第十二章 有理 Bézier 曲线曲面的多项式逼近

从第三章、第五章和第七章可以知道有理 Bézier 曲线、曲面不但能表示自由曲线、曲面，而且能精确表示圆锥曲线、二次曲面与旋转曲面，因而获得广泛的应用．这些曲线曲面与多项式曲线曲面在几何性质上极其相似，如几何与仿射不变性，凸包性，保凸性，对称性，端点插值性等；在计算方法上也极其相似，如 de Castljau 求值，离散，升阶，插值，包络生成算法等．但是并非所有计算方法都是可以平行地类推的．把多项式曲线曲面拓广到有理多项式形式时，也产生了一些负面影响．其一是曲线曲面的微分运算和积分运算变得繁琐费时了，其二是用多项式和有理多项式这两种形式来表示的曲线曲面设计系统之间，不能直接进行数据的交换和传递了．但是曲线曲面的拼接和求交中必须进行微分运算，物体的重心和体积等物性计算中必须进行积分运算, CAGD 中的数据通讯同样也是必不可少的．

为了解决以上这两个问题，九十年代开始，产生了用多项式曲线、曲面逼近有理多项式曲线、曲面的一系列工作．其原始表示式最早可追溯到 Ball[1]在 1974 年的论文．1991 年 Sederberg 和 Kakimoto[2]首次提出逼近有理多项式的 Hybrid（混合，杂交）算法．其基本思想是把一条 m 次有理曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 首先表示成带有一个移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_r(t)$ 的 $r+p$ 次 Bézier 曲线 $\boldsymbol{H}(t)$（称为 Hybrid 曲线），其中 $\boldsymbol{H}_r(t)$ 是与 $\boldsymbol{R}(t)$ 同次数且同权因子的有理 Bézier 曲线；如果当 $r+p\to\infty$ 时 $\boldsymbol{H}_r(t)$ 的凸包缩为一点，我们可以用此凸包内的任一点 $\boldsymbol{H}_r$ 近似替代 $\boldsymbol{H}_r(t)$，由此产生的曲线 $\tilde{\boldsymbol{H}}(t)$ 就是对 $\boldsymbol{R}(t)$ 的 H 多项式逼近．文献[2]给出了 $\boldsymbol{H}(t)$ 的控制顶点的计算方法．然而围绕着 H 多项式逼近，还有以下一系列问题需要开展研究：

1．传统的 Hermite 多项式曲线 $\boldsymbol{h}(t)$，即当 $\boldsymbol{h}(t)$ 与 $\boldsymbol{R}(t)$ 在曲线两端点有若干阶相同导矢时，也可看作对 $\boldsymbol{R}(t)$ 的一类 h 多项式逼近．那么 H 逼近与 h 逼近在表示和计算方法上有没有联系？在收敛条件和速度上孰优孰劣？

2．如何进行逼近曲线的快速递推计算？即若已知 $\boldsymbol{R}(t)$ 的一条低阶 Hybrid 曲线或 Hermite 逼近曲线，如何求得高一阶的相应曲线？

3．H 逼近和 h 逼近的收敛条件和收敛性态与已知的有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 有何关系？特别对 $m\le 3$ 次的有理曲线逼近，如何快速验敛？

4．当 $r+p$ 增大时, Hybrid 曲线的移动控制顶点以怎样的速率缩小到一点？或者说，当逼近误差界为 ε 时，如何决定此多项式曲线的次数 $r+p$？

5．以上所有工作能否全部推广到有理 Bézier 曲面的多项式逼近？

本章系统地介绍我们在以上所列课题中的研究成果，其中第 1−7 节的内容取材于[WGJ, STW, CFL, 97], [LLG, WGJ, 2000a]；第 8 节内容取材于[WGZ, ZJM, 97]；第 9 节内容取材于[WGZ, LW, CFL, 95]；第 10−14 节内容取材于[QGX, WGJ, 2000], [LLG, WGJ, 2000b].

12.1 有理 Bézier 曲线的两类多项式逼近 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$

12.1.1 有理曲线 Hermite 逼近与 Hybrid 逼近的定义

定义 12.1.1 对一条已知的 m 次有理 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{P}(t)/\omega(t)=\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{R}_k\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k,\quad 0\le t\le 1,\ \ \omega_k\ne 0,\tag{12.1.1}$$

若 $r+p-1$ 次 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=\sum_{i=0}^{r+p-1}B_i^{r+p-1}(t)\boldsymbol{h}_i^{r,p},\quad 0\le t\le 1\tag{12.1.2}$$

在其两个端点处满足 $r+p$ 个等式

$$\begin{cases}\mathrm{d}^i\boldsymbol{h}^{r,p}(0)/\mathrm{d}t^i=\mathrm{d}^i\boldsymbol{R}(0)/\mathrm{d}t^i, & i=0,1,\ldots,r-1,\\ \mathrm{d}^j\boldsymbol{h}^{r,p}(1)/\mathrm{d}t^j=\mathrm{d}^j\boldsymbol{R}(1)/\mathrm{d}t^j, & j=0,1,\ldots,p-1,\end{cases}\tag{12.1.3}$$

则称 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 是 $[0,1]$ 上对于有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 的 Hermite 逼近，简称 h 逼近，记为 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$．

定义 12.1.2 对曲线(12.1.1), 首先称与之等价的曲线

$$\boldsymbol{H}^{r,p}(t) \equiv \boldsymbol{R}(t) = \sum_{i=0,i\neq r}^{r+p} B_i^{r+p}(t)\boldsymbol{H}_i^{r,p} + B_r^{r+p}(t)\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t),\ 0 \le t \le 1 \tag{12.1.4}$$

为 $r+p$ 次 Hybrid 曲线, 这里

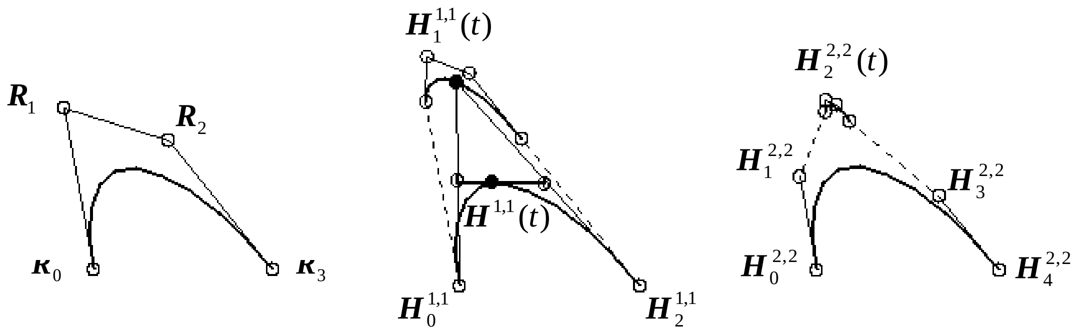
$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k \boldsymbol{M}_k^{r,p} \Big/ \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k \tag{12.1.5}$$

称为 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$ 的移动控制顶点; 再用 $\{\boldsymbol{M}_k^{r,p}\}_{k=0}^{m}$ 的凸包内固定的一点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}$ 来代替 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)(0 \le t \le 1)$, 则 $r+p$ 次 Bézier 曲线

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t) = \sum_{i=0}^{r+p} B_i^{r,p}(t)\boldsymbol{H}_i^{r,p} \tag{12.1.6}$$

称为 $[0,1]$ 上对于有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 的 Hybrid 逼近, 简称 H 逼近, 记为 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$.

图 12.1.1 给出了与三次有理 Bézier 曲线相应的低次 Hybrid 曲线的情形. 根据定义 12.1.2, 我们很自然地有以下的 Hybrid 曲线的表示唯一性定理.



三次有理 Bézier 曲线　　Hybrid 曲线上的一点　　（2+2）次 Hybrid 曲线

图 12.1.1 三次有理 Bézier 曲线及其 Hybrid 曲线

定理 12.1.1. 与有理 Bézier 曲线(12.1.1)相应的 Hybrid 曲线(12.1.4)是唯一的.

证 只要证明零向量 $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{0}$ 的表示是唯一的. 在恒等式 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 两端代入 $t=0$ 可得 $\boldsymbol{H}_0^{r,p}=\boldsymbol{0}$, 再在恒等式 $t^{-1}\boldsymbol{H}^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 两端代入 $t=0$ 可得 $\boldsymbol{H}_1^{r,p}=\boldsymbol{0}$, 依次类推并由对称性得 $\boldsymbol{H}_i^{r,p}=\boldsymbol{0}(i\neq r)$, 最后得 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)=\boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{M}_k^{r,p}=\boldsymbol{0}, k=0,1,\dots,m.$ 事实上, 把恒等式 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)=\boldsymbol{0}$ 左端的有理部分移至右端, 立刻可看出结论成立.

12.1.2 用传统的逼近论方法求 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 的收敛条件

作为研究的入门, 首先考察 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 的收敛需要什么条件. 假定 $\boldsymbol{R}(t)$ 和 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)$ 如(12.1.1)和(12.1.2)所定义, 改写 $\boldsymbol{R}(t)$ 为

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{P}(t)/\omega(t) = \sum_k\sum_l \boldsymbol{a}_{kl}(t-\theta_k)^{-l}, \tag{12.1.7}$$

这里 $\boldsymbol{a}_{kl}$ 为常向量, $\omega(\theta_k)=0$, l 为根 θ_k （可为复根）之重数. 由多项式插值的余项定理[3]得

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{s,s}(t) = t^s(1-t)^s\,\boldsymbol{R}^{(2s)}(\theta)/(2s)!,\ 0\le\theta\le 1.$$

容易求出

$$\boldsymbol{R}^{(2s)}(t) = \sum_k\sum_l \boldsymbol{a}_{kl}((l+2s-1)!/(l-1)!)(t-\theta_k)^{-l-2s}.$$

因而我们仅需决定, 对任何固定的 k,l, 在什么条件下

$$L_{kl}(\theta,t)=\frac{(l+2s-1)!}{(2s)!(l-1)!}\left(\frac{t(1-t)}{(\theta-\theta_k)^2}\right)^s\frac{1}{(\theta-\theta_k)^l}$$
$$=\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\frac{l-1}{j+1}\right)\left(\frac{t(1-t)}{(\theta-\theta_k)^2}\right)^s\frac{1}{(\theta-\theta_k)^l}\to 0,\quad s\to\infty.$$

用 δ_k 来表示复平面上，点 θ_k 与线段 $(0,0)-(1,0)$ 之距离，注意到

$$\prod_{j=0}^{2s-1}\left(1+\frac{l-1}{j+1}\right)=O(s^{l-1}),$$
$$\left|\frac{t(1-t)}{(\theta-\theta_k)^2}\right|^s\le\left(\frac{1}{4\delta_k^2}\right)^s,$$
$$\left|\frac{1}{(\theta-\theta_k)^l}\right|\le\frac{1}{\delta_k^l},$$

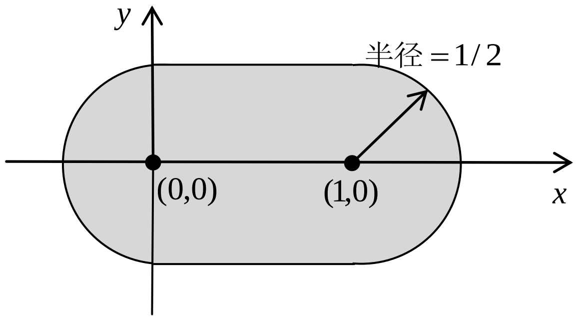


图 12.1.2 定理 12.1.2 中的收敛区域(围线之外)

我们推知当

$$\delta_k>1/2 \tag{12.1.8}$$

时，$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{s,s}(t)\to\boldsymbol{0}(0\le t\le 1)$，$s\to\infty$．这样就得到

定理 12.1.2 Hermite 逼近 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的一个充分条件是 $\omega(t)$ 的任何实根或复根 θ_k 在复平面上的对应点到线段 $(0,0)-(1,0)$ 上任何一点的距离大于 $1/2$ (见图 12.1.2)．

同理可知 $\boldsymbol{h}\langle s,0\rangle$ 和 $\boldsymbol{h}\langle 0,s\rangle$ 逼近 $\boldsymbol{R}(t)$ 能够收敛的充分条件是 $\delta_k>1$．

以上结论都基于传统的逼近论方法．借助于 Hybrid 曲线这一工具我们可以得出更精密的 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 收敛条件．这是因为, Hybrid 逼近余项的表达式很简单，而表面上看来迥然不同的 h 逼近和 H 逼近有着惊人的紧密联系．

12.1.3 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的关系

本章将用统一的观点更好地研究当 $\lim\limits_{p\to\infty}(r/p)=\alpha(\ge 0)$ 时，$\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的条件及逼近曲线的计算．其中当 $r=0$ 或 $p=0$ 时即 Taylor 逼近，当 $r=p$ 时即最常用的逼近．首先我们在以下两个定理中给出 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的关系．

定理 12.1.3 若 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)$ 分别由(12.1.2)和(12.1.6)定义，则

$$\boldsymbol{h}_i^{r,p}=\begin{cases}\dfrac{i}{r+p-1}\boldsymbol{H}_{i-1}^{r-1,p-1}+\left(1-\dfrac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{H}_i^{r-1,p-1}, & 0\le i\le r+p-1, i\ne r-1,r,\\ \dfrac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{H}_{r-2}^{r-1,p-1}+\dfrac{p}{r+p-1}\boldsymbol{M}_0^{r-1,p-1}, & i=r-1,\\ \dfrac{r}{r+p-1}\boldsymbol{M}_m^{r-1,p-1}+\dfrac{p-1}{r+p-1}\boldsymbol{H}_r^{r-1,p-1}, & i=r,\end{cases} \tag{12.1.9}$$

$$\boldsymbol{H}_i^{r,p}=\frac{i}{r+p}\boldsymbol{h}_{i-1}^{r,p}+\left(1-\frac{i}{r+p}\right)\boldsymbol{h}_i^{r,p},\quad 0\le i\le r+p,\quad i\ne r. \tag{12.1.10}$$

也就是说，$\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 的升阶曲线与 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)$ 仅相差一个控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}$，$\tilde{\boldsymbol{H}}^{r-1,p-1}(t)$ 的升阶曲线与 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 仅相差两个控制顶点 $\boldsymbol{h}_{r-1}^{r,p}$ 与 $\boldsymbol{h}_r^{r,p}$．

证 因 Bézier 曲线关于 t 和 $1-t$ 是对称的，仅就 $i\le r-1$ 证明(12.1.9)，(12.1.10)之证明因类似而略去．由 $\boldsymbol{H}^{r-1,p-1}(t)\equiv\boldsymbol{R}(t)$ 得到

$$\mathrm{d}^i\boldsymbol{h}^{r,p}(0)/\mathrm{d}t^i=\mathrm{d}^i\tilde{\boldsymbol{H}}^{r-1,p-1}(0)/\mathrm{d}t^i,\quad i=0,1,\ldots,r-1.$$

展开上式两端可推出

$$\frac{(r+p-1)!}{(r+p-1-i)!}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\boldsymbol{h}_{i-k}^{r,p}$$
$$=\frac{(r+p-2)!}{(r+p-2-i)!}\sum_{k=1}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\boldsymbol{H}_{i-k}^{r-1,p-1}+\frac{(r+p-2)!}{(r+p-2-i)!}\times\begin{cases}\boldsymbol{H}_i^{r-1,p-1}, & 0\le i\le r-2,\\ \boldsymbol{M}_0^{r-1,p-1}, & i=r-1.\end{cases}$$

利用上式, 应用数学归纳法于序号i可证得(12.1.9). 证毕.

定理 12.1.4 若$\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$和$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$分别由(12.1.2)、(12.1.4)和(12.1.5)所定义, 则当移动控制顶点$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$被它的一个固定的控制顶点$\boldsymbol{M}_0^{r,p}$或$\boldsymbol{M}_m^{r,p}$来代替时, 所得到的曲线$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)$恰为$\boldsymbol{h}^{r+1,p}(t)$或$\boldsymbol{h}^{r,p+1}(t)$. 换言之, $\boldsymbol{R}(t)$的 Hermite 逼近曲线是 Hybrid 逼近曲线的特例. 即

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{h}^{r+1,p}(t), & \text{当取}\boldsymbol{H}_r^{r,p}=\boldsymbol{M}_0^{r,p},\\ \boldsymbol{h}^{r,p+1}(t), & \text{当取}\boldsymbol{H}_r^{r,p}=\boldsymbol{M}_m^{r,p}.\end{cases}\tag{12.1.11}$$

证 仅就$\boldsymbol{h}^{r+1,p}(t)$证明. 容易算得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^iB_r^{r+p}(0)}{\mathrm{d}t^i}=\begin{cases}0, & i=0,1,\dots,r-1,\\ \dfrac{(r+p)!}{(r+p-i)!}(-1)^{i-r}\dbinom{i}{i-r}, & i=r,r+1,\dots,r+p,\end{cases}\\ \dfrac{\mathrm{d}^jB_r^{r+p}(1)}{\mathrm{d}t^j}=\begin{cases}0, & j=0,1,\dots,p-1,\\ \dfrac{(r+p)!}{(r+p-j)!}(-1)^{j-p}\dbinom{j}{j-p}, & j=p,p+1,\dots,p+r.\end{cases}\end{cases}\tag{12.1.12}$$

置逼近余项

$$\boldsymbol{ER}^{r,p}(t)=\boldsymbol{R}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)=\boldsymbol{H}^{r,p}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)=(\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p})B_r^{r+p}(t),\tag{12.1.13}$$

则由 Leibniz 公式我们有

$$\mathrm{d}^i\boldsymbol{ER}^{r,p}(0)/\mathrm{d}t^i=\boldsymbol{0},\ i=0,1,\dots,r-1;\qquad \mathrm{d}^j\boldsymbol{ER}^{r,p}(1)/\mathrm{d}t^j=\boldsymbol{0},\ j=0,1,\dots,p-1.$$

当（12.1.11）第一式的条件满足时又有

$$\mathrm{d}^r\boldsymbol{ER}^{r,p}(0)/\mathrm{d}t^r=(r+p)!(\boldsymbol{M}_0^{r,p}-\boldsymbol{H}_r^{r,p})/p!=\boldsymbol{0}.$$

因这时的$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)$和$\boldsymbol{h}^{r+1,p}(t)$具有相同的次数$r+p$, 根据 Hermite 逼近多项式的唯一性知$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{h}^{r+1,p}(t)$. 证毕.

根据文献[2], 对 Hybrid 曲线的控制顶点, 包括移动控制顶点$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$的控制顶点, 我们有由$\boldsymbol{R}(t)$计算$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$的

算法 12.1.1 （由$\boldsymbol{R}(t)$计算$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$）

$$\boldsymbol{H}_0^{r,p}=\boldsymbol{R}_0,$$

$$\boldsymbol{H}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_0+\left(\binom{r+p}{i}\omega_0\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\min(m,i)}\binom{m}{k}\binom{r+p}{i-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{H}_{i-k}^{r,p}),\quad i=1,2,\dots,r-1,$$

$$\boldsymbol{H}_{r+p}^{r,p}=\boldsymbol{R}_m,$$

$$\boldsymbol{H}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_m+\left(\binom{r+p}{i}\omega_m\right)^{-1}\sum_{k=\max(0,i+m-r-p)}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{r+p}{i+m-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{H}_{i+m-k}^{r,p}),$$
$$i=r+p-1,r+p-2,\dots,r+1,$$

$$\boldsymbol{M}_k^{r,p}=\boldsymbol{R}_k+\left(\binom{m}{k}\binom{r+p}{r}\omega_k\right)^{-1}\sum_{\substack{i=\max(0,k-p)\\ i\ne k}}^{\min(k+r,m)}\binom{m}{i}\binom{r+p}{k+r-i}\omega_i(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{H}_{k+r-i}^{r,p}),$$
$$k=0,1,\dots,m.$$

应用算法 12.1.1 和定理 12.1.4, 对 Hermite 逼近曲线的控制顶点, 可以得到如下两种不同递推顺序的算法.

算法 12.1.2 （由 $\boldsymbol{R}(t)$ 计算 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$）

$$\boldsymbol{h}_0^{r,p}=\boldsymbol{R}_0,$$

$$\boldsymbol{h}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_0+\left(\binom{r+p-1}{i}\omega_0\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\min(m,i)}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{i-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{i-k}^{r,p}),\ i=1,2,\ldots,r-2,$$

$$\boldsymbol{h}_{r+p-1}^{r,p}=\boldsymbol{R}_m,$$

$$\boldsymbol{h}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_m+\left(\binom{r+p-1}{i}\omega_m\right)^{-1}\sum_{k=\max(0,i+m-r+1)}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{i+m-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{i+m-k}^{r,p}),$$
$$i=r+p-2,r+p-3,\ldots,r,$$

$$\boldsymbol{h}_{r-1}^{r,p}=\boldsymbol{R}_0+\left(\binom{r+p-1}{r-1}\omega_0\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\min(m,r-1)}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{r-1-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{r-1-k}^{r,p}).$$

算法 12.1.3 （由 $\boldsymbol{R}(t)$ 计算 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$）

$$\boldsymbol{h}_0^{r,p}=\boldsymbol{R}_0,$$

$$\boldsymbol{h}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_0+\left(\binom{r+p-1}{i}\omega_0\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\min(m,i)}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{i-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{i-k}^{r,p}),\quad i=1,2,\ldots,r-1,$$

$$\boldsymbol{h}_{r+p-1}^{r,p}=\boldsymbol{R}_m,$$

$$\boldsymbol{h}_i^{r,p}=\boldsymbol{R}_m+\left(\binom{r+p-1}{i}\omega_m\right)^{-1}\sum_{k=\max(0,i+m-r+1)}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{i+m-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{i+m-k}^{r,p}),$$
$$i=r+p-2,r+p-3,\ldots,r+1,$$

$$\boldsymbol{h}_r^{r,p}=\boldsymbol{R}_m+\left(\binom{r+p-1}{r}\omega_m\right)^{-1}\sum_{k=\max(m+1-p,0)}^{m}\binom{m}{k}\binom{r+p-1}{r+m-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{h}_{r+m-k}^{r,p}).$$

12.2 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的余项

为了得到 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的收敛条件，必须求出逼近的误差项．对此我们给出以下四个定理，其中后两个定理基于定理 12.1.4.

