

## 第五章 有理圆弧段与有理圆锥曲线段

在几何外形设计及机器制造中, 圆弧曲线和圆锥曲线享有特别重要的地位, 它们是形体表示和机械零件构图中简单而常用的元素之一. 国际上早期的 CAGD 系统就都具有圆弧和圆锥曲线的计算机表示, 所用数学形式是隐函数<sup>[1]</sup>、几何样条<sup>[2]</sup>或 Ball 曲线<sup>[3]</sup>等. 自从 NURBS 技术引入 CAGD 以后, 人们利用有理曲线可把圆锥曲线和多项式参数曲线统一表示统一编程, 且能用权因子灵活地调节曲线形状的优点, 把它作为曲线设计系统的核心模型<sup>[4-10]</sup>. 但随着系统研制的进行, 围绕着圆锥曲线的 Bernstein 基表示提出了许多数学问题, 主要是:

1. 一段圆弧或圆锥曲线用  $n$  ( $n=2,3,4$ ) 次有理参数形式精确表示时, 其控制顶点及权因子必须满足什么样的充要条件? 这里指的是对控制顶点和权因子应当各自分开来提出, 具有明确几何意义的条件, 而不是两者混杂无法用于设计的符号串.

2. 上述条件如何用于几何作图? 已知一段圆弧的半径和圆心角, 如何求曲线上相应的控制顶点?

3. 有理三次或四次圆弧的圆心角范围有多大? 能否表示整圆?

4. 有理三次圆锥曲线分别在什么条件下表示椭圆, 抛物线, 双曲线?

5. 如何把圆弧和圆锥曲线的有理 Bézier 表示方法推广到有理 NURBS 设计?

下面介绍我们在这方面的系统工作, 有关定理和算法不难推广到高次有理参数曲线. 本章第 1, 2 节内容取材于[WGJ, 88]; 第 3 节内容取材于[SHH, WGJ, 98]; 第 4 节内容取材于[WGJ, WGZ, 92]; 第 5 节内容取材于[WGJ, 90].

### 5.1 圆弧曲线段的有理二次 Bézier 表示

有理二次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=2$ ) 表示圆弧段的充要条件已由定理 3.5.2 给出, 那里用到了隐式化方法. 下面我们再给出一种简单的证明. 由几何知识, (3.5.5) 是必要的. 当此条件满足时, 根据曲线的几何不变性. 仅需在特殊坐标系下证明 (3.5.6) 为充要条件即可.

取线段  $R_0R_2$  的中点为坐标原点,  $R_0R_2$  为  $x$  轴, 并设  $y_1 > 0$ ,  $-x_0 = x_2 = l$ , 则

$$x(t) = [-\omega_0(1-t)^2 + \omega_2t^2]l/\omega(t), \quad y(t) = 2\omega_1(1-t)tl \tan \theta/\omega(t).$$

由几何关系可知这一条曲线为圆弧, 当且仅当  $x^2(t) + [y(t) + l \cot \theta]^2 \equiv l^2 \csc^2 \theta$ , 或

$$(\omega_1^2/(\omega_0\omega_2) - \cos^2 \theta)(1-t)^2t^2 \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

于是定理 3.5.2 得证.

### 5.2 圆弧曲线段的有理三次 Bézier 表示

#### 5.2.1 充分条件和充要条件的导出

由上节结论立即可得:

**定理 5.2.1** 有理三次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=3$ ) 构成以  $2\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ) 为圆心角, 以  $l \csc \theta$  为半径的圆弧曲线段的一个充分条件是 (5.2.1) — (5.2.3) 同时成立:

$$-\omega_0 + 3\omega_1 = -\omega_3 + 3\omega_2 > 0, \quad -\omega_0R_0 + 3\omega_1R_1 = -\omega_3R_3 + 3\omega_2R_2, \quad (5.2.1)$$

$$\|R_0R_3\| = 2l, \quad \omega_1 \|R_0R_1\| = \omega_2 \|R_3R_2\|, \quad (5.2.2)$$

$$(-\omega_0 + 3\omega_1)^2 / (4\omega_0\omega_3) = \cos^2 \theta, \quad \theta = \angle(R_0R_1, R_0R_3). \quad (5.2.3)$$

并且这时曲线退化为有理二次 Bézier 曲线, 其权因子和控制顶点分别为:

$$\{\omega_0, (-\omega_0 + 3\omega_1)/2 = (-\omega_3 + 3\omega_2)/2, \omega_3\},$$

$$\{R_0, (-\omega_0R_0 + 3\omega_1R_1)/(-\omega_0 + 3\omega_1) = (-\omega_3R_3 + 3\omega_2R_2)/(-\omega_3 + 3\omega_2), R_3\}.$$

为推导充要条件, 首先由性质 3.2.9, 知道当曲线 (3.2.2) ( $n=3$ ) 为圆弧时,  $R_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 必须共面. 下面的分析思路是取特殊的坐标系, 把有理三次圆弧的条件按控制顶点的坐标用尽可能简单的方程来表示, 最后把坐标量还原成几何量.

**定理 5.2.2** 有理三次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=3$ ) 构成以  $2\theta (0 < \theta < \pi)$  为圆心角, 以  $l \csc \theta$  为半径的圆弧曲线段当且仅当以下条件同时成立:

(a)  $\mathbf{R}(i=0,1,2,3)$  四点共面;

$$(b) \quad \theta = \angle(\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_0\mathbf{R}_3) = \angle(\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\mathbf{R}_0); \quad (5.2.4)$$

$$(c) \quad 4(l-l_1 \cos \theta)(l-l_3 \cos \theta) = l_1 l_3; \quad (5.2.5)$$

$$(d) \quad 4l(l-l_3 \cos \theta)/(3l_1^2) = \omega_1^2/(\omega_0\omega_2); \quad (5.2.6)$$

$$(e) \quad 4l(l-l_1 \cos \theta)/(3l_3^2) = \omega_2^2/(\omega_1\omega_3); \quad (5.2.7)$$

$$l = \|\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3\|/2, \quad l_i = \|\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{R}_i\|, \quad i=1,2,3. \quad (5.2.8)$$

证 取线段  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3$  的中点为坐标原点,  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3$  为  $x$  并设  $y_1, y_2 > 0$ ,  $\|\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3\| = 2l$ ,  $\theta = \angle(\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_0\mathbf{R}_3)$ , 则利用与 § 5.1 中类似的关系式可知所求充要条件为

$$[A(1-t)^4 + B(1-t)^3t + C(1-t)^2t^2 + D(1-t)t^3 + Et^4](1-t)t \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.2.9)$$

这里

$$\begin{cases} A = 6\omega_0\omega_1l(l \sin \theta + x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta), \\ B = 9\omega_1^2[(l^2 - x_1^2 - y_1^2) \sin \theta - 2ly_1 \cos \theta] + 6\omega_0\omega_2l(l \sin \theta + x_2 \sin \theta - y_2 \cos \theta), \\ C = 18\omega_1\omega_2[(l^2 - x_1x_2 - y_1y_2) \sin \theta - l(y_1 + y_2) \cos \theta] + 4\omega_0\omega_3l^2 \sin \theta, \\ D = 9\omega_2^2[(l^2 - x_2^2 - y_2^2) \sin \theta - 2ly_2 \cos \theta] + 6\omega_1\omega_3l(l \sin \theta - x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta), \\ E = 6\omega_2\omega_3l(l \sin \theta - x_2 \sin \theta - y_2 \cos \theta). \end{cases} \quad (5.2.10)$$

