

## 第八章 广义 Ball 曲线与广义 Ball 曲面

1974 年, 英国数学家 Ball<sup>[1-3]</sup>首创一种有理三次参数曲线, 并以此作为沃尔顿(Warton)前英国航空公司的 CONSURF 机身曲面造型系统的数学基础. 这一系统的建立, 彻底改革了传统的飞机外形设计中繁琐费时的手工放样工艺. 八十年代初, 我国成都飞机公司等单位<sup>[4]</sup>又对 Ball 创造的曲线原型进行研究、移植和扩充, 在飞机研制中取得显著的成效. 然而对于这种曲线模型, 还有许多研究工作必须进行:

1. 必须分析这种曲线原型是否具备对 CAGD 有用的一系列几何性质. Ball 的三篇论文没有很好地回答这个问题.

2. Ball 曲线原型的基函数仅限于三次. 那么其内在本质是什么? 相应低次及任意高次基的结构应如何类推? 由类推出来的基所生成的曲线又具有何种几何性质?

3. 高次 Ball 型的曲线模型能否被推广到矩形域或三角域上的 Ball 型曲面?

针对第二个问题, 马来西亚数学家 Said<sup>[5]</sup>在和英国数学家 Goodman T.N.T.<sup>[6]</sup>共同研究的过程中, 于 1989 年提出了一种广义 Ball 曲线, 把 Ball 的三次曲线原型推广到任意奇数次. 限于奇数次是因为他借助于 Hermite 基. 紧接着, Goodman T.N.T.<sup>[5-8]</sup>和 Said 又指出新曲线的许多良好性质. 但其实在这之前两年, 本书作者之一已经提出了另一种广义 Ball 曲线. 其构思的第一个特点是这种曲线的同一族基函数中, 基的次数按序号呈阶梯形分布, 两头低中间高, 相邻两个基的次数一般相差二次, 且首尾两个基只有二次. 由于曲线求值是通过基函数进行的, 基次数的缩减无疑能减少大量乘法运算. 第二个特点是不同次数的两族基函数之间具有递推性, 因此只要改变一个或两个中间的控制顶点, 就可把高次曲线求值转化为低次曲线求值. 与此同时, 这种广义 Ball 曲线还保持着计算稳定性、对称性、凸包性、端点插值性、几何作图性、几何不变性、可离散性等与 Bézier 曲线类似的性质, 一样可用于参数化特征设计.

1996 年, 胡事民等把以上两种广义 Ball 曲线冠之以“Said-Ball”和“Wang-Ball”的称呼, 并把它们与 Bézier 曲线在递归求值、包络性质、升降阶算法等方面作了系统的对比研究. 结果表明, 在求值及升降阶的计算速度上, Said-Ball 优于 Bézier, 而 Wang-Ball 又优于 Said-Ball. 刘松涛<sup>[9]</sup>、奚梅成<sup>[10]</sup>等也对广义 Ball 曲线作了研究. 2000 年, 泰国学者 Phien 等<sup>[11]</sup>进一步提出把 Bézier 曲线求值转换到 Wang-Ball 曲线来计算的思想. 那么, 广义 Ball 基在曲面上是否有所作为呢? 事实上, 随着图形工业对实时交互要求的日益增强, 曲面求值已经成为整个系统高速运行的一个“瓶颈”<sup>[12, 13]</sup>, 特别是本书第十二、十六、十七章和 §15.6, §15.7 所介绍的新技术, 更加需要研究高次参数曲面求值的快速算法. 研究表明, 把广义 Ball 曲线推广到广义 Ball 曲面, 正是解决这一“瓶颈”问题的一个好方法. 总之, Wang-Ball 曲线、曲面的递归求值和 Bézier 曲线、曲面的 de Casteljau 求值算法相比, 时间复杂度可以从曲线次数的平方降低到线性, 或从曲面次数的立方降低到平方. 此外, 我们还可把广义 Ball 基推广到三角域上, 用三角 Ball 曲面来代替三角 Bézier 曲面进行几何设计和图形绘制, 以减少机时. 而当 CAD 系统中的数据交换必须进行频繁而大量的升、降阶运算时, 也可以把 Wang-Ball 曲线、曲面作为首选模型.

本章系统地介绍我们在以上所列三方面的研究成果, 其中第 1 节内容取材于[WGJ, 97], [WGJ, 89]; 第 2, 4 节内容取材于[WGJ, 87], [HSM, WGZ, JTG, 96], [WGJ, CM, 2000]; 第 3 节内容取材于[WGJ, 87]; 第 5 节内容取材于[WGJ, CM, 2000]; 第 6 节内容取材于[HSM, WGJ, SJG, 98].

### 8.1 CONSURF 系统中机身造型曲线的几何性质

CONSURF 系统中, Ball 定义有理三次参数曲线

$$B(t) = \sum_{i=0}^3 b_i(t) \sigma_i b_i / \sum_{i=0}^3 b_i(t) \sigma_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.1.1)$$

作为曲面模线程序的基础, 这里

$$(b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t)) = ((1-t)^2, 2(1-t)^2 t, 2(1-t) t^2, t^2), \quad (8.1.2)$$

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1-f, f, f, 1-f), \quad 0 < f < 1. \quad (8.1.3)$$

