第四章 有理 B 样条曲线

把多项式形式的 Bézier 曲线向有理多项式推广得到了前章的有理 Bézier 曲线; 同样地，把分段多项式形式的非均匀 B 样条曲线向分段有理多项式推广，可得到非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Spline，简称 NURBS)曲线．它兼有 B 样条曲线形状局部可调及连续阶数可调的优点，又兼有有理 Bézier 曲线可精确表示圆锥曲线的特性，所以在 1991 年国际标准化组织 ISO 正式颁布的工业产品数据交换的 STEP 标准中，把 NURBS 作为自由曲线曲面的唯一定义[1]; 而国际著名的 CAD 软件公司也把造型系统首先建立在 NURBS 的数学模型上．最早提出有理 B 样条的是 Versprille[2]， 继之研究的有 Piegl[3-7]， Tiller[8-10]，李华[11]等，而 Choi[12]，Grabowski[13]等则致力于研究 NURBS 系数的矩阵表示．鉴于 NURBS 的特例—B 样条曲线和有理 Bézier 曲线的性质在前几章已有论述，我们不难据此一一写出 NURBS 的相应性质，因此本章将重点介绍我们的研究成果．

1. 人们常用 deBoor-Cox 递推公式定义 NURBS 曲线，然而它缺乏直观的几何意义．我们从论证 NURBS 曲线族包络的存在性和唯一性出发，在国际上首次给出 NURBS 曲线的全新的直观的几何定义．它是研究 NURBS 的有力工具．

2. 人们习惯于对 NURBS 运用齐次坐标作运算，但用齐次坐标难以在三维世界中推断其几何性质．我们重点剖析其离散构造，以离散 NURBS 曲线作工具，使其保凸性和 V.D.性显而易见．

3. deBoor 递推公式和 Boehm 嵌节点公式是 NURBS 求值、转化等主要工具，优点是计算稳定而简单. 但因需重复执行递推算法，与幂基的矩阵形式相比，时间复杂度[12]上前者是指数式的，后者是多项式的，且后者适于应用秦九韶-Horner 算法；表达形式上前者是多式连环的，在理论推导上不大方便，而后者是简洁清晰的．因此需要找到 NURBS 在幂基下的系数矩阵显式表示. deBoor[14]， Schumaker[15]给出了这种表示的数值算法，Cohen 和 Riesenfeld[16]给出了节点均匀时的矩阵表示，Ding 和 Davies[17] 给出了节点非均匀时的矩阵表示但限于三次，Choi[12]和 Grabowski[13]分别给出了节点非均匀时基于 Boehm 算法和 deBoor 算法的任意次数的递推关系的矩阵表示，但仍是非解析式表示．而我们给出了最一般情况的两种显式矩阵表示，有助于 NURBS 的表示、求值、嵌节点、升阶、转换等理论研究及实际应用．本章第 1, 2 节内容取材于[WGJ, WGZ, 99], [LW, LYD, 95]；第 3 节内容取材于[WGJ, 92]；第 4 节内容取材于[LLG, WGJ, 2000].

4.1 NURBS 曲线的一般定义、递推求值及离散构造

定义 4.1.1 给定 $\Re^3$ 空间中，齐次坐标下 n 个点 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i=(w_ix_i,w_iy_i,w_iz_i,w_i)$, $w_i>0$, $i=1,2,\cdots n$，给定参数 t 轴的一个不均匀分割 $T=\{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$，$t_j\le t_{j+1}$，$N_{i,k}(t)$ 是相应于 T 的 k 阶 B 样条基，则 k 阶有理参数曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=(X(t),Y(t),Z(t),w(t))=\sum_{i=1}^{n}N_{i,k}(t)\tilde{\boldsymbol{r}}_i,\ t_k\le t\le t_{n+1},\ n\ge k \tag{4.1.1}$$

称为相应于节点向量 T 的 k 阶（$k-1$次）非均匀有理 B 样条曲线， $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ 称为控制顶点，$\tilde{\boldsymbol{r}}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_2\cdots\tilde{\boldsymbol{r}}_n$ 称为控制多边形．而(4.1.1)在仿射坐标系下的对应表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=\left(\frac{X(t)}{w(t)},\frac{Y(t)}{w(t)},\frac{Z(t)}{w(t)}\right)=\sum_{i=1}^{n}N_{i,k}(t)w_i\boldsymbol{r}_i\Big/\sum_{i=1}^{n}N_{i,k}(t)w_i, \tag{4.1.2}$$

$$\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i),\quad t_k\le t\le t_{n+1},\ n\ge k\,.$$

曲线(4.1.2)具有可退化性．即当 $w_1=w_2=\cdots=w_n$ 时，它退化为(2.2.1)；当 $n=k,t_2=t_3=\cdots=t_k<t_{k+1}=t_{k+2}=\cdots=t_{2k-1}$ 时，它退化为 $k-1$ 次有理 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{i=1}^{k}B_{i-1}^{k-1}[(t-t_k)/(t_{k+1}-t_k)]w_i^*\boldsymbol{r}_i^*\Big/\sum_{i=1}^{k}B_{i-1}^{k-1}[(t-t_k)/(t_{k+1}-t_k)]w_i^*,\quad t_k\le t\le t_{k+1};$$

而且它还具有与性质 2.3.1–2.3.7 相类似的性质． 此外我们可把 deBoor 的 B 样条求值算法 2.4.1 推广到 NURBS 曲线．

算法 4.1.1（k 阶 NURBS 曲线递归求值及几何作图）

对曲线(4.1.2)及任意固定的参数 $t\in[t_j,t_{j+1}), k\le j\le n$，递归地计算

$$w_i^{[r]}(t)=\begin{cases} w_i, & r=0; i=j-k+1, j-k+2,\cdots, j, \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}w_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}w_{i-1}^{[r-1]}(t), & \\ \qquad r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots, j, & \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$$\boldsymbol{r}_i^{[r]}(t)=\begin{cases} \boldsymbol{r}_i, & r=0; i=j-k+1, j-k+2,\cdots, j, \\ \dfrac{(t-t_i)w_i^{[r-1]}(t)}{(t-t_i)w_i^{[r-1]}(t)+(t_{i+k-r}-t)w_{i-1}^{[r-1]}(t)}\boldsymbol{r}_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{(t_{i+k-r}-t)w_{i-1}^{[r-1]}(t)}{(t-t_i)w_i^{[r-1]}(t)+(t_{i+k-r}-t)w_{i-1}^{[r-1]}(t)}\boldsymbol{r}_{i-1}^{[r-1]}(t), & \\ \qquad r=1,2,\cdots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\cdots, j, & \end{cases} \tag{4.1.4}$$

则

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_j^{[k-1]}(t). \tag{4.1.5}$$