(5.2.9)的方括号内的各项函数恰为四次 Bernstein 基, 因此得

$$A = B = C = D = E = 0. \quad (5.2.11)$$

由  $A = E = 0$  可知

$$(l + x_1)/y_1 = (l - x_2)/y_2 = \cot \theta, \quad (5.2.12)$$

这表示(5.2.4)成立. 以下假定  $\theta \neq \pi/2$ . 化简  $B = C = D = 0$  各式并利用 (5.2.12) 消去  $y_1, y_2$ , 得到

$$\begin{cases} 4lx_2 \cos^2 \theta / (3(l + x_1)^2) = \omega_1^2 / (\omega_0\omega_2), \\ 2l^2 \cot^2 \theta / (9(l^2 + l(x_1 - x_2) + x_1x_2 \cot 2\theta)) = (\omega_1\omega_2) / (\omega_0\omega_3), \\ -4lx_1 \cot^2 \theta / (3(l - x_2)^2) = \omega_2^2 / (\omega_1\omega_3). \end{cases} \quad (5.2.13)$$

记  $l_i = \|\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{R}_i\|$ ,  $i=1,2,3$ ; 利用坐标关系式  $-x_1 = l - l_1 \cos \theta$ ,  $x_2 = l - l_3 \cos \theta$ ,

在(5.2.13)中消去  $x_1, x_2$ , 我们得出(5.2.6)、(5.2.7)和

$$2l^2 / [9(l_1l_3 - 2(l - l_1 \cos \theta)(l - l_3 \cos \theta))] = (\omega_1\omega_2) / (\omega_0\omega_3), \quad (5.2.14)$$

把 (5.2.6) 和 (5.2.7) 相乘, 再和 (5.2.14) 比较, 最后可得

$$[4(l - l_1 \cos \theta)(l - l_3 \cos \theta) - l_1l_3]^2 = 0, \quad (5.2.15)$$

这就是(5.2.5). 再考虑  $\theta = \pi/2$ . 这时, 由 (5.2.11) 不难得到  $4\omega_0\omega_2l^2 = 3\omega_1^2l_1^2$ ,  $4\omega_1\omega_3l^2 = 3\omega_2^2l_3^2$ ,  $4l^2 = l_1l_3$ , 这可看作 (5.2.6), (5.2.7), (5.2.5) 之特例. 这样, 利用曲线的几何不变性, 定理得证.

定理 5.2.2 的条件可分为两部分: 前三个条件是关于控制顶点的, 后两个条件是关于权因子的, 其中条件(c)具有特殊的作用, 其有趣的几何意义在下一小节讨论. 把定理 5.2.2 的几何量全部用控制顶点来表示就得出

**定理 5.2.3** 有理三次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=3$ ) 构成圆弧曲线段的充要条件是

$$\begin{cases} [(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0)](\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0) = 0, \\ \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)}{\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0\|} = \frac{(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_3)}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\|}, \\ -[(2\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_3)(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)][(2\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_3)(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)] \\ \quad = \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0\| \cdot \|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\| (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)^2, \\ (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)(2\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_3) / (3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)^2) = \omega_1^2 / (\omega_0 \omega_2), \\ -(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_0)(2\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_3) / (3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3)^2) = \omega_2^2 / (\omega_1 \omega_3). \end{cases} \quad (5.2.16)$$

### 5.2.2 圆心角范围与顶点的几何作图

**定理 5.2.4** (5.2.5)成立的充要条件是：含于平面四边形  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3$  之凸包内，与  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$  两边切于点  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_3$  且以  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_3$  为首末端点的圆弧曲线段，通过此四边形两条对角线  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\mathbf{R}_1$  之交点  $\mathbf{I}$ 。

证 不妨取定理 5.2.2 证明中所用的坐标系，则  $\mathbf{R}_0 = (-l, 0)$ ,  $\mathbf{R}_3 = (l, 0)$ ，今设  $\mathbf{I}$  为  $(a, b)$ ，容易算出  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$  与  $\mathbf{R}_3\mathbf{I}$ ， $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$  与  $\mathbf{R}_0\mathbf{I}$  的交点分别为

$$((\pm b \cot \theta \mp (l \mp a))l / (b \cot \theta + (l \mp a)), 2bl / (b \cot \theta + (l \mp a))).$$

由此可知  $l_1, l_3$  为  $2bl / (b \cos \theta + (l \mp a) \sin \theta)$ 。把它代入 (5.2.5)，整理后得出  $(b \cot \theta - l)^2 - b^2 \csc^2 \theta = a^2$ 。这正是点  $\mathbf{I}$  落在以  $(0, -l \cot \theta)$  为圆心，以  $l \csc \theta$  为半径的圆弧曲线上的充要条件。定理证毕。

**定理 5.2.5** 若有理三次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=3$ ) 构成圆弧曲线段，那么平面四边形  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3$  是凸四边形，且圆弧的圆心角  $2\theta < 4\pi/3$ 。

证 由定理 5.2.4 可知条件 (5.2.5) 蕴涵着四边形  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3$  为凸。改写 (5.2.5) 为  $4[l^2 - l(l_1 + l_3) \cos \theta] = (1 - 4 \cos^2 \theta) l_1 l_3$ ，因  $\theta \geq \pi/2$  时  $\cos \theta \leq 0$ ，所以  $\theta < 2\pi/3$ 。证毕。

定理 5.2.4 指出了有理三次圆弧点  $\mathbf{R}_i$  的几何构造。根据定理 5.2.2, 5.2.4，我们有

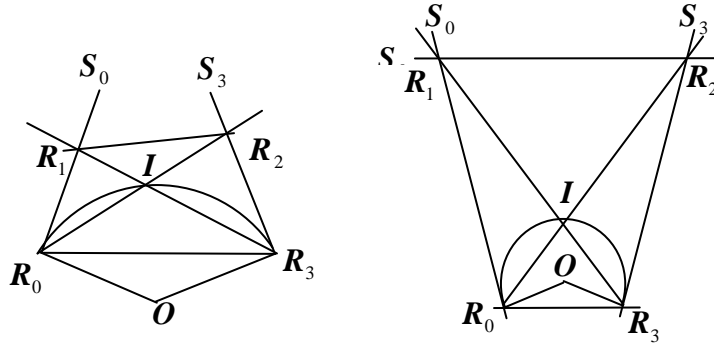


图 5.2.1 控制顶点  $\mathbf{R}_i$  的几何作图

**几何作图法 5.2.1** (按照圆弧的圆心角  $2\theta$  和半径  $L$ ，确定 Bézier 点  $\mathbf{R}_i (i=0,1,2,3)$ )。

Step 1. 作线段  $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3$ ，使  $\|\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3\| = 2L \sin \theta$  (见图 5.2.1)。

Step 2. 过点  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_3$  分别作射线  $\mathbf{R}_0\mathbf{S}_0, \mathbf{R}_3\mathbf{S}_3$ ，使  $\angle \mathbf{S}_0\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3 = \angle \mathbf{S}_3\mathbf{R}_3\mathbf{R}_0 = \theta, 0 < \theta < 2\pi/3$ 。

Step 3. 过点  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_3$  分别作  $\mathbf{R}_0\mathbf{S}_0, \mathbf{R}_3\mathbf{S}_3$  的垂线，交于点  $\mathbf{O}$ ，以  $\mathbf{O}$  为圆心， $\mathbf{OR}_0$  为半径，在  $\angle \mathbf{S}_0\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3$  内作圆弧曲线  $\overline{\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3}$ 。

Step 4. 在圆弧  $\overline{\mathbf{R}_0\mathbf{R}_3}$  上任取点  $\mathbf{I}$ ，连  $\mathbf{R}_0\mathbf{I}$  与  $\mathbf{R}_3\mathbf{I}$ ，分别延长交  $\mathbf{R}_3\mathbf{S}_3$  与  $\mathbf{R}_0\mathbf{S}_0$  于点  $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1$ 。

确定点  $R_i (i=0,1,2,3)$  后,  $\omega_i$  可由 (5.2.6), (5.2.7) 决定, 这里有一定的自由度.