**定理 8.1.1** Ball 机身曲线(8.1.1)是以  $c$  为族参数的下面这一个有理二次 Bézier 曲线族的包络:

$$\left\{ \mathbf{R}(t, c) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \omega_i(c) \mathbf{R}_i(c) \middle/ \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \omega_i(c), 0 \leq t \leq 1 \middle| 0 \leq c \leq 1 \right\}, \quad (8.1.4)$$

$$(\omega_0(c), \omega_1(c), \omega_2(c))^T = \mathbf{E}(c) \cdot (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T, \quad (8.1.5)$$

$$(\omega_0(c) \mathbf{R}_0(c), \omega_1(c) \mathbf{R}_1(c), \omega_2(c) \mathbf{R}_2(c))^T = \mathbf{E}(c) \cdot (\sigma_0 \mathbf{b}_0, \sigma_1 \mathbf{b}_1, \sigma_2 \mathbf{b}_2, \sigma_3 \mathbf{b}_3)^T, \quad (8.1.6)$$

$$\mathbf{E}(c) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3-2c & 2c & 0 & 0 \\ 1-c & 2(1-c) & 2c & c \\ 0 & 0 & 2(1-c) & 1+2c \end{pmatrix}. \quad (8.1.7)$$

**定理 8.1.2** Ball 机身曲线(8.1.1) 必可依任意的  $\lambda \in (0,1)$  分成如下两段 Ball 子曲线:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 b_i(t/\lambda) \sigma_i^{(\lambda)} \mathbf{b}_i^{(\lambda)} \middle/ \sum_{i=0}^3 b_i(t/\lambda) \sigma_i^{(\lambda)}, & 0 \leq t \leq \lambda, \\ \sum_{i=0}^3 b_i((t-\lambda)/(1-\lambda)) \sigma_i^{(1-\lambda)} \mathbf{b}_i^{(1-\lambda)} \middle/ \sum_{i=0}^3 b_i((t-\lambda)/(1-\lambda)) \sigma_i^{(1-\lambda)}, & \lambda \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (8.1.8)$$

这里

$$\begin{cases} (\sigma_0^{(\mu)}, \sigma_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)}, \sigma_3^{(\mu)})^T = \mathbf{D}^{(\mu)} (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T, & (\mu = \lambda, 1-\lambda), \\ (\sigma_0^{(\mu)} \mathbf{b}_0^{(\mu)}, \sigma_1^{(\mu)} \mathbf{b}_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)} \mathbf{b}_2^{(\mu)}, \sigma_3^{(\mu)} \mathbf{b}_3^{(\mu)})^T = \mathbf{D}^{(\mu)} (\sigma_0 \mathbf{b}_0, \sigma_1 \mathbf{b}_1, \sigma_2 \mathbf{b}_2, \sigma_3 \mathbf{b}_3)^T, & (\mu = \lambda, 1-\lambda), \\ \mathbf{D}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda(1-\lambda^2) & \lambda^3 & 0 \\ (1-\lambda)^2 & 2\lambda(1-\lambda)^2 & 2\lambda^2(1-\lambda) & \lambda^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}^{(1-\lambda)} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 & 2\lambda(1-\lambda)^2 & 2\lambda^2(1-\lambda) & \lambda^2 \\ 0 & (1-\lambda)^3 & \lambda(1-\lambda)(2-\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (8.1.9)$$

**定理 8.1.3** 平面 Ball 机身曲线具有变差缩减(V.D.)性质, 即若以围绕平面上任一直线“摆动”的次数来度量“光滑性”<sup>[14, 15]</sup>, 则此曲线的光滑性不亚于相应的 Ball 控制多边形的光滑性.

**定理 8.1.4** 设曲线(8.1.1)位于平面  $\pi$  上. (1) 若能作如图 8.1.1 的仿射标架  $\{O; \alpha, \beta\}$ , 则曲线  $\mathbf{B}(t)$  上奇、拐点的分布由其特征点  $\mathbf{C}(\alpha, \beta)$  的位置和权因子  $f$  之值所决定, 详见表 8.1.1 和图 8.1.2(标架画成直角, 不影响结果). 其中  $P_1: (1-f)\beta = \alpha(1+f-2f\alpha)$ ,  $P_2: (1-f)\alpha = \beta(1+f-2f\beta)$  是两条抛物线;  $K: \alpha\beta(1+f-2f\alpha)^2(1+f-2f\beta)^2 - 6(1-f)^2\alpha\beta(1+f-2f\alpha)(1+f-2f\beta) + 4(1-f)^3\alpha^2(1+f-2f\alpha) + 4(1-f)^3\beta^2(1+f-2f\beta) - 3(1-f)^4\alpha\beta = 0$  是六次代数曲线;  $K$  的渐近线是  $\alpha = \alpha_0$  与  $\beta = \beta_0$ . 这里  $\alpha_0 = \beta_0$  是三次方程  $f\alpha(1+f-2f\alpha)^2 = 2(1-f)^3$  的唯一实根,  $\alpha > (1+f)/(2f)$ .

(2) 若不能作如图 8.1.1 的仿射标架  $\{O; \alpha, \beta\}$ ; (i) 若  $\mathbf{b}_i (i=0,1,2,3)$  四点共线, 则  $\mathbf{B}(t)$  是一条直线段. (ii) 若  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) // (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$ , 则当  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  与  $(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$  同向时  $\mathbf{B}(t)$  上无奇点但有一个拐点, 异向时  $\mathbf{B}(t)$  上无奇点、拐点. (iii) 若  $(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) // (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_0)$ , 令  $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = \alpha(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_0)$ , 则  $\mathbf{B}(t)$  上奇点、拐点的分布视  $\alpha$  之值而由表 8.1.2 决定.