算法 4.1.1 的几何意义也是对控制多边形的 $k-1$ 层割角，但割角系数不仅与参数值 t，节点值，割角层数 r 和割角边序号 i 有关，也与曲线的权因子有关．

同样，我们可仿 (2.10.1)，(2.10.2) 定义 k 阶有理离散 B 样条曲线 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$，并应用(2.10.4)得出描述 NURBS 曲线离散结构的

定理 4.1.1 设 $t'\in(t_\mu,t_{\mu+1}]$，$T'=T_1\oplus T_2$，记嵌节点变换 T' 以后新的控制顶点和权因子分别为

$$\boldsymbol{r}_{j,k}^{(T,T')}=\sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j)w_{i,k}^{(T)}\boldsymbol{r}_{i,k}^{(T)}\Big/\sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j)w_{i,k}^{(T)},\quad w_{j,k}^{(T,T')}=\sum_i \alpha_{i,k}^{(T,T')}(j)w_{i,k}^{(T)}, \tag{4.1.6}$$

这里所有记号的意义如§2.10 所示，则必有

$$\boldsymbol{r}_{j,k}^{(T,T')}=\sum_l \alpha_{l,k}^{(T\oplus T_1,T_2)}(j)w_{l,k}^{(T,T_1)}\boldsymbol{r}_{l,k}^{(T,T_1)}\Big/\sum_l \alpha_{l,k}^{(T\oplus T_1,T_2)}(j)w_{l,k}^{(T,T_1)}, \tag{4.1.7}$$

$$\boldsymbol{r}_k(t)=\sum_j N_{j,k}^{(T\oplus T')}(t)w_{j,k}^{(T,T')}\boldsymbol{r}_{j,k}^{(T,T')}\Big/\sum_j N_{j,k}^{(T\oplus T')}(t)w_{j,k}^{(T,T')}, \tag{4.1.8}$$

$$\boldsymbol{r}_k(t')=\boldsymbol{r}_{\mu,k}^{(T,\{t'\}^{k-1})}. \tag{4.1.9}$$

定理 4.1.1 具有与定理 2.10.2 类似的鲜明的几何意义．我们也可推知，有理离散 B 样条曲线必收敛到 NURBS 曲线．

推论 4.1.1 存在节点集序列 $\{T_m'\}, T_m'\subseteq T_{m+1}', m=1,2,\cdots$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_m')=\boldsymbol{r}_k(t). \tag{4.1.10}$$

4.2 平面 NURBS 曲线的保形性

定义 4.2.1 若平面连续曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是平面上某一凸集的边界或边界的一部分，则称它是凸曲线，并记 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma})$ 为以 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为边界或部分边界的最小凸闭集．

引理 4.2.1 设 Φ 为空集，并设平面 NURBS 曲线(4.1.2)的初始控制多边形 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi)$ 为凸曲线，则对于任意有限个节点的集合 T'，$\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$ 也为凸曲线，并且 $A(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi))\supseteq A(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'))$．

证 对 T' 的节点个数施行归纳法．当 $T'=\{\tau_1\}$ 时，设 $\tau_1\in(t_\mu,t_{\mu+1}]$，则仿(2.9.1)得

$$\boldsymbol{r}_{i,k}^{(T,T')}=(1-s_i)\boldsymbol{r}_{i-1}+s_i\boldsymbol{r}_i,\qquad s_i=\alpha_i w_i/[(1-\alpha_i)w_{i-1}+\alpha_i w_i],$$

$$\alpha_i=\begin{cases}1, & i\le\mu-k+1,\\ \dfrac{\tau_1-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}, & \mu-k+2\le i\le\mu,\\ 0, & i\ge\mu+1.\end{cases}$$

这表明 $s_i\in[0,1]$，从而 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$ 为 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi)$ 的内接折线．所以这时引理为真．今假设 $T'=\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{m-1}\}$ 时引理为真，则当 $T''=T'\oplus\{\tau_m\}$ 时，因 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'')=\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T\oplus T')}(\{\tau_m\})$，且 $\boldsymbol{\Gamma}^{(T\oplus T')}(\Phi)=\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$ 为凸曲线，用与归纳法证明中第一步相同的方法可知 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'')$ 也为凸曲线，且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi))\supseteq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'))\supseteq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T''))$．引理证毕．

定理 4.2.1 若控制多边形 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi)$ 为平面凸曲线，则它所对应的平面 NURBS 曲线为凸曲线．

证　由推论 4.1.1 知存在节点集序列 T_m' $(m=1,2,\cdots)$，使得 $T_m'\subseteq T_{m+1}'$，且(4.1.10)成立．又根据引理 4.2.1，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_m'))=\bigcap_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_i')),\qquad T_{i+1}\supseteq T_i.$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_i'))$ 为平面凸闭集，$i=1,2,\cdots,m$．由此得到

$$\boldsymbol{A}\equiv\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_m'))=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T_i'))$$

也为凸闭集. 由(4.1.10)知 $\boldsymbol{A}$ 是以 $\boldsymbol{r}_k(t)$ 为边界或部分边界的最小凸闭集 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_k(t))$，所以 $\boldsymbol{r}_k(t)$ 为凸，证毕．

引理 4.2.2 记平面曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 与它所在平面上的任意一条直线 $\boldsymbol{L}$ 的交点个数为 $I(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{L})$，则对 NURBS 曲线 $\boldsymbol{r}_k(t)$ 的控制多边形而言，任意嵌节点集 T' 的过程恒为 V.D.，即

$$I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi),\boldsymbol{L})\ge I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'),\boldsymbol{L})\tag{4.2.1}$$

定理 4.2.2 平面 NURBS 曲线具有 V.D.性质，即当应用引理 4.2.2 中的记号时，有

$$I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi),\boldsymbol{L})\ge I(\boldsymbol{r}_k(t),\boldsymbol{L})\tag{4.2.2}$$

证 若不然，则必存在直线 $\boldsymbol{L}_0$，使得 $N\equiv I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(\Phi),\boldsymbol{L}_0)<I(\boldsymbol{r}_k(t),\boldsymbol{L}_0)$．即曲线 $\boldsymbol{r}_k(t)$ 与 $\boldsymbol{L}_0$ 的交点个数至少为 $N+1$ 个．设这些交点所对应的曲线参数为 $t_i',i=1,2,\cdots,N+1.$ 令 $T'=\{t_1'\}^{k-1}\oplus\{t_2'\}^{k-1}\oplus\cdots\oplus\{t_{N+1}'\}^{k-1},$ 则应用定理 4.1.1，由(4.1.9)得知交点 $\boldsymbol{r}_k(t_i')$ 必为多边形 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$ 的顶点，$i=1,2,\cdots,N+1.$ 显然它们也是 $\boldsymbol{L}_0$ 与 $\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T')$ 的交点，于是 $I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'),\boldsymbol{L}_0)\ge N+1$．但据引理 4.2.2，$I(\boldsymbol{\Gamma}_k^{(T)}(T'),\boldsymbol{L}_0)\le N$．这个矛盾推知定理为真，证毕．

