

第十一章 参数曲线曲面的求交技术

求两条参数曲线的交点和两张参数曲面的交线是计算机辅助几何设计及加工的一个基本问题。在物体造型中，无论是用简单体素拼合法还是表面形态描述法，都会遇到这类求交问题；在自动化加工中，无论是确定数控刀具路径，还是做各种干涉检查，也会遇到求交问题；至于在图形绘制和图纸输出中，更要解决大量求交问题。由于 CAGD 中大多数曲线曲面是用多项式或有理多项式来表示的，它们的交就是这些多项式或有理多项式的方程组的解集，从而求交从数学上来说属于非线性问题，是一个难题。解决这一难题的传统方法有代数法^[1-3]、微分方程法^[4]、几何法^[5-7]、同伦法^[8]等。代数法主要适用于用隐式和参数式分别表示的曲线曲面间的求交，将参数式的各分量代入隐式，可得交线的隐式表示；微分方程法是构造微分方程系统，使得满足某个初值条件的解就是欲求的曲面交线；几何法只适用于二次曲面等特殊曲面，利用与坐标系无关的性质求得曲面交线，例如 Levin^[5]证明了两个二次曲面的交线恒位于一个平面、一对平面、双曲柱面、抛物柱面、双曲抛物面这五种曲面之一上；同伦法利用多项式方程组所有解的原理，从简单方程出发，逐步修正方程以逼近欲求的解。而随着计算机的出现和应用，诞生了离散(Subdivision algorithm)求交和跟踪(Marching algorithm)求交这两大技术。

1980 年, Lane 和 Riesenfeld^[9]首次提出了 Bézier 和均匀 B 样条曲线曲面的离散求交方法^[9], 接着又提出了非均匀 B 样条曲线曲面离散求交的 OSLO 算法^[10]。Lasser^[11], Houghton^[12], Dokken^[13]等也对离散求交技术作了深入的研究。离散求交法的基本思想是分割曲线进而化“直”，分割曲面进而化“平”。即把曲线分割成许多小段，直至每一小段都平直得可近似地当作直线段，从而把曲线求交化成折线段求交；同样地，把曲面分割成许多小曲面片，直至每一小片都平坦得可以近似地当作平面片，从而把曲面求交化成一系列平面片求交。由此可见，曲线曲面离散的算法和终判准则是离散求交的两个关键问题。与传统的迭代法相比，离散求交的优点是能求得曲线曲面的所有交点，没有遗漏现象；没有迭代过程；避免了初值的选取；避免了导数的计算；简化了计算程序，充分发挥了控制网格的作用。跟踪求交技术主要是由 Faux, Pratt^[1]和 Barnhill^[14-16]等人开发倡导的，其基本思想是从一个初始交点出发，逐步跟踪地求出曲面交线上的一系列点。除此以外，还有跟踪法与离散法相结合等多种技术^[17-19]。然而围绕着求交技术，有一系列问题需要开展研究：

1. Riesenfeld 的求交算法，对多项式曲线曲面每离散一次就要做一次平直性检查，比较繁琐费时。是否可以在离散之前先验地决定离散层数 r ？对有理曲线和有理曲面是否也能先验地确定这个 r ？
2. 曲线曲面平直性的数学含义到底是什么？能否给出严格的定义和计算公式？
3. Riesenfeld 通过控制网格的平直性检查来判别相应曲线曲面的平直性，比较粗糙浪费。这种法则能否改进？
4. Bézier 曲面的离散是从上层子曲面往下层依次进行的，没有提供同一离散层次中的两相邻子曲面控制顶点之间的递归关系。那么，为了把两张原始曲面的求交直接转化为沿交线延伸方向途径的子曲面间的求交，以便省去大量比较和判断，能否找到上述递归关系，并给出求交方法，使得每次只须保存一张子曲面的信息，就可随时算出相邻子曲面的信息和求交结果？
5. 当两曲面的交线为闭曲线（环）时，在跟踪求交法中可能会被遗漏。那么求交前如何进行环检测，以便把闭曲线转化为开曲线？

本章系统地介绍我们在以上所列课题中的研究成果，其中第 1, 2 节内容取材于[WGJ, WGZ, 99]；第 3, 4, 6, 7, 8 节内容取材于[WGZ, 84]；第 5 节内容取材于[WGJ, XW, 91]；第 9 节内容取材于[ZJM, STW, 99]；第 10 节内容取材于[ZJM, 92a]；第 11 节内容取材于[HSM, SJG, JTG, WGZ, 2000]；第 12 节内容取材于[ZJM, 92b]。

11.1 B 样条曲线转化为 Bézier 曲线

为实现 B 样条曲线的离散求交，常先将其转化为 Bézier 曲线。假设

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1} \quad (11.1.1)$$

是以 $T = \{\mathbf{t}_i\}_{i=0}^{n+k}$ ($n \geq k, t_{k-1} < t_k, t_n < t_{n+1}$) 为节点向量的 k 阶 B 样条曲线. 同时再假设 $\{t_{k-1}, t_k, \dots, t_{n+1}\}$ 中只有 $a+1$ ($\leq n-k+3$) 个不同的数, 它们是

$$t_{i_0} < t_{i_1} < \dots < t_{i_a}. \quad (11.1.2)$$

所谓把 B 样条曲线 $\mathbf{p}(t)$ 化成 Bézier 曲线是利用性质 2.1.6, 把(11.1.2)中每一个节点 t_{i_r} 用嵌节点算法变成 $k-1$ 重节点, 再用定理 2.8.2 确定 \mathbf{Q}_j ($j=0,1,\dots,m \cdot k-1$), 使得

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1} \left(\frac{t-t_{i_r}}{t_{i_{r+1}}-t_{i_r}} \right) \mathbf{Q}_i, \quad t_{i_r} \leq t \leq t_{i_{r+1}}, \quad r=0,1,\dots,m-1. \quad (11.1.3)$$

这里 B_i^{k-1} 为 $k-1$ 次的 Bernstein 基. 为此, 先考察两种特殊情况.

(1) 在 (11.1.1) 中, 设 $n=k-1$, t_{k-1} 为 T 中的 l 重节点且 $l < k-1$, 即

$$t_0 \leq t_{k-l-1} < t_{k-l} = \dots = t_{k-1} < t_k.$$

记这时的 $\mathbf{p}(t)$ 为 $\mathbf{p}^*(t)$. 现将 t_{k-1} 作为新节点分成 $k-l-1$ 次加入节点向量. 由定理 2.8.2 得

$$\mathbf{p}^*(t) = \sum_{i=0}^{k-1} N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i = \sum_{i=k-l-1}^{2k-l-2} N_{i,k}^{[k-l-1]}(t) \mathbf{Q}_i, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k. \quad (11.1.4)$$

其中 $N_{i,k}^{[k-l-1]}$ 是定义在 $T \cup \underbrace{\{t_{k-1}, \dots, t_{k-1}\}}_{k-l-1 \text{ 个}}$ 上的基,

$$\mathbf{Q}_{k-l-1+i} = \begin{cases} \mathbf{p}_{k-l-1}^{[k-l-1-i]}, & i=0,1,\dots,k-l-1, \\ \mathbf{p}_i, & i=k-l, k-l+1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (11.1.5)$$

$$\mathbf{p}_i^{[r]} = \begin{cases} \mathbf{p}_i^{[r-1]}, & 0 \leq i \leq r-1, \\ \frac{t_{i+k-r}-t_{k-1}}{t_{i+k-r}-t_i} \mathbf{p}_{i-1}^{[r-1]} + \frac{t_{k-1}-t_i}{t_{i+k-r}-t_i} \mathbf{p}_i^{[r-1]}, & r \leq i \leq k-l-1, \\ \mathbf{p}_{i-1}^{[r-1]}, & k-l \leq i \leq k-1+r, \end{cases} \quad (11.1.6)$$

$r=1,2,\dots,k-l-1.$

上式中已令 $\mathbf{p}_i^{[0]} = \mathbf{p}_i$ ($i=0,1,\dots,k-1$), $\mathbf{p}_i^{[r]}$ 之间的关系如图 11.1.1 所示.

(2) 在 (11.1.1) 中, 设 t_{k-1} 是 $k-1$ 重节点, t_k 是 l ($< k-1$) 重节点, 即

$$t_0 < t_1 = \dots = t_{k-1} < t_k = \dots = t_{k+l-1} < t_{k+l}.$$

记这时的 $\mathbf{p}(t)$ 为 $\mathbf{p}^{**}(t)$. 现将 t_k 作为新节点分 $k-l-1$ 次加入节点向量. 由定理 2.8.2 得

$$\mathbf{p}^{**}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} N_{i,k}(t) \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1} \left(\frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} \right) \mathbf{Q}_i, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k. \quad (11.1.7)$$

其中

$$\mathbf{Q}_i = \begin{cases} \mathbf{p}_i, & i=0,1,\dots,l, \\ \mathbf{p}_i^{[i-l]}, & i=l+1, l+2, \dots, k-1; \end{cases} \quad (11.1.8)$$

$$\mathbf{p}_i^{[r]} = \begin{cases} \mathbf{p}_i^{[r-1]}, & i=0,1,\dots,l+r-1, \\ \frac{t_{i+k-r}-t_k}{t_{i+k-r}-t_{k-1}} \mathbf{p}_{i-1}^{[r-1]} + \frac{t_k-t_{k-1}}{t_{i+k-r}-t_{k-1}} \mathbf{p}_i^{[r-1]}, & i=l+r, \dots, k-1, \\ \mathbf{p}_{i-1}^{[r-1]}, & i=k, k+1, \dots, k+r, \end{cases} \quad (11.1.9)$$

$$r=1,2,\dots,k-l-1.$$

上式中已令 $p_i^{[0]} = p_i (i=0,1,\dots,k-1)$. $p_i^{[r]}$ 的关系如图 11.1.2 所示.

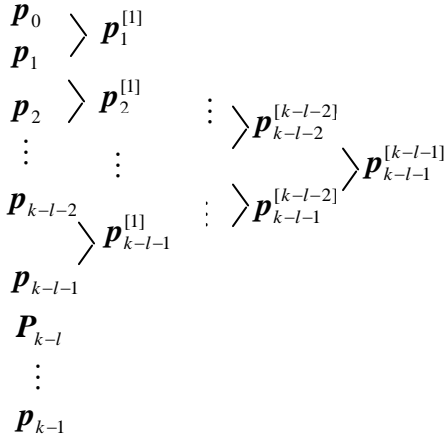


图 11.1.1 情况(1)下嵌节点以后控

制顶点 $p_i^{[r]}$ 之间的关系

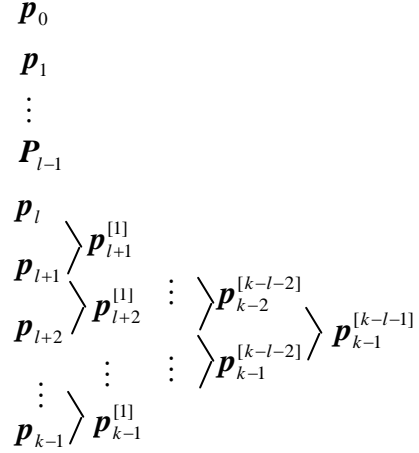


图 11.1.2 情况(2)下嵌节点以后控

制顶点 $p_i^{[r]}$ 之间的关系

把 B 样条曲线 $p(t)$ 化成 B ézier 曲线的步骤是: 按照情况 (1), 使 t_{k-1} 成为 $k-1$ 重节点; 然后按照情况 (2), 依次使各 $t_{i_r} (r=1,2,\dots,a)$ 成为 $k-1$ 重节点, 其几何意义可见定理 2.9.1.

11.2 B 样条曲面转化为 B ézier 曲面

假设

$$p(u,v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) p_{ij}, \quad u_{k-1} \leq u \leq u_{m+1}, \quad v_{h-1} \leq v \leq v_{n+1} \quad (11.2.1)$$

是以 $U = \{u_i\}_{i=0}^{m+k} (m > k, u_{k-1} < u_k, u_m < u_{m+1})$, $V = \{v_j\}_{j=0}^{n+h} (n > h, v_{h-1} < v_h, v_n < v_{n+1})$ 为节点向量的 $k \times h$ 阶 B 样条曲面. 再设 $\{u_{k-1}, u_k, \dots, u_{m+1}\}$ 中只有 $a+1 (\leq m-k+3)$ 个不同的数, $\{v_{h-1}, v_h, \dots, v_{n+1}\}$ 中只有 $b+1 (\leq n-h+3)$ 个不同的数, 它们是

$$u_{i_0} < u_{i_1} < \dots < u_{i_a}; \quad v_{j_0} < v_{j_1} < \dots < v_{j_b}. \quad (11.2.2)$$

为将 $p(u, v)$ 转化成 B ézier 曲面, 利用张量积的特点, 分别将(11.2.2)中的第一、二式中的节点作为新节点一次次加入节点向量 U, V 中, 使它们分别成为 $k-1$ 和 $h-1$ 重节点为止.