### 5.3 圆弧曲线段的有理四次 Bézier 表示

从上节我们看到, 有理三次 Bézier 曲线只能表示圆心角小于  $240^\circ$  的圆弧. 人们自然会问: 增加一个控制顶点, 用有理四次 Bézier 曲线, 能否表示所有的圆弧? 如果能的话, 进一步能否表示整圆? 又用它来表示圆弧曲线时, 其相应的控制顶点及权因子要满足什么条件呢? 下面对这几个问题给出确切的回答.

#### 5.3.1 充要条件的导出

在有理四次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=4$ ) 中, 记与坐标系选择无关的几何量为:

$$\|R_0 R_4\| = 2l, \quad \|R_{i-1} R_i\| = l_i, \quad i=1,2,3,4,$$

$$\angle(R_0 R_1, R_0 R_4) = \angle(R_4 R_3, R_4 R_0) = \theta \in (0, \pi), \quad \angle(R_1 R_2, R_0 R_4) = \varphi,$$

建立如图 5.3.1 所示的坐标系, 则

$$(x_0, y_0) = (-l, l \cot \theta), \quad (x_1, y_1) = (l_1 \cos \theta - l, l \cos \theta + l_1 \sin \theta),$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi - l, l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi + l \cot \theta),$$

$$(x_3, y_3) = (l - l_4 \cos \theta, l_4 \sin \theta + l \cot \theta), \quad (x_4, y_4) = (l, l \cot \theta),$$

令

$$L_1 = l_1(l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi) - l_2(l - l_1 \cos \theta) \sin(\theta - \varphi),$$

$$L_2 = 2(l - l_1 \cos \theta) \sin \theta - l_2 \sin(\theta + \varphi),$$

$$L_3 = l_1 l_4 - 2(l - l_1 \cos \theta)(l - l_4 \cos \theta),$$

$$L_4 = L_3 \sin \theta + l_2 l_4 \sin \varphi + l_2(l - l_4 \cos \theta) \sin(\theta + \varphi),$$

则我们有:

**定理 5.3.1** 当  $\theta \neq \varphi$  时, 有理四次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n=4$ ) 表示以  $2\theta (0 < \varphi < \theta)$  为圆心角, 以  $l \csc \theta$  为半径的圆弧段当且仅当以下各条件同时成立:

(a)  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$  五点共面;

(b)  $\angle(R_0 R_1, R_0 R_4) = \angle(R_4 R_3, R_4 R_0) = \theta$ ;

$$(c) \frac{3}{4} \cdot \frac{l l_2 \sin(\theta - \varphi)}{l_1^2 \sin \theta} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0 \omega_2};$$

$$(d) \frac{4}{9} \cdot \frac{l_1^2 (l - l_4 \cos \theta) \sin^2 \theta}{l_2 L_1 \sin(\theta - \varphi)} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1 \omega_3};$$

$$(e) \frac{3}{4} \cdot \frac{l L_2}{l_4^2 \sin \theta} = \frac{\omega_3^2}{\omega_2 \omega_4};$$

$$(f) l_1^2 L_2 (l - l_4 \cos \theta)^2 [(l_2^2 - l_1^2) \sin \theta + 2L_1] \sin \theta \\ + 2l_2 L_1 L_2 L_3 (l - l_4 \cos \theta) \sin(\theta - \varphi) \\ = l_2 l_4^2 L_1^2 \sin(\theta - \varphi);$$

$$(g) l_2 l_4^2 L_1 (l - l_1 \cos \theta) \sin(\theta - \varphi) = l_1^2 L_2 L_4 (l - l_4 \cos \theta).$$

证 易知所求充要条件是

$$\left[ \sum_{i=0}^4 B_i^4(t) \omega_i x_i \right]^2 + \left[ \sum_{i=0}^4 B_i^4(t) \omega_i y_i \right]^2 = l^2 \csc^2 \theta \left[ \sum_{i=0}^4 B_i^4(t) \omega_i \right]^2,$$

将  $x_i, y_i$  代入, 展开后合并同类项, 并利用 Bernstein 基的线性无关性得到九个等式, 但其中有四个均为恒等式  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ , 另外五式分别为充要条件之(c),(e)和以下三式:

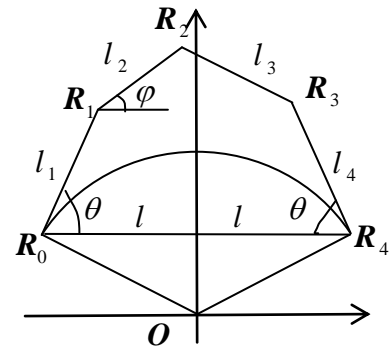


图 5.3.1 有理四次 Bézier 曲线表示一段圆弧

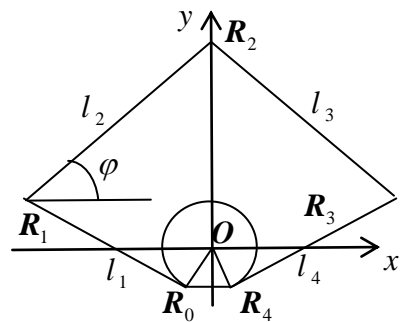


图 5.3.2 有理四次 Bézier 曲线能表示圆心角小于  $2\pi$  的任意圆弧

$$\omega_0 \omega_3 / (\omega_1 \omega_2) = 3L_4 / (l(l - l_4 \cos \theta) \sin \theta), \quad (5.3.1)$$

$$9\omega_2^2 [(l_2^2 - l_1^2) \sin \theta + 2L_1] + 8\omega_1 \omega_3 L_3 \sin \theta = \omega_0 \omega_4 l^2 \sin \theta, \quad (5.3.2)$$

$$\omega_1 \omega_4 l(l - l_1 \cos \theta) \sin \theta = 3\omega_2 \omega_3 L_4. \quad (5.3.3)$$

下面进行恒等变换. (c)乘以 (5.3.1)得(d), (5.3.1)除以(e)得

$$\omega_0 \omega_4 = 4\omega_1 \omega_3 l_4^2 L_1 / (l^2 (l - l_4 \cos \theta) L_2).$$

由 (d) 解出  $9\omega_2^2$  之值, 把它与上式代入 (5.3.2) 即得(f).

(d)乘以(e)得:

$$\omega_2 \omega_3 / (\omega_1 \omega_4) = l_1^2 L_2 (l - l_4 \cos \theta) \sin \theta / (3l_2 l_4^2 L_1 \sin(\theta - \varphi)).$$

代入(5.3.3)最后得(g), 而条件(a),(b)是显然的. 证毕.