定理 12.2.1 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 的余项和余项的界分别是

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=B_{r-1}^{r+p-2}(t)\,\hat{\boldsymbol{M}}^{r-1,p-1}(t)\big/\omega(t),\tag{12.2.1}$$

$$\left\|\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)\right\|\le(\omega_{\max}/W_{\min})\operatorname*{Max}_{\substack{0\le k\le m\\ l=0,m}}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r-1,p-1}-\boldsymbol{M}_l^{r-1,p-1}\right\|,\tag{12.2.2}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{M}}^{r-1,p-1}(t)$ 是 $m+1$ 次 Bézier 曲线，

$$\hat{\boldsymbol{M}}^{r-1,p-1}(t)=\sum_{k=0}^{m+1}B_k^{m+1}(t)\hat{\boldsymbol{M}}_k^{r-1,p-1},\tag{12.2.3}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}}_k^{r-1,p-1}=\frac{k}{m+1}\omega_{k-1}(\boldsymbol{M}_{k-1}^{r-1,p-1}-\boldsymbol{M}_m^{r-1,p-1})+\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\omega_i(\boldsymbol{M}_k^{r-1,p-1}-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p-1}),$$
$$k=0,1,\ldots,m+1,\tag{12.2.4}$$

$$\omega_{\max}=\operatorname*{Max}_{0\le k\le m}\left|\omega_k\right|,\quad W_{\min}=\operatorname*{Min}_{0\le t\le 1}\left|\omega(t)\right|.\tag{12.2.5}$$

证 对 $\boldsymbol{H}^{r-1,p-1}(t)$ 升阶并利用(12.1.9)，我们得到

$$\boldsymbol{H}^{r-1,p-1}(t)=\sum_{\substack{i=0\\ i\ne r-1,r}}^{r+p-1}B_i^{r+p-1}(t)\boldsymbol{h}_i^{r,p}+B_{r-1}^{r+p-1}(t)\left(\frac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{H}_{r-2}^{r-1,p-1}+\frac{p}{r+p-1}\boldsymbol{H}_{r-1}^{r-1,p-1}(t)\right)$$
$$+B_r^{r+p-1}(t)\left(\frac{r}{r+p-1}\boldsymbol{H}_{r-1}^{r-1,p-1}(t)+\frac{p-1}{r+p-1}\boldsymbol{H}_r^{r-1,p-1}\right).$$

因而

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=\boldsymbol{H}^{r-1,p-1}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$$
$$=B_{r-1}^{r+p-1}(t)\frac{p}{r+p-1}(\boldsymbol{H}_{r-1}^{r-1,p-1}(t)-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p-1})+B_r^{r+p-1}(t)\frac{r}{r+p-1}(\boldsymbol{H}_{r-1}^{r-1,p-1}(t)-\boldsymbol{M}_m^{r-1,p-1}).$$

化简上式即得(12.2.1), 注意到下式即得(12.2.2):

$$\operatorname*{Max}_{0\le t\le 1}\left\|\hat{\boldsymbol{M}}^{r-1,p-1}(t)\right\|\le\operatorname*{Max}_{1\le k\le m}\left\|\hat{\boldsymbol{M}}_k^{r-1,p-1}\right\|\le\omega_{\max}\operatorname*{Max}_{\substack{0\le k\le m\\ l=0,m}}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r-1,p-1}-\boldsymbol{M}_l^{r-1,p-1}\right\|.$$

定理 12.2.2 按(12.2.5)定义 $\omega_{\max}, W_{\min}$ ，则 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 的余项和余项的界分别是

$$\boldsymbol{R}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)=B_r^{r+p}(t)(\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p}),\tag{12.2.6}$$

$$\left\|\boldsymbol{R}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)\right\|\le\left(2\omega_{\max}/W_{\min}\right)\operatorname*{Max}_{0\le k\le m}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{M}_0^{r,p}\right\|.\tag{12.2.7}$$

证 (12.2.6)即(12.1.13); 设 $d(\Omega)$ 为点集 Ω 的直径, (12.2.7)可从下式推得:

$$\operatorname*{Max}_{0\le k\le m}\left\|\boldsymbol{M}_r^{r,p}-\boldsymbol{M}_k^{r,p}\right\|\le d(\{\boldsymbol{M}_k^{r,p}\}_{k=0}^m)\le 2\operatorname*{Max}_{1\le k\le m}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{M}_0^{r,p}\right\|.\tag{12.2.8}$$

定理 12.2.3 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 的余项和余项的界分别是

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=\left(mr/(r+p)\right)B_r^{r+p}(t)\,\widetilde{\boldsymbol{M}}^{r-1,p}(t)\big/\omega(t),\tag{12.2.9}$$

$$\left\|\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)\right\|\le\left(mr\tilde{\omega}_{\max}/((r+p)W_{\min})\right)\operatorname*{Max}_{1\le k\le m}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r-1,p}-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p}\right\|,\tag{12.2.10}$$

这里 $W_{\min}$ 如(12.2.5)所示, $\widetilde{\boldsymbol{M}}^{r-1,p}(t)$ 是 $m-1$ 次 Bézier 曲线,

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}^{r-1,p}(t)=\sum_{k=0}^{m-1}B_k^{m-1}(t)\omega_{k+1}(\boldsymbol{M}_{k+1}^{r-1,p}-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p})\big/(k+1),\ \tilde{\omega}_{\max}=\operatorname*{Max}_{1\le k\le m}\left|\omega_k/k\right|.\tag{12.2.11}$$

证 按定理 12.1.4 可得

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=\boldsymbol{H}^{r-1,p}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r-1,p}(t)=B_{r-1}^{r+p-1}(t)(\boldsymbol{H}_{r-1}^{r-1,p}(t)-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p})$$
$$=B_{r-1}^{r+p-1}(t)\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k(\boldsymbol{M}_k^{r-1,p}-\boldsymbol{M}_0^{r-1,p})\Big/\omega(t),$$

由此可得(12.2.9), 进而得到(12.2.10). 证毕.

定理 12.2.4 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 的余项和余项的界分别是

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)=\left(mp/(r+p)\right)B_r^{r+p}(t)\,\tilde{\tilde{\boldsymbol{M}}}^{r,p-1}(t)\big/\omega(t),\tag{12.2.12}$$

$$\left\|\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{r,p}(t)\right\|\le\left(mp\tilde{\tilde{\omega}}_{\max}/((r+p)W_{\min})\right)\operatorname*{Max}_{0\le k\le m-1}\left\|\boldsymbol{M}_k^{r,p-1}-\boldsymbol{M}_m^{r,p-1}\right\|,\tag{12.2.13}$$

这里 $W_{\min}$ 如(12.2.5)所示, $\tilde{\tilde{\boldsymbol{M}}}^{r,p-1}(t)$ 是 $m-1$ 次 Bézier 曲线,

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{M}}}^{r-1,p}(t)=\sum_{k=0}^{m-1}B_k^{m-1}(t)\omega_{k+1}(\boldsymbol{M}_k^{r,p-1}-\boldsymbol{M}_m^{r,p-1})\big/(m-k),\quad\tilde{\tilde{\omega}}_{\max}=\operatorname*{Max}_{0\le k\le m-1}\left|\omega_k/(m-k)\right|.\tag{12.2.14}$$

12.3 h 逼近曲线 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 与 Hybrid 曲线 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$

由上节可知, 为了得到 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 或 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 的收敛条件, 关键是估计 $\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{M}_0^{r,p}$. 因此需要求得 $\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{M}_0^{r,p}$ 关于 r 和 p 的递推式. 另一方面, 虽然根据算法 12.1.1−12.1.3 可以直接由已知曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 计算相应的 Hermite 逼近曲线 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 或 Hybrid 曲线 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$, 但至少需要花费 $O((r+p)^2)$ 的计算时间. 而由低次 Hermite 曲线或低次 Hybrid 曲线的控制顶点, 递推计算高次曲线的控制顶点, 却只要求 $O(r+p)$ 的计算时间. 由此看来, 这种公式具有很大的作用. 下面我们给出四个算法.

算法 12.3.1 (由 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$ 计算 $\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_i^{r+1,p} = \dfrac{i}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{i-1}^{r,p} + \left(1-\dfrac{i}{r+p+1}\right)\boldsymbol{H}_i^{r,p},\ i=0,1,\ldots,r-1,r+2,\ldots,r+p+1, \\ \boldsymbol{H}_r^{r+1,p} = \dfrac{r}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{r-1}^{r,p} + \dfrac{p+1}{r+p+1}\boldsymbol{M}_0^{r,p}, \end{cases} \tag{12.3.1}$$

$$\boldsymbol{M}_k^{r+1,p} = \frac{r+1}{r+p+1}(-g_k\boldsymbol{M}_0^{r,p} + \boldsymbol{M}_k^{r,p} + g_k\boldsymbol{M}_{k+1}^{r,p}) + \frac{p}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p},\ k=01,\ldots,m, \tag{12.3.2}$$

$$g_k = \frac{(m-k)\omega_{k+1}}{(k+1)\omega_k},\ k=0,1,\ldots,m-1;\ g_m = g_{-1}^{-1} = 0, \tag{12.3.3}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r+1,p} - \boldsymbol{M}_0^{r+1,p} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r+1,p} - \boldsymbol{M}_0^{r+1,p} \end{pmatrix} = \frac{r+1}{r+p+1}\overline{\mathbf{V}}_m^{10}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \end{pmatrix}, \tag{12.3.4}$$

这里

$$\overline{\mathbf{V}}_1^{10} = 1-g_0,\quad \overline{\mathbf{V}}_m^{10} = \begin{pmatrix} 1-g_0 & g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_0 & 1 & g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_0 & 0 & 1 & g_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -g_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{m-1} \\ -g_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.3.5}$$

为了得到以上公式，对等式(12.1.4)右端第一项乘以$(1-t+t)$进行升阶，同时把第二项中的$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$化作$1+0$次 Hybrid 曲线，即可求得一条$m$次有理 Bézier 曲线$\overline{\boldsymbol{H}}_1^{1,0}(t)$，使得

$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t) = B_0^1(t)\boldsymbol{M}_0^{r,p} + B_1^1(t)\overline{\boldsymbol{H}}_1^{1,0}(t),$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{r,p}(t) = & \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq r,r+1}}^{r+p+1} B_i^{r+p+1}(t)\left[\frac{i}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{i-1}^{r,p} + \left(1-\frac{i}{r+p+1}\boldsymbol{H}_i^{r,p}\right)\right] \\ & + B_r^{r+p+1}(t)(r/(r+p+1))\boldsymbol{H}_{r-1}^{r,p} + B_r^{r+p+1}(t)((p+1)/(r+p+1))\boldsymbol{M}_0^{r,p} \\ & + B_{r+1}^{r+p+1}(t)(p/(r+p+1))\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p} + B_{r+1}^{r+p+1}(t)((r+1)/(r+p+1))\overline{\boldsymbol{H}}_1^{1,0}(t). \end{aligned}$$

把上式代入恒等式

$$\boldsymbol{H}^{r,p}(t) \equiv \boldsymbol{H}^{r+1,p}(t) = \sum_{i=0,i\neq r+1}^{r+p+1} B_i^{r+p+1}(t)\boldsymbol{H}_i^{r+1,p} + B_{r+1}^{r+p+1}(t)\boldsymbol{H}_{r+1}^{r+1,p}(t)$$

的左端，根据定理 12.1.1 立即得到(12.3.1)和下式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_r^{r+1,p}(t) &= \big((r+1)/(r+p+1)\big)\overline{\boldsymbol{H}}_1^{1,0}(t) + \big(p/(r+p+1)\big)\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p} \\ &= \big((r+1)/(r+p+1)\big)\big(\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t) - (1-t)\boldsymbol{M}_0^{r,p}\big)/t + \big(p/(r+p+1)\big)\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p}. \end{aligned}$$

把曲线

$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t) - \boldsymbol{M}_0^{r,p} = \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k(\boldsymbol{M}_k^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p}) \Big/ \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k$$

的分子部分升阶，把左端的$\mathbf{H}_r^{r+1,p}(t)$也按(12.1.5)定义写出，由上式就得到

$$\boldsymbol{M}_k^{r+1,p} = \frac{r+1}{r+p+1}\left[\boldsymbol{M}_0^{r,p} + (\boldsymbol{M}_k^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p}) + g_k(\boldsymbol{M}_{k+1}^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p})\right] + \frac{p}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p},$$
$$k = 0,1,\ldots,m.$$

于是就推出(12.3.2)和(12.3.4)。

算法 12.3.2　(由$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$计算$\boldsymbol{H}^{r,p+1}(t)$　)

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_i^{r,p+1} = \dfrac{i}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{i-1}^{r,p} + \left(1-\dfrac{i}{r+p+1}\right)\boldsymbol{H}_i^{r,p},\ i=0,1,\dots,r-1,r+2,\dots,r+p+1, \\ \boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p+1} = \dfrac{r+1}{r+p+1}\boldsymbol{M}_m^{r,p} + \dfrac{p}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{r+1}^{r,p}, \end{cases} \tag{12.3.6}$$

$$\boldsymbol{M}_k^{r,p+1} = \frac{p+1}{r+p+1}\left(\frac{1}{g_{k-1}}\boldsymbol{M}_{k-1}^{r,p} + \boldsymbol{M}_k^{r,p} - \frac{1}{g_{k-1}}\boldsymbol{M}_m^{r,p}\right) + \frac{r}{r+p+1}\boldsymbol{H}_{r-1}^{r,p}, \quad k=0,1,\dots,m, \tag{12.3.7}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r,p+1} - \boldsymbol{M}_0^{r,p+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r,p+1} - \boldsymbol{M}_0^{r,p+1} \end{pmatrix} = \frac{p+1}{r+p+1}\overline{\mathbf{V}}_m^{01}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \end{pmatrix}, \tag{12.3.8}$$

这里 g_k 如(12.3.3)所定义,

$$\overline{\mathbf{V}}_1^{01} = 1-\frac{1}{g_0},\ \overline{\mathbf{V}}_m^{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -g_{m-1}^{-1} \\ g_0^{-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -g_{m-1}^{-1} \\ 0 & g_1^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & -g_{m-1}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -g_{m-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{m-2}^{-1} & 1-g_{m-1}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{12.3.9}$$

把算法 12.3.1 和 12.3.2 联合就得到由 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$ 计算 $\boldsymbol{H}^{r+1,p+1}(t)$ 的公式, 以此为基础进一步可以得出

算法 12.3.3 (移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的控制顶点间距的递推计算)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r+1,p+1} - \boldsymbol{M}_0^{r+1,p+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r+1,p+1} - \boldsymbol{M}_0^{r+1,p+1} \end{pmatrix} = \frac{2(r+1)(p+1)}{(r+p+2)(r+p+1)}\overline{\mathbf{V}}_m^{11}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_m^{r,p} - \boldsymbol{M}_0^{r,p} \end{pmatrix}, \quad r,p=0,1,2,\dots, \tag{12.3.10}$$

$$\overline{\mathbf{V}}_1^{11} = \left(2-g_0-g_0^{-1}\right)/2,$$

$$\overline{\mathbf{V}}_m^{11} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-g_0 & g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -g_0^{-1} \\ g_1^{-1}-g_0 & 2 & g_2 & \cdots & 0 & 0 & -g_1^{-1} \\ -g_0 & g_2^{-1} & 2 & \cdots & 0 & 0 & -g_2^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -g_0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & g_{m-2} & -g_{m-3}^{-1} \\ -g_0 & 0 & 0 & \cdots & g_{m-2}^{-1} & 2 & g_{m-1}-g_{m-2}^{-1} \\ -g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{m-1}^{-1} & 2-g_{m-1}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{12.3.11}$$

这里 g_k 如(12.3.3)所定义.

算法 12.3.4 (由 $\boldsymbol{h}^{r-1,p}(t)$ 或 $\boldsymbol{h}^{r,p-1}(t)$ 计算 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_i^{r,p} = \dfrac{i}{r+p-1}\boldsymbol{h}_{i-1}^{r-1,p} + \left(1-\dfrac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{h}_i^{r-1,p},\ i=0,1,\dots,r-2,r,\dots,r+p-1, \\ \boldsymbol{h}_{r-1}^{r,p} = \boldsymbol{M}_0^{r-1,p}, \end{cases} \tag{12.3.12}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_i^{r,p} = \dfrac{i}{r+p-1}\boldsymbol{h}_{i-1}^{r,p-1} + \left(1-\dfrac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{h}_i^{r,p-1},\ i=0,1,\dots,r-1,r+1,\dots,r+p-1, \\ \boldsymbol{h}_r^{r,p} = \boldsymbol{M}_m^{r,p-1}. \end{cases} \tag{12.3.13}$$

由以上两式可知, 曲线 $\boldsymbol{h}^{r-1,p}(t)$ 或曲线 $\boldsymbol{h}^{r,p-1}(t)$ 的升阶曲线与曲线 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 仅相差一个控制顶点. 把这两式联合, 可得到由 $\boldsymbol{h}^{r-1,p-1}(t)$ 计算 $\boldsymbol{h}^{r,p}(t)$ 的递推公式.

12.4 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 逼近的收敛条件

本节考察常用的 H 逼近和 h 逼近，即 $r=p=s$ 的情形．由定理 12.2.1−12.2.4 可知，若

$$\lim_{s\to\infty}(\boldsymbol{M}_k^{s,s}-\boldsymbol{M}_0^{s,s})=0,\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{12.4.1}$$

则 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 必同时在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$.

定理 12.4.1 设 $\overline{\mathbf{V}}_m^{11}$ 如(12.3.11)所定义，$\lambda_1^{11},\lambda_2^{11},\ldots,\lambda_m^{11}$ 是矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_m^{11}$ 的特征根（允许有等根），则

$$\left|\lambda_k^{11}\right|<2,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{12.4.2}$$

是 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的一个充分条件．特别，当 $m=1$ 时是充要条件．

证 按递推式(12.3.10)并注意到 $\boldsymbol{H}^{0,0}(t)\equiv\boldsymbol{H}_0^{00}(t)=\boldsymbol{R}(t)$，我们有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{s,s}-\boldsymbol{M}_0^{s,s}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{s,s}-\boldsymbol{M}_0^{s,s}\end{pmatrix}=\frac{s!}{(2s-1)!!}(\overline{\mathbf{V}}_m^{11})^s\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_m-\boldsymbol{R}_0\end{pmatrix}. \tag{12.4.3}$$

今设 $\overline{\mathbf{V}}_m^{11}=\mathbf{Q}_m^{11}\mathbf{J}_m^{11}(\mathbf{Q}_m^{11})^{-1}$，这里 $\mathbf{J}_m^{11}$ 是矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_m^{11}$ 的 Jordan 标准形[4,5]，而 $\mathbf{Q}_m^{11}$ 是 $m\times m$ 阶可逆阵．利用 Stirling[6]公式可知

$$s!/(2s-1)!!=2^s s!^2/(2s)!=O\left(\sqrt{s}/2^s\right). \tag{12.4.4}$$

因为

$$\lim_{s\to\infty}2^{-s}\sqrt{s}\left(\mathbf{J}_m^{11}\right)^s=\mathbf{0} \tag{12.4.5}$$

当且仅当 $\left|\lambda_k^{11}\right|<2,k=1,2,\ldots,m,$ 依据(12.4.2)得证充分性成立．

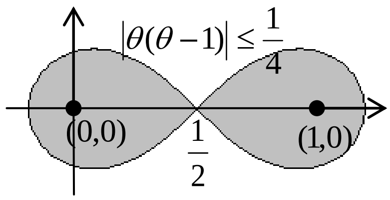


图 12.4.1 定理 12.4.2 中的发散区域

对于 $m=1$ 的情况，$\overline{\mathbf{V}}_m^{11}$ 的特征根是 $\lambda_1^{11}=\left(2-g_0-g_0^{-1}\right)/2$，而 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 逼近的余项是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{s,s}(t)&=B_{s-1}^{2s-2}(t)B_1^2(t)(\omega_1-\omega_0)\left(\boldsymbol{M}_1^{s-1,s-1}-\boldsymbol{M}_0^{s-1,s-1}\right)/\left(2\omega(t)\right)\\&=B_{s-1}^{2s-2}(t)B_1^2(t)\left(\lambda_1^{11}\right)^{s-1}\left((s-1)!/(2s-3)!!\right)(\omega_1-\omega_0)(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_0)/\left(2\omega(t)\right).\end{aligned} \tag{12.4.6}$$

今假定 $\left(\omega_1-\omega_0\right)\left(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_0\right)\ne\mathbf{0}$，这意味着 $\boldsymbol{R}(t)$ 是真正的一次有理曲线，注意到(12.4.4)和

$$\operatorname*{Max}_{0\le t\le1}B_{s-1}^{2s-2}(t)=\binom{2s-2}{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2s-2}=O\left(\left(\sqrt{s}\right)^{-1}\right), \tag{12.4.7}$$

就可推知 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 当且仅当 $\left|\lambda_1^{11}\right|<2$．同理可证 $\left|\lambda_1^{11}\right|<2$ 也是 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的必要条件．证毕．

把 $m=1$ 时对收敛性态分析的结果和传统的逼近论技术相结合，可得到更有趣的结果．

定理 12.4.2 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$，当且仅当多项式 $\omega(t)$ 的所有的根 θ_k 均满足

$$\left|\theta_k(1-\theta_k)\right|>1/4\,. \tag{12.4.8}$$

换言之，所有的根均位于区域 $D=\left\{\theta\,\middle|\,\left|\theta(1-\theta)\right|\le1/4\right\}$ 之外(见图 12.4.1).