显然，性质 1.3.10，3.2.7 和定理 2.11.2 都是上述定理的直接推论．

4.3 NURBS 曲线的包络生成及几何定义

4.3.1 包络的存在性

定理 4.3.1 　假设 $w_i^{[r]}(\tau),\boldsymbol{r}_i^{[r]}(\tau)$ 如(4.1.3)，(4.1.4)($t=\tau$)所示，

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}N_{i,k}(t)w_i\boldsymbol{r}_i,\qquad w(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}N_{i,k}(t)w_i\,,\tag{4.3.1}$$

则 k 阶 NURBS 曲线(4.1.2)的一段 $\boldsymbol{r}(t)(t_j \le t < t_{j+1})$ 是 $k-r$ 阶 $(r=1,2,\cdots k-2)$ NURBS 曲线族的包络 $(k \ge 3)$：

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{p}(t)/w(t)=\mathrm{env}\{\boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau),t_j \le t<t_{j+1} \mid t_j \le \tau < t_{j+1}\},\ j=k,k+1,\cdots,n\,, \tag{4.3.2}$$

$$\boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau)=\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(\tau)\boldsymbol{r}_i^{[r]}(\tau) \Big/ \sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(\tau),\ t_j \le t,\tau < t_{j+1}. \tag{4.3.3}$$

对整条曲线 $\boldsymbol{r}(t)(t_k \le t \le t_{n+1})$，只要在(4.1.3)和(4.1.4)中令 $t,\tau \in [t_k,t_{n+1}]$，把(4.3.2)，(4.3.3)中的定义域换作 $[t_k,t_{n+1}]$，把 (4.3.3)中和式的上下限换作 $r+1$ 到 n，结论同样成立.

证 应用(2.1.1)，(2.1.5)两式，按照递推关系(4.1.3)，(4.1.4)可得：

$$\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(t)=\sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t)w_i^{[r-1]}(t)=\cdots=w(t)\,, \tag{4.3.4}$$

$$\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(t)\boldsymbol{r}_i^{[r]}(t)=\sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t)w_i^{[r-1]}(t)\boldsymbol{r}_i^{[r-1]}(t)=\cdots=\boldsymbol{p}(t)\,, \tag{4.3.5}$$

$$\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N'_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(t)=\frac{k-r-1}{k-r}\sum_{i=j-k+r}^{j} N'_{i,k-r+1}(t)w_i^{[r-1]}(t)=\cdots=\frac{k-r-1}{k-1}w'(t)\,, \tag{4.3.6}$$

$$\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N'_{i,k-r}(t)w_i^{[r]}(t)\boldsymbol{r}_i^{[r]}(t)=\frac{k-r-1}{k-r}\sum_{i=j-k+r}^{j} N'_{i,k-r+1}(t)w_i^{[r-1]}(t)\boldsymbol{r}_i^{[r-1]}(t)=\cdots=\frac{k-r-1}{k-1}\boldsymbol{p}'(t)\,, \tag{4.3.7}$$

$$t_j \le t < t_{j+1},\ j=k,k+1,\cdots,n.$$

于是由以上四式立即得到：

$$\boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau)\big|_{\tau=t}=\boldsymbol{p}(t)/w(t)=\boldsymbol{r}(t),\quad t_j \le t < t_{j+1}.$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t}=\frac{k-r-1}{k-1}\,\frac{w(t)\boldsymbol{p}'(t)-w'(t)\boldsymbol{p}(t)}{w^2(t)}=\frac{k-r-1}{k-1}\boldsymbol{r}'(t)\,/\!/\,\boldsymbol{r}'(t),\quad t_j \le t < t_{j+1}.$$

这里 t_j 点处的偏导矢理解为右极限值．由以上两式知(4.3.2)成立．证毕.

推论 4.3.1 当 w_i 为常数，或 t_j,t_{j+1} 均为 $k-1$ 重节点时，就得出定理 2.2.2 或 3.3.2．又当 $k-r=2$ 时，得知 $\boldsymbol{r}(t)$ 是下列直线族的包络：

$$\boldsymbol{r}^{[2]}(t,\tau)=\frac{(t_{j+1}-t)w_{j-1}^{[k-2]}(\tau)\boldsymbol{r}_{j-1}^{[k-2]}(\tau)+(t-t_j)w_j^{[k-2]}(\tau)\boldsymbol{r}_j^{[k-2]}(\tau)}{(t_{j+1}-t)w_{j-1}^{[k-2]}(\tau)+(t-t_j)w_j^{[k-2]}(\tau)},\quad t_j \le t,\tau < t_{j+1}. \tag{4.3.8}$$

4.3.2 包络的唯一性

定理 4.3.2 (4.3.2)中的包络当 $r=1$ 时是唯一的，即为曲线(4.1.2)的一段 $\boldsymbol{r}(t)(t_j \le t < t_{j+1})$.

证 由文献[18]知曲线族 $\{\boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau),t_j \le t<t_{j+1} \mid t_j \le \tau < t_{j+1}\}$ 的包络是方程(4.3.3) $(r=1)$ 和

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial \tau}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial t}=\boldsymbol{0},\quad t_j \le t,\tau < t_{j+1} \tag{4.3.9}$$

的联合解，其中

$$\tau=\tau(t). \tag{4.3.10}$$

由算法 2.4.2 可知

$$\sum_{i=j-k+2}^{j} N_{i,k-1}(t)\frac{w_i-w_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}=\frac{w'(t)}{k-1},\ \sum_{i=j-k+2}^{j} N_{i,k-1}(t)\frac{w_i\boldsymbol{r}_i-w_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}=\frac{\boldsymbol{p}'(t)}{k-1},\ t_j \le t < t_{j+1}.$$

按照上面两式及(4.3.4)，(4.3.5) $(r=1)$ 可得到分式(4.3.3) $(r=1)$ 的分母和分子分别为

$$\sum_{i=j-k+2}^{j} N_{i,k-1}(t) w_i^{[1]}(\tau) = \frac{\tau - t}{k-1} w'(t) + w(t), \quad \sum_{i=j-k+2}^{j} N_{i,k-1}(t) w_i^{[1]}(\tau) \boldsymbol{r}_i^{[1]}(\tau) = \frac{\tau - t}{k-1} \boldsymbol{p}'(t) + \boldsymbol{p}(t).$$