仔细分析可知, 定理 5.3.1 中的充要条件可以分成两部分, 其中(a),(b),(f),(g)是关于控制顶点的, 而其余是关于权因子的; 另一方面, 定理有限制条件  $\theta \neq \varphi$ . 当  $\theta = \varphi$  时, 我们有:

**定理 5.3.2** 当  $\theta = \varphi$  时, 有理四次 Bézier 曲线 (3.2.2) ( $n = 4$ ) 表示以  $2\theta$  为圆心角, 以  $l \csc \theta$  为半径的圆弧段当且仅当定理 (5.3.1) 中的(a), (b)和以下三式同时成立:

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2^2 / (\omega_0 \omega_4) = \cos^2 \theta / 9, \quad l = (l_1 + l_2) \cos \theta.$$

证 因  $\theta = \varphi$ , 相对于定理 5.3.1 证明中的(c), (e), (5.3.1)–(5.3.3)现在分别简化为  $\omega_1 = 0$  和

$$\omega_3^2 / (\omega_2 \omega_4) = 3l[l - (l_1 + l_2) \cos \theta] / (2l_4^2), \quad (5.3.4)$$

$$\omega_2^2 / (\omega_0 \omega_4) = l^2 / (9(l_1 + l_2)^2), \quad (5.3.5)$$

$$\omega_3(l - l_4 \cos \theta) = 0, \quad (5.3.6)$$

$$\omega_2 \omega_3 [2(l_1 + l_2)(l - l_4 \cos \theta) \cos \theta + l_4(l_1 + l_2) + 2l(l_4 \cos \theta - l)] = 0. \quad (5.3.7)$$

由(5.3.5)知  $\omega_2 \neq 0$ ; 若  $\omega_3 \neq 0$ , 由(5.3.6)知  $l = l_4 \cos \theta$ , 代入(5.3.7)得  $l_4(l_1 + l_2) = 0$ . 从而  $l_4 = 0$  或  $l_1 + l_2 = 0$ , 矛盾. 所以  $\omega_3 = 0$ . 由对称性,  $\omega_1 = 0$ . 此时由 (5.3.4) 得  $l = (l_1 + l_2) \cos \theta$ , 代入 (5.3.5) 最后得欲证的其余一式. 证毕.

### 5.3.2 圆心角范围

由定理 5.3.2 可知, 在约束条件  $\theta = \varphi$  下,  $\cos \theta = l / (l_1 + l_2) > 0$ , 从而  $0 < \theta < \pi/2$ , 此时曲线所能表示圆弧的圆心角小于  $\pi$ . 但一般情形 ( $\theta \neq \varphi$ ) 下我们有:

**定理 5.3.3** 有理四次 Bézier 曲线能表示圆心角小于  $2\pi$  的任意圆弧.

证 先自由设置  $l_1, \theta, \varphi (l_1 > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2, \theta \neq \varphi)$ , 然后令

$$l = l_1 (\cos \theta + 1), \quad l_2 = l_1 / \cos \varphi, \quad l_1 = l_4, \quad \omega_0 = \omega_4 = 3 \sin \varphi / (\cos \varphi \sin \theta),$$

$$\omega_1 = \omega_3 = 3 \sqrt{(\cos \theta + 1) \sin(\theta - \varphi) \sin \varphi} / (2 \sin \theta \cos \varphi), \quad \omega_2 = 1.$$

则易证其满足定理 5.3.1 中的条件, 从而它表示了一条圆心角为  $2\theta (0 < 2\theta < 2\pi)$ , 半径为  $l \csc \theta$  的圆弧, 其中  $0 < \theta < \pi, l_1 > 0$  可以自由设置. 证毕.

图 5.3.2 是经编程由计算机生成的取  $\theta = 8\pi/9$  时的图形.

**定理 5.3.4** 有理四次 Bézier 曲线不能表示整圆.

证 用反证法. 若能表示整圆, 设其圆心为点  $O$ , 半径为  $L$ , 则其控制多边形  $R_0 R_1 R_2 R_3 R_4$  的顶点  $R_0, R_4$  重合, 又根据有理 Bézier 曲线相切于端边的性质知  $R_0, R_1, R_4, R_3$  四点共线, 且  $OR_0 \perp R_1 R_3$ . 以  $O$  为原点,  $R_0 O$  为  $y$  轴正向建立坐标系, 设  $\angle(R_1 R_2, R_1 R_3) = \theta$ , 则

$$(x_0, y_0) = (x_4, y_4) = (0, -L), \quad (x_1, y_1) = (-l_1, -L),$$

$$(x_3, y_3) = (l_4, -L), \quad (x_2, y_2) = (l_2 \cos \theta - l_1, l_2 \sin \theta - L).$$

代入圆的方程  $x^2 + y^2 = L^2 \omega^2(t)$ , 经展开, 合并同类项, 并利用 Bernstein 基的线性无关性得到九个等式, 略去其中四个恒等式后, 得到如下五个等式:

$$4\omega_1^2 l_1^2 - 3\omega_0 \omega_2 l_2 L \sin \theta = 0, \quad 4\omega_3^2 l_4^2 - 3\omega_2 \omega_4 l_2 L \sin \theta = 0, \quad (5.3.8)$$

$$l_1(l_2 \cos \theta - l_1) + l_2 L \sin \theta = 0, \quad l_4(l_2 \cos \theta - l_1) - l_2 L \sin \theta = 0, \quad (5.3.9)$$

$$9\omega_2^2(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta - 2l_2 L \sin \theta) - 8\omega_1 \omega_3 l_1 l_4 = 0. \quad (5.3.10)$$

把(5.3.9)中两式相加得  $(l_1 + l_4)(l_2 \cos \theta - l_1) = 0$ . 显然  $l_1 + l_4 > 0$ , 因为否则控制多边形  $R_0 R_1 R_2 R_3 R_4$  成一直线,  $R(t)$  不可能表示一个整圆, 于是  $l_2 \cos \theta - l_1 = 0$ . 从而由(5.3.9)知  $l_2 L \sin \theta = 0$ . 但依据和  $l_1 + l_4 > 0$  相同之理由可知  $l_2 > 0$ , 所以  $L = 0$  或  $\sin \theta = 0$ . 显然无论那种情形, 有理四次 Bézier 曲线都不能表示整圆, 证毕.