证 当 $m=1$，$\theta_0=\omega_0/(\omega_0-\omega_1)$，$\overline{\mathbf{V}}_1^{11}=1/\left(2\theta_0(1-\theta_0)\right)$，由定理 12.4.1 知(12.4.8)成立.

对于 $m>1$ 之情况，把 $\boldsymbol{R}(t)$ 写作(12.1.7)的形式，若 $\omega(t)$ 的根均是单重根，由(12.4.6)，知 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 逼近的余项是

$$\boldsymbol{R}(t)-\boldsymbol{h}^{s,s}(t)=\sum_k B_{s-1}^{2s-2}(t)B_1^2(t)\left((s-1)!/(2s-3)!!\right)\boldsymbol{a}_k\left(2\theta_k(1-\theta_k)\right)^{1-s}/\omega_k(t).$$

由此可知 $\boldsymbol{h}^{s,s}(t)\to\boldsymbol{R}(t)$ 当且仅当(12.4.8)成立．若 $\omega(t)$ 的根含有一些重根，证明可由计算误

差项并作估计而得到．证毕.

设图 12.1.2 中的阴影区域为 D_0，易见 $D\subset D_0$，因而条件(12.4.8)优于从传统方法得到的定理 12.1.2 中的条件(12.1.8).

12.5 低次 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 逼近的收敛准则

12.5.1 一次有理曲线多项式逼近收敛的充要条件

在 CAGD 中最常用到的有理 Bézier 曲线是次数 $m=1,2,3$．对 $m=1$ 的情形，由上节可知，$\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的充要条件是

$$3-2\sqrt{2}<\omega_1/\omega_0<3+2\sqrt{2}. \tag{12.5.1}$$

而按 § 12.1.2 的结果，收敛的充分条件是

$$1/3<\omega_1/\omega_0<3. \tag{12.5.2}$$

显然后者限制过多．为考察 $m=2,3$ 时的实用收敛准则，需要一系列引理.

12.5.2 关于多项式根的几个引理

引理 12.5.1. 多项式 $f(t)$ 所有的根满足 $|t|<c\ (c>0)$ 当且仅当多项式 $(1+u)^d\ f\left(\dfrac{1-u}{1+u}c\right)$ 的所有根的实部为正，这里 d 是 $f(t)$ 的次数.

证 $f(t)$ 的根满足 $|t|<c$ 等价于 $f(c)$ 的根满足 $|t|<1$．注意到分式线性变换 $u=(1-t)/(1+t)$ 或 $t=(1-u)/(1+u)$ 把单位圆的内部(外部)映射到正(负)的半复平面，引理显然成立.

引理 12.5.2 多项式

$$p_d(u)=\sum_{i=0}^{d}p_{di}u^i,\quad p_{dd}>0,\quad d=1,2,3$$

的所有的根的实部为正的充要条件是

- $d=1,2;\ (-1)^{d-i}p_{di}>0,\quad 0\le i\le d-1;$
- $d=3;\ (-1)^{3-i}p_{3i}>0,\ \ i=0,1,2,$ 且 $p_{30}p_{33}-p_{31}p_{32}>0.$

证 仅证 $d=3$ 的情形．设 u_1,u_2,u_3 为 $p_3(u)$ 的三个根，再设 $U_1=u_1+u_2+u_3$，$U_2=u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1$，$U_3=u_1u_2u_3$，$U_4=(u_1+u_2)(u_2+u_3)(u_3+u_1)$. 我们断言 $\mathrm{Re}(u_i)>0(i=1,2,3)$ 的充要条件是 $U_i>0(i=1,2,3,4)$．下面仅证充分性.

若 $p_3(u)$ 的根均为实数，由 $U_i>0(i=1,2,3,4)$ 易知 $u_i>0$；若存在一对复根，设其是 $u_1=a+bi,\quad u_2=a-bi,\quad u_3=c$，则 $U_1=2a+c,\quad U_2=a^2+b^2+2ac,\quad U_3=(a^2+b^2)c,\quad U_4=2a((a+c)^2+b^2)$. 由 $U_i>0(i=1,2,3,4)$，我们得到 $a>0$ 和 $c>0$，充分性得证.

最后，因[7] $p_{3i}=(-1)^{3-i}U_{3-i}p_{33}(i=0,1,2)$，$U_4=U_1U_2-U_3$，引理就被确证.

引理 12.5.3 假设 $u_{di}(i=1,2,\dots,d)$ 是多项式

$$p_d(u)=\sum_{i=0}^{d}p_{di}u^i,\quad p_{dd}=1,\quad d=1,2,3$$

的根，则 $|u_{di}|<2(i=1,2,\dots,d)$ 当且仅当

- $d=1,\quad |p_{10}|<2;$
- $d=2,\ |p_{20}|<4,\ |2p_{21}|<p_{20}+4;$
- $d=3,\ -4<p_{31}<12,\quad |p_{30}+4p_{32}|<2p_{31}+8,$
  $|3p_{30}-4p_{32}|<24-2p_{31},\quad (4p_{32}-p_{30})p_{30}>16(p_{31}-4).$

证 由引理 12.5.1, $|u_{di}|<2(i=1,2,\ldots,d)$ 当且仅当 $h_d(u)=\sum_{i=0}^{d}2^i p_{di}(1-u)^i(1+u)^{d-i}$ 的所有的根的实部为正．按引理 12.5.2, 本引理得证.

12.5.3 二次有理曲线多项式逼近的收敛准则

定理 12.5.1 设 $\boldsymbol{R}(t)$ 是二次有理 Bézier 曲线，如(12.1.1)所定义，记

$$\xi=\omega_1/\omega_0,\qquad \eta=\omega_1/\omega_2, \tag{12.5.3}$$

则 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 与 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的充分条件是

$$\left|(1-\xi)(1-\eta)+(\xi-\eta)^2\big/(4\xi\eta)\right|<4, \tag{12.5.4}$$

$$\left|2(\xi+\eta-2)\right|<4+(1-\xi)(1-\eta)+(\xi-\eta)^2\big/(4\xi\eta); \tag{12.5.5}$$

换言之，充分条件是在 (ξ,η) 平面上，$(\xi,\eta)\in\Omega$ (见图 12.5.1).

证 因为

$$\overline{\mathbf{V}}_2^{11}=\begin{pmatrix}1-\xi & \left(\eta^{-1}-\xi^{-1}\right)/4\\ \eta-\xi & 1-\eta\end{pmatrix},$$

与它相对应的特征方程可写为 $|\lambda\mathbf{I}-\overline{\mathbf{V}}_2^{11}|=\lambda^2-v\lambda+e=0$, 这里

$$v=2-\xi-\eta,$$

$$e=(1-\xi)(1-\eta)+(\xi-\eta)^2\big/(4\xi\eta).$$

由引理 12.5.3 知本定理成立．证毕.

回顾定理 12.1.2 中所得的收敛条件等价于 $(\xi,\eta)\in\Omega_0$ (图中阴影区域), 因 $\Omega_0\subset\Omega$，我们看到新条件优于旧条件.

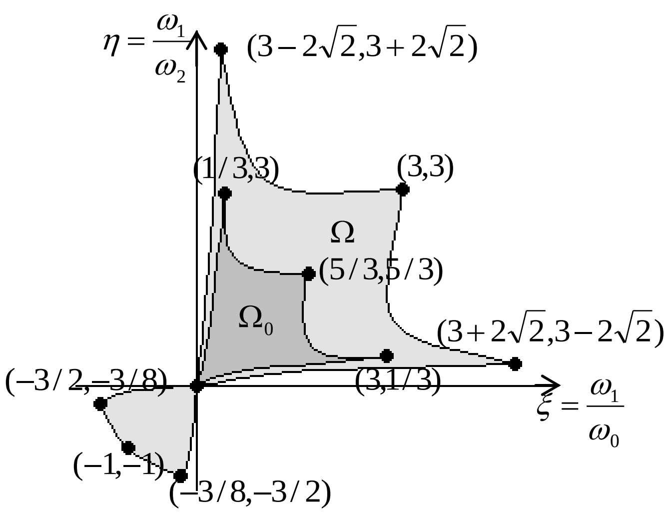


图 12.5.1 二次有理曲线的收敛区域

12.5.4 三次有理曲线多项式逼近的收敛准则

定理 12.5.2 设 $\boldsymbol{R}(t)$ 是三次有理 Bézier 曲线，如(12.1.1)所定义，假设

$$\begin{cases}a=(-6\omega_0\omega_3+3\omega_0\omega_2+3\omega_1\omega_3)/(2\omega_0\omega_3),\\ b=(9\omega_0\omega_3-12\omega_0\omega_2+3\omega_1\omega_0-12\omega_1\omega_3+9\omega_1\omega_2+3\omega_2\omega_3)/(4\omega_0\omega_3),\\ c=(-6\omega_2\omega_3+6\omega_1\omega_3-18\omega_1\omega_2-2\omega_0\omega_3+6\omega_0\omega_2+9\omega_1^2\\ \qquad +\omega_0^2+9\omega_2^2+\omega_3^2-6\omega_1\omega_0)/(8\omega_0\omega_3),\end{cases} \tag{12.5.6}$$

则 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 与 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$ 的充分条件是

$$-4<b<12,\ 16(4-b)>(c-4a)c,\ |4a+c|<2b+8,\ |4a-3c|<24-2b. \tag{12.5.7}$$

证 容易算得矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_3^{11}$ 的特征方程是

$$|\lambda\mathbf{I}-\overline{\mathbf{V}}_3^{11}|=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0, \tag{12.5.8}$$

由引理 12.5.3，本定理得证.

例 12.5.1 设 $(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(1,2,3,2)$，可算得 $(a,b,c)=(9/4,3/2,1/4)$．由于满足(12.5.7), 所以相应的逼近收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$.

12.5.5 重新参数化技术对收敛条件的影响

当一条有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 的权因子不满足多项式逼近的收敛条件，亦即相应矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_m^{ij}$ 的特征根的模越出某个界时，我们还可对曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 设置新的参数，而使相应的多项式逼近的收敛性态有可能得到改善．例如，对任何一次有理曲线，我们总可以重新参数化使之对应的多

项式逼近恒为收敛．对于二次有理曲线，我们可得出

定理 12.5.3 设 $\boldsymbol{R}(t)$ 是二次有理 Bézier 曲线(12.1.1)，假定 ξ,η,Ω 如定理 12.5.1 所定义，$(\xi,\eta)\notin\Omega$ 但 $\xi\eta=\omega_1^2\big/(\omega_0\omega_2)<9$，则 $\boldsymbol{R}(t)$ 能被重新参数化使得逼近 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$．

证 显然，存在一点 $(\xi_0,\eta_0)\in\Omega$，使得 $\xi_0\eta_0=\omega_1^2\big/(\omega_0\omega_2)<9$．现在作线性参数变换(3.2.10)，取其中 $a=\eta,b=\eta_0$，则曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 变成以 $(\eta_0,\xi_0\eta_0,\xi_0)$ 为权因子的二次有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}^*(u)$．由于 $(\xi_0,\eta_0)\in\Omega$，按定理 12.5.1，$\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 逼近和 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 逼近均收敛到 $\boldsymbol{R}^*(u)$．证毕．

例 12.5.2 设 $(\omega_0,\omega_1,\omega_2)=(7,14,4)$，则 $(\xi,\eta)=\left(2,7/2\right)\notin\Omega$，但 $\xi\eta=7<9$．今取点 $(\xi_0,\eta_0)=(\sqrt{7},\sqrt{7})\in\Omega\cap\{(\xi,\eta)\mid\xi\eta<9\}$，且施行参数变换 $t=\sqrt{7}u\big/[2(1-u)+\sqrt{7}u]$，则以 u 为参数的形状不变的新曲线 $\boldsymbol{R}^*(u)$ 具有收敛的多项式逼近 $\boldsymbol{h}\langle s,s\rangle$ 和 $\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$．

12.6 $\boldsymbol{h}\langle s,0\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle s,0\rangle$ 逼近的收敛条件

仿照§12.4 的讨论，由算法 12.3.1(或 12.3.2)我们能得出 $\boldsymbol{H}\langle s,0\rangle$ (或 $\boldsymbol{H}\langle 0,s\rangle$)逼近的收敛条件，由算法 12.3.4 我们能得出 $\boldsymbol{h}\langle s,0\rangle$ (或 $\boldsymbol{h}\langle 0,s\rangle$)逼近的收敛条件．由于这时多项式逼近曲线仅在一个端点与 $\boldsymbol{R}(t)$ 保持各阶导矢相等，所以可称之为 Taylor 逼近．

定理 12.6.1． 设 $\lambda_k^{ij}(k=1,2,\ldots,m)$ 是如(12.3.5)和(12.3.9)矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_m^{ij}$ 的特征根，$ij=10,01$；若 $\left|\lambda_k^{10}\right|<1\left(\left|\lambda_k^{01}\right|<1\right), k=1,2,\ldots,m,$ 则 $\boldsymbol{h}^{s,0}(t)\left(\boldsymbol{h}^{0,s}(t)\right)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{s,0}(t)\left(\tilde{\boldsymbol{H}}^{0,s}(t)\right)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$．

对于 $m=1,2,3$ 的低次情形，我们也可以给出相应的收敛准则．

12.7 (r/p) 有定极限值的 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的收敛条件

$r=p=s$ 和 $r=0$ (或 $p=0$)的情况能被推广到一般情况，$\lim\limits_{p\to\infty}(r/p)=\alpha\geq 0$．为方便起见，仅考察 $\alpha=2$ 的情形．首先仿§12.3 的处理，得到移动控制顶点的控制顶点递推式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{a+2s,s}-\boldsymbol{M}_0^{a+2s,s}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{a+2s,s}-\boldsymbol{M}_0^{a+2s,s}\end{pmatrix}=\frac{(a+2s)!\,s!3^s}{(a+3s)!}\left(\overline{\mathbf{V}}_m^{21}\right)^s\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{a,0}-\boldsymbol{M}_0^{a,0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{a,0}-\boldsymbol{M}_0^{a,0}\end{pmatrix},\quad a,s=0,1,\ldots,\tag{12.7.1}$$

这里

$$\overline{\mathbf{V}}_m^{21}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3-g_0(3-g_0+g_1) & g_1(3-g_0) & g_1g_2 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{g_0}\\ \frac{1}{g_1}-g_0(3-g_0+g_2) & 3-g_0g_1 & 3g_2 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{g_1}\\ -g_0(3-g_0+g_3) & \frac{1}{g_2}-g_0g_1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{g_2}\\ -g_0(3-g_0+g_4) & -g_0g_1 & \frac{1}{g_3} & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{g_3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -g_0(3-g_0+g_{m-3}) & -g_0g_1 & 0 & \cdots & 3g_{m-3} & g_{m-3}g_{m-2} & -\frac{1}{g_{m-4}}\\ -g_0(3-g_0+g_{m-2}) & -g_0g_1 & 0 & \cdots & 3 & 3g_{m-2} & g_{m-2}g_{m-1}-\frac{1}{g_{m-3}}\\ -g_0(3-g_0+g_{m-1}) & -g_0g_1 & 0 & \cdots & \frac{1}{g_{m-2}} & 3 & 3g_{m-1}-\frac{1}{g_{m-2}}\\ -g_0(3-g_0) & -g_0g_1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{g_{m-1}} & 3-\frac{1}{g_{m-1}}\end{pmatrix}.\tag{12.7.2}$$

应用定理 12.2.1 和 12.2.2，注意到当 $s\to+\infty$ 时，

$$(a+2s)!\,s!/(a+3s)!\sim\left(2^{a+1}\big/3^{a+1/2}\right)\left(\sqrt{\pi s}\,2^{2s}\big/3^{3s}\right),$$

我们就得到

定理 12.7.1 假设 $\lambda_k^{21}(k=1,2,\ldots,m)$ 是矩阵 $\overline{\mathbf{V}}_m^{21}$ 的特征根，若

$$\left|\lambda_k^{21}\right| < 9/4, \qquad k=1,2,\ldots,m, \tag{12.7.3}$$

则 $\boldsymbol{h}\langle a+2s,s\rangle$ 逼近和 $\boldsymbol{H}\langle a+2s,s\rangle$ 逼近在 $[0,1]$ 上同时一致收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$.

12.8 Hybrid 曲线的移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的界

为了从数量上控制 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近的误差范围，我们必须知道 Hybrid 曲线的移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的收敛速度．也就是说，若要求 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的控制顶点的凸包体积小于给定的逼近公差 ε，如何去决定 Hybrid 曲线的次数 $r+p$？本节给出解决这一问题的三个有效方法，其基本思想是先把有理 Bézier 曲线(12.1.1)表成三种形式的Hybrid 曲线，再应用定理12.1.1 得到 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$，进而对它进行界的估计.

为了度量 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的控制顶点的凸包体积，我们先有[8]

定义 12.8.1 对于给定的点集 S，能覆盖 S 中全部点的所有圆中具有最小半径的那个圆称为点集 S 的最小圆；此最小半径称为 S 的半径，并记为 $rad(S)$，最小圆的中心记为点 $\boldsymbol{O}$.

记点集

$$\boldsymbol{R}[m]=(\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_m)^{\mathrm{T}}, \tag{12.8.1}$$

$$\boldsymbol{M}^{r,p}[m]=(\boldsymbol{M}_0^{r,p},\boldsymbol{M}_1^{r,p},\ldots,\boldsymbol{M}_m^{r,p})^{\mathrm{T}}, \tag{12.8.2}$$

则易知

$$rad(\boldsymbol{R}[m])=\underset{\text{对所有点}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{Min}}\left(\underset{0\le k\le m}{\mathrm{Max}}\left\|\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{Q}\right\|\right). \tag{12.8.3}$$

类似地可写出 $rad(\boldsymbol{M}^{r,p}[m])$，并由(12.2.6)得出

引理 12.8.1 若把点集 $\left\{\boldsymbol{M}_k^{r,p}\right\}_{k=0}^m$ 的最小圆的中心 $\boldsymbol{O}$ 取为固定控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}$，相应的 H 逼近的绝对误差记为 $ER^{r,p}[m](t)$，则有

$$\left\|\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{O}\right\|\le rad(\boldsymbol{M}^{r,p}[m]), \quad k=0,1,\ldots,m, \tag{12.8.4}$$

$$ER^{r,p}[m](t)=\left\|\boldsymbol{R}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)\right\|\le B_r^{r+p}(t)\cdot rad(\boldsymbol{M}^{r,p}[m]). \tag{12.8.5}$$

12.8.1 对具有对称权因子的低次有理曲线求 $\boldsymbol{H}_s^{s,s}(t)$ 的界

定理 12.8.1 对有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$，若

$$m=2,3, \tag{12.8.6}$$

$$\omega_k=\omega_{m-k}, \quad k=0,1,\ldots,m, \tag{12.8.7}$$

则

$$rad(\boldsymbol{M}^{s,s}[m])=\left(\left(m|1-w|\right)^{s-\delta}\Big/\binom{2s}{s}\right)K, \quad s>m, \tag{12.8.8}$$

$$ER^{s,s}[m](t)\le 4^{-\delta}\left(m|1-w|/4\right)^{s-\delta}K, \tag{12.8.9}$$

这里

$$w=\omega_1/\omega_0, \tag{12.8.10}$$

$$\delta=\begin{cases}0, & m=2,\\ 2, & m=3,\end{cases} \qquad K=\begin{cases}rad(\boldsymbol{R}[2]), & m=2,\\ 6rad(\boldsymbol{M}^{2,2}[3]), & m=3.\end{cases} \tag{12.8.11}$$

证 不失一般性，可以假定 $\omega_0=\omega_m=1$，这时有

$$\omega(t)=1-A(t)=1-m(1-w)(1-t)t, \quad m=2,3.$$

由此得到

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{\boldsymbol{P}(t)}{\omega(t)}=\frac{\boldsymbol{P}(t)}{\omega(t)}\left[1-\left(A(t)\right)^s\right]+\frac{\boldsymbol{P}(t)}{\omega(t)}\left(A(t)\right)^s=\boldsymbol{P}(t)\sum_{i=0}^{s-1}\left(A(t)\right)^i+\boldsymbol{R}(t)\left(A(t)\right)^s. \quad (12.8.12)$$

当 $m=3$ 时，在上式右端置 s 为 $s-2$，置 $\boldsymbol{R}(t)$ 为一条 $2+2$ 次 Hybrid 曲线，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(t)&=\boldsymbol{P}(t)\sum_{i=0}^{s-3}\left(A(t)\right)^i+\left[\sum_{i=0,i\neq 2}^{4}B_i^4(t)\boldsymbol{H}_i^{2,2}\right]\left(A(t)\right)^{s-2}+B_2^4(t)\boldsymbol{H}_2^{2,2}(t)\left(A(t)\right)^{s-2}\\&=\boldsymbol{P}^{2s}(t)+B_s^{2s}(t)\boldsymbol{H}_2^{2,2}(t)6\left(m(1-w)\right)^{s-2}\Big/\binom{2s}{s},\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{P}^{2s}(t)$ 表示次数为 $2s$ 的 t 的多项式；同样，当 $m=2$ 时由(12.8.12)得到

$$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{P}^{2s}(t)+B_s^{2s}(t)\boldsymbol{R}(t)\left(m(1-w)\right)^s\Big/\binom{2s}{s}.$$

从 $\boldsymbol{P}^{2s}(t)$ 中分离出一项 $(1-t)^s t^s\boldsymbol{Q}$，根据定理 12.1.1，由以上两式推知

$$\binom{2s}{s}\boldsymbol{M}_k^{s,s}=\begin{cases}\left(m(1-w)\right)^s\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{Q}, & m=2;\quad k=0,1,2;\\ 6\left(m(1-w)\right)^{s-2}\boldsymbol{M}_k^{2,2}+\boldsymbol{Q}, & m=3;\quad k=0,1,2,3.\end{cases}$$

这样就证明了(12.8.8)．再利用不等式 $\sqrt{(2i-2)(2i)}\le 2i-1,\ \ \sqrt{(2i-1)(2i+1)}\le 2i$，可得

$$\frac{2^{2s}}{2\sqrt{s}}\le\binom{2s}{s}\le\frac{2^{2s}}{\sqrt{2s}}, \quad (12.8.13)$$

应用上式和(12.8.5)，最后就可推出(12.8.9)． 证毕.