所以

$$(k-1)\left[\frac{\tau-t}{k-1} w'(t) + w(t)\right]^2 \frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial \tau} = w^2(t) \boldsymbol{r}'(t),$$

$$(k-1)\left[\frac{\tau-t}{k-1} w'(t) + w(t)\right]^2 \frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial t} =$$

$$(\tau - t)\left\{\left[\frac{\tau-t}{k-1} w'(t) + w(t)\right] \boldsymbol{p}''(t) - w''(t)\left[\frac{\tau-t}{k-1} \boldsymbol{p}'(t) + \boldsymbol{p}(t)\right]\right\} + (k-2) w^2(t) \boldsymbol{r}'(t).$$

于是(4.3.9)相当于

$$(\tau - t)\left[\frac{\tau-t}{k-1} w'(t) + w(t)\right]\left[\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{p}''(t)\right] = (\tau - t) w''(t)\left\{\boldsymbol{r}'(t) \times \left[\frac{\tau-t}{k-1} \boldsymbol{p}'(t) + \boldsymbol{p}(t)\right]\right\}.$$

对上式两端用 $\boldsymbol{p}''(t)$ 作数量积，可得出混合积

$$(\tau - t)\left(\boldsymbol{r}'(t), \frac{\tau-t}{k-1} \boldsymbol{p}'(t) + \boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{p}''(t)\right) = 0.$$

因而

$$\tau(t) = t, \tag{4.3.11}$$

或者

$$\sum_{i=j-k+1}^{j} N_{i,k}(t) w_i \cdot (\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0. \tag{4.3.12}$$

若(4.3.12)成立，由 $w_i > 0$ 及 B 样条基的线性无关性得出

$$(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)) = 0, \quad i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j; \quad t_j \le t < t_{j+1}, \ j = k, k+1, \cdots, n.$$

这表示 $\boldsymbol{r}_i$ $(i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j)$ 共面，从而 $\{\boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau), t_j \le t < t_{j+1} \mid t_j \le \tau < t_{j+1}\}$ 是平面曲线族．于是可设 $\boldsymbol{r_i} = (x_i, y_i, 0)$, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$, $\boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau) = \left(x^{[k-1]}(t,\tau), y^{[k-1]}(t,\tau), 0\right)$, $i = j-k+1, \ j-k+2, \cdots, j$；$t_j \le t, \tau < t_{j+1}$．由文献[18]可知，此曲线族的包络是平面曲线方程(4.3.3) $(r=1)$ 和

$$\frac{\partial x^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial y^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial x^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial t} \cdot \frac{\partial y^{[k-1]}(t,\tau)}{\partial \tau}, \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1} \tag{4.3.13}$$

的联合解，其中 $\tau = \tau(t)$．由计算可知 (4.3.13)等价于 $(\tau - t)[x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t)] = 0$，所以又得出(4.3.11)或

$$x'(t) y''(t) - x''(t) y'(t) = 0. \tag{4.3.14}$$

若(4.3.14)成立，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 为直线段．这意味着 $\boldsymbol{r}_i$ $(i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j)$ 共线，从而曲线族 $\{\boldsymbol{r}^{[k-1]}(t,\tau), t_j \le t < t_{j+1} \mid t_j \le \tau < t_{j+1}\}$ 中的每一条曲线均位于此直线上，于是它的包络是 $\boldsymbol{r}(t)$．若(4.3.14)不成立，则必(4.3.11)成立，把它代入(4.3.3) $(r=1)$ 知曲线族的包络就是 $\boldsymbol{r}(t)$．证毕.

定理 4.3.3 (4.3.2)中的包络对任意的 $r = 1, 2, \cdots, k-2$ 均为唯一，即为曲线(4.1.2)的一段 $\boldsymbol{r}(t)$ $(t_j \le t < t_{j+1})$．

证　当 $r \ge 1$ 时，(4.3.2)右端是方程(4.3.3)和

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau)}{\partial \tau} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}^{[k-r]}(t,\tau)}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1}, \quad j = k, k+1, \cdots, n \tag{4.3.15}$$

的联合解，其中

$$\tau = \tau(t). \tag{4.3.16}$$

由(4.1.3)可得

$$(t_{i+k-r} - t_i)(w_i^{[r]}(\tau) - w_i^{[r]}(t)) = (\tau - t)(w_i^{[r-1]}(\tau) - w_{i-1}^{[r-1]}(\tau))$$
$$+ (t - t_i)(w_i^{[r-1]}(\tau) - w_i^{[r-1]}(t)) + (t_{i+k-r} - t)(w_{i-1}^{[r-1]}(\tau) - w_{i-1}^{[r-1]}(t)),$$
$$i = j-k+r+1, j-k+r+2, \cdots, j; \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1}.$$

应用(4.3.4), (4.3.6), (2.1.4)和(2.1.1)，容易得出

$$\sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t) w_i^{[r]}(\tau) = \sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(t) + \sum_{i=j-k+r+1}^{j} N_{i,k-r}(t)(w_i^{[r]}(\tau) - w_i^{[r]}(t))$$
$$= \sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(t) + (\tau - t) \sum_{i=j-k+r}^{j} \left[\frac{N_{i,k-r}(t)}{t_{i+k-r} - t_i} - \frac{N_{i+1,k-r}(t)}{t_{i+k-r+1} - t_{i+1}} \right] w_i^{[r-1]}(\tau)$$
$$+ \sum_{i=j-k+r}^{j} \left[\frac{t_{i+k-r+1} - t}{t_{i+k-r+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-r}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} N_{i,k-r}(t) \right] (w_i^{[r-1]}(\tau) - w_i^{[r-1]}(t))$$
$$= \frac{\tau - t}{k - r} \sum_{i=j-k+r}^{j} N'_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(\tau) + \sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(\tau), \quad t_j \le t, \tau \le t_{j+1}.$$

把上式中的 $w_i^{[r]}(\tau)$ 换作 $w_i^{[r]}(\tau)\boldsymbol{r}_i^{[r]}(\tau)$，类似的等式也成立．现在记

$$\sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(\tau) = w^{[r-1]}(t,\tau), \qquad \sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) w_i^{[r-1]}(\tau) \boldsymbol{r}_i^{[r-1]}(\tau) = \boldsymbol{p}^{[r-1]}(t,\tau),$$
$$t_j \le t, \tau < t_{j+1}. \tag{4.3.17}$$

则有

$$w^{[r]}(t,\tau) = \frac{\tau - t}{k - r} \frac{\partial}{\partial t} w^{[r-1]}(t,\tau) + w^{[r-1]}(t,\tau), \ \boldsymbol{p}^{[r]}(t,\tau) = \frac{\tau - t}{k - r} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{p}^{[r-1]}(t,\tau) + \boldsymbol{p}^{[r-1]}(t,\tau),$$
$$t_j \le t, \tau < t_{j+1}, \quad j = k, k+1, \cdots, n. \tag{4.3.18}$$