## 5.4 圆锥曲线段的有理三次 Bézier 表示

为简化推导, 把有理 Bézier 曲线用齐次坐标来表示, 并把分量用列向量形式写出, 即

$$\tilde{R}(t) = \begin{pmatrix} \omega(t)x(t) \\ \omega(t)y(t) \\ \omega(t)z(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \tilde{R}_i, \quad \tilde{R}_i = \begin{pmatrix} R_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.4.1)$$

当  $n = 3$  或  $2$  时, 记相应的曲线为

$$\tilde{R}(t) = (1-t)^3 \omega_0 \tilde{R}_0 + 3(1-t)^2 t \omega_1 \tilde{R}_1 + 3(1-t)t^2 \omega_2 \tilde{R}_2 + t^3 \omega_3 \tilde{R}_3, \quad \omega_i \neq 0, \quad (5.4.2)$$

$$\tilde{Q}(t) = (1-t)^2 \alpha_0 \tilde{Q}_0 + 2(1-t)t \alpha_1 \tilde{Q}_1 + t^2 \alpha_2 \tilde{Q}_2. \quad (5.4.3)$$

### 5.4.1 有理三次 Bézier 曲线的降阶条件与有理保形参数变换下的不变量

**引理 5.4.1** 假设  $I$  是线段  $R_0 R_2$  和  $R_1 R_3$  的交点,  $\omega_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$ , 则下列六个条件相互等价(见图 5.4.1):

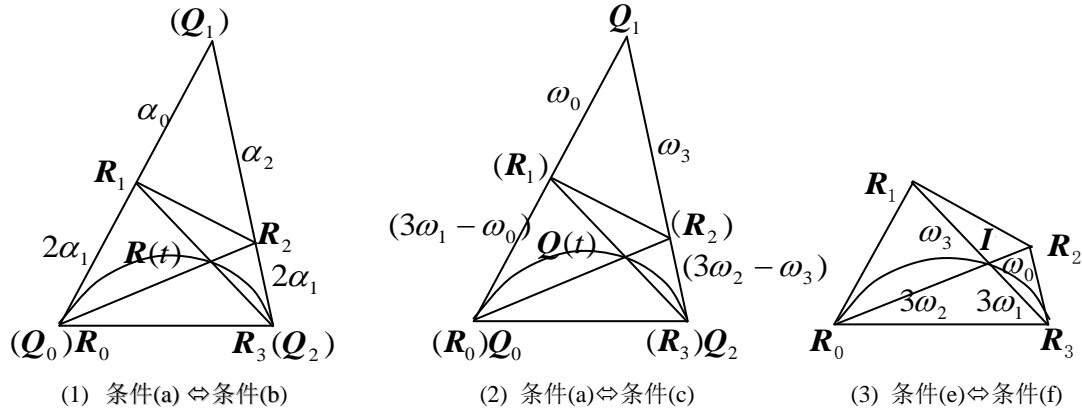


图 5.4.1 有理三次 Bézier 曲线的降阶条件

(a) 表成 (5.4.2) 的有理三次 Bézier 曲线  $\tilde{R}(t)$  退化为表成 (5.4.3) 的有理二次 Bézier 曲线  $\tilde{Q}(t)$ , 即  $\tilde{R}(t) = \tilde{Q}(t)$ .

(b)  $(\omega_0 \tilde{R}_0, \omega_1 \tilde{R}_1, \omega_2 \tilde{R}_2, \omega_3 \tilde{R}_3) = (\alpha_0 \tilde{Q}_0, (\alpha_0 \tilde{Q}_0 + 2\alpha_1 \tilde{Q}_1)/3, (2\alpha_1 \tilde{Q}_1 + \alpha_2 \tilde{Q}_2)/3, \alpha_2 \tilde{Q}_2)$ .

(c)  $(\alpha_0 \tilde{Q}_0, \alpha_1 \tilde{Q}_1, \alpha_2 \tilde{Q}_2) = (\omega_0 \tilde{R}_0, (-\omega_0 \tilde{R}_0 + 3\omega_1 \tilde{R}_1)/2 = (-\omega_3 \tilde{R}_3 + 3\omega_2 \tilde{R}_2)/2, \omega_3 \tilde{R}_3)$ .

(d)  $-\omega_0 \tilde{R}_0 + 3\omega_1 \tilde{R}_1 - 3\omega_2 \tilde{R}_2 + \omega_3 \tilde{R}_3 = 0$ .

$$(e) \quad I = R(1/2) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + 3\omega_2} R_0 + \frac{3\omega_2}{\omega_0 + 3\omega_2} R_2 = \frac{3\omega_1}{3\omega_1 + \omega_3} R_1 + \frac{\omega_3}{3\omega_1 + \omega_3} R_3.$$

(f) 曲线  $\tilde{R}(t)$  的权因子  $\omega_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 有下列几何意义:

$$\omega_0 : \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \frac{\|IR_2\|}{\|R_0R_2\|} : \frac{\|IR_3\|}{3\|R_1R_3\|} : \frac{\|IR_0\|}{3\|R_2R_0\|} : \frac{\|IR_1\|}{\|R_3R_1\|}.$$

这里条件(b)表示  $\tilde{Q}(t)$  升阶为  $\tilde{R}(t)$ , 条件(c)表示  $\tilde{R}(t)$  可降阶为  $\tilde{Q}(t)$  (一般做不到).

证 容易证明(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a), (e) $\Leftarrow$ (f), 引理证毕.

**引理 5.4.2**(见定理 3.2.1) 若  $\{R_i\}_{i=0}^3$  中任三点不共线, 那么两条有理三次 Bézier 曲线(5.4.2)和  $\tilde{R}^*(u) = (1-u)^3 \omega_0^* \tilde{R}_0 + 3(1-u)^2 u \omega_1^* \tilde{R}_1 + 3(1-u)u^2 \omega_2^* \tilde{R}_2 + u^3 \omega_3^* \tilde{R}_3$ ,  $\omega_i^* \neq 0, i=0,1,2,3$  (5.4.4)

形状完全相同的充要条件是  $I_1 = I_1^*$ ,  $I_2 = I_2^*$ ;  $I_i, I_i^*, i=1,2$  如(3.2.12)所示.

### 5.4.2 有理三次圆锥曲线段向单位圆弧的转换

引理 5.4.1 指出了有理三次 Bézier 曲线能精确地降阶为有理二次 Bézier 曲线(圆锥曲线)的充要条件. 满足这个条件的有理三次 Bézier 曲线是很特殊的. 事实上, 存在许多有理三次 Bézier 曲线不满足引理 5.4.1 的条件, 但却是圆锥曲线. 为刻画这类曲线的特征, 我们可先用坐标变换, 把它所在平面取为  $xy$  平面; 再用非退化线性变换, 把它所代表的三元二次型化为标准形二次型. 由此得出

**引理 5.4.3** 若有理三次 Bézier 曲线  $\tilde{R}(t)$  是圆锥曲线, 则存在四阶非奇异矩阵  $T$ , 使得

$$\tilde{R}^*(t) = (\omega^*(t)x^*(t), \omega^*(t)y^*(t), \omega^*(t)z^*(t), \omega^*(t))^T = T \cdot \tilde{R}(t)$$

落在一个单位球面上. 即

$$[\omega^*(t)x^*(t)]^2 + [\omega^*(t)y^*(t)]^2 + [\omega^*(t)z^*(t)]^2 = [\omega^*(t)]^2.$$

证 设  $\pi$  是曲线  $\tilde{R}(t)$  所在的一个平面, 其方程是  $ax + by + cz + d = 0$ , 则  $\tilde{R}(t)$  上各点的坐标满足这个方程, 即

$$a[\omega(t)x(t)] + b[\omega(t)y(t)] + c[\omega(t)z(t)] + d\omega(t) = 0, \quad (5.4.5)$$

这里  $l = (a, b, c)$  是平面  $\pi$  的法向量. 假设向量  $l_i = (a_i, b_i, c_i)$  ( $i=1,2$ ) 相互正交且平行于平面  $\pi$ , 记

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\omega(t)x_1(t), \omega(t)y_1(t), \omega(t)z_1(t), \omega(t))^T = D(\omega(t)x(t), \omega(t)y(t), \omega(t)z(t), \omega(t))^T, \quad (5.4.6)$$