首先, 固定 V , 固定下标 j , 则 $p(u, v)$ 内层和式的通项 $\sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) p_{ij}$ 可以看作是以 u 为参数, U 为节点向量的 k 阶 B 样条曲线. 由上节可知, 当将(11.2.2)中的 u 向节点作为新节点加入 U 中成为 $k-1$ 重节点后, 这条曲线可以化成 B ézier 曲线, 新的控制顶点由原控制顶点 $p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{mj}$ 经多次仿照(11.1.6)和(11.1.9)计算可以得到. 显然新控制顶点依赖于下标 j . 把它记为 $G_{0j}, G_{1j}, \dots, G_{m(k-1),j}$. 即新曲线可写为

$$\sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) p_{ij} = \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1} \left(\frac{u - u_{i_r}}{u_{i_{r+1}} - u_{i_r}} \right) G_{r(k-1)+i,j}, \quad u_{i_r} \leq u \leq u_{i_{r+1}}, \quad r=0,1,\dots,m-1. \quad (11.2.3)$$

代入(11.2.1)得

$$p(u,v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) p_{ij} = \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1} \left(\frac{u - u_{i_r}}{u_{i_{r+1}} - u_{i_r}} \right) \sum_{j=0}^n N_{j,h}(v) G_{r(k-1)+i,j},$$

$$u_{i_r} \leq u \leq u_{i_{r+1}}, v_{h-1} \leq v \leq v_{n+1}; \quad r = 0, 1, \dots, m-1. \quad (11.2.4)$$

此后, 固定变量 u , 固定下标中的 r 和 i , 则(11.2.4)内层和式的通项可以看作是以 v 为参数, V 为节点向量的 h 阶 B 样条曲线, 所以可转化为 Bézier 曲线. 记由控制顶点

$$G_{r(k-1)+i,0}, G_{r(k-1)+i,1}, G_{r(k-1)+i,2}, \dots, G_{r(k-1)+i,n}$$

多次仿照(11.1.6)和(11.1.9)计算所得到的新控制顶点为

$$Q_{r(k-1)+i,0}, Q_{r(k-1)+i,1}, Q_{r(k-1)+i,2}, \dots, Q_{r(k-1)+i,n-1}$$

即新曲线为

$$\sum_{j=0}^n N_{j,h}(v) G_{r(k-1)+i,j} = \sum_{j=0}^h B_i^{h-1} \left(\frac{v - v_{j_q}}{v_{j_{q+1}} - v_{j_q}} \right) Q_{r(k-1)+i, q(h-1)+j}, \quad v_{j_q} \leq v \leq v_{j_{q+1}}, \quad q = 0, 1, \dots, n-1. \quad (11.2.5)$$

将上式代入(11.2.4), 最后得

$$\begin{aligned} p(u, v) &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,h}(v) p_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^h \sum_{i=0}^k B_i^{k-1} \left(\frac{u - u_{i_r}}{u_{i_{r+1}} - u_{i_r}} \right) B_j^{h-1} \left(\frac{v - v_{j_q}}{v_{j_{q+1}} - v_{j_q}} \right) Q_{r(k-1)+i, q(h-1)+j}, \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

$$u_{i_r} \leq u \leq u_{i_{r+1}}, v_{j_q} \leq v \leq v_{j_{q+1}}; \quad r = 0, 1, \dots, m-1; \quad q = 0, 1, \dots, n-1.$$

上式为 B 样条曲面化为分片 Bézier 曲面的转换公式.

11.3 Bézier 曲线曲面的高度分析

离散求交的基本思想是“分割”, “化直”. 所谓“分割”是指用中点离散算法把曲线分割成小段曲线; 所谓“化直”是指对分割所得到的每一小段曲线用连接其两端点的线段来近似代替. 曲面的情况与此类似. 那么, 在什么条件下, “分割”才停止, 而“化直”就开始呢? 为此, 先引入

定义 11.3.1 称曲线段 $r(t)$ ($a \leq t \leq b$) 上各点到连接其两端点 $A = r(a), B = r(b)$ 的线段的距离的最大值为该曲线段的高, 记为

$$d(r(t), [a, b]) = \sup_{a \leq t \leq b} \inf_{p \in \text{线段} AB} \|r(t) - p\|, \quad (11.3.1)$$

定义 11.3.2 称曲面片 $r(u, v)$ ($a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$) 上各点到其相关四边形 $A'B'C'D'$ 的距离的最大值为该曲面片的高, 记为

$$d(r(u, v), [a, b; c, d]) = \sup_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} \inf_{p \in \text{四边形} A'B'C'D'} \|r(u, v) - p\|, \quad (11.3.2)$$

其中

$$\begin{cases} A = r(a, c), B = r(b, c), C = r(b, d), D = r(a, d); \\ A' = A + \Delta, B' = B - \Delta, C' = C + \Delta, D' = D - \Delta; \\ \Delta = -(A + C - B - D) / 4. \end{cases} \quad (11.3.3)$$

四边形 $ABCD$ 一般不是平面四边形, 而相关四边形 $A'B'C'D'$ 总是平面四边形, 它所在的平面是四边形 $ABCD$ 四边中点所确定的平面.

用高的概念处理“分割”与“化直”的关系有如下的方法: (1) 如果曲线 $r(t)$ ($a \leq t \leq b$) 的高不超过指定的精度 $\varepsilon (> 0)$, 则以线段 AB 取代该曲线段, 否则将该曲线段分割成二段. (2) 如果曲面片 $r(u, v)$ ($a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$) 的高和其四条边界线的高都不超过指定的精度 ε , 则用其相关四边形取代该曲面片, 否则将该曲面片分割成四片.

为估计曲线的高, 我们先给出下面两个定理.

定理 11.3.1 若函数 $g(x)$ 为 C^2 连续, $I_2 g(x)$ 是它在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的线性逼近, 即

$$I_2 g(x) = g(\alpha)(\beta - x)/(\beta - \alpha) + g(\beta)(x - \alpha)/(\beta - \alpha), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (11.3.4)$$

则

$$|g(x) - I_2 g(x)| \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |g''(x)|/8, \quad \alpha \leq x \leq \beta. \quad (11.3.5)$$

证 用 $[\alpha, \beta, x]g$ 表示 $g(x)$ 在 α, β, x 三点的二阶差商, 它满足 $g(x) = I_2 g(x) + (x - \alpha) \times (x - \beta)[\alpha, \beta, x]g$. 又由性质 2.7.4, 知存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 满足 $[\alpha, \beta, x]g = g''(\xi)/2$. 因为

$$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |(x - \alpha)(x - \beta)| \leq (\beta - \alpha)^2/4,$$

所以本定理得证.

定理 11.3.2 若曲线 $\mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为 C^2 连续, 且

$$I_2 \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\alpha)(\beta - t)/(\beta - \alpha) + \mathbf{r}(\beta)(t - \alpha)/(\beta - \alpha), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (11.3.6)$$

则

$$\|\mathbf{r}(t) - I_2 \mathbf{r}(t)\| \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \|\mathbf{r}''(t)\|/8, \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (11.3.7)$$

证 因 $\|\mathbf{r}(t) - I_2 \mathbf{r}(t)\|$ 在两端点 α, β 取值为 0, 所以其最大值在区间 (α, β) 内某点 ξ 达到, 即

$$\|\mathbf{r}(t) - I_2 \mathbf{r}(t)\| \leq \|\mathbf{r}(\xi) - I_2 \mathbf{r}(\xi)\|, \quad \alpha < t < \beta. \quad (11.3.8)$$

今记与 $\mathbf{r}(\xi) - I_2 \mathbf{r}(\xi)$ 同向的单位向量为 \mathbf{n} . 若 $\mathbf{r}(\xi) - I_2 \mathbf{r}(\xi)$ 为 $\mathbf{0}$, 则取 \mathbf{n} 为任意一个方向. 作辅助函数 $g(t) = (\mathbf{r}(t) - I_2 \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n}$, 显然

$$g(\xi) = (\mathbf{r}(\xi) - I_2 \mathbf{r}(\xi)) \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{r}(\xi) - I_2 \mathbf{r}(\xi)\|. \quad (11.3.9)$$

由于 $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, 根据定理 11.3.1 得

$$|g(t)| \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |g''(t)|/8 \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \|\mathbf{r}''(t)\|/8, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

特别, 取 $t = \xi$ 得 $g(\xi) \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \|\mathbf{r}''(t)\|/8$, 于是由(11.3.8)和(11.3.9), 得证本定理.

注意到

$$d(\mathbf{r}(t), [\alpha, \beta]) \leq \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \|\mathbf{r}(t) - I_2 \mathbf{r}(t)\|, \quad (11.3.10)$$

由上述定理可得估计曲线之高的

定理 11.3.3 若 $\mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 是 C^2 连续的曲线, 则

$$d(\mathbf{r}(t), [\alpha, \beta]) \leq (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \|\mathbf{r}''(t)\|/8, \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (11.3.11)$$

为讨论曲面之高的估计式, 先考虑下列基本问题.

定理 11.3.4 设 $f(x, y)$ 是 $[a, b; c, d]$ 上定义的 C^2 连续的函数, 且

$$f(a, c) = f(a, d) = f(b, c) = f(b, d) = 0, \quad (11.3.12)$$

则存在点 (ξ, η) , $a < \xi < b, c < \eta < d$, 使得

$$\partial^2 f(\xi, \eta)/(\partial x \partial y) = 0.$$

证 作辅助函数 $\varphi(y) = f(b, y) - f(a, y)$, 由 (11.3.12) 得 $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$, 所以由 Rolle 定理知必有 $\eta \in (c, d)$, 使得

$$\varphi'(\eta) = \partial f(b, \eta)/\partial y - \partial f(a, \eta)/\partial y = 0.$$

再由上式和 Rolle 定理就得证本定理.

推论 11.3.1 设 $f(x, y)$ 是 $[a, b; c, d]$ 上 C^2 连续的二元函数, 则

$$|f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c)| \leq (b - a)(d - c) \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} |\partial^2 f(x, y)/(\partial x \partial y)|. \quad (11.3.13)$$

证 作辅助函数

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = & f(a, c) + \frac{f(b, c) - f(a, c)}{b - a}(x - a) + \frac{f(a, d) - f(a, c)}{d - c}(y - c) \\ & + \frac{f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c)}{(b - a)(d - c)}(x - a)(y - c),\end{aligned}$$

易知函数 $\varphi(x, y) - f(x, y)$ 满足定理 11.3.4 的条件, 从而存在 $(\xi, \eta) \in [a, b; c, d]$ 使得

$$\partial^2(\varphi(\xi, \eta) - f(\xi, \eta))/(\partial x \partial y) = 0,$$

即

$$f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) = (b - a)(d - c) \partial^2 f(\xi, \eta)/(\partial x \partial y).$$

由此得证本推论.

定理 11.3.5 设 $I_2 f(x, y)$ 是 C^2 连续的函数 $f(x, y)$ 在 $[\alpha, \beta; \xi, \eta]$ 上的双线性逼近, 即

$$\begin{aligned}I_2 f(x, y) = & [f(\alpha, \xi) + \Delta][(\beta - x)/(\beta - \alpha)][(\eta - y)/(\eta - \xi)] \\ & + [f(\alpha, \eta) - \Delta][(\beta - x)/(\beta - \alpha)][(y - \xi)/(\eta - \xi)] \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ & + [f(\beta, \xi) - \Delta][(x - \alpha)/(\beta - \alpha)][(\eta - y)/(\eta - \xi)] \quad \xi \leq y \leq \eta, \\ & + [f(\beta, \eta) + \Delta][(x - \alpha)/(\beta - \alpha)][(y - \xi)/(\eta - \xi)], \\ & \Delta = -[f(\alpha, \xi) + f(\beta, \eta) - f(\alpha, \eta) - f(\beta, \xi)]/4,\end{aligned}\tag{11.3.14}$$

则

$$\begin{aligned}|f(x, y) - I_2 f(x, y)| \leq & [(\beta - \alpha)^2 w_1 + 2(\beta - \alpha)(\eta - \xi)w_2 + (\eta - \xi)^2 w_3]/8, \\ & \alpha \leq x \leq \beta, \quad \xi \leq y \leq \eta.\end{aligned}\tag{11.3.16}$$

其中

$$w_1 = \max_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ \xi \leq y \leq \eta}} |f''_{x^2}(x, y)|, \quad w_2 = \max_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ \xi \leq y \leq \eta}} |f''_{xy}(x, y)|, \quad w_3 = \max_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ \xi \leq y \leq \eta}} |f''_{y^2}(x, y)|.\tag{11.3.17}$$

证 作辅助函数

$$\begin{aligned}Hf(x, y) = & f(x, \xi)[(\eta - y)/(\eta - \xi)] + f(x, \eta)[(y - \xi)/(\eta - \xi)], \quad \alpha \leq x \leq \beta, \xi \leq y \leq \eta; \\ Kf(x, y) = & f(\alpha, \xi)[(\beta - x)/(\beta - \alpha)][(\eta - y)/(\eta - \xi)] \\ & + f(\alpha, \eta)[(\beta - x)/(\beta - \alpha)][(y - \xi)/(\eta - \xi)] \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ & + f(\beta, \xi)[(x - \alpha)/(\beta - \alpha)][(\eta - y)/(\eta - \xi)] \quad \xi \leq y \leq \eta, \\ & + f(\beta, \eta)[(x - \alpha)/(\beta - \alpha)][(y - \xi)/(\eta - \xi)],\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}|f(x, y) - I_2 f(x, y)| \leq & |f(x, y) - Hf(x, y)| + |Hf(x, y) - Kf(x, y)| + |Kf(x, y) - I_2 f(x, y)|, \\ & \alpha \leq x \leq \beta, \quad \xi \leq y \leq \eta;\end{aligned}$$

由定理 11.3.1 知

$$\begin{aligned}|f(x, y) - Hf(x, y)| \leq & (\eta - \xi)^2 w_3/8, \\ |Hf(x, y) - Kf(x, y)| \leq & |f(x, \xi) - I_2 f(x, \xi)|[(\eta - y)/(\eta - \xi)] \\ & + |f(x, \eta) - I_2 f(x, \eta)|[(y - \xi)/(\eta - \xi)] \\ \leq & (\beta - \alpha)^2 w_1/8,\end{aligned}$$

又由推论 11.3.1 知

$$|Kf(x, y) - I_2 f(x, y)| \leq |\Delta| \leq (\beta - \alpha)(\eta - \xi)w_2/4,$$

由以上四式知定理成立, 证毕.