定理 8.1.4 的证明利用了有理三次 Bézier 曲线的奇拐点分布定理<sup>[16]</sup>. 进一步, 若 Ball 特

征多边形为凸, 则曲线特征点之坐标必满足  $0 < \alpha, \beta < (1+f)/(2f)$  或  $\alpha, \beta < 0$ , 于是由定理 8.1.4 可知  $C \in N$ , 所以有

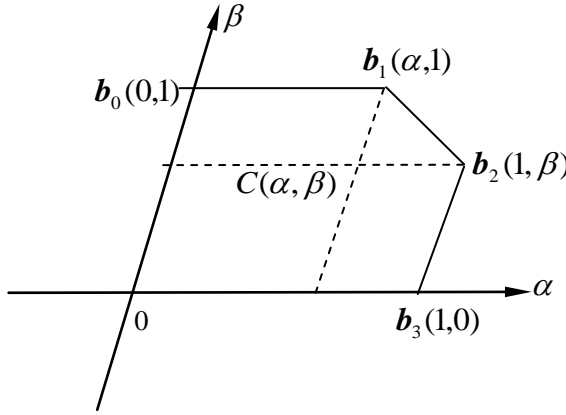


图 8.1.1 按照 Ball 多边形作仿射标架

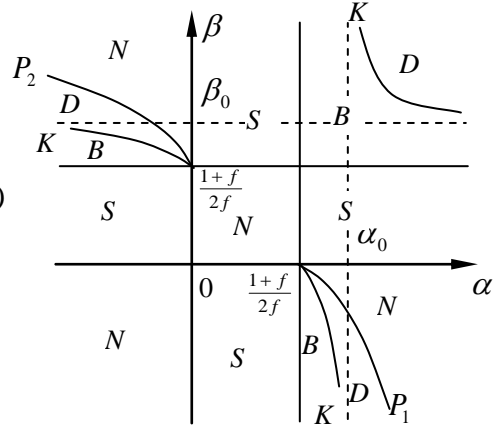


图 8.1.2 特征区域

表 8.1.1 Ball 曲线上奇、拐点个数(情况(1))

$C \in$	$N$	$S$	$B$	$K$	$D$
拐点	0	1	2	0	0
尖点	0	0	0	1	0
二重点	0	0	0	0	1

表 8.1.2 Ball 曲线上奇、拐点个数(情况(2)(iii))

$\alpha \in$	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1+f}{2f}\right)$	$\left(\frac{1+f}{2f}, \alpha_0\right)$	$\alpha_0$	$(\alpha_0, +\infty)$
拐点	0	1	2	0	0
尖点	0	0	0	1	0
二重点	0	0	0	0	1

定理 8.1.5 平面 Ball 机身曲线具有保凸性.

定理 8.1.6 设  $B(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 是业经离散的 Ball 机身曲线(8.1.1),  $h(b_i, \overline{b_0 b_3})$  表示点  $b_i$  到直线  $\overline{b_0 b_3}$  的距离,  $\varepsilon > 0$  是预设精度, 则当

$$\left(\max(\sigma_1, \sigma_2) / (\sqrt{\sigma_0 \sigma_3} + \max(\sigma_1, \sigma_2))\right) \cdot h(b_i, \overline{b_0 b_3}) < \varepsilon, \quad i = 1, 2 \quad (8.1.10)$$

时可终止离散, 以直线段  $\overline{b_0 b_3}$  近似替代曲线  $B(t)$ .

## 8.2 两种广义 Ball 曲线

定义 8.2.1 假设

$$S_i^n(t) = \begin{cases} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + i}{i} t^i (1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, & 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, \\ \binom{n}{n/2} t^{n/2} (1-t)^{n/2}, & i = n/2, \end{cases} \quad (8.2.1)$$

$$W_i^n(t) = \begin{cases} S_{n-i}^n(1-t), & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq i \leq n, \\ \begin{cases} (2t)^i (1-t)^{i+2}, & 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, \\ (2t)^{\lfloor n/2 \rfloor} (1-t)^{\lceil n/2 \rceil}, & i = \lfloor n/2 \rfloor, \\ (2(1-t))^{\lfloor n/2 \rfloor} t^{\lceil n/2 \rceil}, & i = \lceil n/2 \rceil, \\ W_{n-i}^n(1-t), & \lceil n/2 \rceil + 1 \leq i \leq n. \end{cases} \end{cases} \quad (8.2.2)$$

这里  $\lfloor x \rfloor$  表示小于或等于  $x$  的最大整数,  $\lceil x \rceil$  表示大于或等于  $x$  的最小整数, 则  $n$  次多项式  $\{S_i^n(t)\}_{i=0}^n$  和  $\{W_i^n(t)\}_{i=0}^n$  分别称为 Said-Ball 基和 Wang-Ball 基.

以上两种广义 Ball 基由 Said<sup>[5]</sup>和我们于 1989 年和 1987 年分别独立提出, 但 Said 仅就奇次给出定义, 后由我们加以完善. 这两种基的名称是胡事民等于 1996 年给出的. 这里用的缩写形式是 Phien<sup>[11]</sup>利用 Graham<sup>[17]</sup>记号于 2000 年给出的. 这两种基当  $n=2$  时均退化为二次 Bernstein 基. 为从直观上加以比较, 我们写出:

$$\begin{aligned} (S_0^4(t), S_1^4(t), \dots, S_4^4(t)) &= ((1-t)^3, 3(1-t)^2t, 3(1-t)t^2, 3(1-t)t^3, t^4), \\ (S_0^5(t), S_1^5(t), \dots, S_5^5(t)) &= ((1-t)^3, 3(1-t)^2t, 6(1-t)t^2, 6(1-t)t^3, 3(1-t)t^4, t^5), \\ (W_0^4(t), W_1^4(t), \dots, W_4^4(t)) &= ((1-t)^2, 2(1-t)t, 4(1-t)t^2, 2(1-t)t^3, t^4), \\ (W_0^5(t), W_1^5(t), \dots, W_5^5(t)) &= ((1-t)^2, 2(1-t)t, 4(1-t)t^2, 4(1-t)t^3, 2(1-t)t^4, t^5). \end{aligned}$$

定义 8.2.2 设  $\{D_i\}_{i=0}^n, \{G_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{R}^3$ , 则  $n$  次多项式曲线

$$S(t) = \sum_{i=0}^n S_i^n(t) D_i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8.2.3)$$

$$W(t) = \sum_{i=0}^n W_i^n(t) G_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.2.4)$$

分别称为  $n$  次 Said-Ball 曲线,  $n$  次 Wang-Ball 曲线.