推论 12.8.1 对于如定理 12.8.1 所定义的有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$，$\boldsymbol{H}\langle s,s\rangle$ 收敛的充要条件是

$$m|1-w|<4; \quad (12.8.14)$$

相应于此收敛条件，若给定移动控制顶点 $\left\{\boldsymbol{H}_s^{s,s}(t)(0\le t\le 1)\right\}$ 的最小圆半径的界为 ε_1，又给定曲线逼近的绝对误差 $ER^{s,s}[m](t)(0\le t\le 1)$ 的界为 ε_2，则必可对曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 求得以 $\left\{\boldsymbol{M}_k^{s,s}\right\}_{k=0}^m$ 的最小圆中心为固定控制顶点 $\boldsymbol{H}_s^{s,s}$ 的 $2s$ 次的 H 逼近曲线 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 满足这两个条件，这里 s 之值可由求解下列两个不等式来分别得到:

$$\left(2\sqrt{s}/4^{\delta}\right)\left(m|1-w|/4\right)^{s-\delta}K<\varepsilon_1,\qquad 4^{-\delta}\left(m|1-w|/4\right)^{s-\delta}K<\varepsilon_2. \quad (12.8.15)$$

例 12.8.1 设 $\boldsymbol{R}(t)$ 为单位半圆，令 $m=3,\ (\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(1,1/3,1/3,1)$，$(\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{R}_3)=((-1,0),(-1,2),(1,2),(1,0))$，容易求得

$$\left(\boldsymbol{M}_0^{2,2},\boldsymbol{M}_1^{2,2},\boldsymbol{M}_2^{2,2},\boldsymbol{M}_3^{2,2}\right)=\left((-2/3,4/3),(-2/3,3),(-2/3,3),(2/3,4/3)\right),$$

由此得 $rad\left(\boldsymbol{M}^{2,2}[3]\right)=\sqrt{41}/6$，因而有

$$rad\left(\boldsymbol{M}^{s,s}[3]\right)=2^{s-2}\sqrt{41}\Big/\binom{2s}{s}<\sqrt{41s}/2^{s+1},\quad ER^{s,s}[3](t)\le\sqrt{41}/2^{s+2}.$$

12.8.2 利用矩阵方法对一般有理曲线求 $\boldsymbol{H}_s^{s,s}(t)$ 的界

上一小节的方法要求 $\boldsymbol{R}(t)$ 的权因子对称，这在 $m=2$ 时应用性质 3.2.10 总能办到，但当 $m\ge 3$ 就未必了．这时可用矩阵方法求移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_s^{s,s}(t)$ 的界．以 $m=3$ 为例，先定义

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1-3\omega_1/\omega_0 & 3\omega_1/\omega_0 & 0 & -1\\ (\omega_0-3\omega_2)/(3\omega_1)-1 & 2 & \omega_2/\omega_1 & -\omega_0/(3\omega_1)-1\\ -\omega_3/(3\omega_2)-1 & \omega_1/\omega_2 & 2 & (\omega_3-3\omega_1)/(3\omega_2)-1\\ -1 & 0 & 3\omega_2/\omega_3 & 1-3\omega_2/\omega_3\end{pmatrix}. \quad (12.8.16)$$

再假设 $\mathbf{H}$ 的 Jordan 标准形是 $\mathbf{J}$，转换阵是 $\mathbf{T}$ [4,5,9]，即有 $\mathbf{H}=\mathbf{TJT}^{-1}$．于是我们有

定理 12.8.2 对三次有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$，

$$rad\left(\boldsymbol{M}^{s,s}[3]\right)=rad\left(\mathbf{TJ}^{s}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{R}[3]\right)\Big/\binom{2s}{s},\tag{12.8.17}$$

$$ER^{s,s}[3](t)\le rad\left(\mathbf{TJ}^{s}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{R}[3]\right)\big/4^{s}.\tag{12.8.18}$$

证　任意一条有理 Bézier 曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 均可表为

$$\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{R}_k\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k=\left((1-t)\boldsymbol{R}_0+t\boldsymbol{R}_m\right)+(1-t)t\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\overline{\boldsymbol{R}}_k\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k,\tag{12.8.19}$$

这里

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{R}}_k&=\left(-1-\frac{m-k}{k+1}\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right)\boldsymbol{R}_0+\frac{k}{m+1-k}\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k}\boldsymbol{R}_{k-1}+2\boldsymbol{R}_k\\&\quad+\frac{m-k}{k+1}\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\boldsymbol{R}_{k+1}+\left(-1-\frac{k}{m+1-k}\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k}\right)\boldsymbol{R}_m,\qquad k=0,1,\ldots,m.\end{aligned}$$

为方便起见，其中令 $k<0$ 或 $k>m$ 时 $\boldsymbol{R}_k=\mathbf{0},\omega_k=0$. 上述过程可递归地进行．为此假设

$$\boldsymbol{N}_k^0=\boldsymbol{R}_k,\qquad k=0,1,\ldots,m,\tag{12.8.20}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_k^{2s}&=\left(-1-\frac{m-k}{k+1}\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right)\boldsymbol{N}_0^{2(s-1)}+\frac{k}{m+1-k}\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k}\boldsymbol{N}_{k-1}^{2(s-1)}+2\boldsymbol{N}_k^{2(s-1)}\\&\quad+\frac{m-k}{k+1}\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\boldsymbol{N}_{k+1}^{2(s-1)}+\left(-1-\frac{k}{m+1-k}\frac{\omega_{k-1}}{\omega_k}\right)\boldsymbol{N}_m^{2(s-1)},\quad s\ge 1,\quad k=0,1,\ldots,m.\end{aligned}\tag{12.8.21}$$

对 $k<0$ 或 $k>m$，$l\ge 0$ 规定 $\boldsymbol{N}_k^{2l}=\mathbf{0},\omega_k=0$.　容易得到

$$\frac{\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{N}_k^{2(s-1)}}{\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k}=\left((1-t)\boldsymbol{N}_0^{2(s-1)}+t\boldsymbol{N}_m^{2(s-1)}\right)+(1-t)t\frac{\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{N}_k^{2s}}{\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k}.$$

把(12.8.19)递归地执行 s 次，我们可把曲线 $\boldsymbol{R}(t)$ 表成

$$\boldsymbol{R}(t)=\sum_{i=0}^{s-1}(1-t)^it^i\left((1-t)\boldsymbol{N}_0^{2i}+t\boldsymbol{N}_m^{2i}\right)+(1-t)^st^s\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{N}_k^{2s}\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k,$$

把上式的多项式部分升阶后分离出一项 $(1-t)^st^s\boldsymbol{Q}$，它可视作一条 $2s$ 次的 Hybrid 曲线，由定理 12.1.1 立刻可推出

$$\boldsymbol{M}_k^{s,s}=\boldsymbol{N}_k^{2s}\Big/\binom{2s}{s}+\boldsymbol{Q},\qquad k=0,1,2,3.$$

今假设 $\boldsymbol{N}^{2i}=\left(\boldsymbol{N}_0^{2i},\boldsymbol{N}_1^{2i},\boldsymbol{N}_2^{2i},\boldsymbol{N}_3^{2i}\right)^{\mathrm{T}},i=0,1,\ldots,s.$ 对(12.8.20)和(12.8.21)化简，我们有

$$\boldsymbol{N}^{2s}=\mathbf{H}\boldsymbol{N}^{2(s-1)}=\mathbf{H}^2\boldsymbol{N}^{2(s-2)}=\cdots=\mathbf{H}^s\boldsymbol{N}^0=\mathbf{TJ}^s\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{R}[3],\tag{12.8.22}$$

因而

$$rad\left(\boldsymbol{M}^{s,s}[3]\right)=rad\left(\boldsymbol{N}^{2s}[3]\right)\Big/\binom{2s}{s}=rad\left(\mathbf{TJ}^s\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{R}[3]\right)\Big/\binom{2s}{s}.$$

由此，应用(12.8.5)又可得(12.8.18).　证毕.

以上定理虽对 $m=3$ 给出，但对任何曲线次数均是适用的，相应的矩阵 $\mathbf{H}$ 可由(12.8.21), (12.8.22)写出.

现在把点集 $\boldsymbol{R}[m]$ 的最小圆中心记为 $\boldsymbol{O}$，则 $\left\|\boldsymbol{R}_l-\boldsymbol{O}\right\|\le rad\left(\boldsymbol{R}[m]\right),\quad l=0,1,\ldots,m.$ 若 $(m+1)\times(m+1)$ 阶矩阵 $\mathbf{B}_{m+1}=(b_{ij})$ 每行元素之和为0，即 $\sum_{l=1}^{m+1}b_{kl}=0,k=1,2,\ldots,m+1,$ 则有

$$\begin{aligned} rad\left(B_{m+1}\boldsymbol{R}[m]\right) &\le \underset{1\le k\le m+1}{\mathrm{Max}}\left\|\sum_{l=1}^{m+1} b_{kl}\boldsymbol{R}_{l-1} - \boldsymbol{O}\sum_{l=1}^{m+1} b_{kl}\right\| \\ &\le \underset{1\le k\le m+1}{\mathrm{Max}}\sum_{l=1}^{m+1}\left|b_{kl}\right|\cdot\left\|\boldsymbol{R}_{l-1}-\boldsymbol{O}\right\| \le \left\|\mathbf{B}_{m+1}\right\|_\infty rad(\boldsymbol{R}[m]). \end{aligned} \tag{12.8.23}$$

这里矩阵 B_{m+1} 的无穷范数[9]定义为

$$\left\|\mathbf{B}_{m+1}\right\|_\infty = \underset{1\le k\le m+1}{\mathrm{Max}}\left(\sum_{l=1}^{m+1}\left|b_{kl}\right|\right). \tag{12.8.24}$$

易知矩阵 $\mathbf{H}^i\,(i=1,2,\ldots,s)$ 满足上述矩阵 $\mathbf{B}_{m+1}$ 的条件，于是按定理 12.8.2 和(12.8.13)得出

推论 12.8.2

$$rad\left(\boldsymbol{M}^{s,s}[3]\right) < \left(2\sqrt{s}/4^s\right)\left\|\mathbf{TJ}^s\mathbf{T}^{-1}\right\|_\infty rad\left(\boldsymbol{R}[3]\right), \tag{12.8.25}$$

$$ER^{s,s}[3](t) \le 4^{-s}\left\|\mathbf{TJ}^s\mathbf{T}^{-1}\right\|_\infty rad\left(\boldsymbol{R}[3]\right). \tag{12.8.26}$$

推论 12.8.3 若矩阵 $\mathbf{H}$ 的所有特征根的绝对值均小于 4，ε_1 和 ε_2 如推论 12.8.1 中所定义，则必可对 $\boldsymbol{R}(t)$ 求得以 $\boldsymbol{M}^{s,s}[3]$ 的最小圆中心为固定控制顶点 $\boldsymbol{H}_s^{s,s}$ 的 $2s$ 次的 H 逼近曲线 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s}(t)$ 满足误差界条件 ε_1 和 ε_2，这里 s 之值可由求解(12.8.25)与(12.8.26)两式右端之值分别小于 ε_1 与 ε_2 的不等式来得到.

例 12.8.2. 设 $m=3$，$(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(1,1.2,1.6,1)$，$(\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{R}_3)=\left((-1,-1),(-1,1),(1,1),(1,-1)\right)$，容易求得矩阵 $\mathbf{H}$，$\mathbf{T}=(t_{kl})$，$\mathbf{J}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ 和 $\mathbf{T}^{-1}=(\tilde{t}_{kl})$ 分别是

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} -2.6 & 3.6 & 0 & -1 \\ -2.055 & 2 & 1.333 & -1.278 \\ -1.208 & 0.75 & 2 & -1.542 \\ -1 & 0 & 4.8 & -3.8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0.452 & -0.135+1.248i & -1.347-1.248i \\ 1 & 0.546 & -0.481+0.974i & -0.481-0.974i \\ 1 & 0.688 & -0.416+0.573i & -0.416-0.573i \\ 1 & 1.787 & -0.396+0.492i & -0.396-0.492i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}=\mathrm{diag}(0,-2.206,-0.097+0.801i,-0.097-0.801i)$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{pmatrix} -1.259+0.577i & -0.375-2.924i & 3.578+2.601i & -0.944-0.253i \\ 0.023-0.010i & 0.168+0.052i & -1.127-0.047i & 0.936+0.005i \\ -1.783+1.196i & 1.145-6.060i & 0.873+5.389i & -0.235-0.525i \\ -2.070+0.571i & 2.598-2.893i & -0.419+2.573i & -0.109-0.251i \end{pmatrix}.$$

易知当 $s\ge 3$ 时，$\left\|\mathbf{J}^s\mathbf{T}^{-1}\right\|_\infty=(\lambda_2)^s\sum_{l=1}^{4}\left|\tilde{t}_{2l}\right|$，$\left\|\mathbf{TJ}^s\right\|_\infty=(\lambda_2)^s(t_{42}+0.2)$，因而当 $s\ge 6$ 时我们有 $\left\|\mathbf{TJ}^s\mathbf{T}^{-1}\right\|_\infty\le 5(\lambda_2)^s$．不难验证以上关系式对 $s=2,3,4,5$ 亦为正确，于是应用推论 12.8.2 可知 $rad\left(\boldsymbol{M}^{s,s}[3]\right)\le 10\sqrt{2s}(0.551)^s, ER^{s,s}[3](t)\le 5\sqrt{2}(0.551)^s$.

12.8.3 利用复平面上的围道积分求 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p}$ 的界

以上两小节都是就 $r=p=s$ 的情况进行讨论的，为研究 $r\ne p$ 的情况，可应用复平面上的围道积分．今以 ξ 表示复数，i 代表 $\sqrt{-1}$，$\left|\boldsymbol{R}\right|$ 表示复向量 $\boldsymbol{R}=(x,y,z)$ 的模，即

$$\left|\boldsymbol{R}\right|^2 = x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}. \tag{12.8.27}$$

下列定理选用一个固定点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}$ 来代替移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$，使得由此而产生的误差向量的模易于估计.

定理 12.8.3 假定 C 是包含区间 $[0,1]$ 但不包含 $\omega(t)$ 的任何根的一条任意的简单闭曲线，则

$$\left\|\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p}\right\|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{(\xi-t)B_r^{r+p}(\xi)}\mathrm{d}\xi\right|, \tag{12.8.28}$$

$$ER^{r,p}[m](t)=\left\|\boldsymbol{R}(t)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)\right\|\le\frac{1}{2\pi}B_r^{r+p}(t)\left|\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{(\xi-t)B_r^{r+p}(\xi)}\mathrm{d}\xi\right|. \tag{12.8.29}$$

证 $\displaystyle\frac{1}{\xi-t}=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{\xi}\left(\frac{t}{\xi}\right)^l+\left(\frac{t}{\xi}\right)^r\frac{1}{\xi-t}$

$$=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{\xi}\left(\frac{t}{\xi}\right)^l+\left(\frac{t}{\xi}\right)^r\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{\xi-1}\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^j+\frac{1}{\xi-t}\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^p\left(\frac{t}{\xi}\right)^r.$$

上式右端前两项之和是次数小于$r+p$的关于t的多项式，这个事实等价于存在这样的$a_j(\xi)$，使得

$$\frac{1}{\xi-t}=\sum_{j=0}^{r+p}B_j^{r+p}(t)a_j(\xi)+\frac{B_r^{r+p}(t)}{B_r^{r+p}(\xi)}\frac{1}{\xi-t},\qquad\sum_{j=0}^{r+p}(-)^j\binom{r+p}{j}a_j(\xi)=0. \tag{12.8.30}$$

由 Cauchy 积分公式[10]，我们有

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi.$$

由此，利用(12.8.30)可得到

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{r+p}B_j^{r+p}(t)\left(\int_C\boldsymbol{R}(\xi)a_j(\xi)\mathrm{d}\xi\right)+\frac{1}{2\pi i}B_r^{r+p}(t)\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{(\xi-t)B_r^{r+p}(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

今从上式右端第一项里分离出和式中$j=r$的一项，它就成为相应于$\boldsymbol{R}(t)$的$r+p$次 Hybrid 曲线．从而由定理 12.1.1 立即推出

$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{(\xi-t)B_r^{r+p}(\xi)}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_C\boldsymbol{R}(\xi)a_r(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

但由(12.8.30)得出

$$\sum_{j=0}^{r+p}(-1)^j\binom{r+p}{j}\boldsymbol{H}_j^{r,p}=\boldsymbol{0},\qquad\boldsymbol{H}_j^{r,p}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\boldsymbol{R}(\xi)a_j(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因此，如果取固定的一点

$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\boldsymbol{R}(\xi)a_r(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{12.8.31}$$

来代替移动控制顶点$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$，所得到的 H 逼近曲线$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p}(t)=\sum\limits_{j=0}^{r+p}B_j^{r+p}(t)\boldsymbol{H}_j^{r,p}$的次数必小于$r+p$，而相应的误差向量为

$$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{(\xi-t)B_r^{r+p}(\xi)}\mathrm{d}\xi,$$

这样就得到(12.8.28)，再根据(12.8.5)得到(12.8.29)．证毕．

下节中我们将证明定理 12.9.1，因此，沿用那里的记号α和β，若把曲线

$$|\xi|^\alpha|1-\xi|^\beta=A\alpha^\alpha\beta^\beta,\quad A>1 \tag{12.8.32}$$

取作定理 12.8.3 中的围道C，我们立即得出

推论 12.8.4 若$\omega(t)$的根$\theta_k\,(k=1,2,\ldots,d)$满足

$$|\theta_k|^\alpha|1-\theta_k|^\beta>A\alpha^\alpha\beta^\beta,\quad A>1, \tag{12.8.33}$$

则

$$\left\|\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{H}_r^{r,p}\right\| \le e\sqrt{2\pi(r+p)}\left(\frac{1}{A}\right)^{r+p}\int_C \left|\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{\xi-t}\right| \mathrm{d}|\xi|, \tag{12.8.34}$$

$$ER^{r,p}[m](t) \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{A}\right)^{r+p}\int_C \left|\frac{\boldsymbol{R}(\xi)}{\xi-t}\right| \mathrm{d}|\xi|. \tag{12.8.35}$$

12.9 一般情况下 $\boldsymbol{h}\langle r,p\rangle$ 逼近和 $\boldsymbol{H}\langle r,p\rangle$ 逼近收敛的充要条件

设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_d$ 为(12.1.1)中分母 $\omega(t)$ 的根，θ_i 的重数为 l_i $(i=1,2,\ldots,d)$，$\sum_{i=1}^{d} l_i = m$．再在(12.1.4)中，记 $\boldsymbol{H}^{*r,p}(t)=\sum_{i=0,i\neq r}^{r+p} B_i^{r+p}(t)\boldsymbol{H}_i^{r,p}$；在(12.1.5)中记 $\boldsymbol{M}_r^{r,p}(t)=\sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k \boldsymbol{M}_k^{r,p}$．

引理 12.9.1 设 δ_{iq},δ_{hj} 为 Kronecker 符号；$L_{ij}(t)$ 为满足以下条件的 $m-1$ 次多项式:

$$\mathrm{d}^h L_{ij}(\theta_q)\big/\mathrm{d}t^h = \delta_{iq}\delta_{hj},\quad i,q=1,2,\ldots,k;\quad h,j=0,1,\ldots,l_i-1, \tag{12.9.1}$$

则有

$$\boldsymbol{M}_r^{r,p}(t)=\omega(t)\boldsymbol{M}_0^{r,p}+\frac{r+p+1}{r+1}t\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{l_i-1}L_{ij}(t)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(\frac{\boldsymbol{R}(\theta_i)}{B_{r+1}^{r+p+1}(\theta_i)}\right). \tag{12.9.2}$$

证 由

$$\boldsymbol{M}_r^{r,p}(t)-\omega(t)\boldsymbol{M}_0^{r,p}=\sum_{k=1}^{m}B_k^n(t)\omega_k(\boldsymbol{M}_k^{r,p}-\boldsymbol{M}_0^{r,p})=t\boldsymbol{A}(t), \tag{12.9.3}$$

可知 $\boldsymbol{A}(t)$ 为 $m-1$ 次的多项式曲线．将(12.9.3)代入(12.1.4)可得

$$\boldsymbol{A}(t)=\frac{r+p+1}{r+1}\left(\frac{\boldsymbol{R}(t)}{B_{r+1}^{r+p+1}(t)}-\omega(t)\frac{\boldsymbol{H}^{*r,p}(t)+B_r^{r+p}(t)\boldsymbol{M}_0^{r,p}}{B_{r+1}^{r+p+1}(t)}\right).$$

由于 θ_i 为 $\omega(t)$ 的 l_i 重根，于是

$$\frac{\mathrm{d}^j\boldsymbol{A}(\theta_i)}{\mathrm{d}t^j}=\frac{r+p+1}{r+1}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\left(\frac{\boldsymbol{R}(\theta_i)}{B_{r+1}^{r+p+1}(\theta_i)}\right),\quad i=1,2,\ldots,d;\quad j=0,1,\ldots,l_i-1.$$

由 (12.9.1), (12.9.3)和上式可得(12.9.2)． 证毕．

引理 12.9.2

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}\frac{1}{B_r^{r+p}(t)} \sim \frac{(r+p)^s}{B_r^{r+p}(t)}\left(\frac{\beta}{1-t}-\frac{\alpha}{t}\right)^s,\quad r+p\to\infty, \tag{12.9.4}$$

其中

$$\alpha=\lim_{r+p\to\infty} r/(r+p),\quad \beta=1-\alpha. \tag{12.9.5}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}\frac{1}{B_r^{r+p}(t)}&=\frac{(r+p)^s}{B_r^{r+p}(t)}\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\binom{s}{h}\frac{r(r+1)\cdots(r+h-1)}{(r+p)^h t^h}\cdot\frac{p(p+1)\cdots(p+s-h-1)}{(r+p)^{s-h}(1-t)^{s-h}}\\&\sim\frac{(r+p)^s}{B_r^{r+p}(t)}\sum_{h=0}^{s}\binom{s}{h}\left(\frac{-\alpha}{t}\right)^h\left(\frac{\beta}{1-t}\right)^{s-h},\end{aligned}$$

于是引理得证.