记 $\mathbf{r}(u, v)$ ($\alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta$) 的双线性逼近为

$$\begin{aligned} I_2 \mathbf{r}(u, v) = & [\mathbf{r}(\alpha, \xi) + \Omega][(\beta - u)/(\beta - \alpha)][(\eta - v)/(\eta - \xi)] \\ & + [\mathbf{r}(\alpha, \eta) - \Omega][(\beta - u)/(\beta - \alpha)][(v - \xi)/(\eta - \xi)] \quad \alpha \leq u \leq \beta, \\ & + [\mathbf{r}(\beta, \xi) - \Omega][(u - \alpha)/(\beta - \alpha)][(\eta - v)/(\eta - \xi)] \quad \xi \leq v \leq \eta, \\ & + [\mathbf{r}(\beta, \eta) + \Omega][(u - \alpha)/(\beta - \alpha)][(v - \xi)/(\eta - \xi)], \end{aligned} \quad (11.3.18)$$

$$\Omega = -[\mathbf{r}(\alpha, \xi) + \mathbf{r}(\beta, \eta) - \mathbf{r}(\alpha, \eta) - \mathbf{r}(\beta, \xi)]/4. \quad (11.3.19)$$

把定理 11.3.5 中的函数改换为曲面，相应地我们有

定理 11.3.6 若曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ ($\alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta$) C^2 连续， $I_2 \mathbf{r}(u, v)$ 如(11.3.18)定义，则

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(u, v) - I_2 \mathbf{r}(u, v)\| \leq & [(\beta - \alpha)^2 W_1 + 2(\beta - \alpha)(\eta - \xi)W_2 + (\eta - \xi)^2 W_3]/8, \\ & \alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta. \end{aligned} \quad (11.3.20)$$

其中

$$W_1 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{r}_{u^2}''(u, v)\|, \quad W_2 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{r}_{uv}''(u, v)\|, \quad W_3 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{r}_{v^2}''(u, v)\|. \quad (11.3.21)$$

证 由于 $\|\mathbf{r}(u, v) - I_2 \mathbf{r}(u, v)\|$ 是矩形域 $[\alpha, \beta; \xi, \eta]$ 上的连续函数，必能取到最大值。记最大值为 (λ, θ) ，则

$$\|\mathbf{r}(u, v) - I_2 \mathbf{r}(u, v)\| \leq \|\mathbf{r}(\lambda, \theta) - I_2 \mathbf{r}(\lambda, \theta)\|, \quad \alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta. \quad (11.3.22)$$

今记与 $\mathbf{r}(\lambda, \theta) - I_2 \mathbf{r}(\lambda, \theta)$ 同向的单位向量为 \mathbf{n} ， $\varphi(u, v) = ((\mathbf{r}(u, v) - I_2 \mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n})$ ，显然

$$\varphi(\lambda, \theta) = ((\mathbf{r}(\lambda, \theta) - I_2 \mathbf{r}(\lambda, \theta)) \cdot \mathbf{n}) = \|\mathbf{r}(\lambda, \theta) - I_2 \mathbf{r}(\lambda, \theta)\|. \quad (11.3.23)$$

由于 $\varphi(\alpha, \xi) = \varphi(\beta, \eta) = -\Omega \cdot \mathbf{n}$ ， $\varphi(\alpha, \eta) = \varphi(\beta, \xi) = \Omega \cdot \mathbf{n}$ ，可知 $I_2 \varphi(u, v) = 0$ ， $\alpha \leq u \leq \beta$ ， $\xi \leq v \leq \eta$ 。记 $w'_1 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\varphi_{u^2}''(u, v)|$ ， $w'_2 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\varphi_{uv}''(u, v)|$ ， $w'_3 = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\varphi_{v^2}''(u, v)|$ ，

根据定理 11.3.5 可得

$$\begin{aligned} |\varphi(u, v)| = |\varphi(u, v) - I_2 \varphi(u, v)| \leq A, \quad A = & [(\beta - \alpha)^2 w'_1 + 2(\beta - \alpha)(\eta - \xi)w'_2 + (\eta - \xi)^2 w'_3]/8, \\ & \alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta. \end{aligned}$$

特别取 $(u, v) = (\lambda, \theta)$ 得

$$|\varphi(\lambda, \theta)| = \|\mathbf{r}(\lambda, \theta) - I_2 \mathbf{r}(\lambda, \theta)\| \leq A. \quad (11.3.24)$$

但由于 $\partial^2 I_2 \mathbf{r}(u, v)/\partial u^2 = \mathbf{0}$ ，我们有 $\max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\varphi_{u^2}''(u, v)| = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\mathbf{r}_{u^2}''(u, v) \cdot \mathbf{n}| \leq \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{r}_{u^2}''(u, v)\|$ ，

即 $w'_1 \leq W_1$ 。同理 $w'_2 \leq W_2$ ， $w'_3 \leq W_3$ 。于是由(11.3.22)–(11.3.24)知本定理成立，证毕。

注意到

$$d(\mathbf{r}(u, v), [\alpha, \beta; \xi, \eta]) \leq \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{r}(u, v) - I_2 \mathbf{r}(u, v)\|, \quad (11.3.25)$$

由上述定理可得估计曲面之高的

定理 11.3.7 若曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ ($\alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta$) C^2 连续， W_1, W_2, W_3 如(11.3.21)所示。则

$$d(\mathbf{r}(u, v), [\alpha, \beta; \xi, \eta]) \leq [(\beta - \alpha)^2 W_1 + 2(\beta - \alpha)(\eta - \xi)W_2 + (\eta - \xi)^2 W_3]/8. \quad (11.3.26)$$

11.4 Bézier 曲线曲面离散层数的先验性公式

定理 11.4.1 设 $\mathbf{P}(t)$ ($a \leq t \leq b$) 是 $n(\geq 2)$ 次 Bézier 曲线(1.4.1)， $\varepsilon > 0$ 是预给的精度， $a \leq \alpha < \beta \leq b$ ，如果

$$(\beta - \alpha)/(b - a) = 2^{-r}, \quad r \geq r_0 = \log[(n(n-1)L_0)/(8\varepsilon)]/2, \quad (11.4.1)$$

那么

$$d(\mathbf{P}(t), [\alpha, \beta]) < \varepsilon. \quad (11.4.2)$$

这里 L_0 可用(1.3.3)所示的算子 Δ 表示为

$$L_0 = \max_{0 \leq i \leq n-2} \|\Delta^2 P_i\|. \quad (11.4.3)$$

证 由性质 1.3.3 和 1.3.6, 曲线(1.4.1)的二阶导矢满足 $\|P''(t)\| \leq n(n-1)L_0/(b-a)^2$. 由定理 11.3.3 即知本定理成立, 证毕.

上述定理表明, B ézier 曲线(1.4.1)经过 $r \geq r_0$ 次中点离散后所得到的子曲线段, 可以用其两端点的连线来近似代替. 这就是离散求交中的“化直”的依据.

定理 11.4.2 设 $P(u, v)$ ($a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$) 是 $m \times n$ 次 B ézier 曲面(7.2.6), $\varepsilon > 0$ 是预给的精度, $a \leq \alpha < \beta \leq b, c \leq \xi < \eta \leq d$. 如果

$$\begin{cases} (\beta - \alpha)/(b - a) = (\eta - \xi)/(d - c) = 2^{-r}, \\ r \geq r_0 = \log_2 \{ [m(m-1)L_1 + 2mnL_2 + n(n-1)L_3]/(8\varepsilon) \}/2, \end{cases} \quad (11.4.4)$$

那么

$$\begin{cases} d(P(u, v), [\alpha, \beta; \xi, \eta]) < \varepsilon, \\ d(P(\alpha, v), [\xi, \eta]) < \varepsilon, \quad d(P(\beta, v), [\xi, \eta]) < \varepsilon, \\ d(P(u, \xi), [\alpha, \beta]) < \varepsilon, \quad d(P(u, \eta), [\alpha, \beta]) < \varepsilon. \end{cases} \quad (11.4.5)$$

这里 L_1, L_2, L_3 可用(7.2.2)所示的算子 Δ_1, Δ_2 表为

$$L_1 = \max_{\substack{0 \leq i \leq m-2 \\ 0 \leq j \leq n}} \|\Delta_1^2 P_{ij}\|, \quad L_2 = \max_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}} \|\Delta_1 \Delta_2 P_{ij}\|, \quad L_3 = \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n-2}} \|\Delta_2^2 P_{ij}\|. \quad (11.4.6)$$

证 由性质 7.2.5, 7.2.7 和定理 11.3.7 得

$$d(P(u, v), [\alpha, \beta; \xi, \eta]) \leq 2^{-2r} [m(m-1)L_1 + 2mnL_2 + n(n-1)L_3]/8,$$

于是(11.4.5)的第一式成立. 与此同时, 因为 $\max_{\xi \leq v \leq \eta} \|P''_{v^2}(\alpha, v)\| \leq n(n-1)L_3/(d-c)^2$, 由定理 11.3.3 得

$$d(P(\alpha, v), [\xi, \eta]) \leq n(n-1)L_3/(8 \cdot 2^{2r}) \leq [m(m-1)L_1 + 2mnL_2 + n(n-1)L_3]/(8 \cdot 2^{2r}),$$

所以(11.4.5)的第二式成立. 同理可证(11.4.5)的其余各式成立, 证毕.

由定理 11.4.2 知, B ézier 曲面 $P(u, v)$ (7.2.6) 经过 $r \geq r_1$ 层中点离散后, 子曲面片的高度及其四条边界线的高度均小于已给精度 ε , 所以可将该曲面片用相关平面四边形来近似代替. 这就是离散求交中“化平”的依据.

11.5 对 Riesenfeld 关于曲线离散终判准则的彻底改进

对于 n 次 B ézier 曲线(1.3.2)的“化直”条件, Lane 与 Riesenfeld^[9]于 1980 年提出如下准则:

$$d(P_i, l(P_0, P_n)) \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (11.5.1)$$

这里 $l(P_0, P_n)$ 表示 P_0 与 P_n 两点相连的直线段, $d(\cdot, -)$ 表示欧氏距离, ε 是预给精度. 这一条件并非最佳的. 下面论述改进方法.