显然  $|D| \neq 0$ , 且(5.4.5)表明  $\omega(t)z_1(t) = 0$ . 于是  $\omega(t)x_1(t), \omega(t)y_1(t)$  和  $\omega(t)$  满足非退化的圆锥曲线的一个隐式方程, 换言之, 存在一个三阶对称非奇异矩阵  $A$ , 使得

$$(\omega(t)x_1(t), \omega(t)y_1(t), \omega(t))A(\omega(t)x_1(t), \omega(t)y_1(t), \omega(t))^T = 0. \quad (5.4.7)$$

上式表示  $A$  既非正定阵, 也非负定阵. 由矩阵论<sup>[1]</sup>知  $A$  的正惯性指标介于 1 和 2 之间, 但矩阵  $A$  和  $-A$  均满足(5.4.7),  $A$  和  $-A$  的正惯性指标总有一个为 2, 所以不失一般性, 我们可认为  $A$  的正惯性指标是 2. 也就是说, 存在一个三阶非奇异矩阵  $S$ , 使得

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.8)$$

现在我们置

$$\begin{pmatrix} \omega^*(t)x^*(t), \omega^*(t)y^*(t), \omega^*(t)z^*(t) \end{pmatrix}^T = \mathbf{S}^{-1}(\omega(t)x_1(t), \omega(t)y_1(t), \omega(t)z_1(t))^T, \quad (5.4.9)$$

$$\omega^*(t)z^*(t) = \omega(t)z_1(t) = 0. \quad (5.4.10)$$

则由(5.4.7)–(5.4.10)可得

$$[\omega^*(t)x^*(t)]^2 + [\omega^*(t)y^*(t)]^2 + [\omega^*(t)z^*(t)]^2 = [\omega^*(t)]^2. \quad (5.4.11)$$

记

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}, \quad (5.4.12)$$

显然  $|\mathbf{T}| \neq 0$ . 由(5.4.9), (5.4.10), (5.4.6)和(5.4.12), 我们推得

$$\begin{pmatrix} \omega^*(t)x^*(t), \omega^*(t)y^*(t), \omega^*(t)z^*(t), \omega^*(t) \end{pmatrix}^T = \mathbf{T}(\omega(t)x(t), \omega(t)y(t), \omega(t)z(t), \omega(t))^T. \quad (5.4.13)$$

于是从上式和(5.4.11)就证明了本引理.

### 5.4.3 有理三次圆锥曲线段的充要条件

由以上两小节的引理, 我们可以导出以下两个定理, 揭示有理三次圆锥曲线的代数性质.

**定理 5.4.1** 若有理三次 Bézier 曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是一条圆锥曲线, 那么向量方程

$$\omega_0 \tilde{\mathbf{R}}_0 - 3\omega_1 \tilde{\mathbf{R}}_1 k + 3\omega_2 \tilde{\mathbf{R}}_2 k^2 - \omega_3 \tilde{\mathbf{R}}_3 k^3 = 0 \quad (5.4.14)$$

有唯一的根

$$k = (\omega_0/\omega_1) \cdot (S_1/3S_0) = (\omega_1/\omega_2) \cdot (S_2/S_1) = (\omega_2/\omega_3) \cdot (3S_3/S_2), \quad (5.4.15)$$

这里  $S_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 分别是  $\Delta \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3, \Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3, \Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3$  和  $\Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$  (系指有向面积, 参见定义 7.3.1), 见图 5.4.2.

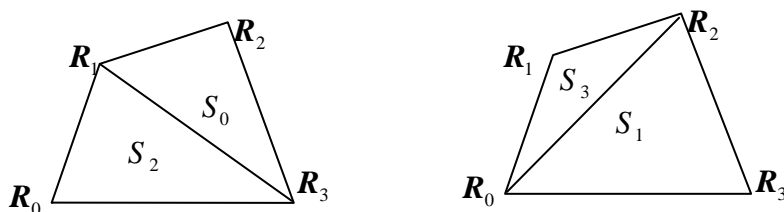


图 5.4.2 有向面积  $S_0, S_1, S_2, S_3$

证 首先证明方程(5.4.14)有一个解. 由引理 5.4.2 可知, (5.4.2)所示的曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  等同于曲线

$$\tilde{\mathbf{R}}(k) = \omega_0 \tilde{\mathbf{R}}_0 - 3\omega_1 k \tilde{\mathbf{R}}_1 + 3\omega_2 k^2 \tilde{\mathbf{R}}_2 - \omega_3 k^3 \tilde{\mathbf{R}}_3,$$

这里  $k = u/(1-u), 0 < u < 1$ . 而引理 5.4.3 表明, 存在一个非奇异矩阵  $\mathbf{T}$ , 使得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^*(k) &= (\omega^*(k)x^*(k), \omega^*(k)y^*(k), \omega^*(k)z^*(k), \omega^*(k))^T \\ &= \mathbf{T} \tilde{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{T} \omega_0 \tilde{\mathbf{R}}_0 - 3\mathbf{T} \omega_1 k \tilde{\mathbf{R}}_1 + 3\mathbf{T} \omega_2 k^2 \tilde{\mathbf{R}}_2 - \mathbf{T} \omega_3 k^3 \tilde{\mathbf{R}}_3 \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

落在一个单位球面上, 也即

$$[\omega^*(k)x^*(k)]^2 + [\omega^*(k)y^*(k)]^2 + [\omega^*(k)z^*(k)]^2 = [\omega^*(k)]^2. \quad (5.4.17)$$

因为  $|\mathbf{T}| \neq 0$  且  $\omega_3 \tilde{\mathbf{R}}_3 \neq \mathbf{0}$ , 我们得到  $\mathbf{T} \cdot \omega_3 \tilde{\mathbf{R}}_3 \neq \mathbf{0}$ . 这意味着  $\tilde{\mathbf{R}}^*(k)$  的次数是 3, 于是从(5.4.17)知  $\omega^*(k)$  的次数就是  $\tilde{\mathbf{R}}^*(k)$  的次数, 即是 3. 今假设  $k_0$  是  $\omega^*(k)$  的一个实根, 即  $\omega^*(k_0) = 0$ . 由(5.4.17)我们有  $\tilde{\mathbf{R}}^*(k_0) = \mathbf{0}$ , 因而由(5.4.16)得  $\tilde{\mathbf{R}}(k_0) = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^*(k_0) = \mathbf{0}$ . 即  $k_0$



是向量方程(5.4.14)的一个实根.

下面证明方程(5.4.8)只有一个解. 因(5.4.14)等价于  $(3\omega_1 k/\omega_0)\tilde{\mathbf{R}}_1 - (3\omega_2 k^2/\omega_0)\tilde{\mathbf{R}}_2 + (\omega_3 k^3/\omega_0)\tilde{\mathbf{R}}_3 = \tilde{\mathbf{R}}_0$ , 这表明  $(3\omega_1 k/\omega_0, -3\omega_2 k^2/\omega_0, \omega_3 k^3/\omega_0)$  是点向量  $\mathbf{R}_0$  关于三角形  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$  的重心坐标. 若  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$  三点共线, 则  $\mathbf{R}_0$  也落在此直线上, 从而  $\mathbf{R}(t)$  不是一条非退化的圆锥曲线, 这是不可能的. 所以三角形  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$  的面积非 0,  $\mathbf{R}_0$  的重心坐标唯一, 且就是

$$\begin{cases} (3\omega_1 k)/\omega_0 = \Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 / S_0 = S_1 / S_0, \\ (-3\omega_2 k^2)/\omega_0 = \Delta \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_3 / S_0 = -\Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3 / S_0 = -S_2 / S_0, \\ (\omega_3 k^3)/\omega_0 = \Delta \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_0 / S_0 = \Delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 / S_0 = S_3 / S_0. \end{cases}$$

以上等式表明  $k$  唯一, 且证明了(5.4.15), 定理证毕.