引理 12.9.3 对于给定的 r 和 p，若 α,β 如(12.9.5)所示，$\theta\in(0,1)$, 则存在实数 $C\in\left(\sqrt{2\pi}/e,\sqrt{2\pi}e^2\right)$使得

$$1\big/B_r^{r+p}(\theta)=C\sqrt{\alpha\beta(r+p)}\left((\alpha/\theta)^\alpha\left(\beta/(1-\theta)\right)^\beta\right)^{r+p}. \tag{12.9.6}$$

证 由 Sterling[6]公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(n/e\right)^n e^{\xi_n}$，$\xi_n\in(0,1)$，易得证.

定理 12.9.1 若α,β如(12.9.5)所示，则移动控制顶点$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$当$r+p\to\infty$时收敛到一点的充分必要条件为$\omega(t)$的所有根$\theta_i\,(i=1,2,\dots,d)$满足

$$\left|\theta_i\right|^{\alpha}\left|1-\theta_i\right|^{\beta}>\alpha^{\alpha}\beta^{\beta},\qquad i=1,2,\dots,d\,. \tag{12.9.7}$$

证 显然，当$r+p\to\infty$时$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$收敛到一点等价于

$$\left\|\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{M}_0^{r,p}\right\|\to 0,\ \text{或}\left\|\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{M}_m^{r,p}\right\|\to 0,\quad 0\le t\le 1. \tag{12.9.8}$$

记

$$\boldsymbol{Y}(i,j,s)=\binom{j}{s}\left(\frac{\beta}{1-\theta_i}-\frac{\alpha}{\theta_i}\right)^{s}\boldsymbol{R}^{(j-s)}(\theta_i). \tag{12.9.9}$$

由引理 12.9.1, 12.9.2 和 12.9.3 可知，当$r+p\to\infty$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{M}_0^{r,p}&=\frac{r+p+1}{r+1}\frac{t}{\omega(t)}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{l_i-1}L_{ij}(t)\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\left(\frac{1}{B_{r+1}^{r+p+1}(\theta_i)}\right)^{(s)}\boldsymbol{R}^{(j-s)}(\theta_i)\\&\sim\frac{t}{\alpha\omega(t)}\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{B_{r+1}^{r+p+1}(\theta_i)}\sum_{j=0}^{l_i-1}\sum_{s=0}^{j}L_{ij}(t)(r+p)^{s}\boldsymbol{Y}(i,j,s)\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{t}{\omega(t)}\sum_{i=1}^{d}C\left(\left(\frac{\alpha}{\theta_i}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\theta_i}\right)^{\beta}\right)^{r+p}\sum_{s=0}^{l_i-1}(r+p)^{s+\frac{1}{2}}\sum_{j=s}^{l_i-1}L_{ij}(t)\boldsymbol{Y}(i,j,s)\,.\end{aligned} \tag{12.9.10}$$

类似地有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)-\boldsymbol{M}_m^{r,p}\\&\sim\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{t}{\omega(t)}\sum_{i=1}^{d}C\left(\left(\frac{\alpha}{\theta_i}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\theta_i}\right)^{\beta}\right)^{r+p}\sum_{s=0}^{l_i-1}(r+p)^{s+\frac{1}{2}}\sum_{j=s}^{l_i-1}L_{ij}(t)\boldsymbol{Y}(i,j,s)\,.\end{aligned} \tag{12.9.11}$$

由(12.9.10)和(12.9.11)可知当$r+p\to\infty$时(12.9.8)成立当且仅当

$$\left|\alpha/\theta_i\right|^{\alpha}\left|\beta/(1-\theta_i)\right|^{\beta}<1,\quad i=1,2,\dots,d.$$

于是定理得证.

下面分析(12.9.7)的表现形式．易知对不同的α，条件(12.9.7)分别为:

$$4\,|\theta_i\,\|\,1-\theta_i\,|>1\ (\alpha=1/2);\quad 27\,|\theta_i\,\|\,1-\theta_i\,|^2>4\ (\alpha=1/3);$$
$$|\theta_i\,|>1\ (\alpha=1);\qquad |1-\theta_i\,|>1\ (\alpha=0)\,.$$

区域(12.9.7)的边界曲线在复平面上为

$$\left|\theta\right|^{\alpha}\left|1-\theta\right|^{\beta}=\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}, \tag{12.9.12}$$

其中θ为复变量．当$\alpha=1/2$，边界曲线为双纽线(见图 12.4.1)．当$\alpha=1/4$，边界曲线所围阴影区域见图 12.9.1．如果$\omega(t)$的任一根落在阴影区域，则移动控制顶点将发散.

若将t看作复变量，由围道积分也可以得到定理 12.9.1.

显然对一条曲线而言，其移动控制顶点$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$对某些$\alpha$可能收敛，对其它$\alpha$可能发散.

定理 12.9.2 当$r+p\to\infty$，将有下面三种情况之一成立:

- 对任何$\alpha\in[0,1]$，$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$都收敛到一点当且仅当

$$|\theta_i\,|>1\ \text{ 且 }\ |1-\theta_i\,|>1,\quad i=1,2,\dots,d;$$

- 对任何$\alpha\in[0,1]$，$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$都发散当且仅当$\omega(t)$至少存在两个根$\theta_i,\theta_j$和一个$\alpha\in(0,1)$满足

$$\left|\theta_i\right|^{\alpha}\left|1-\theta_i\right|^{\beta}<\alpha^{\alpha}\beta^{\beta},\qquad\left|\theta_j\right|^{\alpha}\left|1-\theta_j\right|^{\beta}<\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}, \tag{12.9.13}$$

$$\text{Re}(\theta_i) < \alpha < \text{Re}(\theta_j); \tag{12.9.14}$$

• 对其它情形，$\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 对于某些 $\alpha \in [0,1]$ 收敛，而对于其它 $\alpha \in [0,1]$ 将发散.

条件(12.9.13)和(12.9.14)的几何意义为 $\omega(t)$ 的两个根 θ_i, θ_j 落在曲线(12.9.12)的两个不同的分支所围区域中，如图 12.9.2 所示.

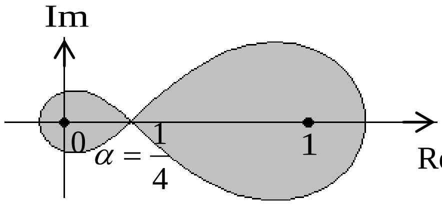


图 12.9.1 复平面上 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的发散区域

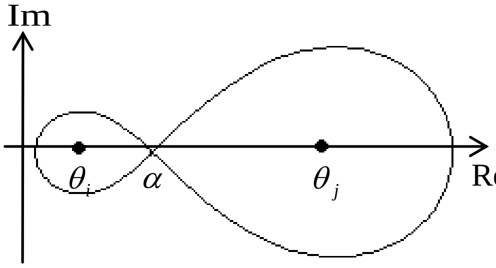


图 12.9.2 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 的始终发散区域

设 ψ 表示能使 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 收敛的所有实数 α 的集合，它可以用以下的方法得到.

首先，对每一 θ_i，将(12.9.7)看作一个关于 α 的不等式，按下式求解 I_i：

$$I_i = \begin{cases} [0,1], & \text{当} |\theta_i| > 1, |1-\theta_i| > 1; \\ [0, \max_i), & \text{当} |\theta_i| \le 1, |1-\theta_i| > 1; \\ (\min_i, 1], & \text{当} |\theta_i| > 1, |1-\theta_i| \le 1; \\ (\min_i, \max_i), & \text{当} |\theta_i| \le 1, |1-\theta_i| \le 1; \end{cases}$$

其中 $\min_i$ 和 $\max_i$ 为以 α 为未知量的方程(12.9.12)中取 $\theta = \theta_i$ 时的解，$\min_i$ 为实部小于 θ_i 的解，$\max_i$ 为实部大于 θ_i 的解．于是 ψ 为所有 I_i $(i = 1,2,\ldots,d)$ 的交集，即

$$\psi = \bigcap_{i=1}^{d} I_i .$$

例 12.9.1 设 $\boldsymbol{R}(t)$ 为有理二次 Bézier 曲线(12.1.1)，$m = 2$.

(1) 当 $\omega_0 = \omega_2 = 1, \omega_1 = 13/6$，则 $\theta_1 = -2, \theta_2 = 3$. 由于 $|\theta_i| > 1$ 并且 $|1-\theta_i| > 1$，$i = 1,2$，即 $\psi = [0,1]$，因此 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 始终收敛.

(2) 当 $\omega_0 = \omega_2 = 1, \omega_1 = 37/6$，则 $\theta_1 = -0.2, \theta_2 = 1.2$. 由于 $|\theta_i||1-\theta_i| < 1/4$，$i = 1,2$，即 ψ 为空集，因此 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 始终发散.

(3) 当 $\omega_0 = 3, \omega_1 = 12, \omega_2 = 20$，则 $\theta_1 = -0.2, \theta_2 = 3$. 由于 $|\theta_1||1-\theta_1| = 0.24 < 1/4$，$|\theta_i|^{1/3}|1-\theta_i|^{2/3} > (1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}$，$i = 1,2$，此时 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 当 $\alpha = 1/3$ 时收敛，而当 $\alpha = 1/2$ 时发散．而且易得 $\psi = [0, 0.488460)$.

12.10 用新的观点研究有理 Bézier 曲线的 $H\langle r, p\rangle$ 逼近

为了把有理曲线的多项式逼近十分容易地推广到有理曲面的多项式逼近，也为了把 Hybrid 曲线的所有控制顶点用一个统一的公式来表达以简化编程计算，本节用一个新观点来重新研究有理曲线的 Hybrid 逼近，即把 Hybrid 曲线的控制顶点先都视作移动控制顶点再来求解.

定义 12.10.1 对曲线(12.1.1)，定义与之等价的 $r + p$ 次 Hybrid 曲线为

$$\boldsymbol{H}^{r,p}(t) \equiv \boldsymbol{R}(t) = \sum_{i=0}^{r+p} B_i^{r+p}(t) \boldsymbol{H}_i^{r,p}(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{12.10.1}$$

这里

$$\boldsymbol{H}_i^{r,p}(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k \boldsymbol{M}_{ik}^{r,p} \Big/ \sum_{k=0}^{m} B_k^m(t)\omega_k , \quad 0 \le t \le 1 \tag{12.10.2}$$

是 Hybrid 曲线(12.10.1)的移动控制顶点，其中 $\{\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}\}_{k=0}^{m}$ 是曲线(12.10.2)的控制顶点；当 $\boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}=\boldsymbol{M}_{i1}^{r,p}=\cdots=\boldsymbol{M}_{im}^{r,p}=:\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}$ 时，$\boldsymbol{H}_{i}^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}$ 与 t 无关，这时称 $\boldsymbol{H}_{i}^{r,p}(t)$ 为(12.10.1)的固定控制顶点，并记 $\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}$ 为 $\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}$，$k=0,1,\ldots,m.$ 为了由曲线(12.1.1)得到曲线(12.10.2)的表达式，按(12.10.1), (12.10.2)，我们有

$$\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{R}_k\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k=\sum_{i=0}^{r+p}B_i^{r+p}(t)\left(\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\right). \tag{12.10.3}$$

对上式消去分母，左端乘以 $\sum_{i=0}^{r+p}B_i^{r+p}(t)\equiv 1$，合并同类项并化简，得到

$$\sum_{I=0}^{r+p+m}\sum_{a+c=I}B_I^{r+p+m}(t)\left(\binom{m}{a}\binom{r+p}{c}\Big/\binom{r+p+m}{I}\right)\omega_a(\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{M}_{ca}^{r,p})=\boldsymbol{0}. \tag{12.10.4}$$

按基函数的线性无关性可有方程组

$$\sum_{a+c=I}\binom{m}{a}\binom{r+p}{c}\omega_a(\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{M}_{ca}^{r,p})=\boldsymbol{0},\quad I=0,1,\ldots,r+p+m. \tag{12.10.5}$$

在这一方程组中，未知向量 $\boldsymbol{M}_{i,k}^{r,p}$ 的总个数为 $(r+p+1)(m+1)$，方程总数为 $r+p+m+1$. 为使方程组有唯一解，我们可把移动控制顶点 $\{\boldsymbol{H}_i^{r,p}(t)\}_{i=0}^{r+p}$ 中的前 r 个和后 p 个都取为固定控制顶点，仅保留其中的一个，即 $\boldsymbol{H}_r^{r,p}(t)$ 为真正的移动控制顶点，这意味着有 $\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}$，使得

$$\boldsymbol{H}_i^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}\equiv\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p},\qquad i=0,1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,r+p;\ k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.6}$$

因而我们的目标是求出 $\{\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}\}_{i=0,i\neq r}^{r+p}$ 和 $\{\boldsymbol{M}_{rk}^{r,p}\}_{k=0}^{m}$. 容易得出

算法 12.10.1 (由 $\boldsymbol{R}(t)$ 计算相应的 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$)

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}=\begin{cases}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{M}_{0*}^{r,p}, & i=0;\\ \boldsymbol{R}_0+\left(\binom{r+p}{i}\omega_0\right)^{-1}\sum\limits_{\substack{a+c=i\\a\neq 0}}\binom{m}{a}\binom{r+p}{c}\omega_a(\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{M}_{c*}^{r,p})=\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}, & \\ & i=1,2,\ldots,r-1;k=0,1,\ldots,m;\\ \boldsymbol{R}_k+\left(\binom{m}{k}\binom{r+p}{r}\omega_k\right)^{-1}\sum\limits_{\substack{a+c=r+k\\a\neq k}}\binom{m}{a}\binom{r+p}{c}\omega_a(\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{M}_{c*}^{r,p}), & i=r;k=0,1,\ldots,m;\\ \boldsymbol{R}_m+\left(\binom{r+p}{i}\omega_m\right)^{-1}\sum\limits_{\substack{a+c=m+i\\a\neq m}}\binom{m}{a}\binom{r+p}{c}\omega_a(\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{M}_{c*}^{r,p})=\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}, & \\ & i=r+p-1,r+p-2,\ldots,r+1;\ k=0,1,\ldots,m;\\ \boldsymbol{R}_m, & i=r+p.\end{cases} \tag{12.10.7}$$

必须指出，上式蕴含着 $\boldsymbol{M}_{0k}^{r,p}=\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{M}_{0*}^{r,p}$，$\boldsymbol{M}_{r+p,k}^{r,p}=\boldsymbol{R}_m=\boldsymbol{M}_{r+p,*}^{r,p}$，$0\le a\le m,$ $0\le c\le r+p.$ 下面推导由 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$ 计算 $\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)$，即由 $\{\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}\}_{i=0,k=0}^{r+p,m}$ 计算 $\{\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}\}_{i=0,k=0}^{r+p+1,m}$ 的递推公式. 先把 $\boldsymbol{H}_i^{r,p}(t)$ 表成 $1+0$ 次 Hybrid 曲线

$$\overline{\boldsymbol{H}}_i^{1,0}(t)=\boldsymbol{H}_i^{r,p}(t)=\sum_{a=0}^{1}B_a^1(t)\left(\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\overline{\boldsymbol{M}}_{iak}^{1,0}\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\right), \tag{12.10.8}$$

容易看出对 $k=0,1,\ldots,m,$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{iak}^{1,0}=\begin{cases}\overline{\boldsymbol{M}}_{ia*}^{10}=\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}, & i\neq r, a=0,1;\\ \overline{\boldsymbol{M}}_{r0*}^{10}=\boldsymbol{M}_{r0}^{r,p}, & i=r, a=0;\\ \overline{\boldsymbol{M}}_{r1k}^{10}, & i=r, a=1.\end{cases} \tag{12.10.9}$$

再记

$$\begin{cases}g_k=\binom{m}{k+1}\omega_{k+1}\Big/\left(\binom{m}{k}\omega_k\right)=\dfrac{(m-k)\omega_{k+1}}{(k+1)\omega_k}, & k=0,1,,m-1;\\ g_m=g_{-1}^{-1}=0,\end{cases} \tag{12.10.10}$$

按算法 12.10.1 可解出

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{iak}^{1,0}=\begin{cases}\boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}, & a=0;\\ \boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}+g_k(\boldsymbol{M}_{i,k+1}^{r,p}-\boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}), & a=1,\quad k=0,1,,m.\end{cases} \tag{12.10.11}$$

把(12.10.8)代入(12.10.1)得

$$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)=\sum_{i=0}^{r+p+1}B_i^{r+p+1}(t)\left(\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(t)\omega_k\right),$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}=\left(\binom{r+p}{i}\overline{\boldsymbol{M}}_{i0k}^{1,0}+\binom{r+p}{i-1}\overline{\boldsymbol{M}}_{i-1,1,k}^{1,0}\right)\Big/\binom{r+p+1}{i},$$
$$i=0,1,\ldots,r+p+1;\quad k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.12}$$

利用恒等式$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)\equiv\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)=\boldsymbol{R}(t)$，我们有

$$\sum_{I=0}^{r+1+p+m}B_I^{r+1+p+m}(t)\sum_{i+k=I}\binom{m}{k}\binom{r+1+p}{i}\omega_k\left(\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}-\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}\right)\Big/\binom{r+1+p+m}{I}=\mathbf{0},$$

再由基的线性无关性可以得到

$$\sum_{i+k=I}\binom{m}{k}\binom{r+1+p}{i}\omega_k\left(\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}-\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}\right)=\mathbf{0},\quad I=0,1,\ldots,r+1+p+m. \tag{12.10.13}$$

由(12.10.12)和(12.10.9)可知，当$i\neq r,r+1$时，$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}$是$\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}$和$\boldsymbol{M}_{i-1,*}^{r,p}$的线性组合，而$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{rk}^{1,0}$是$\boldsymbol{M}_{r0}^{r,p}$和$\boldsymbol{M}_{r-1,*}^{r,p}$的线性组合，这表明当$i\neq r+1$时$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}$与$k$无关，于是我们可记

$$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i*}^{1,0},\quad i\neq r+1;\quad k=0,1,\ldots,m.$$

另一方面，按条件(12.10.6)对照曲线$\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)$，我们有

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}=\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p},\quad i\neq r+1;\quad k=0,1,\ldots,m.$$

以上两式表明方程组(12.10.13)只有$r+p+m+2$个未知向量$\left\{\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p}\right\}_{i=0,i\neq r+1}^{r+p+1}$，$\left\{\boldsymbol{M}_{r+1,k}^{r+1,p}\right\}_{k=0}^{m}$；类似于方程组(12.10.5)的解法，我们可依次解出$\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i*}^{1,0}(i=0,1,\ldots,r)$；$\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i*}^{1,0}(i=r+p+1,r+p,\ldots,r+2)$；$\boldsymbol{M}_{r+1,k}^{r+1,p}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,k}^{1,0}(k=0,1,\ldots,m)$；即

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ik}^{1,0},\quad i=0,1,\ldots,r+p+1;\ k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.14}$$

把(12.10.12), (12.10.11)代入上式就得到$\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)$与$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$的控制顶点递推关系

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p}=\left[\binom{r+p}{i-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,k}^{r,p}+g_k\left(\boldsymbol{M}_{i-1,k+1}^{r,p}-\boldsymbol{M}_{i-1,0}^{r,p}\right)\right)+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}\right]\Big/\binom{r+p+1}{i},$$
$$i=0,1,\ldots,r+p+1;\quad k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.15}$$

利用对称性，我们有

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p+1}=\left[\binom{r+p}{i-1}\boldsymbol{M}_{i-1,m}^{r,p}+\binom{r+p}{i}\left(\boldsymbol{M}_{ik}^{r,p}+g_{k-1}^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{i,k-1}^{r,p}-\boldsymbol{M}_{im}^{r,p}\right)\right)\right]\Big/\binom{r+p+1}{i},$$
$$i=0,1,\ldots,r+p+1;\quad k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.16}$$

综合以上两式，进一步可得到$\boldsymbol{H}^{r+1,p+1}(t)$与$\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$的控制顶点递推关系

$$\boldsymbol{M}_{ik}^{r+1,p+1}=\left[\binom{r+p}{i-2}\boldsymbol{M}_{i-2,m}^{r,p}+\binom{2}{1}\binom{r+p}{i-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,k}^{r,p}+\frac{1}{2}g_k\left(\boldsymbol{M}_{i-1,k+1}^{r,p}-\boldsymbol{M}_{i-1,0}^{r,p}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}g_{k-1}^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,k-1}^{r,p}-\boldsymbol{M}_{i-1,m}^{r,p}\right)\right)+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i,0}^{r,p}\right]\Big/\binom{r+p+2}{i},$$

$$i=0,1,\ldots,r+p+2;\quad k=0,1,\ldots,m. \tag{12.10.17}$$

按照(12.10.6), 以上三式可分别被简化, 从而得到

算法 12.10.2 (由 $\boldsymbol{H}^{r,p}(t)$ 计算 $\boldsymbol{H}^{r+1,p}(t)$, $\boldsymbol{H}^{r,p+1}(t)$ 和 $\boldsymbol{H}^{r+1,p+1}(t)$)