11.5.1 三次 B ézier 曲线的化直准则

设三次 B ézier 曲线

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad P_i = (x_i, y_i, z_i),$$

$i = 0, 1, 2, 3$, 利用几何不变性, 不妨设坐标系如图 11.5.1 选取, P_0 是原点, $P_0 P_3$ 为 x 轴, 则

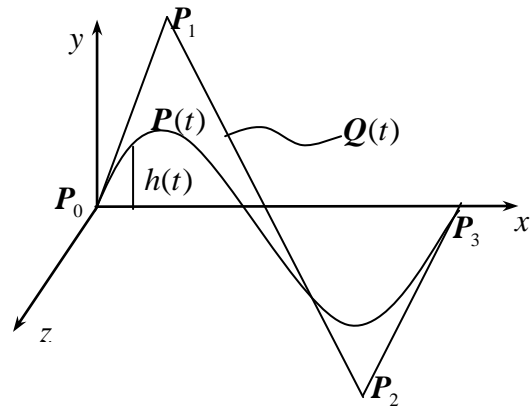


图 11.5.1 三次 B ézier 曲线的“化直”准则

$$h^2(t) = d^2(\mathbf{P}(t), l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3)) = y^2(t) + z^2(t)$$

$$= 9t^2(1-t)^2[(1-t)y_1 + ty_2]^2 + [(1-t)z_1 + tz_2]^2.$$

再设点 $\mathbf{Q}(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \in l(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, 则由上式知 $0 \leq t \leq 1$ 时, 成立着

$$h(t) = 3t(1-t)d(\mathbf{Q}(t), l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3)) \leq 3t(1-t) \max_{i=1,2} d(\mathbf{P}_i, l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3))$$

$$\leq (3/4) \max_{i=1,2} d(\mathbf{P}_i, l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3)).$$

这就是说, Riesenfeld 的条件在 $n=3$ 时应当被改进为加上系数 $3/4$. 为了说明这是最佳改进, 我们只要考察以下一种特殊情况: 曲线的 Bézier 点满足 $l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3) \parallel l(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$. 由曲线的性质 1.3.9 知 $h(1/2) = (3/4)d(\mathbf{P}_i, l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3))$, $i=1,2$.

11.5.2 n 次有理 Bézier 曲线的化直准则

定理 11.5.1 n 次有理 Bézier 曲线(3.2.2)上动点 $\mathbf{R}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 的高度

$$h(t) = d(\mathbf{R}(t), l(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_n)) \leq \left(1 - \left(1 + \frac{\left(\max_{i=0,n} \omega_i \right) \left(\max_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i \right)}{\omega_0 \omega_n} (2^{n-1} - 1) \right)^{-1} \right) \max_{1 \leq i \leq n-1} d(\mathbf{R}_i, l(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_n)). \quad (11.5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad d(\mathbf{R}(t), l(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_n)) &= \|(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_0)\| / \|\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_0\| \\ &= \|\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_0\|^{-1} \left\| \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0) \right) / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \times (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_0) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t) \omega_i d(\mathbf{R}_i, l(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_n)) / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \\ &\leq \left(1 - (\omega_0(1-t)^n + \omega_n t^n) \right) / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \max_{1 \leq i \leq n-1} d(\mathbf{R}_i, l(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_n)), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} 1 - (\omega_0(1-t)^n + \omega_n t^n) / \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i &= 1 - \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t) \omega_i / (\omega_0(1-t)^n + \omega_n t^n) \right)^{-1} \\ &\leq 1 - \left(1 + \frac{\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i \right) (1 - (1-t)^n - t^n)}{\omega_0 \omega_n (\sqrt[n]{\omega_0} + \sqrt[n]{\omega_n})^{-(n-1)}} \right)^{-1} \leq 1 - \left(1 + \frac{\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i \right) (1 - 2^{1-n})}{\omega_0 \omega_n / \left(\left(\max_{i=0,n} \omega_i \right) 2^{n-1} \right)} \right)^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

可知定理成立, 证毕.

推论 11.5.1 $n(n \geq 2)$ 次 Bézier 曲线(1.3.2)上的动点 $\mathbf{P}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 的高度

$$h(t) \leq (1 - 2^{-(n-1)}) \max_{1 \leq i \leq n-1} d(\mathbf{P}_i, l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (11.5.3)$$

从而 Riesenfeld 条件(11.5.1)可以改进为最佳形式

$$(1 - 2^{-(n-1)})d(\mathbf{P}_i, l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n)) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (11.5.4)$$

证 取 Bézier 点使得 $|l(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1})| = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n-2$, 同时使得 $l(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n) \parallel l(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_{n-1})$, \mathbf{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 共线, 由 Bézier 曲线性质 1.3.9 知 $t = 1/2$ 时 $h(t)$ 的估计表达式(11.5.3)中取等号. 由此可知条件(11.5.4)是最佳准则.

11.5.3 一个极值问题

假设 l 是一条直线段, ε 是公差, 以 ε 为半径且以 l 为中心轴的闭圆柱体可表为

$$N(\varepsilon, l) = \{P \mid d(P, l) \leq \varepsilon, P \in \mathcal{R}^3\}. \quad (11.5.5)$$

借助于这个记号, 可把关于曲线“化直”的旧条件(11.5.1)和新条件(11.5.4)分别表为

$$P_i \in N(\varepsilon, l(P_0, P_n)), \quad P_i \in N((1 - 2^{-(n-1)})^{-1} \varepsilon, l(P_0, P_n)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

同时还可把有理 Bézier 曲线(3.2.2)上的点到连线 $R_0 R_n$ 的最小法向距离 δ 与公差 ε 之间的关系写为

$$\delta = \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ R_i \in N(\varepsilon, l(R_0, R_n)) \\ (i=1, 2, \dots, n-1)}} d(R(t), l(R_0, R_n)). \quad (11.5.6)$$

因为 $[0, 1] \cup N(\varepsilon, l(R_0, R_n))$ 是有界闭集且 $d(R(t), l(R_0, R_n))$ 是连续函数, 因而 δ 可以取到极大值, 由此可有以下的

定理 11.5.2 对有理 Bézier 曲线(3.2.2)而言, 如果我们记极值问题(11.5.6)的极值点为 $R_i^* \in N(\varepsilon, l(R_0, R_n)) (i = 1, 2, \dots, n-1)$, $t^* \in [0, 1]$, 则点 $R_0, R_1^*, \dots, R_{n-1}^*, R_n$ 共面.

证 假定结论不真, 则存在平面 π 过直线段 $l(R_0, R_n)$, 使得 $R_i^* (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 位于平面 π 之两侧. 由曲线之几何不变性, 可取 $l(R_0, R_n)$ 为 x 轴, 平面 π 为 xy 平面. 假设 $R_0 = R_0^*$,

$$R_n = R_n^*, \quad R_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*), i = 0, 1, \dots, n; \quad R^*(t) = (x^*(t), y^*(t), z^*(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i R_i^* \\ \times \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \right)^{-1}, \quad \text{则有}$$

$$\delta = d(R^*(t^*), l(R_0, R_n)) = [(y^*(t^*))^2 + (z^*(t^*))^2]^{1/2} \\ = \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t^*) \omega_i y_i^* \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t^*) \omega_i z_i^* \right)^2 \right]^{1/2} \bigg/ \sum_{i=0}^n B_i^n(t^*) \omega_i. \quad (11.5.7)$$

现考虑点列

$$R_i^{**} = (x_i^*, y_i^*, |z_i^*|), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11.5.8)$$

显然 $d(R_i^{**}, l(R_0, R_n)) = d(R_i^*, l(R_0, R_n))$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, 于是 $R_i^{**} \in N(\varepsilon, l(R_0, R_n))$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. 因 δ 是法向距离之极大值,

$$d(R^{**}(t^*), l(R_0, R_n)) = d\left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t^*) \omega_i R_i^{**} \bigg/ \sum_{i=0}^n B_i^n(t^*) \omega_i, l(R_0, R_n)\right) \leq \delta.$$

但由(11.5.7)和(11.5.8)知, 上式左端大于 δ . 这一矛盾说明原假设不真, 从而定理成立, 证毕.

根据定理 11.5.2, 推论 11.5.1 的直接证明可以写得十分简单.

11.6 Bézier 曲线和 B 样条曲线的离散求交法

Bézier 曲线离散的算法见定理 1.4.1. 设有两条 Bézier 曲线 P 和 Q , 它们的控制顶点的包围盒是 A 和 B . 离散求交的做法是:

(1) 当 A, B 不相交时, 则 P, Q 无交点, 可以舍去 P, Q . (2) 当 A, B 相交且 P, Q 的高度不超过预定精度 $\varepsilon (> 0)$ 时, 则以 P, Q 各自两端连线的交点作为所求的交点, 若交点不存在, 认为 P, Q 不相交. (3) 当 A, B 相交且 P, Q 之一的高超过 ε 时, 则将这种曲线用中点离散方法分割成两段, 组成两对或四对需要进一步求交点的 Bézier 曲线偶, 然后再对每一曲线偶进行以上同样的处理.

所谓控制顶点 $P_i = (x_i, y_i, z_i), (i = 0, 1, \dots, n)$ 的包围盒, 系指区域 $[x_{\min}, x_{\max}; y_{\min}, y_{\max}; z_{\min}, z_{\max}]$, 其中 $g_{\min} = \min_{0 \leq i \leq n} (g_i)$, $g_{\max} = \max_{0 \leq i \leq n} (g_i)$; $g = x, y, z$. 显然包围盒是依赖于坐

标系的, 但它总包含了控制顶点的凸包. 两条 Bézier 曲线相交的必要条件是其包围盒相交. 利

用包围盒来进行判别是因为包围盒求法简单，相交性判断容易。

检验 Bézier 曲线的高度是否超过预定精度 ε 既可用定理 11.4.1，也可用推论 11.5.1。为叙述方便，使用前者。为此，在离散求交中不仅需要每一段 Bézier 曲线控制顶点的信息，而且需要其包围盒及离散层数的信息。这些信息是一个整体。

算法 11.6.1（两条 Bézier 曲线 P 和 Q 离散求交的堆栈算法）

Step 1.（求先验离散层数）按定理 11.4.1 计算 P ， Q 的先验性离散层数 $r_0(P)$ ， $r_0(Q)$ 。

Step 2.（初始化）设置一堆栈，以存放 P ， Q 或其子曲线段的控制顶点及离散层数。首先把 P ， Q 的原始控制顶点压入堆栈作为初值，并取离散层数初值为 0。

Step 3.（离散求交）当堆栈非空时，执行以下各步：

3.1（出栈）取出栈顶元素，记其为 Bézier 曲线 P ， Q ，离散层数为 $r(P)$ ， $r(Q)$ 。

3.2（包围盒比较）如果 P ， Q 的控制顶点的包围盒相交，

则（求交）如果 $r(P) \geq r_0(P)$ 且 $r(Q) \geq r_0(Q)$ ，则以 P ， Q 各自两端点连线的交点（若存在）作为 P ， Q 的交点输出。否则（离散，进栈）（i）如果 $r(P) < r_0(P)$ 且 $r(Q) \geq r_0(Q)$ ，则将 P 中点离散成两段子曲线，每一段与 Q 组成一对，压入堆栈，其离散层数为 $r(P)+1$ ， $r(Q)$ 。（ii）如果 $r(P) \geq r_0(P)$ 且 $r(Q) < r_0(Q)$ ，则将 P ， Q 对换，作同（i）的处理。（iii）如果 $r(P) < r_0(P)$ 且 $r(Q) < r_0(Q)$ ，则将 P ， Q 同时作中点离散。并从各自离散后所得子曲线中各取一段组成一对，共四对。压入堆栈，其离散层数为 $r(P)+1$ ， $r(Q)+1$ 。

否则（舍弃）舍弃 P ， Q 及其离散层数的数据。

至于 B 样条曲线的离散求交，是先将其转化为 Bézier 曲线，再用后者的离散求交法求交。

11.7 Bézier 曲面和 B 样条曲面的离散求交法

Bézier 曲面离散的算法见性质 7.2.10，其离散求交法与 Bézier 曲线一样要进行或舍去或求交或离散的处理。所不同的是，曲面离散求交输出的不是两线段的交点，而是两个平面四边形的相交线段，这种线段是东一段西一段地得到的，需要进行排序以形成完整的交线。

这种排序实质是连接，即把求得的有公共端点的两条线段在公共端点处连接起来。从头开始，全部连接，就可以得到整条交线。但是由两个平面四边形求交所得的线段的端点（以下简称端点）其坐标值是实数，不宜用于判别两端点是否相同。为克服这困难，先注意下列几何事实：（1）两平面四边形的相交线段的任一端点至少在其中一个四边形的边界上。（2）任何一条线段若与某一平面相交，则交点唯一。（3）两线段若相交，则交点唯一。因此，若两端点位于同一平面四边形内和同一段边界线上，或者位于相同的两段边界线上，则该两端点重合。为提供端点所在平面四边形和边界线的信息以便进行上述判断，建议采用关于点和矩形的如下的整数表示方法。

设 $P(u, v)$ 是定义在矩形 $[a, b; c, d]$ 上的 Bézier 曲面(7.2.6)，其先验离散层数为 r 。则 $P(u, v)$ 的离散过程反映到定义域，实质上是以直线 $u_i = a + 2^{-r}(b-a)i$ ($i = 0, 1, \dots, 2^r$) 和直线 $v_j = c + 2^{-r}(d-c)j$ ($j = 0, 1, \dots, 2^r$)，均匀地分割矩形 $[a, b; c, d]$ 。与此同时，曲面 $P(u, v)$ 也相应被等参数线 $P(u_i, v)$ ($c \leq v \leq d$) 和 $P(u, v_j)$ ($a \leq u \leq b$) ($i, j = 0, 1, \dots, 2^r$) 进行分割。不妨称这两组等参数线为网格线；称网格线的交点 $P(u_i, v_j)$ ($i, j = 0, 1, \dots, 2^r$) 为网格点；称介于同一条网格线上相邻两网格点之间的网格线的部分为网格的边，简称边。此外，还称 $(2i, 2j)$ 为网格点 $P(u_i, v_j)$ 的整数表示， $[2i, 2h; 2j, 2k]$ 为曲面片 $P(u, v)$ ($u_i \leq u \leq u_h$ ， $v_j \leq v \leq v_k$) 的整数表示。

在离散求交时，曲面片 $P(u, v)$ ($u_i \leq u \leq u_{i+1}$ ， $v_j \leq v \leq v_{j+1}$) 已被看作平面四边形 F ，网格的边已被看作直线段。当某端点 D 落在 F 内，则取 F 的四个顶点的整数表示的平均值为

D 的整数表示, 即 $(2i+1, 2j+1)$; 当 D 落在网格的边 AB (例如 $A = P(u_i, v_j), B = P(u_{i+1}, v_j)$) 上, 则取 A, B 的整数表示的平均值 (如 $(2i+1, j)$) 为 D 的整数表示; 当 D 恰为网格点时, 则 D 和该网格点的整数表示相同.