于是依据和定理 4.3.2 的证明类似的理由，由(4.3.3)和(4.3.15)可得出(4.3.16)或

$$\sum_{i=j-k+r}^{j} N_{i,k-r+1}(t) \left(w_i^{[r-1]}(\tau) \boldsymbol{p}_i^{[r-1]}(\tau), \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau) \right) = 0.$$

假定上式成立，则

$$\left(w_i^{[r-1]}(\tau) \boldsymbol{p}_i^{[r-1]}(\tau), \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau) \right) = 0,$$
$$i = j-k+r, j-k+r+1, \cdots, j, \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1}.$$

因此应用(4.1.3)，(4.1.4)可得

$$\left(1 - \frac{\tau - t_i}{t_{i+k-r+1} - t_i} \right) \left(w_{i-1}^{[r-2]}(\tau) \boldsymbol{p}_{i-1}^{[r-2]}(\tau), \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau) \right)$$
$$+ \frac{\tau - t_i}{t_{i+k-r+1} - t_i} \left(w_i^{[r-2]}(\tau) \boldsymbol{p}_i^{[r-2]}(\tau), \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau) \right) = 0,$$
$$i = j-k+r, j-k+r+1, \cdots, j, \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1}.$$

由此得出

$$\left(w_i^{[r-2]}(\tau) \boldsymbol{p}_i^{[r-2]}(\tau), \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau) \right) = 0,$$
$$i = j-k+r-1, j-k+r, \cdots, j, \quad t_j \le t, \tau < t_{j+1}.$$

继续刚进行的过程，最后得到

$$\left(w_i(\tau)\boldsymbol{p}_i(\tau), \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{r}^{[r-1]}(t,\tau)\right) = 0,$$
$$i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j, \qquad t_j \le t, \tau < t_{j+1}.$$
因为 $w_i(\tau) = w_i > 0, \boldsymbol{p}_i(\tau) = \boldsymbol{p}_i$，上式意味着 $\boldsymbol{p}_i (i = j-k+1, j-k+2, \cdots, j)$ 共面．这样，仿照定理 4.3.2 的证明中类似的过程，可知定理为真．证毕．

4.3.3 NURBS 曲线的几何定义

因为包络存在且唯一，我们可对 NURBS 曲线作出不同包络方式的直观的几何定义．这里仅列出基于推论 4.3.1 的

定义 4.3.1 假设 $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^n \in \Re^3, \{w_i\}_{i=1}^n \in \Re, w_i > 0, T = \{t_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 是参数 t 轴的一个不均匀分割，$t_j \le t_{j+1}$，则称多边形 $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\cdots\boldsymbol{r}_n$ 是相应于节点向量 T 的以 $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^n$ 为控制顶点，以 $\{w_i\}_{i=1}^n$ 为权因子的二阶（一次）NURBS 曲线 $\boldsymbol{r}(t)(t_2 \le t \le t_{n+1})$．其每一段曲线是直线段 $\boldsymbol{r}_{j-1}\boldsymbol{r}_j$，方程可写为 $\boldsymbol{r}(t) = [(t_{j+1}-t)w_{j-1}\boldsymbol{r}_{j-1} + (t-t_j)w_j\boldsymbol{r}_j] / [(t_{j+1}-t)w_{j-1} + (t-t_j)w_j]$，$t_j \le t < t_{j+1}$，$j = 2,3,\cdots,n$；合记为 $\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,2}(t)w_i\boldsymbol{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^n N_{i,2}(t)w_i$，$t_2 \le t \le t_{n+1}$．现对每个固定值 $t = \tau \in [t_k, t_{n+1}]$，按 (4.1.3)，(4.1.4)，对 $r = 1,2,\cdots,k-2$，递归地计算 $w_i^{[r]}(\tau)$, $\boldsymbol{r}_i^{[r]}(\tau), i = 2,3,\cdots,n$；然后作出二阶 NURBS 曲线族 $\boldsymbol{r}^{[2]}(t,\tau) = \sum_{i=k-1}^n N_{i,2}(t)w_i^{[k-2]}(\tau)\boldsymbol{r}_i^{[k-2]}(\tau) \Big/ \sum_{i=k-1}^n N_{i,2}(t)w_i^{[k-2]}(\tau), t_k \le t, \tau \le t_{n+1}$，则它的包络就是相应于 $T, \{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n$ 的 k 阶（$k-1$ 次）NURBS 曲线，记为(4.1.2).

4.4 NURBS 曲线的显式矩阵表示

定义 4.4.1 对齐次坐标下 NURBS 曲线(4.1.1)在非空区间 $[t_r, t_{r+1})$ 中的一段，若引入规范化参数变换

$$u = (t - t_r)/(t_{r+1} - t_r),\ t_r \le t < t_{r+1}, \tag{4.4.1}$$

使其转换成

$$\boldsymbol{r}^*(u) = \sum_{i=r-k+1}^{r} N_{i,k}(t)\boldsymbol{r}_i = (1, u, \cdots, u^{k-1})\mathbf{A}_{r,k,T}(\boldsymbol{r}_{r-k+1}, \boldsymbol{r}_{r-k+2}, \cdots, \boldsymbol{r}_r)^{\mathrm{T}}, 0 \le u < 1, \tag{4.4.2}$$

$$\mathbf{A}_{r,k,T} = (a_{j,i})_{k\times k} = \begin{pmatrix} a_{0,r-k+1} & a_{0,r-k+2} & \cdots & a_{0,r} \\ a_{1,r-k+1} & a_{1,r-k+2} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,r-k+1} & a_{k-1,r-k+2} & \cdots & a_{k-1,r} \end{pmatrix}, \tag{4.4.3}$$

则称(4.4.2)为 NURBS 曲线(4.1.1)在区间 $[t_r, t_{r+1})$ 上的幂基表示，称(4.4.3)为其系数矩阵.

4.4.1 基于差商的系数矩阵显式表示

首先导出 k 阶差商的显式计算式，它基于 deBoor[14]作出的关于函数密切插值的

定义 4.4.2 设 $T = \{t_i\}_{i=0}^k$ 为一个节点向量，其中节点允许相重，若函数 p 和 q 在 T 中的每一重数为 m 的节点 t 上都有直到 $m-1$ 阶相等的导数值，即满足

$$p^{(j)}(t) = q^{(j)}(t), \quad j = 0,1,\cdots,m-1, \tag{4.4.4}$$

则称函数 p, q 在节点向量 T 上密切.