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p}=\left[\binom{r+p}{i-1}\boldsymbol{M}_{i-1,*}^{r,p}+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}\right]\Big/\binom{r+p+1}{i}, \\ \qquad i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+1; \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,0}^{r+1,p}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,1}^{r+1,p}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{r+1,m}^{r+1,p}\end{pmatrix}=\mathbf{C}_m^{r,p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r0}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{r1}^{r,p}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{rm}^{r,p}\end{pmatrix}+\dfrac{p}{r+p+1}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,*}^{r,p};\end{cases} \tag{12.10.18}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p+1}=\left[\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i*}^{r,p}+\binom{r+p}{i-1}\boldsymbol{M}_{i-1,m}^{r,p}\right]\Big/\binom{r+p+1}{i}, \\ \qquad i=0,1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,r+p+1; \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r0}^{r,p+1}\\ \boldsymbol{M}_{r1}^{r,p+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{rm}^{r,p+1}\end{pmatrix}=\mathbf{D}_m^{r,p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r0}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{r1}^{r,p}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{rm}^{r,p}\end{pmatrix}+\dfrac{r}{r+p+1}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r-1,*}^{r,p};\end{cases} \tag{12.10.19}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{i*}^{r+1,p+1}=\mathbf{E}_i^{r,p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i-2,m}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{i-1,*}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{i0}^{r,p}\end{pmatrix},\quad i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+1; \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,0}^{r+1,p+1}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,1}^{r+1,p+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{r+1,m}^{r+1,p+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}_m^{r,p} & \mathbf{V}_m^{r,p} & \mathbf{W}_m^{r,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r-1,*}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{r0}^{r,p}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{rm}^{r,p}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,*}^{r,p}\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{12.10.20}$$

这里 $\mathbf{C}_m^{r,p},\mathbf{D}_m^{r,p},\mathbf{V}_m^{r,p}$ 为 $(m+1)\times(m+1)$ 阶矩阵, $\mathbf{E}_i^{r,p}$ 为 1×3 阶矩阵, $\mathbf{U}_m^{r,p},\mathbf{W}_m^{r,p}$ 为 $(m+1)\times 1$ 阶矩阵:

$$\mathbf{C}_m^{r,p}=\frac{r+1}{r+p+1}\begin{pmatrix}1-g_0 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -g_1 & 1 & g_1 & \cdots & 0 & 0\\ -g_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ -g_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{m-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{12.10.21}$$

$$\mathbf{D}_m^{r,p}=\frac{p+1}{r+p+1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ g_0^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & -g_0^{-1}\\ 0 & g_1^{-1} & 1 & \cdots & 0 & -g_1^{-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -g_{m-2}^{-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{m-1}^{-1} & 1-g_{m-1}^{-1}\end{pmatrix}, \tag{12.10.22}$$

$$\mathbf{E}_i^{r,p}=\left(\begin{pmatrix}r+p\\i-2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}r+p\\i-1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}r+p\\i\end{pmatrix}\right)\Big/\begin{pmatrix}r+p+1\\i\end{pmatrix},\tag{12.10.23}$$

$$\mathbf{U}_m^{r,p}=\frac{r(r+1)}{(r+p+1)(r+p+2)}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\tag{12.10.24}$$

$$\mathbf{W}_m^{r,p}=\frac{p(p+1)}{(r+p+1)(r+p+2)}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\tag{12.10.25}$$

$$\mathbf{V}_m^{r,p}=\frac{(r+1)(p+1)}{(r+p+1)(r+p+2)}\begin{pmatrix}2-g_0 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ g_0^{-1}-g_1 & 2 & g_1 & \cdots & 0 & 0 & -g_0^{-1}\\ -g_2 & g_1^{-1} & 2 & \cdots & 0 & 0 & -g_1^{-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -g_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & 2 & g_{m-2} & -g_{m-3}^{-1}\\ -g_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & g_{m-2}^{-1} & 2 & g_{m-1}-g_{m-2}^{-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{m-1}^{-1} & 2-g_{m-1}^{-1}\end{pmatrix}.\tag{12.10.26}$$

12.11 有理 Bézier 曲面的 Hybrid 表示

定义 12.11.1 已给一张 $m\times n$ 次有理 Bézier 曲面(7.4.2)即 $\boldsymbol{R}(u,v)$，我们称与之等价的曲面

$$\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)\equiv\boldsymbol{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{r+p}\sum_{j=0}^{s+q}B_i^{r+p}(u)B_j^{s+q}(v)\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)\tag{12.11.1}$$

是相应于有理曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的 $(r+p)\times(s+q)$ 次 Hybrid 曲面，这里

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\Big/\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\tag{12.11.2}$$

是 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的移动控制顶点，是与曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 同次数且同权因子的有理 Bézier 曲面，其中 $\left\{\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\right\}_{i=0,j=0,k=0,l=0}^{r+p,s+q,m,n}$ 是曲面 $\boldsymbol{H}_{i,j}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点；当 $\left\{\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\right\}_{k=0}^{m}$ 与 k 无关时，称其为 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的 u 向固定(v 向移动)控制顶点，简记为 $\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{ij*l}^{r,p;s,q},k=0,1,\ldots,m,$ 这时移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$ 退化为权因子 $\overline{\omega}_l=\overline{\omega}_l(u)=\sum_{k=0}^{m}B_k^m(u)\omega_{kl}$ 的一条有理 Bézier 曲线 $\sum_{l=0}^{n}B_l^n(v)\overline{\omega}_l(u)\boldsymbol{M}_{ij*l}^{r,p;s,q}\Big/\sum_{l=0}^{n}B_l^n(v)\overline{\omega}_l(u)$；当 $\left\{\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\right\}_{l=0}^{n}$ 与 l 无关时，称其为 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的 v 向固定(u 向移动)控制顶点，简记为 $\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{ijk*}^{r,p;s,q},l=0,1,\ldots,n,$ 这时移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$ 退化为权因子 $\overline{\omega}_k=\overline{\omega}_k(v)=\sum_{l=0}^{n}B_l^n(v)\omega_{kl}$ 的一条有理 Bézier 曲线 $\sum_{k=0}^{m}B_k^m(u)\overline{\omega}_k(v)\boldsymbol{M}_{ijk*}^{r,p;s,q}\Big/\sum_{k=0}^{m}B_k^m(u)\overline{\omega}_k(v)$；当 $\left\{\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\right\}_{k=0,l=0}^{m,n}$ 与 k,l 均无关时，称其为 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的双向固定控制顶点，并简记为 $\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q},\ \ k=0,1,\ldots,m;l=0,1,\ldots,n,$ 这时移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$ 退化为一点 $\boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q}$.

现用 Hybrid 曲面表示有理 Bézier 曲面，即把(7.4.2)和(12.11.2)代入(12.11.1)，消去分母，左端乘以 $\sum_{i=0}^{r+p}\sum_{j=0}^{s+q}B_i^{r+p}(u)B_j^{s+q}(v)\equiv1$，合并同类项并化简，得到

$$\sum_{I=0}^{r+p+m}\sum_{J=0}^{s+q+n} B_I^{r+p+m}(u)B_J^{s+q+n}(v)\sum_{a+c=I}\sum_{b+d=J}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{r+p}{c}\binom{s+q}{d}}{\binom{r+p+m}{I}\binom{s+q+n}{J}}\omega_{ab}(\boldsymbol{R}_{ab}-\boldsymbol{M}_{cdab}^{r,p;s,q})=\boldsymbol{0}.$$

(12.11.3)

根据基函数的线性无关性可有方程组

$$\sum_{a+c=I}\sum_{b+d=J}\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{r+p}{c}\binom{s+q}{d}\omega_{ab}(\boldsymbol{R}_{ab}-\boldsymbol{M}_{cdab}^{r,p;s,q})=\boldsymbol{0}, \tag{12.11.4}$$
$$I=0,1,\ldots,r+p+m;\quad J=0,1,\ldots,s+q+n.$$

在这一方程组中，未知向量 $\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}$ 的总个数是 $(r+p+1)(s+q+1)(m+1)(n+1)$，方程数为 $(r+p+m+1)(s+q+n+1)$，为使方程组有唯一解，必须把前一个数目减少到与后一个数目相等. 为此，我们把若干个控制顶点 $\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}$ 取为Hybrid曲面(12.11.1)在 u 向，v 向或双向的固定控制顶点，具体来说即让(见图 12.11.1)

$$\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}=\begin{cases}\boldsymbol{M}_{ij*l}^{r,p;s,q}, & i\ne r,\ j=s;\ \ l=0,1,\ldots,n;\\ \boldsymbol{M}_{ijk*}^{r,p;s,q}, & i=r,\ j\ne s;\ \ k=0,1,\ldots,m;\\ \boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q}, & i\ne r,\ j\ne s;\ \ k=0,1,\ldots,m;\ l=0,1,\ldots,n.\end{cases} \tag{12.11.5}$$

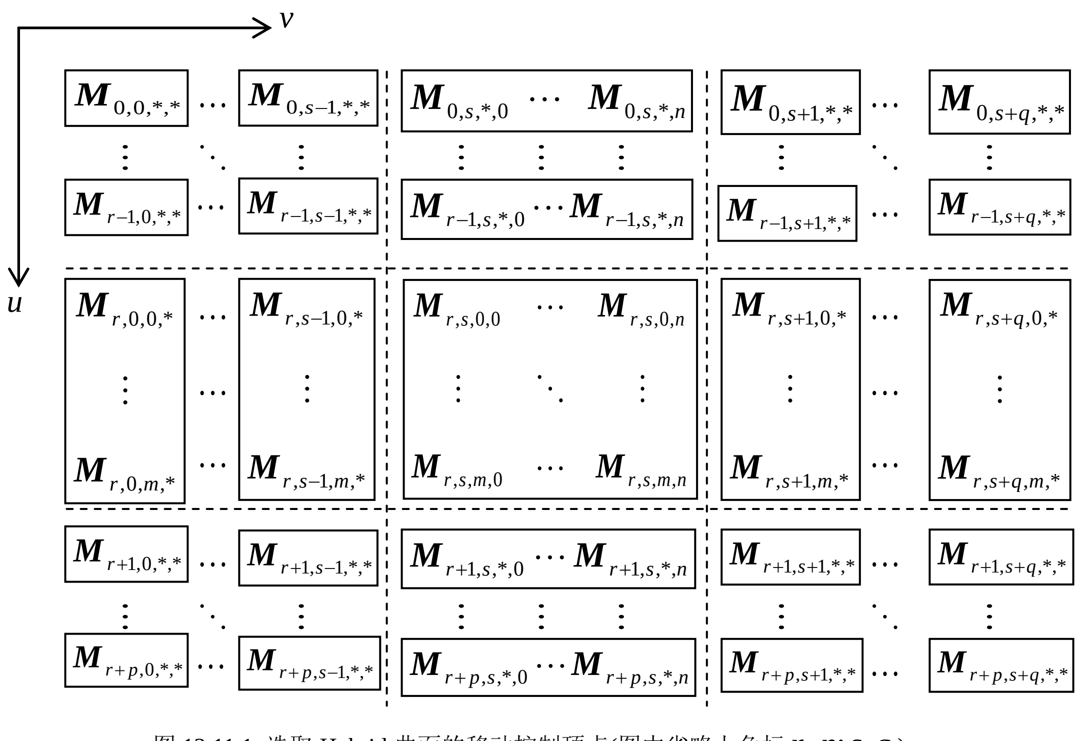


图 12.11.1 选取 Hybrid 曲面的移动控制顶点(图中省略上角标 $r,p;s,q$)

这样，未知向量数等于方程数，我们可求解(12.11.4)得到

算法 12.11.1 (由 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 计算 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$)

$$
\boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q}=\begin{cases}
\boldsymbol{R}_{00}+\dfrac{1}{\omega_{00}}\sum\limits_{\substack{a+c=i\\ b+d=j\\ a\neq 0\text{或}b\neq 0}}\boldsymbol{S}(a,b,c,d,i,j), \quad i=0,1,\ldots,r-1;\quad j=0,1,\ldots s-1;\\
\boldsymbol{R}_{0n}+\dfrac{1}{\omega_{0n}}\sum\limits_{\substack{a+c=i\\ b+d=n+j\\ a\neq 0\text{或}b\neq n}}\boldsymbol{S}(a,b,c,d,i,j),\\
\qquad\qquad i=0,1,\ldots,r-1;\ j=s+q,s+q-1,\ldots s+1;\\
\boldsymbol{R}_{m0}+\dfrac{1}{\omega_{m0}}\sum\limits_{\substack{a+c=m+i\\ b+d=j\\ a\neq m\text{或}b\neq 0}}\boldsymbol{S}(a,b,c,d,i,j),\\
\qquad\qquad i=r+p,r+p-1,\ldots,r+1;\ j=0,1,\ldots s-1;\\
\boldsymbol{R}_{mn}+\dfrac{1}{\omega_{mn}}\sum\limits_{\substack{a+c=m+i\\ b+d=n+j\\ a\neq m\text{或}b\neq n}}\boldsymbol{S}(a,b,c,d,i,j),\\
\qquad\qquad i=r+p,r+p-1,\ldots,r+1;\ j=s+q,s+q-1,\ldots s+1;
\end{cases} \tag{12.11.6}
$$

$$
\boldsymbol{M}_{rjk*}^{r,p;s,q}=\begin{cases}
\boldsymbol{R}_{k0}+\dfrac{1}{\binom{m}{k}\omega_{k0}}\sum\limits_{\substack{a+c=k+r\\ b+d=j\\ a\neq k\text{或}b\neq 0}}\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j), \quad j=0,1,\ldots s-1;\ k=0,1,\ldots,m;\\
\boldsymbol{R}_{kn}+\dfrac{1}{\binom{m}{k}\omega_{kn}}\sum\limits_{\substack{a+c=k+r\\ b+d=n+j\\ a\neq k\text{或}b\neq n}}\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j),\\
\qquad\qquad j=s+q,s+q-1,\ldots,s+1;\quad k=0,1,\ldots,m;
\end{cases} \tag{12.11.7}
$$

$$
\boldsymbol{M}_{is*l}^{r,p;s,q}=\begin{cases}
\boldsymbol{R}_{0l}+\dfrac{1}{\binom{n}{l}\omega_{0l}}\sum\limits_{\substack{a+c=i\\ b+d=l+s\\ a\neq 0\text{或}b\neq l}}\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j), \quad i=0,1,\ldots r-1;\quad l=0,1,\ldots,n;\\
\boldsymbol{R}_{ml}+\dfrac{1}{\binom{n}{l}\omega_{ml}}\sum\limits_{\substack{a+c=m+i\\ b+d=l+s\\ a\neq m\text{或}b\neq l}}\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j),\\
\qquad\qquad i=r+p,r+p-1,\ldots,r+1;\ l=0,1,\ldots,n;
\end{cases} \tag{12.11.8}
$$

$$
\boldsymbol{M}_{rskl}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{R}_{kl}+\frac{1}{\binom{m}{k}\binom{n}{l}\omega_{kl}}\sum_{\substack{a+c=k+r\\ b+d=l+s\\ a\neq k\text{或}b\neq l}}\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j), \quad k=0,1,\ldots,m;\ l=0,1,\ldots,n; \tag{12.11.9}
$$

这里

$$
\boldsymbol{S}(a,b,c,d,i,j)=\left(\binom{r+p}{i}\binom{s+q}{j}\right)^{-1}\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{r+p}{c}\binom{s+q}{d}\omega_{ab}(\boldsymbol{R}_{ab}-\boldsymbol{M}_{cd**}^{r,p;s,q}), \tag{12.11.10}
$$

$$
\boldsymbol{T}(a,b,c,d,i,j)=\left(\binom{r+p}{i}\binom{s+q}{j}\right)^{-1}\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{r+p}{c}\binom{s+q}{d}\omega_{ab}(\boldsymbol{R}_{ab}-\boldsymbol{M}_{cdab}^{r,p;s,q}). \tag{12.11.11}
$$

图 12.11.2 和 12.11.3 表示双三次有理 Bézier 曲面及相应的 $(2+2)(2+2)$ 次 Hybrid 曲面.

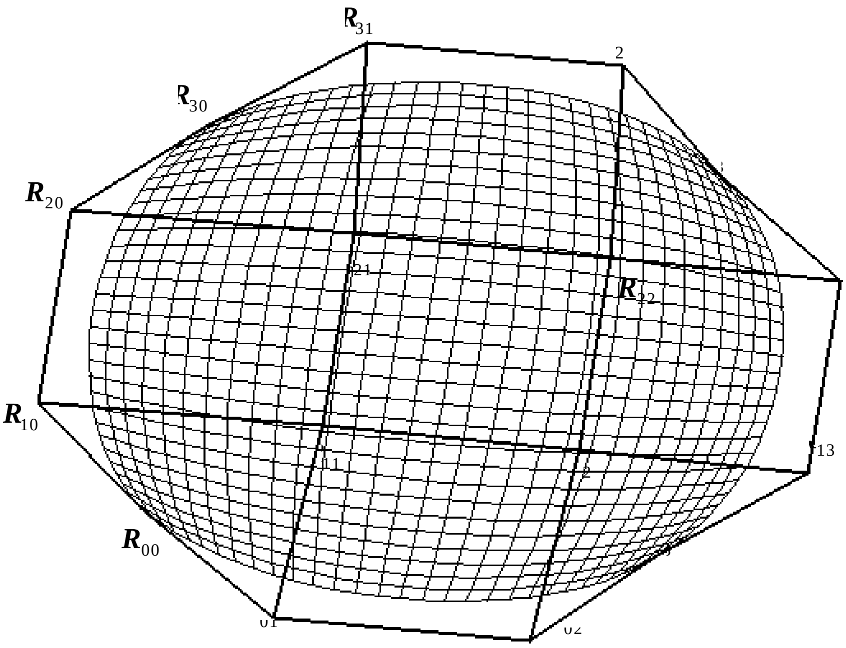


图 12.11.2 3×3 次有理 Bézier 曲面

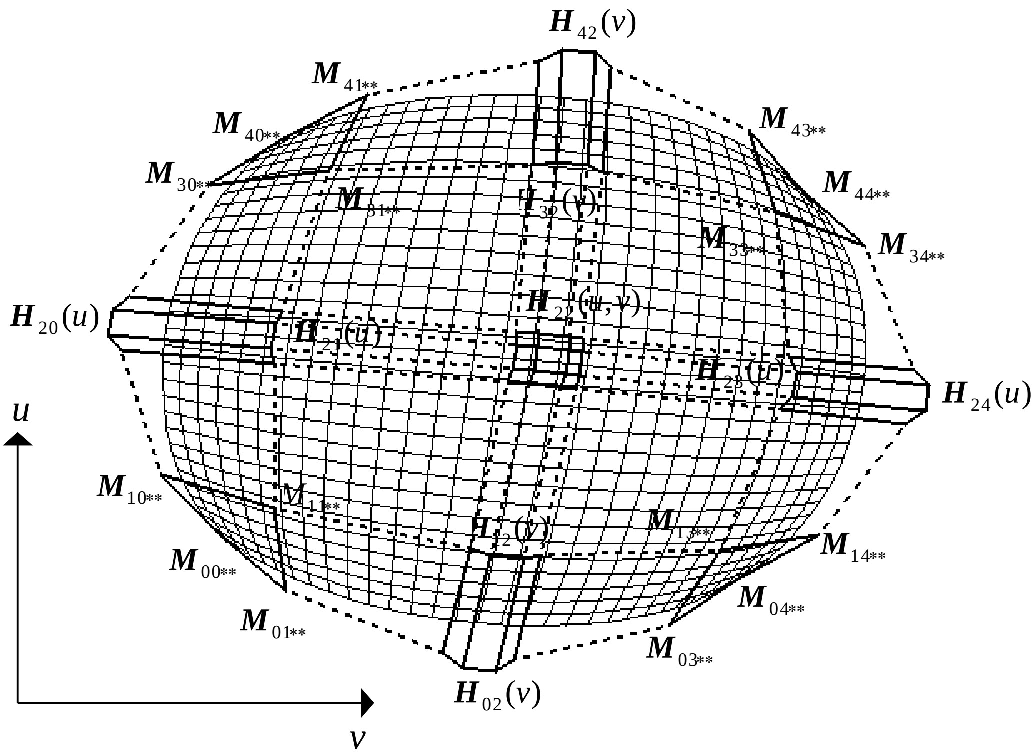


图 12.11.3 $(2+2)\times(2+2)$ 次 Hybrid 曲面（图中省略上角标 2,2;2,2）

12.12 有理 Bézier 曲面的两类多项式逼近 $\boldsymbol{H}\langle r,p;s,q\rangle$ 和 $\boldsymbol{h}\langle r,p;s,q\rangle$

12.12.1 有理曲面 Hybrid 逼近与 Hermite 逼近的定义

定义 12.12.1 若 $m\times n$ 次有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 由(7.4.2)定义，$(r+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 如定义 12.11.1，单向或双向固定控制顶点的取法如(12.11.5)，今对每一组固定的 (i,j) $(i=r$ 或 $j=s)$，在移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点 $\left\{\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}\right\}_{k=0,l=0}^{m,n}$ 的凸包内任取一个固定点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}$ 来代替 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$，再假设

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q},\ (i\neq r\text{且}j\neq s),\tag{12.12.1}$$

则 $(r+p)(s+q)$ 次 Bézier 曲面

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\sum_{i=0}^{r+p}\sum_{j=0}^{s+q}B_i^{r+p}(u)B_j^{s+q}(v)\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q},\ 0\le u,v\le 1\tag{12.12.2}$$

称为 $[0,1]\otimes[0,1]$ 上对于有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的 Hybrid 逼近，简称 H 逼近，记为 $\boldsymbol{H}\langle r,p;s,q\rangle$.