假设端点 D 的整数表示为 (l, k) , 它提供了点 D 所在的平面四边形, 或所在的网格的边或顶点的信息: (1) 当 l, k 均为奇数时, 则 D 位于整数表示为 $[l-1, l+1; k-1, k+1]$ 的平面四边形内. (2) 当 l, k 一为奇数一为偶数时, 则 D 位于网格的某一条边上. 具体来说, 当 l (或 k) 为奇数时, D 位于以整数表示分别为 $(l-1, k), (l+1, k)$ (或 $(l, k-1), (l, k+1)$) 的网格点为端点的边上. (3) 当 l, k 均为偶数时, 则 D 就是以 (l, k) 为整数表示的网格点.

对 Bézier 曲面 $Q(u, v)$ 建立类似的端点整数表示, 将每一端点 D 关于 $P(u, v)$ 的整数表示 (l, k) 和关于 $Q(u, v)$ 的整数表示 (g, h) 组成一对 $[l, k; g, h]$, 称为端点 D 的整数表示对. 显然, 两端点是同一点当且仅当其整数表示对相等. 这为交线的连接提供了方便可靠的方法.

算法 11.7.1 (两张 Bézier 曲面 P, Q 离散求交的堆栈算法)

Step 1. 按定理 11.4.2 计算 P, Q 的先验离散层数 $r_1(P), r_1(Q)$, 取 $l = [r_1(P)], h = [r_1(Q)]$.

Step 2. (初始化) 设置一堆栈, 用以存放 P, Q 或其子曲面片的控制网格, 整数表示和离散层数. 首先将 P, Q 的控制网格压入堆栈作为初值, 并设置 P, Q 的整数表示初值分别为 $[0, 2^{l+1}; 0, 2^{h+1}]$, $[0, 2^{h+1}; 0, 2^{h+1}]$; 离散层数初值均为 0.

Step 3. (离散求交) 当堆栈非空时, 执行以下各步:

3.1 (出栈) 取出栈顶元素, 记其为 Bézier 曲面 P, Q ; 它们的整数表示分别为 $[2i_1, 2h_1; 2j_1, 2k_1]$ 和 $[2i_2, 2h_2; 2j_2, 2k_2]$; 离散层数分别为 $r(P), r(Q)$.

3.2 (包围盒比较) 如果 P 与 Q 的控制网格的包围盒相交,

则 (求交) 如果 $r(P) \geq r_1(P)$ 和 $r(Q) \geq r_1(Q)$, 则 P 和 Q 用其两个相关平面四边形来近似求出交线. (若存在) 输出该线段的两端点坐标值及关于 P, Q 的整数表示对. 否则 (离散求交) (i) 如果 $r(P) < r_1(P)$ 且 $r(Q) \geq r_1(Q)$, 则将 P 中点离散成四片, 把每一片与 $Q(u, v)$ 组成一对, 将各对曲面与其整数表示, 离散层数压入堆栈. 其中 P 的子曲面的离散层数为 $r(P)+1$, $Q(u, v)$ 的不变. (ii) 如果 $r(P) \geq r_1(P)$ 且 $r(Q) < r_1(Q)$, 则将 P 与 Q 对换作同 (i) 的处理. (iii) 如果 $r(P) < r_1(P)$ 且 $r(Q) < r_1(Q)$, 则将 P 与 Q 都作中点离散, 从各自离散后的子曲面中各取一片组成一对, 共十六对, 将各对子曲面及其整数表示, 离散层数压入堆栈. 其中离散层数分别为 $r(P)+1, r(Q)+1$.

否则, 舍弃 P, Q 的相应信息.

Step 4. (连接) 把整数表示对相同的点做为同一端点, 把求得的线段逐段首尾相连形成整条交线. 当这种交线存在时, 输出.

至于 B 样条曲面的离散求交, 是先将其转化成 Bézier 曲面, 再用后者的离散求交法求交.

11.8 Bézier 曲面与平面的求交

对 Bézier 曲面和平面的求交, 可以利用平面的特点对上节算法做些改变, 以简化程序, 提高效率.

算法 11.8.1 (Bézier 曲面 P 和平面 Q 的离散求交算法)

Step 1. 取 Q 为 xoy 平面.

Step 2. 将算法 11.7.1 中判别包围盒相交的条件改为判别控制顶点的 z 坐标异号.

Step 3. 将算法 11.7.1 中求两平面四边形的交线改为求一个平面四边形与 xoy 平面的交线.

Step 4. 将算法 11.7.1 中离散过程可能的三种情况改为只离散 $P(u, v)$ 的一种情况.

Step 5. 将算法 11.7.1 中每次进、出堆栈的 Bézier 曲面片从一对改为一片.

11.9 有理 Bézier 曲线曲面离散终判的先验性公式

本节的目的是避免对有理曲线曲面直接进行二阶求导, 而用其分子分母的二阶求导来表示有理曲线曲面的离散终判的先验公式.

引理 11.9.1 设向量 \mathbf{R}_i 的齐次坐标为 (\mathbf{P}_i, ω_i) , $i=1, 2$. r 为不小于 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 之模的实数. 即

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1/\omega_1, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_2/\omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 > 0, \quad (11.9.1)$$

$$r \geq \max(\|\mathbf{R}_1\|, \|\mathbf{R}_2\|), \quad (11.9.2)$$

则

$$\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\| \leq (\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\| + |\omega_1 - \omega_2|(r - \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|)) / \min(\omega_1, \omega_2). \quad (11.9.3)$$

证 不失一般性, 设 $\omega_1 \leq \omega_2$, 则有

$$\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\| \leq \|\mathbf{P}_1/\omega_1 - \mathbf{P}_1/\omega_2\| + \|\mathbf{P}_1/\omega_2 - \mathbf{P}_2/\omega_2\| \leq (r|\omega_1 - \omega_2| + \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\|) / (\omega_1 + \omega_2 - \omega_1).$$

注意到上式分母就是 $\min(\omega_1, \omega_2) + |\omega_1 - \omega_2|$, 由此就可得到(11.9.3), 证毕.

引理 11.9.2 当条件(11.9.1), (11.9.2)满足时, 如果下式成立:

$$0 < (\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\| + (r - \varepsilon)|\omega_1 - \omega_2|) / \min(\omega_1, \omega_2) \leq \varepsilon, \quad (11.9.4)$$

则

$$\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\| \leq \varepsilon. \quad (11.9.5)$$

证 记 $\eta = \|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|$, 由引理 11.9.1 得

$$\eta \leq \frac{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\| + (r - \varepsilon)|\omega_1 - \omega_2|}{\min(\omega_1, \omega_2)} + \frac{(\varepsilon - \eta)|\omega_1 - \omega_2|}{\min(\omega_1, \omega_2)} \leq \varepsilon + (\varepsilon - \eta) \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\min(\omega_1, \omega_2)},$$

或 $(\varepsilon - \eta)[1 + |\omega_1 - \omega_2|/\min(\omega_1, \omega_2)] \geq 0$, 所以 $\eta \leq \varepsilon$, 证毕.

引理 11.9.3 设 $\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{P}(t), \omega(t))$ 是定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的 C^2 连续的曲线, k 为非负实数. 若

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\beta) = \mathbf{0}, \quad (11.9.6)$$

则

$$\sup_{\forall t \in [\alpha, \beta]} (\|\mathbf{P}(t)\| + k|\omega(t)|) \leq A = (\beta - \alpha)^2 \sup_{\forall t \in [\alpha, \beta]} (\|\mathbf{P}''(t)\| + k|\omega''(t)|) / 8. \quad (11.9.7)$$

证 记

$$d(t) = \|\mathbf{P}(t)\| + k|\omega(t)| \geq 0, \quad (11.9.8)$$

易知 $d(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上 C^2 连续, 且 $d(\alpha) = d(\beta) = 0$. 所以 $d(t)$ 在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 取到最大值.

情况 1: $\omega(\xi) = 0$, 这时由定理 11.3.2 得 $d(\xi) = \|\mathbf{P}(\xi)\| \leq (\beta - \alpha)^2 \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|\mathbf{P}''(t)\| / 8 \leq A$;

情况 2: $\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{0}$, 这时由定理 11.3.1 得 $d(\xi) = k|\omega(\xi)| \leq (\beta - \alpha)^2 k \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |\omega''(t)| / 8 \leq A$;

情况 3: $\omega(\xi) \neq 0$ 且 $\mathbf{P}(\xi) \neq \mathbf{0}$, 此时有

$$d'(\xi) = (\mathbf{P}(\xi)/\|\mathbf{P}(\xi)\|)\mathbf{P}'(\xi) + k(\omega(\xi)/|\omega(\xi)|)\omega'(\xi) = \mathbf{0}.$$

将 $\mathbf{Q}(t)$ 在 $t = \xi$ 点作 Taylor 展开, 得

$$(\mathbf{P}(t), \omega(t)) = (\mathbf{P}(\xi), \omega(\xi)) + (\mathbf{P}'(\xi), \omega'(\xi))(t - \xi) + \int_{\xi}^t (\mathbf{P}''(s), \omega''(s))(t - s) ds.$$

不失一般性, 假设 $\xi \in [(\alpha + \beta)/2, \beta)$, 因为 $\mathbf{Q}(\beta) = \mathbf{0}$, 以 $t = \beta$ 代入上式, 再在所得表达式两边用向量 $(\mathbf{P}(\xi)/\|\mathbf{P}(\xi)\|, k\omega(\xi)/|\omega(\xi)|)$ 作内积, 就得到

$$d(\xi) = \|\mathbf{P}(\xi)\| + k|\omega(\xi)| = \left| \int_{\xi}^{\beta} (\mathbf{P}(\xi)\mathbf{P}''(s)/\|\mathbf{P}(\xi)\| + k\omega(\xi)\omega''(s)/|\omega(\xi)|)(\beta - s) ds \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\xi}^{\beta} (|P(\xi)P''(s)|/|P(\xi)| + k|\omega(\xi)\omega''(s)|/|\omega(\xi)|)(\beta-s)ds \\ &\leq \int_{\xi}^{\beta} (\|P''(s)\| + k|\omega''(s)|)(\beta-s)ds \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} (\|P''(t)\| + k|\omega''(t)|) \int_{\xi}^{\beta} (\beta-s)ds \leq A. \end{aligned}$$

于是引理成立，证毕。

定理 11.9.1 设 $R(t) = P(t)/\omega(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 是 C^2 连续的有理曲线， $\omega(t) > 0$ ， ε 为预给精度。若实数

$$r \geq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|R(t)\|, \quad (11.9.9)$$

$$\beta - \alpha \leq \begin{cases} \sqrt{8\varepsilon \inf_{t \in [\alpha, \beta]} \omega(t) / \sup_{t \in [\alpha, \beta]} (\|P''(t)\| + (r - \varepsilon)|\omega''(t)|)}, & \varepsilon < r, \\ \sqrt{8\varepsilon \inf_{t \in [\alpha, \beta]} \omega(t) / \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|P''(t)\|}, & r \leq \varepsilon < 2r, \\ 1, & 2r \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (11.9.10)$$

则

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|R(t) - L(t)\| < \varepsilon. \quad (11.9.11)$$

其中 $L(t)$ 为连接点 $R(\alpha)$ ， $R(\beta)$ 的直线段，即

$$L(t) = L_n(t)/L_d(t), \quad (11.9.12)$$

$$L_n(t) = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha} P(\alpha) + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} P(\beta), \quad L_d(t) = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha} \omega(\alpha) + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \omega(\beta). \quad (11.9.13)$$

