, 矩阵 (f_{ij}^B) 与 (b_{ij}^F) 互逆. 因为 t^j 和 $B_j^n(t)$ 可相互线性表出, 所以 $\{B_j^n(t)\}_{j=0}^n$ 线性无关. 总结以上结果, 我们有

定理 1.6.1 函数族 $\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 是 $[0, 1]$ 上 n 次多项式全体张成的线性空间的一组基底, 称为

Bernstein 基. 它与幂基 $\{t^i\}_{i=0}^n$ 的相互变换可通过右乘一个下三角阵(1.6.9)或(1.6.12)来得到, 如(1.6.10)和(1.6.11)所示. 相应地, n 次 Bézier 曲线(1.3.2)与 n 次 Ferguson 曲线(1.6.6)的关系如(1.6.4)所示, 顶点互化公式为

$$(P_0, P_1, \dots, P_n)^T = (f_{ij}^B)_{(n+1) \times (n+1)} (N_0, N_1, \dots, N_n)^T, \quad (1.6.13)$$

$$(N_0, N_1, \dots, N_n)^T = (b_{ij}^F)_{(n+1) \times (n+1)} (P_0, P_1, \dots, P_n)^T, \quad (1.6.14)$$

$$N_i = P^{(i)}(0)/i!. \quad (1.6.15)$$

我们也称 Ferguson 曲线为 Bézier 曲线的幂级数形式, 并称(1.6.8)为 Bézier 曲线的矩阵形式.

1.6.3 Hermite 插值曲线的 Bézier 表示

Hermite 基(1.1.2)和(1.1.8)是构造三次插值样条函数的重要工具, 同样地, 它们也可用来构造插值空间两点位矢和导矢的三次参数样条曲线. 不妨称后者为 Hermite 插值曲线. 为了求得 Hermite 基以便作插值计算, 我们可以把它表为 Bernstein 多项式, 再利用后者的端点求导公式(1.3.6)来简捷地求出 Bézier 纵标. 这是因为 Hermite 基正是由端点导数值来定义的; 而且由(1.3.6)得出的方程组的系数矩阵为三角阵, 计算简单. 一般地, 假设有 $m+n$ 个 $N = m+n-1$ 次多项式函数 $\{\phi_k(t)\}_{k=0}^{m-1}, \{\psi_l(t)\}_{l=0}^{n-1}$, 满足

$$\phi_k^{(i)}(0) = \delta_{ik}, \quad \phi_k^{(j)}(1) = 0, \quad i, k = 0, 1, \dots, m-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.6.16)$$

$$\psi_l^{(i)}(0) = 0, \quad \psi_l^{(j)}(1) = \delta_{jl}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1; \quad j, l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.6.17)$$

我们称它们为 N 次 Hermite 基. 下面来导出它的 Bézier 表示从而得出其表达式. 令

$$\phi_k(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t) f_i^{(k)}, \quad \text{由(1.6.16)的第二式显然有 } f_m^{(k)} = f_{m+1}^{(k)} = \dots = f_N^{(k)} = 0, \quad \text{又由(1.3.6)}$$

$$\text{及(1.6.5)得 } \phi_k^{(i)}(0) = \frac{N!}{(N-i)!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_j^{(k)} = \delta_{ik}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad \text{这表明}$$

$$(M_{ij})_{m \times m} (f_0^{(k)}, f_1^{(k)}, \dots, f_{m-1}^{(k)})^T = ((N-k)!/N!)(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

上式右端的 1 位于第 $k+1$ 行, $M_{ij} = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$, $i, j = 0, 1, \dots, m-1$. $(M_{ij})_{m \times m}$ 为下三角阵,

其逆阵是 $(M_{ij}^{-1})_{m \times m}$, $M_{ij}^{-1} = \binom{i}{j}$, $i, j = 0, 1, \dots, m-1$. 由此可知 $(f_0^{(k)}, f_1^{(k)}, \dots, f_{m-1}^{(k)})^T$ 即