定义 12.12.2 若有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 由(7.4.2)定义，而 $(r+p-1)(s+q-1)$ 次 Bézier 曲面

$$\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)=\sum_{i=0}^{r+p-1}\sum_{j=0}^{s+q-1}B_i^{r+p-1}(u)B_j^{s+q-1}(v)\boldsymbol{h}_{ij}^{r,p;s,q},\ 0\le u,v\le 1\tag{12.12.3}$$

在其四个角点处满足 $(r+p)(s+q)$ 个等式

$$\begin{cases}\partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(0,0)\big/(\partial u^i\partial v^j)=\partial^{i+j}\boldsymbol{R}(0,0)\big/(\partial u^i\partial v^j),\ i=0,1,\cdots,r-1;\ j=0,1,\cdots,s-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(0,1)\big/(\partial u^i\partial v^j)=\partial^{i+j}\boldsymbol{R}(0,1)\big/(\partial u^i\partial v^j),\quad i=0,1,\cdots,r-1;\ j=0,1,\cdots,q-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(1,0)\big/(\partial u^i\partial v^j)=\partial^{i+j}\boldsymbol{R}(1,0)\big/(\partial u^i\partial v^j),\quad i=0,1,\cdots,p-1;\ j=0,1,\cdots,s-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(1,1)\big/(\partial u^i\partial v^j)=\partial^{i+j}\boldsymbol{R}(1,1)\big/(\partial u^i\partial v^j),\quad i=0,1,\cdots,p-1;\ j=0,1,\cdots,q-1.\end{cases}\tag{12.12.4}$$

则称曲面 $\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)$ 是 $[0,1]\otimes[0,1]$ 上对于有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的 Hermite 逼近，简称 h 逼近，记为 $\boldsymbol{h}\langle r,p;s,q\rangle$

以上两类对有理曲面的多项式逼近貌似不同，但其实存在着紧密的联系.

12.12.2 $\boldsymbol{H}\langle r,p;s,q\rangle$ 逼近的余项

由 Hybrid 曲面的定义 12.11.1 和 H 逼近的定义 12.12.1，我们可以计算 H 逼近的余项

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{R}(u,v)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)-\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)\\ &=B_s^{s+q}(v)\sum_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{r+p}B_i^{r+p}(u)\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}(\boldsymbol{M}_{i,s,*,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{H}_{is}^{r,p;s,q})\middle/\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\right)\\ &+B_r^{r+p}(u)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{s+q}B_j^{s+q}(v)\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}(\boldsymbol{M}_{r,j,k,*}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{H}_{rj}^{r,p;s,q})\middle/\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\right)\\ &+B_r^{r+p}(u)B_s^{s+q}(v)\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}(\boldsymbol{M}_{r,s,k,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{H}_{rs}^{r,p;s,q})\middle/\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\right).\end{aligned}\tag{12.12.5}$$

利用(12.1.12)，容易推知

$$\begin{cases}\partial^{i+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(0,0)\big/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,r-1;\ \ j=0,1,\cdots,s-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(0,1)\big/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,r-1;\ \ j=0,1,\cdots,q-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(1,0)\big/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,p-1;\ \ j=0,1,\cdots,s-1;\\ \partial^{i+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(1,1)\big/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,p-1;\ \ j=0,1,\cdots,q-1.\end{cases}\tag{12.12.6}$$

这表明 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)$ 与 $\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)$ 在区域 $[0,1]\otimes[0,1]$ 的角点处具有相同的多阶混合偏导矢.

12.12.3 $\boldsymbol{h}\langle r,p;s,q\rangle$ 逼近与 $\boldsymbol{H}\langle r,p;s,q\rangle$ 逼近的关系

定理 12.12.1 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点能用 $\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点来表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{ij**}^{r,p;s,q}&=\left(1-\frac{j}{s+q}\right)\left[\left(1-\frac{i}{r+p}\right)\boldsymbol{h}_{ij}^{r,p;s,q}+\frac{i}{r+p}\boldsymbol{h}_{i-1,j}^{r,p;s,q}\right]\\&\quad+\frac{j}{s+q}\left[\left(1-\frac{i}{r+p}\right)\boldsymbol{h}_{i,j-1}^{r,p;s,q}+\frac{i}{r+p}\boldsymbol{h}_{i-1,j-1}^{r,p;s,q}\right],\qquad i\neq r,\ j\neq s.\end{aligned}\tag{12.12.7}$$

也就是说, $\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的升阶曲面与 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)$ 仅在 $i=r$ 或 $j=s$ 时有不同的控制顶点.

证 由(12.12.4)和(12.12.6), 我们有

$$\partial^{i+j}\tilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^j\right),\quad i=0,1,\cdots,r-1;\ j=0,1,\cdots,s-1.$$

展开上式两端可推出

$$\begin{aligned}&\frac{(r+p)!}{(r+p-i)!}\frac{(s+q)!}{(s+q-j)!}\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{M}_{i-k,j-l,*,*}^{r,p;s,q}\\&\quad=\frac{(r+p-1)!}{(r+p-1-i)!}\frac{(s+q-1)!}{(s+q-1-j)!}\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{h}_{i-k,j-l}^{r,p;s,q}.\end{aligned}$$

利用此式及其矩阵形式, 对 i 和 j 应用数学归纳法, 我们即知(12.12.7)当 $i=0,1,\cdots,r-1$; $j=0,1,\cdots,s-1$ 时正确. 另外三种情况也同样. 证毕.

定理 12.12.2 $\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点能用 $\tilde{\boldsymbol{H}}^{r-1,p-1;s-1,q-1}(u,v)$ 的控制顶点来表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{ij}^{r,p;s,q}&=\left(1-\frac{j}{s+q-1}\right)\left[\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{M}_{i,j,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{i}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{i-1,j,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right]\\&\quad+\frac{j}{s+q-1}\left[\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{M}_{i,j-1,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{i}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{i-1,j-1,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right],\\&\qquad i=0,1,\cdots,r-2,\ \ j=0,1,\cdots,s-2;\end{aligned}\tag{12.12.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{r-1,j}^{r,p;s,q}&=\left(1-\frac{j}{s+q-1}\right)\left[\frac{p}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-1,j,0,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-2,j,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right]\\&\quad+\frac{j}{s+q-1}\left[\frac{p}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-1,j-1,0,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-2,j-1,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right],\\&\qquad j=0,1,\cdots,s-2;\end{aligned}\tag{12.12.9}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{i,s-1}^{r,p;s,q}&=\frac{q}{s+q-1}\left[\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{M}_{i,s-1,*,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{i}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{i-1,s-1,*,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right]\\&\quad+\frac{s-1}{s+q-1}\left[\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\boldsymbol{M}_{i,s-2,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{i}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{i-1,s-2,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right],\\&\qquad i=0,1,\cdots,r-2;\end{aligned}\tag{12.12.10}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{r-1,s-1}^{r,p;s,q}&=\frac{q}{s+q-1}\left[\frac{p}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-1,s-1,0,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-1,s-1,*,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right]\\&\quad+\frac{s-1}{s+q-1}\left[\frac{p}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-1,s-1,0,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}+\frac{r-1}{r+p-1}\boldsymbol{M}_{r-2,s-2,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\right].\end{aligned}\tag{12.12.11}$$

由曲面的对称性, 可类似地写出在另外三种情形下的表达式.

证 由

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\boldsymbol{H}^{r-1,p-1;s-1,q-1}(u,v),$$

我们得

$$\partial^{i+j}\boldsymbol{h}^{r,p;s,q}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\partial^{i+j}\boldsymbol{R}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^j\right)=\partial^{i+j}\boldsymbol{H}^{r-1,p-1;s-1,q-1}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^j\right),$$
$$i=0,1,\cdots,r-1;\ \ j=0,1,\cdots,s-1.$$

展开上式两端可推出

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{h}_{i-k,j-l}^{r,p;s,q}\\&=\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\left(1-\frac{j}{s+q-1}\right)\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{M}_{i-k,j-l,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1},\\&\qquad i=0,1,\cdots,r-2;\quad j=0,1,\cdots,s-2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{r-1}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{h}_{r-1-k,j-l}^{r,p;s,q}\\&=\frac{p}{r+p-1}\left(1-\frac{j}{s+q-1}\right)\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{k+l}\binom{r-1}{k}\binom{j}{l}\boldsymbol{M}_{r-1-k,j-l,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\\&+\frac{p}{r+p-1}\left(1-\frac{j}{s+q-1}\right)\sum_{l=0}^{j}(-1)^{l}\binom{r-1}{0}\binom{j}{l}\boldsymbol{M}_{r-1,j-l,0,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1},\quad i=r-1;\ \ j=0,1,\cdots,s-2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{s-1}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{s-1}{l}\boldsymbol{h}_{i-k,s-1-l}^{r,p;s,q}\\&=\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\frac{q}{s+q-1}\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=1}^{s-1}(-1)^{k+l}\binom{i}{k}\binom{s-1}{l}\boldsymbol{M}_{i-k,s-1-l,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\\&+\left(1-\frac{i}{r+p-1}\right)\frac{q}{s+q-1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k}\binom{i}{k}\binom{s-1}{0}\boldsymbol{M}_{i-k,s-1,*,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1},\quad i=0,1,\cdots,r-2;\quad j=s-1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{s-1}(-1)^{k+l}\binom{r-1}{k}\binom{s-1}{l}\boldsymbol{h}_{r-1-k,s-1-l}^{r,p;s,q}\\&=\frac{p}{r+p-1}\frac{q}{s+q-1}\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{l=1}^{s-1}(-1)^{k+l}\binom{r-1}{k}\binom{s-1}{l}\boldsymbol{M}_{r-1-k,s-1-l,*,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\\&+\frac{p}{r+p-1}\frac{q}{s+q-1}\sum_{l=1}^{s-1}(-1)^{l}\binom{r-1}{0}\binom{s-1}{l}\boldsymbol{M}_{r-1,s-1-l,0,*}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\\&+\frac{p}{r+p-1}\frac{q}{s+q-1}\sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{k}\binom{r-1}{k}\binom{s-1}{0}\boldsymbol{M}_{r-1-k,s-1,*,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1}\\&+\frac{p}{r+p-1}\frac{q}{s+q-1}\boldsymbol{M}_{r-1,s-1,0,0}^{r-1,p-1;s-1,q-1},\qquad\qquad i=r-1,\quad j=s-1.\end{aligned}$$

在这个基础上, 应用数学归纳法即可证明(12.12.8). 证毕.

定理 12.12.3 当移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{is}^{r,p;s,q}(u,v)$, $\boldsymbol{H}_{rj}^{r,p;s,q}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{H}_{rs}^{r,p;s,q}(u,v)$ 分别被它们自己的一个控制顶点 $\boldsymbol{M}_{is*0}^{r,p;s,q}(i\neq r)$, $\boldsymbol{M}_{rj0*}^{r,p;s,q}(j\neq s)$ 和 $\boldsymbol{M}_{rs00}^{r,p;s,q}$ 来代替时, 相应的 H 逼近曲面 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)$ 恰为 $\boldsymbol{h}^{r+1,p;s+1,q}(u,v)$. 另三种情形与此类似. 换言之, Hermite 逼近曲面是 Hybrid 逼近曲面的特例, 即

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{h}^{r+1,p;s+1,q}(u,v),\quad \text{若取}\begin{cases}\boldsymbol{H}_{i,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{i,s,*,0}^{r,p;s,q},i\neq r;\\\boldsymbol{H}_{r,j}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,j,0,*}^{r,p;s,q},\ j\neq s;\\\boldsymbol{H}_{r,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,s,0,0}^{r,p;s,q}.\end{cases}\tag{12.12.12}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{h}^{r,p+1;s+1,q}(u,v),\quad \text{若取}\begin{cases}\boldsymbol{H}_{i,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{i,s,*,0}^{r,p;s,q},i\neq r;\\\boldsymbol{H}_{r,j}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,j,m,*}^{r,p;s,q},\ j\neq s;\\\boldsymbol{H}_{r,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,s,m,0}^{r,p;s,q}.\end{cases}\tag{12.12.13}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{h}^{r+1,p;s,q+1}(u,v),\quad 若取\begin{cases}\boldsymbol{H}_{i,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{i,s,*,n}^{r,p;s,q}, i\neq r;\\ \boldsymbol{H}_{r,j}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,j,0,*}^{r,p;s,q}, j\neq s;\\ \boldsymbol{H}_{r,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,s,0,n}^{r,p;s,q}.\end{cases}\tag{12.12.14}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{h}^{r,p+1;s,q+1}(u,v),\quad 若取\begin{cases}\boldsymbol{H}_{i,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{i,s,*,n}^{r,p;s,q}, i\neq r;\\ \boldsymbol{H}_{r,j}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,j,m,*}^{r,p;s,q}, j\neq s;\\ \boldsymbol{H}_{r,s}^{r,p;s,q}(u,v)=\boldsymbol{M}_{r,s,m,n}^{r,p;s,q}.\end{cases}\tag{12.12.15}$$

证 仅证(12.12.12), 由此式的条件以及(12.1.12), 通过简单的计算可以得出

$$\begin{aligned}
&\partial^{r+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(0,0)/\left(\partial u^r\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad j=0,1,\cdots,s-1;\\
&\partial^{i+s}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(0,0)/\left(\partial u^i\partial v^s\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,r;\\
&\partial^{r+j}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(0,1)/\left(\partial u^r\partial v^j\right)=\boldsymbol{0},\quad j=0,1,\cdots,q-1;\\
&\partial^{i+s}\boldsymbol{ER}^{r,p;s,q}(1,0)/\left(\partial u^i\partial v^s\right)=\boldsymbol{0},\quad i=0,1,\cdots,p-1.
\end{aligned}$$

由(12.12.6)及上式知道 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{h}^{r+1,p;s+1,q}(u,v)$ 在区域角点有相同的各阶混合偏导矢, 又因它们具有相同的次数 $(r+p)(s+q)$, 按 Hermite 逼近多项式的唯一性知它们恒等. 证毕.

12.13 Hybrid 曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的递推计算公式

算法 12.11.1 提供了由已知曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 计算相应的 Hybrid 曲面的方法. 为了提高计算速度并研究逼近的收敛性, 我们更需要探索由低次 Hybrid 曲面来推算高次 Hybrid 曲面的算法.

12.13.1 一般情况

为了推导不同次数的 Hybrid 曲面的控制顶点之间的关系, 要利用恒等式

$$\boldsymbol{R}(u,v)\equiv\boldsymbol{H}^{r,p;s.q}(u,v)\equiv\boldsymbol{H}^{r+1,p;s,q}(u,v).\tag{12.13.1}$$

注意到移动控制顶点 $\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)$ 本身是一张 $m\times n$ 次有理 Bézier 曲面, 它也可用一张 $(1+0)\times(0+0)$ 次 Hybrid 曲面 $\overline{\boldsymbol{H}}^{1,0;0,0}(u,v)$ 来表示, 设其控制顶点为 $\overline{\boldsymbol{M}}_{ijabkl}^{1,0;0,0}$, $i=0,1,\ldots,r+p;\quad j=0,1,\ldots,s+q;\quad a=0,1;\quad b=0;\quad k=0,1,\ldots,m;\quad l=0,1,\ldots,n;$ 则有

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q}(u,v)=\sum_{a=0}^{1}\sum_{b=0}^{0}B_a^1(u)B_b^0(v)\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\overline{\boldsymbol{M}}_{ijabkl}^{1,0;0,0}\Big/\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\right).\tag{12.13.2}$$

记

$$\begin{cases}G_{kl}=\dfrac{(m-k)\omega_{k+1,l}}{(k+1)\omega_{k,l}},\quad k=0,1,\ldots,m-1;\quad l=0,1,\ldots,n;\\ G_{ml}=G_{-1,l}^{-1}=0,\qquad\qquad l=0,1,\ldots,n;\end{cases}\tag{12.13.3}$$

按算法 12.11.1 的(12.11.8), (12.11.9), 可解出

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{ija0kl}^{1,0;0,0}=\begin{cases}\overline{\boldsymbol{M}}_{ij00*l}^{1,0;0,0}=\boldsymbol{M}_{ij0l}^{r,p;s,q}, & a=0,\\ \boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s,q}+G_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{i,j,k+1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{ij0l}^{r,p;s,q}\right), & a=1,\end{cases}\quad k=0,1,\ldots,m;\ l=0,1,\ldots,n.\tag{12.13.4}$$

把(12.13.2)代入 Hybrid 曲面表达式(12.11.1)得到

$$\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)=\sum_{i=0}^{r+1+p}\sum_{j=0}^{s+q}B_i^{r+1+p}(u)B_j^{s+q}(v)\frac{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}}{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}},\tag{12.13.5}$$

其中

$$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}=\left(\binom{r+p}{i-1}\overline{\boldsymbol{M}}_{i-1,j,1,0,k,l}^{1,0;0,0}+\binom{r+p}{i}\overline{\boldsymbol{M}}_{i,j,0,0,k,l}^{1,0;0,0}\right)\Big/\binom{r+p+1}{i}. \qquad (12.13.6)$$

另一方面，有

$$\boldsymbol{H}^{r+1,p;s,q}(u,v)=\sum_{i=0}^{r+1+p}\sum_{j=0}^{s+q}B_i^{r+1+p}(u)B_j^{s+q}(v)\frac{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}}{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}}. \qquad (12.13.7)$$

按(12.13.5), (12.13.7)和(12.13.1)，我们有

$$\sum_{i=0}^{r+1+p}\sum_{j=0}^{s+q}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}B_i^{r+1+p}(u)B_j^{s+q}(v)B_k^m(u)B_l^n(v)\omega_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}-\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}\right)=\boldsymbol{0}, \qquad (12.13.8)$$

即

$$\sum_{I=0}^{r+1+p+m}\sum_{J=0}^{s+q+n}B_I^{r+1+p+m}(u)B_J^{s+q+n}(v)\sum_{i+k=I}\sum_{j+l=J}\binom{m}{k}\binom{r+1+p}{i}\binom{n}{l}\binom{s+q}{j}$$

$$\times\left(\binom{r+1+p+m}{I}\binom{s+q+n}{J}\right)^{-1}\omega_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}-\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}\right)=\boldsymbol{0}. \qquad (12.13.9)$$

再由基的线性无关性，可得

$$\sum_{i+k=I}\sum_{j+l=J}\binom{m}{k}\binom{r+1+p}{i}\binom{n}{l}\binom{s+q}{j}\omega_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}-\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}\right)=\boldsymbol{0},$$
$$I=0,1,\ldots,r+1+p+m;\qquad J=0,1,\ldots,s+q+n. \qquad (12.13.10)$$

下面分析方程组(12.13.10)中的向量．由(12.13.6)及(12.13.4)可知当$i\neq r+1,\ j\neq s$时，

$$\begin{aligned}\binom{r+p+1}{i}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}&=\binom{r+p}{i-1}\overline{\boldsymbol{M}}_{i-1,j,1,0,k,l}^{1,0;0,0}+\binom{r+p}{i}\overline{\boldsymbol{M}}_{i,j,0,0,k,l}^{1,0;0,0}\\&=\binom{r+p}{i-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k,l}^{r,p;s,q}+G_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k+1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i-1,j,0,l}^{r,p;s,q}\right)\right)+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i,j,0,l}^{r,p;s,q}\\&=\binom{r+p}{i-1}\boldsymbol{M}_{i-1,j,*,*}^{r,p;s,q}+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i,j,0,*}^{r,p;s,q}.\end{aligned}$$

这表明$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0}$与$k,l$均无关；同理当$i\neq r+1,\ j=s$时，$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{iskl}^{1,0;0,0}$是$\boldsymbol{M}_{i-1,s,*,l}^{r,p;s,q}$与$\boldsymbol{M}_{i,s,0,l}^{r,p;s,q}$的线性组合，与$k$无关；当$i=r+1,\ j\neq s$时，$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,j,k,l}^{1,0;0,0}$是$\boldsymbol{M}_{r,j,k,*}^{r,p;s,q}$，$\boldsymbol{M}_{r,j,k+1,*}^{r,p;s,q}$，$\boldsymbol{M}_{r,j,0,*}^{r,p;s,q}$与$\boldsymbol{M}_{r+1,j,0,*}^{r,p;s,q}$的线性组合，与$l$无关；于是我们可记

$$\begin{cases}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i,j,k,l}^{1,0;0,0}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i,j,*,*}^{1,0;0,0}, & i\neq r+1,\ j\neq s;\\ \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i,s,k,l}^{1,0;0,0}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{i,s,*,l}^{1,0;0,0}, & i\neq r+1,\ j=s;\quad k=0,1,\ldots,m;\quad l=0,1,\ldots,n.\\ \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,j,k,l}^{1,0;0,0}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,j,k,*}^{1,0;0,0}, & i=r+1,\ j\neq s;\end{cases} \qquad (12.13.11)$$

另一方面按照(12.11.6)有

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r+1,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{i,j,*,*}^{r+1,p;s,q}, & i\neq r+1,\ j\neq s;\\ \boldsymbol{M}_{i,s,k,l}^{r+1,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{i,s,*,l}^{r+1,p;s,q}, & i\neq r+1,\ j=s;\quad k=0,1,\ldots,m;\quad l=0,1,\ldots,n.\\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,k,l}^{r+1,p;s,q}=\boldsymbol{M}_{r+1,j,k,*}^{r+1,p;s,q}, & i=r+1,\ j\neq s;\end{cases} \qquad (12.13.12)$$

(12.13.11)和(12.13.12)表明方程组(12.13.10)只有$(r+p+m+2)(s+q+n+1)$个未知向量，仿照方程组(12.11.4)的解法，我们可依次解出$\boldsymbol{M}_{ij**}^{r+1,p;s,q}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ij**}^{1,0;0,0}$ $(i=0,1,\ldots,r;$ $j=0,1,\ldots,s-1$; 或 $i=0,1,\ldots,r$; $j=s+q+n,s+q+n-1,\ldots,s+1$; 或 $i=r+p+m+1,$ $r+p+m,\ldots,r+2$; $j=0,1,\ldots,s-1$; 或 $i=r+p+m+1,$ $r+p+m,\ldots,r+2;$ $j=s+q+n,\ s+q+n-1,\ldots,s-1)$；$\boldsymbol{M}_{is*l}^{r+1,p;s,q}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{is*l}^{1,0;0,0}$ $(i=0,1,\ldots,r;\quad l=0,1,\ldots,n$ 或

$i=r+p+m+1,r+p+m,\dots,r+2;\ l=0,1,\dots,n)$; $\boldsymbol{M}_{r+1,j,k,*}^{r+1,p;s,q}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,j,k,*}^{1,0;0,0}$ $(j=0,1,\dots,s-1;$ $k=0,1,\dots,m$ 或 $j=s+q+n,s+q+n-1,\ \dots,s+1;\ k=0,1,\dots,m)$; $\boldsymbol{M}_{r+1,s,k,l}^{r+1,p;s,q}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{r+1,s,k,l}^{1,0;0,0}$ $(k=0,1,\dots,m$; $l=0,1,\dots,n)$，即

$$\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}=\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}_{ijkl}^{1,0;0,0},$$

$$i=0,1,\dots,r+p+1;\quad j=0,1,\dots,s+q;\quad k=0,1,\dots,m;\quad l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.13}$$