### 8.3 Wang-Ball 基函数的性质

性质 8.3.1. 非负性:  $0 \leq W_i^n(t) \leq 1, 0 \leq t \leq 1, i = 0, 1, \dots, n$ .

性质 8.3.2. 协调性:  $\sum_{i=0}^n W_i^n(t) \equiv 1, 0 \leq t \leq 1$ .

性质 8.3.3. 基于参数  $t$  和  $(1-t)$  的对称性:  $W_i^n(t) = W_{n-i}^n(1-t), i = 0, 1, \dots, n$ .

性质 8.3.4. 递推性: 设  $A(t) = 2(1-t)t$ , 则有

$$\begin{cases} W_i^n(t) = W_i^{n-1}(t) = (1-t)^2 A^i(t), & 0 \leq i \leq \lceil n/2 \rceil - 2, \\ W_i^n(t) = W_{i-1}^{n-1}(t) = t^2 A^{n-i}(t), & \lfloor n/2 \rfloor + 2 \leq i \leq n, \\ W_{\lceil n/2 \rceil - 1}^n(t) = (1-t) W_{\lceil n/2 \rceil - 1}^{n-1}(t), & W_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n(t) = t W_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n-1}(t), \\ W_m^{2m}(t) = t W_{m-1}^{2m-1}(t) + (1-t) W_m^{2m-1}(t), \\ W_{i+1}^{n+2}(t) = W_i^n(t) A(t), & 0 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (8.3.1)$$

性质 8.3.5. 次数衰减性:

$\{W_i^n(t)\}_{i=0}^n$  的次数依次是  $2, 4, \dots, n-2, n, n, n-2, \dots, 4, 2$  ( $n$  为偶数) 或  $2, 4, \dots, n-1, n, n, n-1, \dots, 4, 2$  ( $n$  为奇数). 这种依基函数序号呈阶梯形衰减且衰减幅度为 2 的次数分布特性及性质 8.3.4 是 Wang-Ball 曲线递归求值和升降阶计算具有高效率的根本原因.

性质 8.3.6. 线性无关性:

当  $n=2$  时显然线性无关. 若  $n=2k$  时线性无关, 则  $\{W_i^{2k+2}(t)\}_{i=0}^{2k+2} = \{W_i^{2k}(t)\}_{i=0, i \neq k}^{2k} \cup \{(1-t)^2 A^k(t), A^{k+1}(t), t^2 A^k(t)\}$  线性无关, 所以  $n$  为偶数时得证线性无关. 由此知  $n$  为奇数时  $\{W_i^n(t)\}_{i=0}^n = \{W_i^{n-1}(t)\}_{i=0, i \neq (n-1)/2}^{n-1} \cup \{(1-t) A^{(n-1)/2}(t), t A^{(n-1)/2}(t)\}$  亦线性无关.

性质 8.3.7. 幂基表示性:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i^n(t) = 2^i \sum_{j=0}^{i+2} (-1)^j \binom{i+2}{j} t^{i+j}, \quad 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ W_i^n(t) = 2^{n-i} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} t^{n+2-i+j}, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n, \\ W_m^{2m}(t) = 2^m \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} t^{m+j}, \\ W_m^{2m+1}(t) = 2^m \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} t^{m+j}, \quad W_{m+1}^{2m+1}(t) = 2^m \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} t^{m+1+j}. \end{array} \right. \quad (8.3.2)$$

## 8.4 Said-Ball, Wang-Ball 曲线与 Bézier 曲线的比较

由 Wang-Ball 基、Said-Ball 基的性质<sup>[5]</sup>可知, 由这两种基所生成的曲线与 Bézier 曲线一样具有对称性、凸包性、端点插值性、几何不变性、可离散性等几何性质, 适用于参数化特征设计.

### 8.4.1 递归求值

Said<sup>[5]</sup>曾对自己提出的奇次广义 Ball 曲线设计了如下的递归算法: 先把  $n$  次 Ball 曲线降阶为  $(n+1)/2$  次 Bézier 曲线; 再对后者施行 de Casteljau 算法. 我们设计的算法与 Said 算法计算量相同, 但无需借助于 de Casteljau 算法.

**算法 8.4.1** (Said-Ball 曲线的递归求值)

Step 1.

- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-3)/2$ , 或  $i = (n-1)/2$ , 或  $(n+1)/2 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\tilde{D}_i = D_i, (1-t)D_{(n-1)/2} + tD_{(n+1)/2}, D_{i+1}$ .
- 否则, 对  $i = n/2-1, n/2-2, \dots, 1, 0$ , 置  $D_{n/2}^* = D_{n/2}$ ,  $D_i^* = (1-t)D_i + tD_{i+1}$ ,  $D_{n-i}^* = (1-t)D_{n-i-1} + tD_{n-i}^*$ ; 进一步对  $0 \leq i \leq n/2-1$ , 或  $n/2 \leq i \leq n-1$ , 分别取  $\tilde{D}_i = D_i^*, D_{i+1}^*$ .