假设

$$T=\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}=\{\overbrace{\tau_1,\cdots,\tau_1}^{l_1},\cdots,\overbrace{\tau_d,\cdots,\tau_d}^{l_d}\}. \tag{4.4.5}$$

这里 τ_i 的重数是 $l_i>0, i=1,2,\cdots,d; l_1+\cdots+l_d=k+1, \tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_d$. 由文献[14]可知，若函数 $f(t)$ 与 k 次多项式 $g(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k$ 在 T 上密切，则 $f(t)$ 在节点 $\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$ 处的广义差商 $[t_0,t_1,\cdots,t_k]f=c_k$. 由定义 4.4.2 我们可得到含有 $c_0,c_1,\cdots,c_k$ 这 $k+1$ 个未知量的由 $k+1$ 个方程所组成的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \cdots & \tau_1^k \\ 0 & 1 & 2\tau_1 & \cdots & k\tau_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{k!}{(k-l_1-1)!}\tau_1^{k-l_1+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \tau_d & \tau_d^2 & \cdots & \tau_d^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{k!}{(k-l_d-1)!}\tau_d^{k-l_d+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\tau_1) \\ f'(\tau_1) \\ \vdots \\ f^{(l_1-1)}(\tau_1) \\ \vdots \\ f(\tau_d) \\ \vdots \\ f^{(l_d-1)}(\tau_d) \end{pmatrix}. \tag{4.4.6}$$

如果我们对任意阶可微函数 $f_0, f_1,\cdots, f_k$ 和节点向量(4.4.5)，定义

$$H(T;f_0,f_1,\cdots,f_k)=\begin{pmatrix} f_0(\tau_1) & f_1(\tau_1) & \cdots & f_{k-1}(\tau_1) & f_k(\tau_1) \\ f_0'(\tau_1) & f_1'(\tau_1) & \cdots & f_{k-1}'(\tau_1) & f_k'(\tau_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^{(l_1-1)}(\tau_1) & f_1^{(l_1-1)}(\tau_1) & \cdots & f_{k-1}^{(l_1-1)}(\tau_1) & f_k^{(l_1-1)}(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_0(\tau_d) & f_1(\tau_d) & \cdots & f_{k-1}(\tau_d) & f_k(\tau_d) \\ f_0'(\tau_d) & f_1'(\tau_d) & \cdots & f_{k-1}'(\tau_d) & f_k'(\tau_d) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^{(l_d-1)}(\tau_d) & f_1^{(l_d-1)}(\tau_d) & \cdots & f_{k-1}^{(l_d-1)}(\tau_d) & f_k^{(l_d-1)}(\tau_d) \end{pmatrix},$$

则(4.4.6)左端的系数矩阵可表为 $H(T;1,t,\cdots,t^k)$. 由计算得到 $\det H(T;1,t,\cdots,t^k)=\prod_{1\le i<j\le d}(\tau_j-\tau_i)^{l_il_j}\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=0}^{l_i-1}j!$，于是(4.4.6)有唯一解，且

$$[t_0,t_1,\cdots,t_k]f=c_k=\det H(T;1,t,\cdots,t^{k-1},f)\big/\det H(T;1,t,\cdots,t^k). \tag{4.4.7}$$

对上式分子部分的行列式按最后一列展开，就得到

引理 4.4.1 函数 f 在(4.4.5)所示的节点向量 T 上的 k 阶差商可显式表为

$$[t_0,t_1,\cdots,t_k]f=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=0}^{l_i-1}\alpha_{ij}(T)f^{(j)}(\tau_i). \tag{4.4.8}$$

$$\alpha_{ij}(T)=\beta_{b(i,j)}\Big/\left(\prod_{1\le u<v\le d}(\tau_v-\tau_u)^{l_ul_v}\prod_{u=1}^{d}\prod_{v=0}^{l_u-1}v!\right),$$

$$b(i,j)=\begin{cases} j & i=1, \\ j+\sum_{c=1}^{i-1}l_c & i>1, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,d; \quad j=0,1,\cdots,l_i-1, \tag{4.4.9}$$

这里 $\beta_i(i=0,1,\cdots,k)$ 是相应于矩阵 $H(T;1,t,\cdots,t^k)$ 最后一列的第 i 个元素的代数余子式，$\alpha_{ij}(T)$ 依赖于节点向量 T 而与 f 无关.

定理 4.4.1 假设k阶 B 样条基$N_{i,k}(t)$定义在节点向量

$$T_i=\{t_i,t_{i+1},\cdots,t_{i+k}\}=\{\overbrace{\tau_1(T_i),\tau_1(T_i),\cdots,\tau_1(T_i)}^{l_1(T_i)},\cdots,\overbrace{\tau_{d(T_i)}(T_i),\tau_{d(T_i)}(T_i),\cdots,\tau_{d(T_i)}(T_i)}^{l_{d(T_i)}(T_i)}\}\tag{4.4.10}$$

上，这里$l_q(T_i)>0,\ q=1,2,\cdots,d(T_i);\ l_1(T_i)+l_2(T_i)+\cdots+l_{d(T_i)}(T_i)=k+1,\quad \tau_1(T_i)<\tau_2(T_i)<\cdots<\tau_{d(T_i)}(T_i)$，再设区间$[t_r,t_{r+1})$非空，则对$i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r$有

$$N_{i,k}(t)=N^*_{i,k}(u)=\sum_{j=0}^{k-1}a_{ji}u^j,\ \ u=(t-t_r)/(t_{r+1}-t_r)\in[0,1),\ \ t\in[t_r,t_{r+1}),\tag{4.4.11}$$

$$a_{ji}=(t_{i+k}-t_i)(t_r-t_{r+1})^j\sum_{\substack{\lambda=1\\ \tau_\lambda>t_r}}^{d(T_i)}\sum_{\mu=0}^{k-1-\max(j,k-l_\lambda)}\alpha_{\lambda\mu}(T_i)\frac{(k-1)!}{j!(k-1-\mu-j)!}(\tau_\lambda-t_r)^{k-1-\mu-j},\tag{4.4.12}$$

$$i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r;\ j=0,1,\cdots,k-1.$$

从而得出 NURBS 曲线(4.1.1)在$[t_r,t_{r+1})$的幂基系数矩阵表示(4.4.2).

证 把依赖于T_i的量$d,l_q,\tau_q,\alpha_{\lambda\mu}$分别简记为$d,l_q,\tau_q,\alpha_{\lambda\mu},q=1,2,\cdots,d(T_i)$. 按照定义 2.7.4 和引理 4.4.1 有

$$\begin{aligned}N_{i,k}(t)&=(t_{i+k}-t_i)\sum_{\lambda=1}^{d}\sum_{\mu=0}^{l_\lambda-1}\alpha_{\lambda\mu}\left.\frac{\mathrm{d}^\mu(x-t)_+^{k-1}}{\mathrm{d}x^\mu}\right|_{x=\tau_\lambda}\\&=(t_{i+k}-t_i)\sum_{\substack{\lambda=1\\ \tau_\lambda>t_r}}^{d}\sum_{\mu=0}^{l_\lambda-1}\alpha_{\lambda\mu}\frac{(k-1)!}{(k-1-\mu)!}(\tau_\lambda-t)^{k-1-\mu}\\&=(t_{i+k}-t_i)\sum_{\substack{\lambda=1\\ \tau_\lambda>t_r}}^{d}\sum_{\mu=0}^{l_\lambda-1}\alpha_{\lambda\mu}\frac{(k-1)!}{(k-1-\mu)!}\sum_{j=0}^{k-\mu-1}\binom{k-1-\mu}{j}(\tau_\lambda-t_r)^{k-1-\mu-j}(t_r-t_{r+1})^ju^j,\end{aligned}$$

整理和式就得出(4.4.11). 证毕.