**定理 5.4.2** 若向量方程(5.4.14)有一个实根, 则有理三次 B ézier 曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是一条圆锥曲线.

证 假设向量方程(5.4.14)的实根是  $k$ , 可以区分为两种情况: (1)若  $k = 1$ , 则曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  可退化为有理二次, 即有  $3S_0/\omega_0 = S_1/\omega_1 = S_2/\omega_2 = 3S_3/\omega_3$ ,  $(\omega_0 : \omega_1 : \omega_2 : \omega_3) = (3S_0 : S_1 : S_2 : 3S_3)$ .

(2) 若  $k \neq 1$ , 定理 5.4.1 和引理 5.4.2 表明, 我们可以利用这个  $k$ , 作分式线性变换  $t = ku/(ku + (1-u))$ , 即通过把曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  的权因子  $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  换作权因子  $\{\omega_0, \omega_1 k, \omega_2 k^2, \omega_3 k^3\}$ , 参数  $t$  换作参数  $u$ , 产生出一条与  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  等同的曲线

$$\tilde{\mathbf{R}}^*(u) = (1-u)^3 \omega_0 \tilde{\mathbf{R}}_0 + 3(1-u)^2 u \omega_1 k \tilde{\mathbf{R}}_1 + 3(1-u)u^2 \omega_2 k^2 \tilde{\mathbf{R}}_2 + u^3 \omega_3 k^3 \tilde{\mathbf{R}}_3, 0 \leq u \leq 1, (5.4.18)$$

但后者满足引理 5.4.1, 于是  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是一条圆锥曲线, 证毕.

上述定理告诉我们, 有理三次圆锥曲线的充要条件和分类条件都可通过  $\tilde{\mathbf{R}}^*(u)$  来找到.

**定理 5.4.3** 若  $\omega_i > 0$ ,  $S_i$  如定理 5.4.1 中所示,  $i = 0, 1, 2, 3$ , 则(5.4.2)所示的有理三次 B ézier 曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是一条圆锥曲线的充要条件是下面三条件同时成立:

- (a)  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$  四点组成一个平面凸四边形, 且任何三点不共线.
- (b)  $\omega_1^2/(\omega_0 \omega_2) = S_1^2/(3S_0 S_2)$ .
- (c)  $\omega_2^2/(\omega_1 \omega_3) = S_2^2/(3S_1 S_3)$ .

证 定理 5.4.1 和定理 5.4.2 表明,  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是圆锥曲线的充要条件是方程(5.4.14)有一个实根. 现在我们将证明, 方程(5.4.14)有一个实根的充要条件是(a), (b), (c).

必要性: 若(5.4.14)有一个实根, 我们有

$$(\omega_0 \mathbf{R}_0 + 3\omega_2 k^2 \mathbf{R}_2)/(\omega_0 + 3\omega_2 k^2) = (3\omega_1 k \mathbf{R}_1 + \omega_3 k^3 \mathbf{R}_3)/(3\omega_1 k + \omega_3 k^3) = \mathbf{R}(k/(k+1)).$$

上式蕴涵着直线  $\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_2$  和  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3$  有一个交点(此交点在曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  上)在四边形  $\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$  内部, 从而有(a); 而(b),(c)是(5.4.15)的直接推论.

充分性: 若(a), (b),(c)与方程

$$\lambda_1 \mathbf{R}_1 + \lambda_2 \mathbf{R}_2 + \lambda_3 \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_0 \quad (5.4.19)$$

成立, 这里  $\lambda_i = (-1)^{i-1} S_i / S_0, i = 1, 2, 3$ . 今假设  $k = \omega_0 S_1 / (3\omega_1 S_0)$ , 由条件(b),(c)得到

$$3\omega_1 k / \omega_0 = S_1 / S_0, \quad -3\omega_2 k^2 / \omega_0 = -S_2 / S_0, \quad \omega_3 k^3 / \omega_0 = S_3 / S_0.$$

把以上各式代入(5.4.19), 再注意到  $S_1 - S_2 + S_3 = S_0$ , 即得(5.4.14). 证毕.

#### 5.4.4 有理三次圆锥曲线段的分类条件

**定理 5.4.4** 若(5.4.2)所示的有理三次 B ézier 曲线  $\tilde{\mathbf{R}}(t)$  是一条圆锥曲线, 设  $\mathbf{R}_*$  是直线  $\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1$  与  $\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2$  的交点. 又当  $\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \parallel \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2$  时, 设  $Y_1 = Y_2 = \infty$ ; 否则设  $Y_1$  与  $Y_2$  是满足

$R_1 R_* = Y_1 R_0 R_1$ ,  $R_2 R_* = Y_2 R_3 R_2$  的实数. 置

$$\eta^2 = 1/(4Y_1 Y_2), \quad (5.4.20)$$

则当  $\eta^2 < 1$ ,  $\eta^2 = 1$  与  $\eta^2 > 1$  时,  $\tilde{R}(t)$  分别是椭圆, 抛物线, 双曲线.

证 因  $\tilde{R}(t)$  是圆锥曲线, 我们可如(5.4.18)定义  $\tilde{R}^{**}(u)$ , 这里  $k$  是向量方程(5.4.14)的根. 于是根据引理 5.4.1,

$$\tilde{R}^{**}(u) = (1-u)^2 \alpha_0 \tilde{Q}_0 + 2(1-u)u \alpha_1 \tilde{Q}_1 + u^2 \alpha_2 \tilde{Q}_2.$$

这里

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\omega_0, (-\omega_0 + 3\omega_1 k)/2 = (-\omega_3 k^3 + 3\omega_2 k^2)/2, \omega_3 k^3), \quad (5.4.21)$$

$$(\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) = \left( R_0, \frac{-\omega_0 R_0 + 3\omega_1 k R_1}{-\omega_0 + 3\omega_1 k} = \frac{-\omega_3 k^3 R_3 + 3\omega_2 k^2 R_2}{-\omega_3 k^3 + 3\omega_2 k^2} = R_*, R_3 \right), \quad (5.4.22)$$

从而

$$Y_1 = \omega_0/(-\omega_0 + 3\omega_1 k), \quad Y_2 = \omega_3 k^3/(-\omega_3 k^3 + 3\omega_2 k^2). \quad (5.4.23)$$

按照定理 3.5.1, 再置

$$\eta^2 = \alpha_1^2/(\alpha_0 \alpha_2), \quad (5.4.24)$$

我们可知当  $\eta^2 < 1$ ,  $\eta^2 = 1$  与  $\eta^2 > 1$  时,  $\tilde{R}^{**}(u)$  分别为椭圆, 抛物线, 双曲线. 把(5.4.21)代入(5.4.24), 利用(5.4.23), 我们就得到(5.4.20). 证毕.