最后, 以  $\{\tilde{D}_i\}_{i=0}^{n-1}$  为控制顶点, 得到新的  $n-1$  次 Said-Ball 曲线, 代替原曲线.

Step 2.  $n \leftarrow n-1$ . 若  $n \geq 3$ , 则置  $D_i = \tilde{D}_i, i = 0, 1, \dots, n$ , 返回 Step 1.

Step 3. 执行  $Q = (1-t)\tilde{D}_0 + t\tilde{D}_1, R = (1-t)\tilde{D}_1 + t\tilde{D}_2, S(t) = (1-t)Q + tR$ .

这一算法的正确性取决于恒等式  $\sum_{i=0}^n S_i^n(t) D_i = \sum_{i=0}^{n-1} S_i^{n-1}(t) \tilde{D}_i, n \geq 3$ . 当  $n$  为奇数时这是平凡的, 当  $n$  为偶数时, 根据对称性, 我们仅需证明

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} S_i^n(t) D_i + \left( \frac{n-1}{2} - 1 \right) (1-t)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} D_{\frac{n}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} S_i^{n-1}(t) \tilde{D}_i. \quad (8.4.1)$$

易知表达式

$$S_{\frac{n}{2}-k}^n(t) D_{\frac{n}{2}-k} + \left( \frac{n-k}{2} - 1 \right) (1-t)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}-k+1} \tilde{D}_{\frac{n}{2}-k+1} = S_{\frac{n}{2}-k}^{n-1}(t) \tilde{D}_{\frac{n}{2}-k} + \left( \frac{n-k-1}{2} - 1 \right) (1-t)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}-k} \tilde{D}_{\frac{n}{2}-k} \quad (8.4.2)$$

当  $k=1$  时成立, 由数学归纳法可知上式当  $k=1, 2, \dots, n/2$  均成立. 把上式对于  $k=1, 2, \dots, n/2$  求和即得(8.4.1).

**算法 8.4.2** (Wang-Ball 曲线的递归求值)

Step 1.

- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-3)/2$ , 或  $i = (n-1)/2$ , 或  $(n+1)/2 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\tilde{G}_i = G_i, (1-t)G_{(n-1)/2} + tG_{(n+1)/2}, G_{i+1}$ .
- 否则, 当  $0 \leq i \leq n/2-2$ , 或  $i = n/2-1$ , 或  $i = n/2$ , 或  $n/2+1 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\tilde{G}_i = G_i, (1-t)G_{n/2-1} + tG_{n/2}, (1-t)G_{n/2} + tG_{n/2+1}, G_{i+1}$ .

最后, 以  $\{\tilde{G}_i\}_{i=0}^{n-1}$  为控制顶点, 得到新的  $n-1$  次 Wang-Ball 曲线, 代替原曲线.

Step 2.  $n \leftarrow n-1$ . 若  $n \geq 3$ , 则置  $G_i = \tilde{G}_i, i = 0, 1, \dots, n$ , 返回 Step 1.

Step 3. 执行  $Q = (1-t)\tilde{G}_0 + t\tilde{G}_1, R = (1-t)\tilde{G}_1 + t\tilde{G}_2, W(t) = (1-t)Q + tR$ .

这一算法的正确性可应用(8.3.1)推得. 当  $n \geq 4$  为偶数时有

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \sum_{i=0}^n W_i^n(t) G_i = \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil - 2} W_i^{n-1}(t) G_i + (1-t)W_{\lceil n/2 \rceil - 1}^{n-1}(t) G_{\lceil n/2 \rceil - 1} \\
 &\quad + [tW_{n/2-1}^{n-1}(t) + (1-t)W_{n/2}^{n-1}(t)] G_{n/2} + tW_{\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1}(t) G_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 2}^n W_i^{n-1}(t) G_i \\
 &= \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil - 2} W_i^{n-1}(t) G_i + W_{\lceil n/2 \rceil - 1}^{n-1}(t) [(1-t)G_{\lceil n/2 \rceil - 1} + tG_{\lceil n/2 \rceil}] \\
 &\quad + W_{\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1}(t) [(1-t)G_{\lfloor n/2 \rfloor} + tG_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}] + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n-1} W_i^{n-1}(t) G_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} W_i^{n-1}(t) \tilde{G}_i.
 \end{aligned}$$

当  $n \geq 3$  为奇数时, 上式稍加改动后仍成立, 于是由数学归纳法知算法正确.

算法 8.4.1 和 8.4.2 的示意图见图 8.4.1 和 8.4.2. 容易看出执行算法 8.4.1, 8.4.2 所需要的乘法次数各为  $(n+2)^2/2-2$  ( $n$  为偶数),  $(n+1)^2/2$  ( $n$  为奇数), 与  $3n$  ( $n$  为偶数),  $3n-1$  ( $n$  为奇数), 而用 de Casteljau 算法对  $n$  次 Bézier 曲线递归求值所需要的乘法次数为  $n(n+1)$ , 且所有算法中加法次数各为乘法次数之半, 所以递归求值计算的时间复杂度, Said-Ball 曲线仅为 Bézier 曲线的一半, 而 Wang-Ball 曲线是线性的, 又小于 Said-Ball 曲线.