$(M_{ij}^{-1})_{m \times m}$ 的第 $k+1$ 列的 $(N-k)!/N!$ 倍, 于是

$$f_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq i < k, \\ \frac{(N-k)!}{N!} \binom{i}{k}, & k \leq i \leq m-1. \end{cases} \quad (1.6.18)$$

所以

$$\phi_k(t) = \frac{(N-k)!}{N!} \sum_{i=k}^{m-1} B_i^N(t) \binom{i}{k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.6.19)$$

根据对称性, 在上式中以 $1-t$ 代 t , 以 n 代 m , 立即得

$$(-1)^k \psi_k(t) = \frac{(N-k)!}{N!} \sum_{i=k}^{n-1} B_i^N(1-t) \binom{i}{k}.$$

由性质 1.3.2 就有

$$\psi_l(t) = (-1)^l \frac{(N-l)!}{N!} \sum_{i=l}^{n-1} B_{N-i}^N(t) \binom{i}{l}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.6.20)$$

应用基转换公式(1.6.19)和(1.6.20), 我们不难把 N 次 Hermite 插值曲线化为 N 次 Bézier

曲线, 后者的控制顶点是插值曲线两端点上 $i = 0, 1, \dots, m-1$ 阶与 $j = 0, 1, \dots, n-1$ 阶导矢的线性组合.

主要文献

- [WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学数学系研究生学位课程讲义, 1999
 [LDY, 82] 刘鼎元, 平面 n 次 B ézier 曲线的凸性定理, 数学年刊, 1982, 3(1): 45-55
 [SBQ, JTG, 82] 苏步青, 金通洸, B ézier 曲线的包络定理, 浙江大学学报, 计算几何论文集, 1982, 13-16
 [CGZ, 84] Chang Gengzhe, Bernstein polynomials via the shifting operator, American Mathematical Monthly, 1984, 91(10): 634-638

参考文献

- 1 Schoenberg, I.J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic function, Quart, Applied Mathematics, 1946,4: 45-99, 112-141
- 2 Chaikin, G., An Algorithm for high speed curve generation, Computer Graphics and Image Processing, 1974, 3(4): 346-349
- 3 Lane, J.M., Riesenfeld, R.F., A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces, IEEE Transaction on Pattern analysis and machine intelligence, 1980, 2(1): 35-46
- 4 B ézier, P.E., Mathematical and practical possibilities of UNISURF, in: Barnhill R.E. and Riesenfeld R.F., eds., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1974, 127-152
- 5 Forrest, A.R., Interactive interpolation and approximation by B ézier polynomials, Computer Journal, 1972, 15(1): 71-79
- 6 常庚哲, 曲面的数学, 湖南教育出版社, 长沙, 1995
- 7 Lorentz, G.G., *Bernstein polynomials*, Mathematical Expositions, No. 8, 1953
- 8 Davis, P.J., *Interpolation and Approximation*, 2nd Edition, Dover, New York, 1975
- 9 Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide*, 3rd Edition, Academic Press, 1993
- 10 Cohen, E., Schumaker, L.L., Rates of convergence of control polygons, Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(1-3): 229-235
- 11 B ézier, P.E., *Numerical Control — Mathematics and Applications* (Translated by Forrest A.R.), John Wiley and Sons, London, 1972
- 12 de Casteljaeu, Outillages méthodes calcul, Technical Report, A. Citioën, Paris, 1959
- 13 苏步青, 刘鼎元, 计算几何, 上海科学技术出版社, 上海, 1981
- 14 Wang, J.Y., Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve, Computer Aided Design, 1981, 13(4): 199-206
- 15 Lane, J.M., Riesenfeld, R.F., A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces, IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1980, 2(1): 35-46
- 16 Hsiung, C.C., *A first course in differential geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1981, 112
- 17 Ferguson, J., Multivariable curve interpolation, Journal of Association for Computing Machinery, 1964, 11(2): 221-228