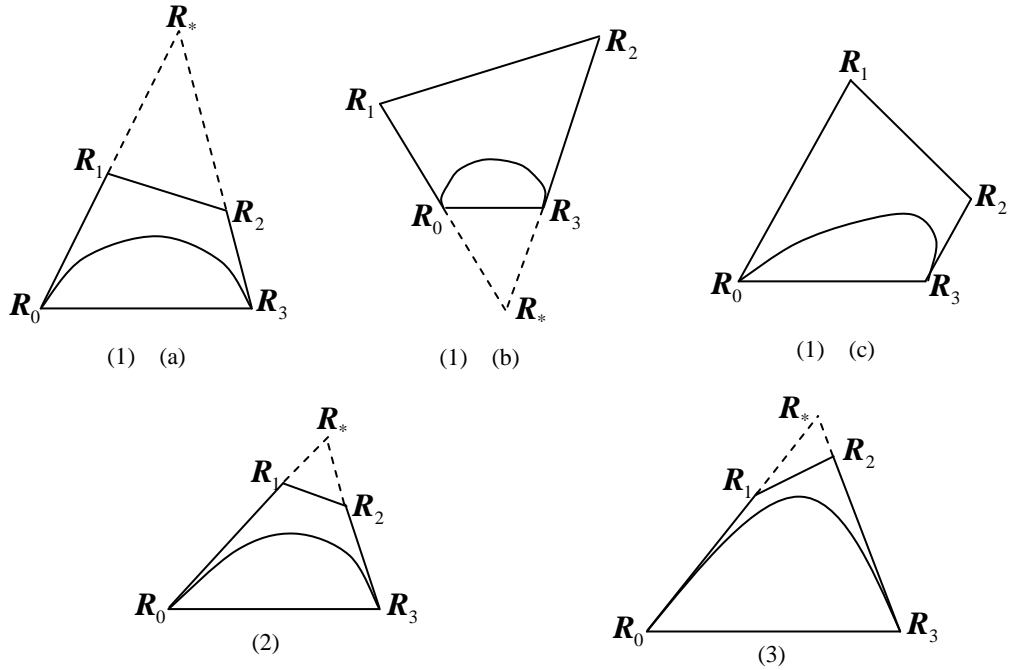


图 5.4.3  $\tilde{R}(t)$  是(1)一个椭圆, 当  $\eta^2 < 1$ ; (a)  $Y_1, Y_2 > 0$ , (b)  $Y_1, Y_2 < 0$ , (c)  $Y_1 = Y_2 = \infty$ ;

(2) 一条抛物线, 当  $\eta^2 = 1$ ; (3) 一条双曲线, 当  $\eta^2 > 1$ .

## 5.5 圆弧曲线段与整圆的有理 B 样条表示

因为有理 B 样条曲线是区间端点为重节点的有理 B 样条曲线, 应用 §5.1–§5.3 的方法, 我们可以得到圆弧和整圆的 NURBS 表示.

如当  $n=2$  时, 取节点向量  $(t_1, t_2, \dots, t_{10}) = (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$ , 取控制顶点  $r_i (i = 0, 1, \dots, 8)$

为如图 5.5.1 所示的正方形顶点及各边中点，取权因子满足表达式  $w_{2i+1}^2/(w_{2i}w_{2i+2}) = \cos^2(\pi/4) = 1/2$ ,  $i=0,1,2,3$ ，则由此产生的有理二次 B 样条曲线  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^8 N_i^2(t)w_i\mathbf{r}_i / \sum_{i=0}^8 N_i^2(t)w_i$  ( $0=t_1 \leq t \leq t_{10}=4$ ) 表示此正方形的内切圆。特别地，我们可以取权因子  $w_{2i-1} = \sqrt{2}/2$  ( $i=1,2,3,4$ ),  $w_{2i} = 1$  ( $i=0,1,2,3,4$ )。

再如  $n=3$  时，取节点向量  $(t_1, t_2, \dots, t_9) = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$ ，取控制顶点  $\mathbf{r}_i$  ( $i=0,1,\dots,6$ ) 为如图 5.5.2 所示的长宽比为 2 的长方形顶点及长边中点，取权因子满足表达式  $w_i^2/(w_{i-1}w_{i+1}) = 1/3$ ,  $i=1,2,4,5$ ，则由此产生的有理三次 B 样条曲线  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^6 N_i^3(t)w_i\mathbf{r}_i / \sum_{i=0}^6 N_i^3(t)w_i$ , ( $0=t_1 \leq t \leq t_9=2$ ) 表示以此长方形中心为圆心，以其宽为直径的整圆。特别地，我们可取权因子  $w_1 = w_2 = w_4 = w_5 = 1/3$ ,  $w_0 = w_3 = w_6 = 1$ 。

至于用区间端点非重节点的 NUBRS 曲线来表示的圆弧曲线，可用 §15.1, §15.3 的方法，把有理 Bézier 曲线转化为相应的 NUBRS 曲线来得到。

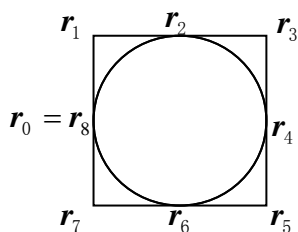


图 5.5.1 二次 NURBS 曲线表示整圆

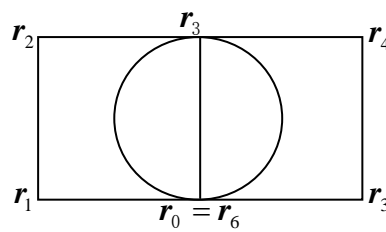


图 5.5.2 三次 NURBS 曲线表示整圆

## 主要文献

- [WGJ, 88] 王国瑾，圆弧曲线的有理三次 Bernstein 基表示，高校应用数学学报，1988, 3(2): 237-248
- [SHH, WGJ, 98] 寿华好，王国瑾，圆弧曲线的有理四次 Bernstein 基表示，高校应用数学学报，1998, 13A(2): 233-238
- [WGJ, WGZ, 92] Wang Guojin, Wang Guozhao, The rational cubic Bézier representation of conics, Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(6): 447-455
- [WGJ, 90] 王国瑾，旋转曲面 CAD 的有理 B 样条方法，软件学报，1990, 1(4): 24-39

## 参考文献

- 1 Faux, I.D., Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK, 1979
- 2 Mehlum, E., Non-linear Splines, in: Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F., eds., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1974
- 3 Ball, A.A., CONSURF Part 2: Description of the algorithms, Computer Aided Design, 1975, 7(4): 237-242
- 4 Versprille, K.J., Computer-aided design applications of the rational B-spline approximation form, Ph.D. thesis, Syracuse University, Syracuse, 1975
- 5 Forest, A.R., The twisted cubic curve: A computer aided geometric design approach, Computer Aided Design, 1980, 12(2): 165-172
- 6 Tiller, W., Rational B-spline for curve and surface representation, IEEE Computer Graphics and Application, 1983, 3(6): 61-69
- 7 Boehm, W., On cubics: a survey, Computer Graphics and Image Processing, 1982, 19(3): 201-226
- 8 Farin, G., Algorithms for rational Bézier curves, Computer Aided Design, 1983, 15(2): 73-77
- 9 Farin, G., ed., *NURBS for Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, PA, 1991
- 10 Sederberg, T.W., Improperly parameterized rational curves, Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(1): 67-75
- 11 Ortega, J.M., *Matrix Theory*, A second course, Plenum Press, New York, 1987