证 当 $2r \leq \varepsilon$ 时，

$$\begin{aligned} \|L(t)\| &\leq \frac{(\beta - t)\omega(\alpha)}{(\beta - t)\omega(\alpha) + (t - \alpha)\omega(\beta)} \|R(\alpha)\| + \frac{(t - \alpha)\omega(\beta)}{(\beta - t)\omega(\alpha) + (t - \alpha)\omega(\beta)} \|R(\beta)\| \\ &\leq \max(\|R(\alpha)\|, \|R(\beta)\|) \leq r, \text{ 所以 } \|R(t) - L(t)\| \leq \|R(t)\| + \|L(t)\| \leq r + r \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

当 $r \leq \varepsilon < 2r$ 时，只要注意到 $L_d(t) \in (\min(\omega(\alpha), \omega(\beta)), \max(\omega(\alpha), \omega(\beta)))$ 和 $P(\alpha) - L_n(\alpha) = P(\beta) - L_n(\beta) = \mathbf{0}$ ，应用定理 11.3.2 可得

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \frac{\|P(t) - L_n(t)\| + (r - \varepsilon)|\omega(t) - L_d(t)|}{\min(\omega(t), L_d(t))} &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \frac{\|P(t) - L_n(t)\|}{\min(\omega(t), L_d(t))} \\ &\leq (\beta - \alpha)^2 \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|P''(t)\| / (8 \inf_{t \in [\alpha, \beta]} \omega(t)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

对上式应用引理 11.9.2，可知(11.9.11)成立。

最后当 $0 < \varepsilon < r$ 时取引理 11.9.3 的 $k = r - \varepsilon$ ， $Q(t) = (P(t) - L_n(t), \omega(t) - L_d(t))$ ，知

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \frac{\|P(t) - L_n(t)\| + (r - \varepsilon)|\omega(t) - L_d(t)|}{\min(\omega(t), L_d(t))} \leq \frac{(\beta - \alpha)^2 \sup_{t \in [\alpha, \beta]} (\|P''(t)\| + (r - \varepsilon)|\omega''(t)|)}{8 \inf_{t \in [\alpha, \beta]} \omega(t)} \leq \varepsilon.$$

由此，运用引理 11.9.2 可知(11.9.11)成立。定理证毕。

应用定理 11.9.1，并对曲线 $P(t)$ 和函数 $\omega(t)$ 对照性质 1.3.3，就得出有理 Bézier 曲线离散终判的先验公式，这可表述为

定理 11.9.2 设 $R(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 为 n 次有理 Bézier 曲线(3.2.2)，

$$r = \max_{0 \leq i \leq n} \|R_i\|, \quad \omega = \min_{0 \leq i \leq n} \omega_i > 0, \quad (11.9.14)$$

ε 为预给的精度，则当曲线段 $R(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 的区间长度

$$\beta - \alpha \leq \begin{cases} \sqrt{8\omega\varepsilon / \left(n(n-1) \max_{0 \leq i \leq n} \left(\|\Delta^2(\omega_i \mathbf{R}_i)\| + (r-\varepsilon) \|\Delta^2 \omega_i\| \right) \right)}, & \varepsilon < r, \\ \sqrt{8\omega\varepsilon / \left(n(n-1) \max_{0 \leq i \leq n} \|\Delta^2(\omega_i \mathbf{R}_i)\| \right)}, & r \leq \varepsilon < 2r, \\ 1, & 2r \leq \varepsilon \end{cases} \quad (11.9.15)$$

时, $\mathbf{R}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 与其两端点连线 $\mathbf{L}(t)$ (如(11.9.12)(11.9.13)所示) 的距离小于 ε , 即

$$\|\mathbf{R}(t) - \mathbf{L}(t)\| < \varepsilon, \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (11.9.16)$$

对 C^2 连续的有理曲面 $\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{P}(u, v)/\omega(u, v)$ ($\omega(u, v) > 0, a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$) 也有类似于有理曲线的结果. 为此, 用平面片

$$\mathbf{L}(u, v) = \mathbf{I}_2 \mathbf{P}(u, v) / \mathbf{I}_2 \omega(u, v), \quad \alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta \quad (11.9.17)$$

逼近有理曲面片 $\mathbf{R}(u, v)$ ($\alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta$), 其中 $\mathbf{I}_2 \mathbf{P}(u, v)$ 由(11.3.18)中取 \mathbf{r} 为 \mathbf{P} 所得, $\mathbf{I}_2 \omega(u, v)$ 由(11.3.14)中取 f 为 ω , (x, y) 为 (u, v) 所得, Ω 由(11.3.19)中取 \mathbf{r} 为 \mathbf{P} 所得, Δ 由(11.3.15)中取 f 为 ω 所得.

根据定理 11.3.5 和 11.3.6, 易知当 $r > \varepsilon$ 时 $\mathbf{R}(u, v)$ 与 $\mathbf{L}(u, v)$ 的分子, 分母满足关系式

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}(u, v) - \mathbf{I}_2 \mathbf{P}(u, v)\| + (r - \varepsilon) |\omega(u, v) - \mathbf{I}_2 \omega(u, v)| \\ & \leq [(\beta - \alpha)^2 D_{uu} + 2(\beta - \alpha)(\eta - \xi) D_{uv} + (\eta - \xi)^2 D_{vv}] / 8, \quad \alpha \leq u \leq \beta, \xi \leq v \leq \eta. \end{aligned} \quad (11.9.18)$$

其中

$$D_{pq} = \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} \|\mathbf{P}_{pq}''(u, v)\| + (r - \varepsilon) \max_{\substack{\alpha \leq u \leq \beta \\ \xi \leq v \leq \eta}} |\omega_{pq}''(u, v)|, \quad (p, q) = (u, u), (u, v), (v, v). \quad (11.9.19)$$

由此容易得到与定理 11.9.2 相类似的关于有理 Bézier 曲面的离散终判的先验公式.

11.10 离散差分跟踪求交法

11.10.1 多项式曲面的差分表示

定义 11.10.1 二元函数 $f(u, v)$ 关于变量 u , 以 Δu 为步长的各阶差分是将变量 v 看作常数时的一元函数的差分, 即

$$\Delta_u^r f(u, v) = \begin{cases} f(u, v), & r = 0, \\ \Delta_u^{r-1} f(u + \Delta u, v) - \Delta_u^{r-1} f(u, v), & r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11.10.1)$$

类似地可定义关于变量 v , 以 Δv 为步长的各阶差分. 进一步有混合差分

$$\Delta_u^r \Delta_v^l f(u, v) = \begin{cases} \Delta_v^l f(u, v), & r = 0, \\ \Delta_u^{r-1} \Delta_v^l f(u + \Delta u, v) - \Delta_u^{r-1} \Delta_v^l f(u, v), & r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (11.10.2)$$

$$\Delta_v^l \Delta_u^r f(u, v) = \begin{cases} \Delta_u^r f(u, v), & l = 0, \\ \Delta_v^{l-1} \Delta_u^r f(u, v + \Delta v) - \Delta_v^{l-1} \Delta_u^r f(u, v), & l = 1, 2, \dots \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (11.10.3)$$

混合差分具有可交换性: $\Delta_u^r \Delta_v^l f(u, v) = \Delta_v^l \Delta_u^r f(u, v)$; 此外, 若 $f(u, v)$ 是 u, v 的 $m \times n$ 次多项式, 则

$$\Delta_u^r \Delta_v^l f(u, v) = \begin{cases} \text{常数}, & r = m, l = n, \\ 0, & r > m, l > n. \end{cases}$$

定义 11.10.2

$$\mathbf{D}f(u_0, v_0) = (d_{ij})_{(m+1) \times (n+1)}, \quad (11.10.4)$$

$$d_{ij} = \Delta_u^{i-1} \Delta_v^{j-1} f(u_0, v_0), \quad i = 1, 2, \dots, m+1; j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (11.10.5)$$

称为 $m \times n$ 次多项式 $f(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 的差分矩阵.

差分矩阵 \mathbf{D} 有以下三个良好的性质.

性质 11.10.1 可以表示 $m \times n$ 次多项式曲面:

$$f(u, v) = \mathbf{F}(u, u_0) \mathbf{D} f(u_0, v_0) \mathbf{F}(v, v_0)^T. \quad (11.10.6)$$

这里基函数组

$$\begin{cases} \mathbf{F}(u, u_0) = (F_0(u, u_0), F_1(u, u_0), \dots, F_m(u, u_0)), \\ \mathbf{F}(v, v_0) = (F_0(v, v_0), F_1(v, v_0), \dots, F_n(v, v_0)), \end{cases} \quad (11.10.7)$$

$$\begin{cases} F_0(u, u_0) = F_0(v, v_0) = 1, \\ F_i(u, u_0) = \prod_{k=0}^{i-1} (u - (u_0 + k\Delta u)) / (i! \Delta u^i), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ F_j(v, v_0) = \prod_{h=0}^{j-1} (v - (v_0 + h\Delta v)) / (j! \Delta v^j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (11.10.8)$$

性质 11.10.2 提供子曲面片 $f(u, v)$ ($u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u, v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$) 的四个顶点的位置信息.

$$\begin{aligned} f(u_0, v_0) &= d_{11}, \quad f(u_0 + \Delta u, v_0) = d_{11} + d_{21}, \quad f(u_0, v_0 + \Delta v) = d_{11} + d_{12}, \\ f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) &= d_{11} + d_{21} + d_{12} + d_{22}. \end{aligned} \quad (11.10.9)$$

性质 11.10.3 $f(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 与点 $(u_0 + \delta \Delta u, v_0 + \eta \Delta v)$ 的两个差分矩阵满足递推关系:

$$\mathbf{D} f(u_0 + \delta \cdot \Delta u, v_0 + \eta \cdot \Delta v) = (\mathbf{E}^\delta) \mathbf{D} f(u_0, v_0) (\mathbf{E}^\eta)^T, \quad \delta, \eta = 1, 0, -1. \quad (11.10.10)$$

这里, 约定 \mathbf{E}^0 为单位阵; 当 \mathbf{E} 左 (或右) 乘差分矩阵 (11.10.4) 时, \mathbf{E} 为 m (或 n) 阶方阵,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{h \times h}, \quad \mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^h \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{h-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{h \times h}, \quad h = m, n. \quad (11.10.11)$$

11.10.2 B ézier 曲面的差分表示

设 $\mathbf{P}(u, v)$ 是在矩形域 $[0, 1; 0, 1]$ 上定义的 $m \times n$ 次的 B ézier 曲面 (7.2.1). 注意到

$$\Delta_u^r \Delta_v^l \mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \Delta_u^r B_i^m(u) \Delta_v^l B_j^n(v) \mathbf{P}_{ij}, \quad (11.10.12)$$

我们有

$$\mathbf{D} \mathbf{P}(u, v) = \mathbf{H}_1 \mathbf{P} \mathbf{H}_2^T, \quad (11.10.13)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{ij})_{\substack{(m+1) \times (n+1) \\ 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}}, \quad \mathbf{H}_1 = (\Delta_u^i B_j^m(u))_{\substack{(m+1) \times (m+1) \\ 0 \leq i, j \leq m}}, \quad \mathbf{H}_2 = (\Delta_v^i B_j^n(v))_{\substack{(n+1) \times (n+1) \\ 0 \leq i, j \leq n}}. \quad (11.10.14)$$

所以按 (11.10.6) 可把 $m \times n$ 次 B ézier 曲面用差分表示. 特别地, 取 $u = v = 0$, 有

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{F}(u, 0) \mathbf{H}_1 \mathbf{P} \mathbf{H}_2^T \Big|_{(u, v) = (0, 0)} \mathbf{F}(v, 0)^T. \quad (11.10.15)$$

11.10.3 B ézier 曲面求交中跟踪子曲面片的选定

设 $\mathbf{P}(u, v)$, $\mathbf{Q}(u', v')$ 为两张 B ézier 曲面, 为求它们的交线 L , 分别将它们均匀分割成每一片都可近似为平面四边形的 $k \times k$ 片和 $h \times h$ 片, 分点为

$$\begin{cases} (u_i, v_j) = (i\Delta u, j\Delta v), & \Delta u = \Delta v = 1/k, \quad i, j = 0, 1, \dots, k; \\ (u'_s, v'_t) = (s\Delta u', t\Delta v'), & \Delta u' = \Delta v' = 1/h, \quad s, t = 0, 1, \dots, h; \end{cases} \quad (11.10.16)$$

记

$$P_{ij}(u, v) := P(u, v), \quad u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}, 0 \leq i, j \leq k-1; \quad (11.10.17)$$

$$Q_{st}(u', v') := Q(u', v'), \quad u'_s \leq u' \leq u'_{s+1}, v'_t \leq v' \leq v'_{t+1}, 0 \leq s, t \leq h-1. \quad (11.10.18)$$