4.4.2 基于 Marsden 恒等式的系数矩阵显式表示

Marsden 恒等式[19]是 B 样条理论中的一个优美结果，原用于证明 V.D.逼近的收敛性. 文献[15]用归纳法来证明它，现在我们给出一个简短的新证明，只要用到 deBoor 公式(2.1.1)，另外还将用它得出 NURBS 曲线另一种系数矩阵显式表示.

定理 4.4.2(Marsden[19]) 假定$t\in[t_r,t_{r+1})$，则对所有x，成立着

$$(x-t)^{k-1}=\sum_{i=r-k+1}^{r}\omega_{i,k}(x)N_{i,k}(t),\tag{4.4.13}$$

$$\omega_{i,k}(x)=\begin{cases}1, & k=1,\\ (x-t_{i+1})(x-t_{i+2})\cdots(x-t_{i+k-1}), & k>1.\end{cases}\tag{4.4.14}$$

证 $k=1$时(4.4.13)是显然的. $k>1$时，利用(2.1.1)得出

$$\sum_{i=r-k+1}^{r}W_i^0N_{i,k}(t)=\sum_{i=r-k+2}^{r}W_i^1N_{i,k-1}(t),\ W_i^1=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}W_i^0+\frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i}W_{i-1}^0.\tag{4.4.15}$$

现令$W_i^0=\omega_{i,k}(x)$，则$W_i^1=(x-t)\omega_{i,k-1}(x)$. 递归地利用(4.4.15)得出

$$\sum_{i=r-k+1}^{r}\omega_{i,k}(x)N_{i,k}(t)=(x-t)\sum_{i=r-k+2}^{r}\omega_{i,k-1}(x)N_{i,k-1}(t)=\cdots=(x-t)^{k-1}\omega_{r,1}(x)N_{r,1}(t)=(x-t)^{k-1}.$$

证毕.

定理 4.4.3 设区间$[t_r,t_{r+1})$非空，则对$i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r$，有

$$N_{i,k}(t)=N_{i,k}^*(u)=\sum_{j=0}^{k-1}\bar{a}_{ji}u^j,\ u=\frac{t-t_r}{t_{r+1}-t_r}\in[0,1),\ t\in[t_r,t_{r+1}), \tag{4.4.16}$$

$$\bar{a}_{ji}=\frac{(t_{r+1}-t_r)^j}{\det\mathbf{G}_{r,k,T}}\sum_{\mu=j}^{k-1}\binom{\mu}{j}t_r^{\mu-j}g_{\mu i}^*,\ j=0,1,\cdots,k-1. \tag{4.4.17}$$

这里$\mathbf{G}_{r,k,T}$是$k\times k$阶矩阵，

$$\mathbf{G}_{r,k,T}=\begin{pmatrix} g_{0,r-k+1} & g_{0,r-k+2} & \cdots & g_{0,r} \\ g_{1,r-k+1} & g_{1,r-k+2} & \cdots & g_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,r-k+1} & g_{k-1,r-k+2} & \cdots & g_{k-1,r} \end{pmatrix}, \tag{4.4.18}$$

$$g_{\mu i}=\frac{(-1)^\mu\mu!}{(k-1)!}\omega_{i,k}^{(k-1-\mu)}(0),\ \mu=0,1,\cdots,k-1;\ i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r; \tag{4.4.19}$$

$g_{\mu i}^*$是矩阵$\mathbf{G}_{r,k,T}$的元素$g_{\mu i}$的代数余子式，而$\omega_{i,k}(x)$如(4.4.14)所定义.

证 假定$t\in[t_r,t_{r+1})$，比较(4.4.13)两端的x的同次幂系数，得到

$$t^\mu=\frac{(-1)^\mu\mu!}{(k-1)!}\sum_{i=r-k+1}^{r}\omega_{i,k}^{(k-1-\mu)}(0)N_{i,k}(t),\quad \mu=0,1,\cdots,k-1. \tag{4.4.20}$$

把上式写成矩阵形式就得出

$$\left(1,t,\cdots,t^{k-1}\right)=\left(N_{r-k+1,k}(t),N_{r-k+2,k}(t),\cdots,N_{r,k}(t)\right)\mathbf{G}_{r,k,T}^{\mathrm{T}}. \tag{4.4.21}$$

由基函数的线性无关性知$\det\mathbf{G}_{r,k,T}\neq 0$．注意到

$$N_{i,k}(t)=\sum_{\mu=0}^{k-1}g_{\mu i}^*t^\mu\bigg/\det\mathbf{G}_{r,k,T},\quad t^\mu=\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}(t_{r+1}-t_r)^j t_r^{\mu-j}u^j,\ \mu=0,1,\cdots,k-1,$$

就得到(4.4.16)．证毕.

必须指出，(4.4.20)也能写成传统对称函数的和式形式

$$t^j=\sum_{i=r-k+1}^{r}\mathrm{Sym}_j(t_{i+1},t_{i+2},\cdots,t_{i+k-1})N_{i,k}(t)\bigg/\binom{k-1}{j},\quad t\in[t_r,t_{r+1}), \tag{4.4.22}$$

这里$\mathrm{Sym}_j(t_{i+1},t_{i+2},\cdots,t_{i+k-1})=\sum_{i+1\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le i+k-1}t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_j}$是节点$t_{i+1},t_{i+2},\cdots,t_{i+k-1}$的第$j$个对称函数，因$\omega_{i,k}^{(k-1-j)}(0)=(-1)^j(k-1-j)!\mathrm{Sym}_j(t_{i+1},t_{i+2},\cdots,t_{i+k-1})$，便可由(4.4.20)得到(4.4.22).