把 (12.13.6) 和 (12.13.4) 代入上式，就得到 $((r+1)+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面与 $(r+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面的控制顶点之间的递推关系

$$\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q}=\left[\binom{r+p}{i-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k,l}^{r,p;s,q}+G_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k+1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i-1,j,0,l}^{r,p;s,q}\right)\right)+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i,j,0,l}^{r,p;s,q}\right]\Big/\binom{r+p+1}{i},$$

$$i=0,1,\dots,r+1+p;\quad j=0,1,\dots,s+q;\ k=0,1,\dots,m;\quad l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.14}$$

利用对称性，我们类似地有

$$\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p+1;s,q}=\left[\binom{r+p}{i-1}\boldsymbol{M}_{i-1,j,m,l}^{r,p;s,q}+\binom{r+p}{i}\left(\boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q}+G_{k-1,l}^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{i,j,k-1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i,j,m,l}^{r,p;s,q}\right)\right)\right]\Big/\binom{r+p+1}{i},$$

$$i=0,1,\dots,r+1+p;\quad j=0,1,\dots,s+q;\quad k=0,1,\dots,m;\ l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.15}$$

综合以上两式，进一步可得 $((r+1)+(p+1))(s+q)$ 次 Hybrid 曲面与 $(r+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面的控制顶点之间的递推关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p+1;s,q}=&\left[\binom{r+p}{i-2}\boldsymbol{M}_{i-2,j,n,l}^{r,p;s,q}+2\binom{r+p}{i-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k,l}^{r,p;s,q}+\frac{1}{2}G_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k+1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i-1,j,0,l}^{r,p;s,q}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}G_{k-1,l}^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{i-1,j,k-1,l}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i-1,j,n,l}^{r,p;s,q}\right)\right)+\binom{r+p}{i}\boldsymbol{M}_{i,j,0,l}^{r,p;s,q}\right]\Big/\binom{r+p+2}{i},\end{aligned}$$

$$i=0,1,\dots,r+p+2;\quad j=0,1,\dots,s+q;\quad k=0,1,\dots,m;\ l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.16}$$

再记

$$\begin{cases}H_{kl}=\dfrac{(n-l)\omega_{k,l+1}}{(l+1)\omega_{k,l}}, & k=0,1,\dots,m;\ l=0,1,\dots,n-1;\\ H_{kn}=H_{k,-1}^{-1}=0, & k=0,1,\dots,m;\end{cases} \tag{12.13.17}$$

我们可类似地得到 $(r+p)((s+1)+(q+1))$ 次 Hybrid 曲面与 $(r+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面的控制顶点之间的递推关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p;s+1,q+1}=&\left[\binom{s+q}{j-2}\boldsymbol{M}_{i,j-2,k,m}^{r,p;s,q}+2\binom{s+q}{j-1}\left(\boldsymbol{M}_{i,j-1,k,l}^{r,p;s,q}+\frac{1}{2}H_{kl}\left(\boldsymbol{M}_{i,j-1,k,l+1}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i,j-1,k,0}^{r,p;s,q}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}H_{k,l-1}^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{i,j-1,k,l-1}^{r,p;s,q}-\boldsymbol{M}_{i,j-1,k,m}^{r,p;s,q}\right)\right)+\binom{s+q}{j}\boldsymbol{M}_{i,j,k,0}^{r,p;s,q}\right]\Big/\binom{s+q+2}{j},\end{aligned}$$

$$i=0,1,\dots,r+p;\ j=0,1,\dots,s+q+2;\ k=0,1,\dots,m;\ l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.18}$$

综合(12.13.16)和(12.13.18)，最后可得到 $((r+1)+(p+1))((s+1)+(q+1))$ 次 Hybrid 曲面与 $(r+p)(s+q)$ 次 Hybrid 曲面的控制顶点之间的递推关系.

12.13.2 简化情况

为便于计算，我们希望把上一小节的递推关系写为矩阵形式. 假定有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的权因子满足关系式

$$\omega_{kl}=\alpha_k\beta_l,\qquad k=0,1,\dots,m;\ \ l=0,1,\dots,n. \tag{12.13.19}$$

再假设

$$\begin{cases} g_k = \dfrac{(m-k)\alpha_{k+1}}{(k+1)\alpha_k}, \quad h_l = \dfrac{(n-l)\beta_{l+1}}{(l+1)\beta_l}, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \quad l=0,1,\ldots,n-1; \\ g_m = g_{-1}^{-1} = h_n = h_{-1}^{-1} = 0. \end{cases} \tag{12.13.20}$$

注意到对曲面 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 有(12.11.5)成立, (12.13.14)和(12.13.15)就被分别简化为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{ijkl}^{r+1,p;s,q} = \left[\begin{pmatrix} r+p \\ i-1 \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i-1,j,*,l}^{r,p;s,q} + \begin{pmatrix} r+p \\ i \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i,j,0,l}^{r,p;s,q}\right] \Big/ \begin{pmatrix} r+p+1 \\ i \end{pmatrix}, \\ \qquad i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+1;\ j=0,1,\ldots,s+q; \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{r+1,j,0,l}^{r+1,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,1,l}^{r+1,p;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,m,l}^{r+1,p;s,q} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_m^{r,p}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{r,j,0,l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r,j,1,l}^{r,p;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{r,j,m,l}^{r,p;s,q} \end{pmatrix} + \dfrac{p}{r+p+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,j,*,l}^{r,p;s,q}, \\ \qquad j=0,1,\ldots,s+q;\ l=0,1,\ldots,n. \end{cases} \tag{12.13.21}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{ijkl}^{r,p+1;s,q} = \left[\begin{pmatrix} r+p \\ i \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i,j,*,l}^{r,p;s,q} + \begin{pmatrix} r+p \\ i-1 \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i-1,j,m,l}^{r,p;s,q}\right] \Big/ \begin{pmatrix} r+p+1 \\ i \end{pmatrix}, \\ \qquad i=0,1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,r+p+1;\ j=0,1,\ldots,s+q; \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{rj0l}^{r,p+1;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{rj1l}^{r,p+1;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{rjml}^{r,p+1;s,q} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_m^{r,p}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{rj0l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{rj1l}^{r,p;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{rjml}^{r,p;s,q} \end{pmatrix} + \dfrac{r}{r+p+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r-1,j,*,l}^{r,p;s,q}, \\ \qquad j=0,1,\ldots,s+q;\ l=0,1,\ldots,n. \end{cases} \tag{12.13.22}$$

这里 $\mathbf{C}_m^{r,p},\mathbf{D}_m^{r,p}$ 为 $(m+1)(m+1)$ 阶矩阵(12.10.21), (12.10.22). 同样地, (12.13.16)也被简化为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{ij*l}^{r+1,p+1;s,q} = \mathbf{E}_i^{r,p}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{i-2,j,m,l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{i-1,j,*,l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{i,j,0,l}^{r,p;s,q} \end{pmatrix}, \quad i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+2; \\ \qquad j=0,1,\ldots,s+q; \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{r+1,j,0,l}^{r+1,p+1;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,1,l}^{r+1,p+1;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,m-1,l}^{r+1,p+1;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,m,l}^{r+1,p+1;s,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_m^{r,p} & \mathbf{V}_m^{r,p} & \mathbf{W}_m^{r,p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{r-1,j,*,l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r,j,0,l}^{r,p;s,q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{r,j,m,l}^{r,p;s,q} \\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,*,l}^{r,p;s,q} \end{pmatrix}, \quad j=0,1,\ldots,s+q. \end{cases} \tag{12.13.23}$$

其中 $\mathbf{E}_i^{r,p}$ 为 1×3 阶矩阵, $\mathbf{U}_m^{r,p},\mathbf{W}_m^{r,p}$ 为 $(m+1)\times1$ 阶矩阵, $\mathbf{V}_m^{r,p}$ 为 $(m+1)\times(m+1)$ 阶矩阵, 分别如(12.10.23) – (12.10.26)所示.

与上述情形相对称, 按(12.11.5), 可把(12.13.18)简化为下列形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{ijk*}^{r,p;s+1,q+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{i,j-2,k,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,j-1,k,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,j,k,0}^{r,p;s,q} \end{pmatrix}\mathbf{F}_j^{s,q}, \\ \qquad i=0,1,\ldots,r+p;\ j=0,1,\ldots,s,s+2,\ldots,s+q+2; \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{i,s+1,k,0}^{r,p;s+1,q+1} \\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,k,1}^{r,p;s+1,q+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,k,n-1}^{r,p;s+1,q+1} \\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,k,n}^{r,p;s+1,q+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{i,s-1,k,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s,k,0}^{r,p;s,q} & \cdots & \boldsymbol{M}_{i,s,k,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s+1,k,*}^{r,p;s,q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s,q} \\ \mathbf{Y}_n^{s,q} \\ \mathbf{Z}_n^{s,q} \end{pmatrix} \\ \qquad i=0,1,\ldots,r+p; \end{cases} \tag{12.13.24}$$

这里 $\mathbf{F}_j^{s,q}$ 为 3×1 矩阵, $\mathbf{X}_n^{sq},\mathbf{Z}_n^{sq}$ 为 $1\times(n+1)$ 矩阵, $\mathbf{Y}_n^{sq}$ 为 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵:

$$\mathbf{F}_j^{s,q}=\left(\begin{pmatrix}\binom{s+q}{j-2} & 2\binom{s+q}{j-1} & \binom{s+q}{j}\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\Big/\binom{s+q+2}{j}, \tag{12.13.25}$$

$$\mathbf{X}_n^{s,q}=\frac{s(s+1)}{(s+q+1)(s+q+2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}, \tag{12.13.26}$$

$$\mathbf{Z}_n^{s,q}=\frac{q(q+1)}{(s+q+1)(s+q+2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}, \tag{12.13.27}$$

$$\mathbf{Y}_n^{s,q}=\frac{(s+1)(q+1)}{(s+q+1)(s+q+2)}\times\begin{pmatrix}2-h_0 & h_0^{-1}-h_1 & -h_2 & \cdots & -h_{n-2} & -h_{n-1} & 0\\ h_0 & 2 & h_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & h_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & h_{n-2}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2 & h_{n-1}^{-1}\\ 0 & -h_0^{-1} & -h_1^{-1} & \cdots & -h_{n-3}^{-1} & h_{n-1}-h_{n-2}^{-1} & 2-h_{n-1}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{12.13.28}$$

综合(12.13.23)和(12.13.24)，按(12.11.5)，可知 $\boldsymbol{H}^{r+1,p+1;s+1,q+1}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{H}^{r,p;s,q}(u,v)$ 的控制顶点之间的递推关系由下列对称的矩阵式来表示:

$$\boldsymbol{M}_{ij**}^{r+1,p+1;s+1,q+1}=\mathbf{E}_i^{r,p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i-2,j-2,m,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-2,j-1,m,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-2,j,m,0}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{i-1,j-2,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,j-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,j,*,0}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{i,j-2,0,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,j-1,0,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,j,0,0}^{r,p;s,q}\end{pmatrix}\mathbf{F}_j^{s,q},$$

$$i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+2;\quad j=0,1,\ldots,s,s+2,\ldots,s+q+2; \tag{12.13.29}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,j,0,*}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,1,*}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,m-1,*}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,j,m,*}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}_m^{r,p} & \mathbf{V}_m^{r,p} & \mathbf{W}_m^{r,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r-1,j-2,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r-1,j-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r-1,j,*,0}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{r,j-2,0,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,j-1,0,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,j,0,0}^{r,p;s,q}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{M}_{r,j-2,m,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,j-1,m,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,j,m,0}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,j-2,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r+1,j-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r+1,j,*,0}^{r,p;s,q}\end{pmatrix}\mathbf{F}_j^{s,q},$$

$$j=0,1,\ldots,s,s+2,\ldots,s+q+2;\qquad k=0,1,\ldots,m; \tag{12.13.30}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i,s+1,*,0}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,*,1}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,*,n-1}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{i,s+1,*,n}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}_i^{r,p}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{i-2,s-1,m,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,s-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s-1,0,*}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{i-2,s,m,0}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,s,*,0}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s,0,0}^{r,p;s,q}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{M}_{i-2,s,m,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,s,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s,0,n}^{r,p;s,q}\\ \boldsymbol{M}_{i-2,s+1,m,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i-1,s+1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{i,s+1,0,*}^{r,p;s,q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_n^{s,q}\\ \\ \mathbf{Y}_n^{s,q}\\ \\ \mathbf{Z}_n^{s,q}\end{pmatrix},$$

$$i=0,1,\ldots,r,r+2,\ldots,r+p+2;\quad l=0,1,\ldots,n; \tag{12.13.31}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{r+1,s+1,0,0}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,0,1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,0,n-1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,0,n}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,1,0}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,1,1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,1,n-1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,1,n}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m-1,0}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m-1,1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m-1,n-1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m-1,n}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\\ \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m,0}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m,1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m,n-1}^{r+1,p+1;s+1,q+1} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,m,n}^{r+1,p+1;s+1,q+1}\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_m^{r,p} & \mathbf{V}_m^{r,p} & \mathbf{W}_m^{r,p} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{M}_{r-1,s-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r-1,s,*,0}^{r,p;s,q} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r-1,s,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r-1,s+1,*,*}^{r,p;s,q} \\
\boldsymbol{M}_{r,s-1,0,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,s,0,0}^{r,p;s,q} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r,s,0,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,s+1,0,*}^{r,p;s,q} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{M}_{r,s-1,m,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,s,m,0}^{r,p;s,q} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r,s,m,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r,s+1,m,*}^{r,p;s,q} \\
\boldsymbol{M}_{r+1,s-1,*,*}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r+1,s,*,0}^{r,p;s,q} & \cdots & \boldsymbol{M}_{r+1,s,*,n}^{r,p;s,q} & \boldsymbol{M}_{r+1,s+1,*,*}^{r,p;s,q}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s,q} \\ \mathbf{Y}_n^{s,q} \\ \mathbf{Z}_n^{s,q} \end{pmatrix},
$$

$$k = 0,1,\ldots,m; \quad l = 0,1,\ldots,n; \quad (12.13.32)$$

其中$\mathbf{E}_i^{r,p}, \mathbf{U}_m^{r,p}, \mathbf{W}_m^{r,p}, \mathbf{V}_m^{r,p}$如(12.10.23) – (12.10.26)所示, $\mathbf{F}_j^{s,q}, \mathbf{X}_n^{s,q}, \mathbf{Z}_n^{s,q}, \mathbf{Y}_n^{s,q}$如(12.13.25) – (12.13.28)所示.

12.14 有理 Bézier 曲面 $\boldsymbol{H}\langle r, p; s, q\rangle$ 逼近的收敛条件

12.14.1 $\boldsymbol{H}\langle r, p; s, q\rangle$ 逼近余项的界

由定理 12.12.3 可知, 有理曲面的 Hermite 逼近与 Hybrid 逼近在收敛条件上是等价的, 所以仅需讨论后者. 假设

$$\Delta_{i,j}^{r,p;s,q} = \operatorname*{Max}_{\substack{0 \le k \le m \\ 0 \le l \le n}} \left\| \boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q} - \boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q} \right\|, \tag{12.14.1}$$

$$\Delta_{\max}^{r,p;.s,q} = \operatorname*{Max}_{i=r \text{ 或 } j=s} \Delta_{ij}^{r,p;.s,q}, \tag{12.14.2}$$

由(12.12.5)可得逼近余项的绝对误差

$$
\begin{aligned}
& ER^{r,p;s,q}(u,v) = \left\| \boldsymbol{R}(u,v) - \widetilde{\boldsymbol{H}}^{r,p;s,q}(u,v) \right\| \\
& \le B_s^{s+q}(v) \sum_{\substack{i=0 \\ i \ne r}}^{r+p} B_i^{r+p}(u) \Delta_{is}^{r,p;s,q} + B_r^{r+p}(u) \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne s}}^{s+q} B_j^{s+q}(v) \Delta_{rj}^{r,p;s,q} + B_r^{r+p}(u) B_s^{s+q}(v) \Delta_{rs}^{r,p;s,q} \\
& \le \left(B_s^{s+q}(v) + B_r^{r+p}(u) - B_r^{r+p}(u) B_s^{s+q}(v) \right) \Delta_{\max}^{r,p;s,q}.
\end{aligned} \tag{12.14.3}
$$

记集合 X 的直径为 $d(X)$, 注意到

$$\left\| \boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q} - \boldsymbol{H}_{ij}^{r,p;s,q} \right\| \le d(\{\boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q}\}_{k=0,l=0}^{m,n}) \le 2 \operatorname*{Max}_{\substack{0 \le k \le m \\ 0 \le l \le n}} \left\| \boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q} - \boldsymbol{M}_{i,j,0,0}^{r,p;s,q} \right\|,$$

又得

$$ER^{r,p;s,q}(u,v) \le 2\Delta_{\max}^{r,p;s,q} \le 4 \operatorname*{Max}_{i=r \text{ 或 } j=s} \operatorname*{Max}_{\substack{0 \le k \le m \\ 0 \le l \le n}} \left\| \boldsymbol{M}_{i,j,k,l}^{r,p;s,q} - \boldsymbol{M}_{i,j,0,0}^{r,p;s,q} \right\|. \tag{12.14.4}$$

12.14.2 $\boldsymbol{H}\langle s, s; s, s\rangle$ 逼近收敛的一个充分条件

考察最常见的情况: $r = p = s = q$. 在这种情况下, 由(12.4.7)和(12.14.3)可得

$$ER^{s,s;s,s}(u,v) = \left\| \boldsymbol{R}(u,v) - \widetilde{\boldsymbol{H}}^{s,s;,s,s}(u,v) \right\| \le 2 \binom{2s}{s} \left(\frac{1}{2} \right)^{2s} \Delta_{\max}^{s,s;s,s}. \tag{12.14.5}$$

因而 $\boldsymbol{H}^{s,s;s,s}(u,v)$ 收敛到曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的一个充分条件是存在常数 a, $0 < a < 1/2$, 使

$$\Delta_{\max}^{s,s;s,s} = O\left(s^a\right), \qquad s \to \infty. \tag{12.14.6}$$

12.14.3 $\boldsymbol{H}\langle r, p; s, q\rangle$ 逼近收敛的充要条件

仿 § 12.9 中对 Hybrid 逼近曲线收敛条件的分析方法, 运用恒等变换的技巧, 我们不难得到

定理 12.14.1 在简化情况(12.13.19)下, Hybrid 曲面(12.11.1)的移动控制顶点(12.11.2)当 $r + p \to \infty$, $s + q \to \infty$ 时都收敛的充分必要条件为 $\Theta(u) = \sum_{k=0}^{m} B_k^m(u) \alpha_k$ 的所有根

$\theta_i\ (i=1,2,\ldots,d_1)$ 和 $\Phi(v)=\sum_{l=0}^{n}B_l^n(v)\beta_l$ 的所有根 $\varphi_j\ (j=1,2,\ldots,d_2)$ 满足

$$\begin{cases}|\theta_i|^{a_1}|1-\theta_i|^{b_1} > a_1^{a_1}b_1^{b_1}, & i=1,2,\ldots,d_1;\\ |\varphi_j|^{a_2}|1-\varphi_j|^{b_2} > a_2^{a_2}b_2^{b_2}, & j=1,2,\ldots,d_2;\end{cases} \tag{12.14.7}$$

其中

$$a_1=\lim_{r+p\to\infty} r/(r+p),\ b_1=1-a_1;\ \ a_2=\lim_{s+q\to\infty} s/(s+q),\ b_2=1-a_2. \tag{12.14.8}$$

主要文献

[WGJ, STW, CFL, 97] Wang Guojin, Sederberg T.W., Chen Falai, On the convergence of polynomial approximation of rational functions, Journal of Approximation Theory, 1997, 89(3): 267–288

[LLG, WGJ, 2000a] Liu Ligang, Wang Guojin, Recursive formulae for Hermite polynomial approximations to rational Bézier curves. Proceedings of Geometric Modeling and Processing 2000: Theory and Applications, HongKong, 2000, IEEE Computer Society, Los Alamitos, California, 2000: 190-197

[WGZ, ZJM, 97] Wang Guozhao, Zheng Jianmin, Bounds on the moving control points of hybrid curves, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1997, 59(1): 19–25

[WGZ, LW, CFL, 95] Wang Guozhao, Lü Wei, Chen Falai, On the convergence of moving control points of hybrid curves, submitted.

[QGX, WGJ, 2000] Qiu Guoxian, Wang Guojin, Approximating rational surfaces using polynomial surfaces, submitted.

[LLG, WGJ, 2000b] Liu Ligang, Wang Guojin, Two types of polynomial approximation to rational surfaces and their convergence, to appear in Journal of Software Research

参考文献

1 Ball, A.A. CONSURF Part 1: Introduction of the conic lofting title, Computer Aided Design, 1974, 6(4): 243-249

2 Sederberg, T.W., Kakimoto, M. Approximating rational curves using polynomial curves. in: Farin, G., ed., *NURBS for Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, 1991, 144-158

3 Davis, P.J., *Interpolation and Approximation*, 2nd Edition, Dover, New York, 1975

4 Marshall, C.P., *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press, New York, 1965

5 Stephen, H.F., Arnold, J.I., and Lawrence, E.S., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989

6 Nicholas, J.D., *Advanced Calculus with Applications*, Macmillan, New York, 1982

7 Burnside, W.S., Panton, A.W., *The Theory of Equations*, Dover, New York, 1960

8 Mulmuley, K., *Computational Geometry: An Introduction through Randomized Algorithms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994

9 Roger, A.H., Charles, R.J., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985

10 Bruce, P.P., *An Introduction to Complex Function Theory*, Spring-Verlag, New York, 1991