离散求交时，若撇开包围盒不相交的情况，从逻辑上讲，要判断每对子曲面 $P_{ij}(u, v)$ 与 $Q_{st}(u', v')$ 的相交关系，一共需判断 $k \times k \times h \times h$ 次，其中有大量的判断是多余的，即结果无交。跟踪法旨在减少这类多余的判断，它循着交线 L 前进的方向，只考虑交线 L 有可能经过的两片子曲面的求交。

设 $P_{ij}(u, v)$ 与 $Q_{st}(u', v')$ 的交线为线段 AB ，则沿着方向 AB ，交线 L 经过的子曲面片必须包含 B 点。不妨称这种曲面片为候选子曲面片 HXP。根据点 B 落在 $P_{ij}(u, v)$ 上的位置，曲面 $P(u, v)$ 上的 HXP 可以有一片，二片或四片。

·当 B 为 $P_{ij}(u, v)$ 的内点时，HXP 为 $P_{ij}(u, v)$ 本身。

·当 B 为 $P_{ij}(u, v)$ 的非顶点的边界点时，HXP 是以 B 为公共边界点的相邻两子曲面，其中一片是 $P_{ij}(u, v)$ 本身，另一片是与 $P_{ij}(u, v)$ 相邻的子曲面即 $P_{i+1,j}(u, v)$ ， $P_{i-1,j}(u, v)$ ， $P_{i,j+1}(u, v)$ ， $P_{i,j-1}(u, v)$ 这样四片之中的一片。这要根据 B 点落在 $P_{ij}(u, v)$ 的哪条边界线 l 上而定。具体来说，当 l 的两端点为点 $P(u_{i+1}, v_j)$ ， $P(u_i, v_{j+1})$ 时，应当取 $P_{i+1,j}(u, v)$ 为 HXP；当 l 的两端点为点 $P(u_i, v_j)$ ， $P(u_i, v_{j+1})$ 时，应当取 $P_{i-1,j}(u, v)$ 为 HXP；当 l 的两端点为点 $P(u_i, v_{j+1})$ ， $P(u_{i+1}, v_{j+1})$ 时，应当取 $P_{i,j+1}(u, v)$ 为 HXP；当 l 的两端点为点 $P(u_i, v_j)$ ， $P(u_{i+1}, v_j)$ 时，应当取 $P_{i,j-1}(u, v)$ 为 HXP。

·当 B 为 $P_{ij}(u, v)$ 的顶点时，HXP 是以 B 为公共顶点的四片子曲面，其中一片是 $P_{ij}(u, v)$ 本身。另外，当 $B = P(u_i, v_j)$ 时，取 $P_{i-1,j}(u, v)$ ， $P_{i-1,j-1}(u, v)$ ， $P_{i,j-1}(u, v)$ 为 HXP；当 $B = P(u_{i+1}, v_j)$ 时，取 $P_{i,j-1}(u, v)$ ， $P_{i+1,j-1}(u, v)$ ， $P_{i+1,j}(u, v)$ 为 HXP；当 $B = P(u_{i+1}, v_{j+1})$ 时，取 $P_{i+1,j}(u, v)$ ， $P_{i+1,j+1}(u, v)$ ， $P_{i,j+1}(u, v)$ 为 HXP；当 $B = P(u_i, v_{j+1})$ 时，取 $P_{i,j+1}(u, v)$ ， $P_{i-1,j+1}(u, v)$ ， $P_{i-1,j}(u, v)$ 为 HXP。

曲面 $Q(u', v')$ 上的 HXP 依据 B 点落在 $Q_{st}(u', v')$ 上的位置而定，其原则与上类似。

11.10.4 离散差分跟踪求交

确定了 HXP 之后，下一步是求交线 L 经过 HXP 的线段。为此，从 $P(u, v)$ 的 HXP 与 $Q(u', v')$ 的 HXP 中各取一片组成 HXP 对，现考察除 $P_{ij}(u, v)$ 与 $Q_{st}(u', v')$ 这一对以外所有可能的 HXP 对的数目 M 。这取决于点 B 落在子曲面片 $P_{ij}(u, v)$ 和 $Q_{st}(u', v')$ 上的位置。

- 当 B 为一片的内点，另一片的边界点时， $M=1$ ；
- 当 B 为一片的内点，另一片的顶点时， $M=3$ ；
- 当 B 同为两片的边界点时， $M=3$ ；
- 当 B 为一片的边界点，另一片的顶点时， $M=7$ ；
- 当 B 同为两片的顶点时， $M=15$ ；
- 当 B 同为两片的内点时，HXP 对是 $P_{ij}(u, v)$ 和 $Q_{st}(u', v')$ 本身。这只有当 B 为初始跟踪点时，才会发生。

如果 HXP 对除点 B 外无其他公共点，则认为交线 L 不从该对曲面中通过，将其排除；否则，将两 HXP 片各看作以其四个顶点所确定的平面四边形并求交，求得的交线段的一端为 B ，另一端记为 C 。这样，用跟踪法求得了从 AB 延伸到 BC 的一段交线。然后用 C 点取代 B 点，

重复以上过程，逐段地求得整条交线 L 。

当交线无分叉现象时，当且仅当每次只能发现一个 HXP 对有相交线段，其余的 HXP 对都将排除。否则，有二个以上的 HXP 对有相交线段。这时选一对继续跟踪，其余那几对，保留为下一条交线跟踪时使用。

曲面的差分表示便于跟踪和求交。为此记 $\mathbf{DP}(u_i, v_j)$ 为 $\mathbf{DP}_{ij}(u, v)$ ，并称它为子曲面 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ 的差分矩阵。由(11.10.9)，(11.10.10)知 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ 的四个顶点可由 $\mathbf{DP}_{ij}(u, v)$ 求得，即

$$\begin{cases} \mathbf{P}(u_{i+1}, v_j) = \mathbf{P}(u_i, v_j) + \Delta_u \mathbf{P}(u_i, v_j), & \mathbf{P}(u_i, v_{j+1}) = \mathbf{P}(u_i, v_j) + \Delta_v \mathbf{P}(u_i, v_j), \\ \mathbf{P}(u_i + \Delta u, v_j + \Delta v) = \mathbf{P}(u_i, v_j) + \Delta_u \mathbf{P}(u_i, v_j) + \Delta_v \mathbf{P}(u_i, v_j) + \Delta_u \Delta_v \mathbf{P}(u_i, v_j). \end{cases} \quad (11.10.19)$$

同时，与 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ 相邻的子曲面片 $\mathbf{P}_{i+\delta, j+\eta}(u, v)$ 的差分矩阵只须借助于加减法由 $\mathbf{DP}_{ij}(u, v)$ 求得，即

$$\mathbf{DP}_{i+\delta, j+\eta}(u, v) = (\mathbf{E}^\delta) \mathbf{DP}_{ij}(u, v) (\mathbf{E}^\eta)^T, \quad \delta, \eta = -1, 0, 1. \quad (11.10.20)$$

$\mathbf{DQ}_{st}(u', v')$ 的情况与上类似。总之，(11.10.20)表明，在跟踪时，当交线 L 从子曲面 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ 延伸到相邻那片子曲面时，易于及时更新差分矩阵。(11.10.19)表明，在求交时，差分矩阵及时地提供了子曲面的顶点位置信息，从而保证了跟踪求交的顺利进行。

算法 11.10.1 (对 Bézier 曲面 $\mathbf{P}(u, v)$ ， $\mathbf{Q}(u', v')$ 用离散差分跟踪法求交)

Step 1. 用离散、迭代或优化法求得两曲面的一个交点 $\mathbf{B} = \mathbf{P}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{Q}(\bar{u}', \bar{v}')$ 作为初始点。

Step 2. 按曲面的化平准则确定均匀分割两张原始曲面的步长 $(\Delta u, \Delta v)$ ， $(\Delta u', \Delta v')$ ，使得分割后得到的每一片子曲面在给定误差 ε 的范围内都可以近似为平面四边形。

Step 3. 确定初始点 \mathbf{B} 所在子曲面片的编号 (i, j) 和 (s, t) ，使得 $u_i \leq \bar{u} \leq u_{i+1}$ ， $v_j \leq \bar{v} \leq v_{j+1}$ ； $u'_s \leq \bar{u}' \leq u'_{s+1}$ ， $v'_t \leq \bar{v}' \leq v'_{t+1}$ ；其中 $u_i = i\Delta u$ ， $v_j = j\Delta v$ ； $u'_s = s\Delta u'$ ， $v'_t = t\Delta v'$ 。同时，求得 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ ， $\mathbf{Q}_{st}(u', v')$ 的差分矩阵 $\mathbf{DP}_{ij}(u, v)$ 和 $\mathbf{DQ}_{st}(u', v')$ 。

Step 4. 根据 \mathbf{B} 点在 $\mathbf{P}_{ij}(u, v)$ ， $\mathbf{Q}_{st}(u', v')$ 上的位置确定候选子曲面对。

Step 5. (子曲面片求交) 求候选子曲面片的差分矩阵，并判断每一个候选子曲面对中两片子曲面的关系，相应地作排除处理或求交运算，在求交后用新端点取代 \mathbf{B} 点并记录分叉点。

Step 6. 若求得的点与初始点重合或到达 $\mathbf{P}(u, v)$ ， $\mathbf{Q}(u, v)$ 的边界则终止；否则转 Step 4。

11.11 曲面求交的活动仿射标架跟踪法

离散差分跟踪求交法利用多项式曲面中相邻两子曲面间差分矩阵的递推关系，沿交线逐段追踪求交，省略了离散求交中的交集判断和将各段交线排序连接的过程，提高了效率。但是，由于没有确定的跟踪方向，其候选子曲面片最多可到十五对之多，效率仍不高，有时甚至与离散求交的效率相差无几。为此，我们建议，当看重于计算效率时，可采用活动仿射标架跟踪法。这一方法的特点是沿着两曲面交线的切向进行跟踪，随着交线的延伸不断调整跟踪方向。为避免产生候选子曲面片所带来的工作量，不对曲面作离散，而以迭代法取而代之。

11.11.1 球变换

设要求交线的两张曲面为 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(u_i, v_i)$ ， $(u_i, v_i) \in \Omega_i$ ， $i = 1, 2$ 。再设 \mathbf{P}_i 是曲面 \mathbf{r}_i 上的点， $i = 1, 2$ 。为从点 \mathbf{P}_i 开始，经迭代得到曲面 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的交线上的点，可按如下步骤作变换。

首先，于曲面 \mathbf{r}_i 在点 \mathbf{P}_i 处的切平面 π_i 上，以点 \mathbf{P}_i 为原点， $\partial \mathbf{r}_i / \partial u_i$ 、 $\partial \mathbf{r}_i / \partial v_i$ 为基向量建立仿射坐标系

$$\{\mathbf{P}_i; \partial \mathbf{r}_i / \partial u_i, \partial \mathbf{r}_i / \partial v_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (11.11.1)$$

设 π_i 的法向量为 \mathbf{n}_i ， $i = 1, 2$ ，当 \mathbf{n}_1 不平行于 \mathbf{n}_2 ，设 π_1 与 π_2 交于直线 l ， \mathbf{P}_i 在 l 上的垂足为点

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i + d_i \cdot (\mathbf{n}_i \times \mathbf{T}), \quad i = 1, 2. \quad (11.11.2)$$

这里

$$\mathbf{n}_i = (\partial \mathbf{r}_i / \partial u_i) \times (\partial \mathbf{r}_i / \partial v_i), \quad i = 1, 2; \quad \mathbf{T} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \quad (11.11.3)$$

$$d_1 = (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)) / (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{T}), \quad d_2 = (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)) / (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{T}). \quad (11.11.4)$$

由(11.11.2), 可求得被称为点 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 之垂足线中点的一点

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) / 2. \quad (11.11.5)$$

显然, 向量 $\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i$ 可在坐标系(11.11.1)下表示为

$$\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i = (\partial \mathbf{r}_i / \partial u_i) \Delta u_i + (\partial \mathbf{r}_i / \partial v_i) \Delta v_i, \quad i = 1, 2. \quad (11.11.6)$$

其中 $\Delta u_i, \Delta v_i$ 可运用混合积求得:

$$\Delta u_i = \left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial v_i}, \mathbf{n}_i \right) / \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial v_i}, \mathbf{n}_i \right) = \left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial v_i}, \mathbf{n}_i \right) / n_i^2, \quad (11.11.7)$$

$$\Delta v_i = \left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i}, \mathbf{n}_i \right) / \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial v_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i}, \mathbf{n}_i \right) = - \left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i}, \mathbf{n}_i \right) / n_i^2. \quad (11.11.8)$$

进一步, 在曲面 \mathbf{r}_i 上取一对新点

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \mathbf{r}_i(u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i), \quad i = 1, 2, \quad (11.11.9)$$

并规定, 点偶 $(\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2)$ 与点偶 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 相对应, 这样就确定了一个变换. 注意到(11.11.9)的一阶微分形式恰是(11.11.6), 即

$$\|d(\bar{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P}_i)\| = \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}_i\| = \|\mathbf{dr}_i\|, \quad i = 1, 2, \quad (11.11.10)$$

于是可以近似地认为 $\bar{\mathbf{P}}_i, \mathbf{Q}$ 两点同位于以 \mathbf{P}_i 球心, 以 $\|\mathbf{dr}_i\|$ 为半径的球面上. 所以点偶变换 \mathbf{S} :

$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \xrightarrow{\mathbf{S}} (\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2)$ 称为球变换.