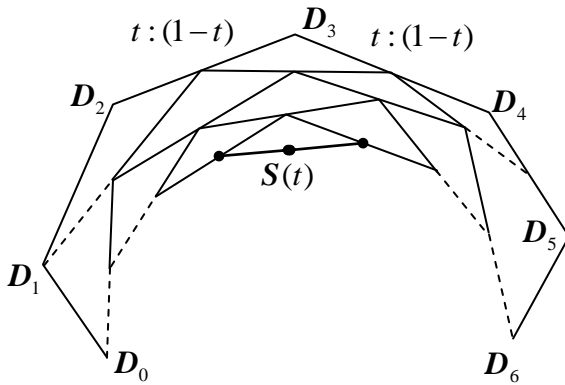


图 8.4.1 偶数阶 Said-Ball 曲线的递归求值

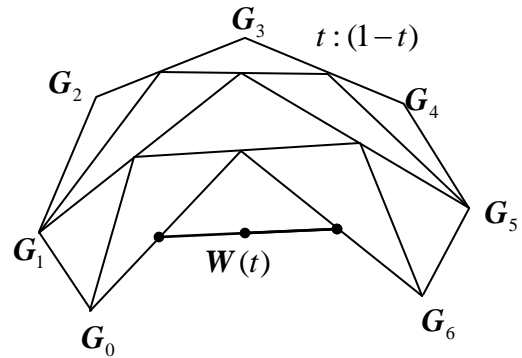


图 8.4.2 偶数阶 Wang-Ball 曲线的递归求值

## 8.4.2 与 Bézier 曲线的互化

假设

$$(A_0^n(t), A_1^n(t), \dots, A_n^n(t))^T = (a_{ij}^B)_{(n+1) \times (n+1)} (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t))^T, A = S, W, a = s, w. \quad (8.4.3)$$

$$(B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t))^T = (b_{ij}^A)_{(n+1) \times (n+1)} (A_0^n(t), A_1^n(t), \dots, A_n^n(t))^T, A = S, W. \quad (8.4.4)$$

容易求得

$$s_{ij}^B = \begin{cases} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + i}{j} \binom{\lceil n/2 \rceil - 1 - i}{j-i} / \binom{n}{j}, & i \leq \lceil n/2 \rceil - 1, i \leq j \leq \lceil n/2 \rceil - 1, \\ \binom{\lfloor 3n/2 \rfloor - i}{n-i} \binom{i-1-\lfloor n/2 \rfloor}{i-j} / \binom{n}{j}, & i \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq j \leq i, \\ 1, & i = j = n/2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (8.4.5)$$

$$w_{ij}^B = \begin{cases} 2^i \binom{n-2-2i}{j-i} / \binom{n}{j}, & i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, i \leq j \leq n-2-i, \\ 2^{n-i} \binom{2i-2-n}{i-j} / \binom{n}{j}, & \lceil n/2 \rceil + 1 \leq i \leq n, n-2-i \leq j \leq i, \\ 2^{\lfloor n/2 \rfloor} / \binom{n}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}, & i = j = \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (8.4.6)$$

于是 Said-Ball 曲线(8.2.3), Wang-Ball 曲线(8.2.4)就可表成 Bézier 曲线(1.3.2), 这里

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) = (D_0, D_1, \dots, D_n) (s_{ij}^B)_{(n+1) \times (n+1)} = (G_0, G_1, \dots, G_n) (w_{ij}^B)_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (8.4.7)$$

反之, 为求  $b_{ij}^S$ , 先设  $n$  为偶数, 把 Bernstein 基表示为

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{\frac{n}{2}-1-i} (1-t)^{\frac{n}{2}+1} t^i = \sum_{k=0}^{n/2-1-i} \binom{n}{i} \binom{n/2-1-i}{k} (1-t)^{\frac{n}{2}+1} (-1)^k t^{i+k}, \quad 0 \leq i \leq n/2-1, \\ B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-(1-t))^{i-1-\frac{n}{2}} (1-t)^{n-i} t^{\frac{n}{2}+1} = \sum_{k=0}^{i-1-n/2} \binom{n}{i} \binom{i-1-n/2}{k} (1-t)^{n-i+k} (-1)^k t^{\frac{n}{2}+1}, \quad n/2+1 \leq i \leq n.$$

对  $n$  为奇数的情况进行类似的处理, 我们就得到

$$b_{ij}^S = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{\lceil n/2 \rceil - 1 - i}{j-i}}{\binom{\lfloor n/2 \rfloor + j}{j}}, & 0 \leq i \leq \lceil n/2 \rceil - 1, i \leq j \leq \lceil n/2 \rceil - 1, \\ \frac{(-1)^{i-j} \binom{n}{i} \binom{i-1-\lfloor n/2 \rfloor}{i-j}}{\binom{\lfloor 3n/2 \rfloor - j}{n-j}}, & n \geq i \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1, i \geq j \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1, \\ 1, & i = j = n/2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (8.4.8)$$

为求  $b_{ij}^W$ , 我们建议使用以下的递推算法.

**算法 8.4.3** (Bernstein 基向 Wang-Ball 基的转换)

$$b_{ii}^W = \binom{n}{i} / 2^i \quad (0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor), \quad b_{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^W = b_{\lceil n/2 \rceil - 1, \lceil n/2 \rceil - 1}^W, \quad b_{ij}^W = 0 \quad (else);$$