4.4.3 特殊 NURBS 曲线的系数矩阵显式表示

当T中节点均为单重时，$\det H(T;1,t,\cdots,t^k)$为 Vandermonde 行列式．根据引理 4.4.1 容易算得$[t_i,t_{i+1},\cdots,t_{i+k}]f=\sum_{l=i}^{i+k}\left[\prod_{\substack{j=i\\ j\neq l}}^{i+k}(t_j-t_l)\right]^{-1}f(t_l)$．由定理 4.4.1，我们有

$$N_{i,k}(t)=(t_{i+k}-t_i)\sum_{l=r+1}^{i+k}\alpha_l(t_l-t)^{k-1}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}u^j\binom{k-1}{j}(t_{i+k}-t_i)(t_r-t_{r+1})^j\sum_{l=r+1}^{i+k}\left[(t_l-t_r)^{k-1-j}\bigg/\prod_{\substack{\alpha=i\\ \alpha\neq l}}^{i+k}(t_\alpha-t_l)\right],\quad i=r-k+1,\ r-k+2,\cdots,r.$$

于是系数矩阵$\mathbf{A}_{r,k,T}$的元素为

$$a_{ji}=\binom{k-1}{j}(t_{i+k}-t_i)(t_r-t_{r+1})^j\sum_{l=r+1}^{i+k}\left[(t_l-t_r)^{k-1-j}\Big/\prod_{\substack{\alpha=i\\ \alpha\neq l}}^{i+k}(t_\alpha-t_l)\right],\tag{4.4.23}$$

$$i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r;\ \ j=0,1,\cdots,k-1.$$

当 T 中节点等距时，不妨设 $t_i=i$，对(4.4.23)施以变量替换，依次令 $i=r-k+1+s,\ v=l-r-1,\ l=s-v$，可得

$$\begin{aligned}a_{ji}&=\binom{k-1}{j}k\sum_{l=r+1}^{i+k}\frac{(-1)^{j+k+l-i}(l-r)^{k-1-j}}{(l-i)!(i+k-l)!}\\&=\binom{k-1}{j}k(-1)^j\sum_{l=r+1}^{r+1+s}\frac{(-1)^{l+r+s+1}(l-r)^{k-1-j}}{(l+k-r-1-s)!(r+s+1-l)!}\\&=\binom{k-1}{j}k(-1)^j\sum_{v=0}^{s}\frac{(-1)^{v+s}(v+1)^{k-1-j}}{(v+k-s)!(s-v)!}=\binom{k-1}{j}k(-1)^j\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^l(s-l+1)^{k-1-j}}{(k-l)!l!}.\end{aligned}$$

$$i=r-k+1,r-k+2,\cdots,r;\ \ j=0,1,\cdots,k-1.$$

把上式简化并重新整理，就得出在区间 $[t_r,t_{r+1})=[r,r+1)$ 上，$\mathbf{A}_{r,k,T}$ 的元素（与 r 无关）为

$$a_{j,r-k+1+i}=(-1)^j\frac{\binom{k-1}{j}}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{i}(-1)^l\binom{k}{l}(i-l+1)^{k-1-j},\ i,j=0,1,\cdots,k-1.$$

当 $T=\{\overbrace{0,0,\cdots,0}^{k},\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k}\}$ 时，由(4.4.14)知 $\omega_{i,k}(x)=x^{k-1-i}(x-1)^i,i=0,1,\cdots,k-1$．由(4.4.18)，(4.4.19)知 $\mathbf{G}_{k-1,k,T}$ 为上三角阵，

$$g_{ji}=\begin{cases}0, & i<j,\\ \binom{i}{j}\Big/\binom{k-1}{j}, & i\ge j,\end{cases}\quad i,j=0,1,\cdots,k-1.$$

由(4.4.17)，可得出在区间 $[t_{k-1},t_k)=[0,1)$ 上，$\mathbf{A}_{r,k,T}$ 的元素为

$$a_{ji}=\begin{cases}0, & i<j,\\ (-1)^{i+j}\binom{k-1}{i}\Big/\binom{i}{j}, & i\ge j,\end{cases}\quad i,j=0,1,\cdots,k-1.$$

对照(1.6.9)，我们可推知，B 样条基这时退化为 Bernstein 基

$$N_{i,k}(t)=\sum_{j=0}^{k-1}a_{ji}t^j=B_i^{k-1}(t),\ t\in[t_{k-1},t_k)=[0,1),\ i=0,1,\cdots,k-1.$$

主要文献

[WGJ, WGZ, 99] 王国瑾，汪国昭，计算几何，浙江大学数学系研究生学位课程讲义，1999

[LW, LYD, 90] 吕伟，梁友栋，有理 B 样条曲线的离散构造与保形性问题，应用数学学报，1990, 13(2): 129-136

[WGJ, 92] Wang Guojin, Generating NURBS curves by envelopes, Computing, 1992, 48(3-4): 275-289

[LLG, WGJ, 2000] Liu Ligang, Wang Guojin, Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces, submitted

参考文献

1 Vergeest, S.M., CAD Surface data exchange using STEP, Computer Aided Design, 1991, 23(4): 269-281

2 Versprille, K.J., Computer aided design application of rational B-spline approximation form, Ph.D. thesis, Syracuse University, Syracuse, N. Y. , 1975

3 Piegl, L., Tiller, W., Curve and surface constructions using rational B-splines, Computer Aided Design, 1987, 19(9): 485-498
4 Piegl, L., Tiller, W., A menagerie of rational B-spline circles, IEEE Computer Graphics and its Application, 1989, 9(5): 48-56
5 Piegl, L., Modifying the shape of rational B-splines, part 1: curves, Computer Aided Design, 1989, 21(8): 509-518
6 Piegl, L., Modifying the shape of rational B-splines, part 2: surfaces, Computer Aided Design, 1989, 21(9): 538-546
7 Piegl, L., On NURBS: A Survey, IEEE Computer Graphics and its Application, 1991, 10(1): 55-71
8 Tiller, W., Rational B-splines for curve and surface representation, IEEE Computer Graphics and its Application, 1983, 3(6): 61-69
9 Tiller, W., Geometric modeling using non-uniform rational B-splines: mathematical techniques, SIGGRAH tutorial notes, ACM, New York, 1986
10 Tiller, W., Knot-remove algorithms for NURBS curves and surfaces, Computer Aided Design, 1992, 24(8): 445-453
11 李华，雷毅，朱心雄，有理 B 样条方法和工程应用，工程图学学报，1987, 8(2): 13-32
12 Choi, B.K., Yoo, W.S., Lee, C.S., Matrix representation for NURBS curves and surfaces, Computer Aided Design, 1990, 22(4): 235-240
13 Grabowski, H., Li, X., Coefficient formula and matrix of nonuniform B-spline functions, Computer Aided Design, 1992, 24(12): 637-642
14 de Boor, C., *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978
15 Schumaker, L.L., *Spline Functions: Basic Theory*, John Wiley&Sons, New York, 1981
16 Cohen, E., Riesenfeld, R.F., General matrix representations for Bézier and B-spline curves, Computers in Industry, 1982, 3(1-2): 9-15
17 Ding, Q.L., Davies, B.J., *Surface Engineering Geometry for Computer Aided Design and Manufacture*, Ellis Horwood, 1987
18 Faux, I.D., Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, p.36, Ellis Horwood Ltd., Chichester, UK, 1980
19 Marsden, M.J., An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation, Journal of Approximation Theory, 1970, 3(1): 7-49