显然, 球变换可以反复迭代进行. 为方便起见, 记 $\bar{\mathbf{P}}_i$ 为 $\mathbf{P}_i^{[1]}$, 记第 j 次球变换产生的点偶为 $(\mathbf{P}_1^{[j]}, \mathbf{P}_2^{[j]})$, 即 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \xrightarrow{\mathbf{S}} (\mathbf{P}_1^{[1]}, \mathbf{P}_2^{[1]}) \xrightarrow{\mathbf{S}} (\mathbf{P}_1^{[2]}, \mathbf{P}_2^{[2]}) \cdots \xrightarrow{\mathbf{S}} (\mathbf{P}_1^{[j]}, \mathbf{P}_2^{[j]})$, 可以证明, 当初始点偶 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 的距离 $\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\|$ 较小时, 则 $\|\mathbf{P}_1^{[j]} - \mathbf{P}_2^{[j]}\| \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), 即 $\mathbf{P}_1^{[j]}, \mathbf{P}_2^{[j]}$ 收敛于曲面 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 之交线上的点.

11.11.2 求交算法

运用球变换, 沿着曲面 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 之交线的延伸方向跟踪求交, 其主要步骤是迭代、跟踪和变换. (1) 迭代: 是从给定的点偶 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 出发, 运用球变换迭代求得 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 之交线上的近似点 \mathbf{P}^* ; (2) 跟踪: 是从近似点 \mathbf{P}^* 出发, 沿着曲面 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 之交线在该点的切向, 向前跟踪到达新点 \mathbf{Q}^* ; (3) 变换: 是从新点 \mathbf{Q}^* 出发, 运用类似于球变换的方法确定在曲面 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 上的新点偶. 而此新点偶又可作为迭代过程的出发点. 以上三步可交替递归进行, 以求得曲面 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 之交线上的一系列点作为交线的表示.

算法 11.11.1 (用活动标架跟踪法进行曲面求交)

设 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 是曲面 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 上给定的初始点偶, ε 是预给精度. 反复执行下列各步, 直到 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 中有点到达曲面 \mathbf{r}_1 或 \mathbf{r}_2 的边界, 或所求曲线已封闭时停止.

Step 1. (迭代)

1.1 反复执行下列各步, 直到 $\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\| < \varepsilon$: (1) 作球变换 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \xrightarrow{\mathbf{S}} (\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2)$;

(2) 点对更新 $\mathbf{P}_i \leftarrow \bar{\mathbf{P}}_i, i = 1, 2$.

1.2 交点输出: 取 P_1 、 P_2 的垂足线中点 Q 作为 r_1 、 r_2 的交点输出.

Step 2. (跟踪) 从点 Q 出发, 沿着 r_1 与 r_2 交线的切向 T 前进一个步长 δ , 到达点 $H = Q + \delta T$.

Step 3. (变换)

3.1 按(11.11.7)和(11.11.8) (以 H 代 Q) 求 $H - P_i$ 的表示式(11.11.6).

3.2 确定进行新一轮迭代的点偶 $P_i = r_i(u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i)$, $i = 1, 2$.

11.12 Bézier 曲面的环检测

两张曲面的交线可能是开曲线, 也可能是闭曲线. 开曲线的端点或同时在两张曲面的边界线上, 或在一张曲面的边界线上. 若两张已知曲面的交线全为开曲线, 则只要取它们边界线上的一个交点为初始点, 用跟踪法就可求得所有的交线. 但闭曲线一般位于两曲面片内, 无端点可言, 所以求交时有可能被遗漏. 防止遗漏的方法是化闭为开, 一旦发现交线有可能为闭曲线时, 就将曲面分割为若干片子曲面, 使得在各子曲面间的交线都是开曲线, 继而求出各段开曲线, 再首尾相连形成闭交线.

显然, 化闭为开的前提在于判别闭交线存在, 这通常称之为环检测^[20]. 下列定理提供了一种环检测的方法.

定理 11.12.1 设 $P(u, v)$, $Q(u', v')$ 是分别定义在单连通区域 Ω_1 、 Ω_2 上的正则曲面, 如果其交线中含有简单闭曲线, 则存在着点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Omega_i, i = 1, 2$ 使得 $P(u, v)$ 和 $Q(u', v')$ 在点 $P(\xi_1, \eta_1)$, $Q(\xi_2, \eta_2)$ 处的法向平行.

证 设 Γ 为 $P(u, v)$ 、 $Q(u', v')$ 之交线中的一条简单闭曲线, 则 Γ 在单连通区域 Ω_i 中对应的参数集也分别形成简单闭曲线, 不妨设为 $\Gamma_i (\subseteq \Omega_i)$, $i = 1, 2$. 记 Ω_i 以内 Γ_i 为边界的单连通区域为 D_i , 即 $\partial D_i = \Gamma_i, i = 1, 2$, 则 $P(u, v)$, $(u, v) \in D_1$ 和 $Q(u', v')$, $(u', v') \in D_2$ 构成一张闭曲面. 从而表达式

$$d(u, v; u', v') = (P(u, v) - Q(u', v'))^2, \quad (u, v) \in D_1, (u', v') \in D_2 \quad (11.12.1)$$

具有最大值. 由于上式沿简单闭曲线 Γ (即沿 D_1 、 D_2 的边界 Γ_1 、 Γ_2) 之值为 0, 所以在 D_1 、 D_2 的某一点 (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) 达到最大值, 且满足

$$\partial d / \partial u = \partial d / \partial v = \partial d / \partial u' = \partial d / \partial v' = 0. \quad (11.12.2)$$

记

$$n^* = n^*(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = P(\xi_1, \eta_1) - Q(\xi_2, \eta_2), \quad (11.12.3)$$

则(11.12.2)就是

$$n^* \cdot P_u(\xi_1, \eta_1) = n^* \cdot P_v(\xi_1, \eta_1) = n^* \cdot Q_{u'}(\xi_2, \eta_2) = n^* \cdot Q_{v'}(\xi_2, \eta_2) = 0. \quad (11.12.4)$$

这表明向量 $n^*(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$ 既是曲面 $P(u, v)$ 在点 $P(\xi_1, \eta_1)$ 的法向, 也是曲面 $Q(u', v')$ 在点 $Q(\xi_2, \eta_2)$ 的法向. 证毕.

上述定理表明, 若曲面 $P(u, v)$ 和 $Q(u', v')$ 上没有两点的法向平行, 则它们无闭交线.

今假定曲面 $P(u, v)$ 就是 $m \times n$ 次的 Bézier 曲面(7.2.1), 则性质 7.2.6 表明, 其法向 $n_p(u, v)$ 位于包含向量集 $\{N_{ij}\}$ 的凸棱锥 W_p 内, 而 $\{N_{ij}\}$ 如(7.2.5)所示. 同理, 当 $Q(u', v')$ 也是 Bézier 曲面时, 也可类似地求得其法向 $n_q(u', v')$, 记包围 $n_q(u', v')$ 的凸棱锥为 W_q . 再记 W_q 关于原点为中点对称的凸棱锥为 W_q^{-1} , 即 $W_q^{-1} = \{n | -n \in W_q\}$. 显然, 当 W_p 与 W_q , W_p 与 W_q^{-1} 除原点外无其他公共元素时, $P(u, v)$ 和 $Q(u', v')$ 上没有两点的法向是平行的, 从而曲面 $P(u, v)$ 和 $Q(u', v')$ 不存在闭的交线. 称此为基于包围凸棱锥的环检测方法, 而文献 [20] 用的是基于包围圆锥的环检测方法. 凸棱锥方法实现简单, 在许多情况下计算量少. 有关包围圆锥和包围凸棱锥的计算方法见文献[20], [21], [ZJM, 92b].

主要文献

- [WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学研究生学位课程讲义, 1999
- [WGZ, 84] 汪国昭, Bézier 曲线曲面的离散求交方法, 浙江大学学报, 计算几何专辑, 1984, 108-119
- [WGJ, XW, 91] Wang Guojin, Xu Wei, The termination criterion for subdivision of the rational Bézier curves, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1991, 53(1): 93-96
- [ZJM, STW, 99] Zheng Jianmin, Sederberg, T.W., Estimating Tessellation Parameter Intervals for Rational Curves and surfaces, ACM Transaction on Graphics, 2000, 19(1): 56-77
- [ZJM, 92a] 郑建民, 曲面造型中的有理连续性和求交的研究, 浙江大学博士学位论文, 1992 年 5 月, 杭州
- [HSM, SJG, JTG, WGZ, 2000] 胡事民, 孙家广, 金通洸, 汪国昭, 基于活动仿射标架反求 NURBS 曲线/曲面参数, 软件学报, 2000, 11(1): 49-53
- [ZJM, 92b] 郑建民, Bézier 曲线曲面的环检测, 计算机辅助设计与图形学学报, 1992, 4(1): 47-55

参考文献

- 1 Faux, I.D., Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK, 1979
- 2 Kriezis, G.A., Prakash, P.V., Patrikalakis, N.M., Method for intersecting algebraic surfaces with rational polynomial patches, *Computer Aided Design*, 1990, 22(10): 645-654
- 3 Owen, J.C., Rockwood, A.P., Intersection of General implicit surfaces, in: Farin, G., ed., *Geometric Modeling, Algorithms and New Trends*, 1987
- 4 Phillips, M.B., Odell, G.M., An algorithm for locating and displaying the intersection of two arbitrary surfaces, *IEEE Computer Graphics and Application*, 1984, 4(9): 48-58
- 5 Levin, J.Z., Mathematical Models for Determining the intersections of quadric surfaces, *Computer Graphics and Image Processing*, 1979, 11(1): 73-87
- 6 Dfeifei, H., Methods used for intersecting geometrical entities in the GMP module for volume geometry, *Computer Aided Design*, 1985, 17(7): 311-318
- 7 Miller, J.R., Geometric approaches to non-planar quadric surface intersection curves, *ACM Transactions on Graphics*, 1987, 6(4): 274-307
- 8 Morgan, A.P., A method for computing all solutions to systems of polynomial equations, *ACM Transactions on Math Software*, 1983, 9(1): 1-17
- 9 Lane, J.M., Riesenfeld, R.F., A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces, *IEEE Transaction on Pattern analysis and machine intelligence*, 1980, 2(1): 35-46
- 10 Cohen, E., Lyche, T., Riesenfeld, R.F., Discrete B-spline and subdivision techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics, *Computer Graphics and Image Processing*, 1980, 14(2): 87-111
- 11 Lasser, D., Intersection of parametric surfaces in the Bernstein-Bézier representation, *Computer Aided Design*, 1986, 18(4): 186-192
- 12 Houghton, E.G., Ementt, R.F., Facfor, J.D., Sabharwal, C.L., Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(1-3): 173-183
- 13 Dokken, T., Finding intersections of B-spline represented geometries using recursive subdivision techniques, *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(1-3): 189-195
- 14 Barnhill, R.E., Kersey, S.N., A marching method for parametric surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 17(1-4): 257-280
- 15 Aziz, N.M., Bata, R., Bézier Surface/surface intersection, *IEEE Computer Graphics and Application*, 1990, 10(1): 50-58
- 16 Markot, R.P., Magedson, R.L., Solution of tangential surface and curve intersection, *Computer Aided Design*, 1989, 21(7): 421-429
- 17 Barnhill, R., Farin, G., Jordan, M., Piper, B., Surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*, 1987, 4(1-2): 3-16
- 18 Pratt, M.J., Geisow, A.D., Surface/surface intersection problems, in: Gregory J.A., ed., *The Mathematics of Surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1986, 117-142
- 19 Koparkar, P., Surface Intersection by switching from recursive subdivision to iterative refinement, *The visual computer*, 1991, 8(1): 47-63
- 20 Sederberg, T.W., Meyers, R.J., Loop detection in surface patch intersecting, *Computer Aided Geometric Design*, 1988, 5(2): 161-171
- 21 Krishnan, S., Gopi, M., Lin, M., Manocha, D., Pattekar, A., Rapid and accurate contact determination between spline models using shelltrees, *Proceedings of Eurographics'98, Computer Graphics Forum*, 1998, 17(3): c315-c326