{ for  $i = \lceil n/2 \rceil - 2, \lceil n/2 \rceil - 3, \dots, 0,$

$$a_{i,j} = \binom{n}{i} \binom{n-2-2i}{j-i} / \binom{n}{j} \quad (i+1 \leq j \leq n-2-i);$$

$$\begin{aligned}
& \{ \text{for } k = i, i+1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 2, \\
& \quad \{ \text{for } j = k+1, k+2, \dots, n-3-k, \quad b_{ij}^W = b_{ij}^W - a_{i,k+1} b_{k+1,j}^W; \} \} \\
& b_{i, \lceil n/2 \rceil}^W = b_{i, \lceil n/2 \rceil}^W - a_{i, \lceil n/2 \rceil} b_{\lceil n/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil}^W; \\
& \text{if } i \neq \lceil n/2 \rceil - 2, \\
& \{ \text{for } k = \lceil n/2 \rceil + 1, \lceil n/2 \rceil, \dots, i+4, \\
& \quad \{ \text{for } j = k, k+1, \dots, n+2-k, \quad b_{ij}^W = b_{ij}^W - a_{i, n+2-k} b_{n+2-k, j}^W; \} \} \\
& \text{if } (n \bmod 2) \neq 0, \quad b_{i, (n+1)/2}^W = b_{i, (n+1)/2}^W - a_{i, (n+1)/2} b_{(n+1)/2, (n+1)/2}^W; \\
& \{ \text{for } j = i, i+1, \dots, n-2-i, \quad b_{n-i, n-j}^W = b_{ij}^W; \} \}
\end{aligned}$$

于是 Bézier 曲线(1.3.2)就可表成 Said-Ball 曲线(8.2.3)或 Wang-Ball 曲线(8.2.4), 这里

$$(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_n) = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n) (b_{ij}^S)_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (8.4.9)$$

$$(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n) = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n) (b_{ij}^W)_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (8.4.10)$$

下面给出 Wang-Ball 基向 Bernstein 基的转换阵及其逆阵的实例( $n=5,6$ ):

$$\begin{aligned}
(w_{ij}^B)_{6 \times 6} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}^W)_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \\
(w_{ij}^B)_{7 \times 7} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}^W)_{7 \times 7} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 8.4.3 升阶和降阶

**算法 8.4.4** (Said-Ball 曲线升阶)

- 若  $n$  为偶数, 当  $0 \leq i \leq n/2$ , 或  $i = n/2 + 1$ , 或  $n/2 + 2 \leq i \leq n+1$  时, 分别取  $\hat{\mathbf{D}}_i = \mathbf{D}_i, \mathbf{D}_{n/2}, \mathbf{D}_{i-1}$ .
- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-1)/2$  时, 设  $\lambda_i = i/((n+1)/2 + i)$ , 取  $\hat{\mathbf{D}}_i = (1 - \lambda_i)\mathbf{D}_i + \lambda_i\hat{\mathbf{D}}_{i-1}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_{n+1-i} = (1 - \lambda_i)\mathbf{D}_{n-i} + \lambda_i\hat{\mathbf{D}}_{n+2-i}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_{(n+1)/2} = (\hat{\mathbf{D}}_{(n-1)/2} + \hat{\mathbf{D}}_{(n+3)/2})/2$ ,

则  $\hat{\mathbf{S}}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} S_i^{n+1}(t) \hat{\mathbf{D}}_i$  是 Said-Ball 曲线(8.2.3)的升阶曲线, 见图 8.4.3, 8.4.4.

对 Said-Ball 曲线(8.2.3)的降阶, 首先给出能精确降阶的充要条件:

$$\mathbf{D}_{n/2-1} + \mathbf{D}_{n/2+1} + 2\mathbf{D}_{n/2} = \mathbf{0}, n \text{ 为偶数}; \quad \mathbf{D}_{(n-1)/2} - \mathbf{D}_{(n+1)/2} = \mathbf{0}, n \text{ 为奇数} \quad (8.4.11)$$

为了实现近似降阶, 可对每个控制顶点  $\mathbf{D}_i$  给予适当的扰动  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ , 使得新曲线



$\bar{S}(t) = \sum_{i=0}^n S_i^n(t)(D_i + \varepsilon_i)$  满足条件(8.4.11), 利用约束优化法令  $\sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|^2 = \text{MIN}$  可确定  $\varepsilon_i$ .

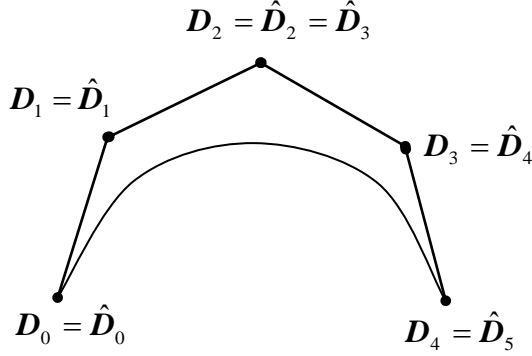


图 8.4.3 偶数次 Said-Ball 曲线的升阶

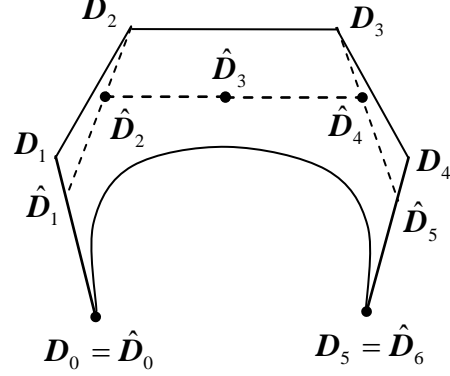


图 8.4.4 奇数次 Said-Ball 曲线的升阶

**算法 8.4.5** (Said-Ball 曲线的降阶逼近)

- 若  $n$  为偶数,
  - $D_{n/2-1} \leftarrow D_{n/2-1} + (D_{n/2-1} + D_{n/2+1} - 2D_{n/2})/2$ ,
  - $D_{n/2+1} \leftarrow D_{n/2+1} + (D_{n/2-1} + D_{n/2+1} - 2D_{n/2})/2$ ,
  - $D_{n/2} \leftarrow D_{n/2} - (D_{n/2-1} + D_{n/2+1} - 2D_{n/2})/2$ .
  - 对  $i = 0, 1, \dots, n/2 - 1$ ,  $\bar{D}_i = (1 + 2i/n)D_i - (2i/n)D_{i-1}$ ,
  - $\bar{D}_{n-1-i} = (1 + 2i/n)D_{n-i} - (2i/n)D_{n+1-i}$ .
- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-3)/2$ , 或  $i = (n-1)/2$ , 或  $(n+1)/2 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\bar{D}_i = D_i, (D_{(n-1)/2} + D_{(n+1)/2})/2, D_{i+1}$ .

则  $\bar{S}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i^{n-1}(t)\bar{D}_i$  是 Said-Ball 曲线(8.2.3)的降阶逼近曲线.

容易看出 Said-Ball 曲线的升、降阶比 Bézier 曲线简单和容易, 计算量较少. Goodman T.N.T. 和 Said<sup>[7,8]</sup>指出, 在升阶、降阶显得重要而其他运算显得不大重要的场合, 设计者应当考虑用广义 Ball 曲线来代替 Bézier 曲线.

**算法 8.4.6** (Wang-Ball 曲线的升阶)

- 若  $n$  为偶数, 当  $0 \leq i \leq n/2$ , 或  $i = n/2 + 1$ , 或  $n/2 + 2 \leq i \leq n+1$  时, 分别取  $\hat{G}_i = G_i, G_{n/2}, G_{i-1}$ .
- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-1)/2$ , 或  $i = (n+1)/2$ , 或  $(n+3)/2 \leq i \leq n+1$  时, 分别取  $\hat{G}_i = G_i, (G_{(n-1)/2} + G_{(n+1)/2})/2, G_{i-1}$ .

则  $\hat{W}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} W_i^{n+1}(t)\hat{G}_i$  是 Wang-Ball 曲线(8.2.4)的升阶曲线.

**算法 8.4.7** (Wang-Ball 曲线的降阶逼近)

- 若  $n$  为偶数, 当  $0 \leq i \leq n/2 - 2$ , 或  $i = n/2 - 1$ , 或  $i = n/2$ , 或  $n/2 + 1 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\bar{G}_i = G_i, G_{n/2-1} + (G_{n/2-1} + G_{n/2+1} - 2G_{n/2})/2, G_{n/2+1} + (G_{n/2-1} + G_{n/2+1} - 2G_{n/2})/2, G_{i+1}$ .
- 若  $n$  为奇数, 当  $0 \leq i \leq (n-3)/2$ , 或  $i = (n-1)/2$ , 或  $(n+1)/2 \leq i \leq n-1$  时, 分别取  $\bar{G}_i = G_i, (G_{(n-1)/2} + G_{(n+1)/2})/2, G_{i+1}$ .

则  $\bar{W}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i^{n-1}(t)\bar{G}_i$  是 Wang-Ball 曲线(8.2.4)的降阶逼近曲线, 见图 8.4.5, 8.4.6.

容易看出 Wang-Ball 曲线的升、降阶过程仅需替代一个或二个控制顶点就可实现, 显然比 Said-Ball 曲线的升、降阶还要简单快捷.

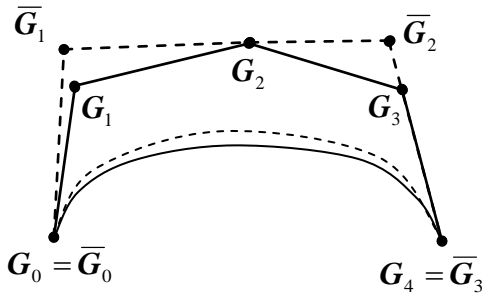


图 8.4.5 偶数次 Wang-Ball 曲线的降阶

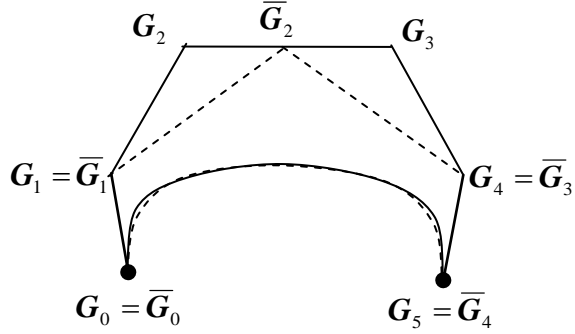


图 8.4.6 奇数次 Wang-Ball 曲线的降阶

## 8.5 利用广义 Ball 曲线曲面对 Bézier 曲线曲面求值

定义 8.5.1 设有点向量集  $\{D_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}, \{G_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n} \in \mathbb{R}^3$ , 则曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n S_i^m(u) S_j^n(v) D_{ij}, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (8.5.1)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n W_i^m(u) W_j^n(v) G_{ij}, \quad 0 \leq u, v \leq 1. \quad (8.5.2)$$

分别称为  $m \times n$  次的 Said-Ball 曲面和 Wang-Ball 曲面, 这里  $S_i^m(u), S_j^n(v)$  为 Said-Ball 基,  $W_i^m(u), W_j^n(v)$  为 Wang-Ball 基, 分别如(8.2.1), (8.2.2)所示;  $D_{ij}, G_{ij}$  分别称为上述曲面的控制顶点.

利用张量积曲面的性质, 我们可以根据广义 Ball 曲线求值的递推算法 8.4.1 和 8.4.2, 得出 Said-Ball 和 Wang-Ball 曲面求值的递推算法. 参数曲面求值可以直接应用这些递推算法. 除此以外, 对 Bézier 曲面求值, 也可不应用 de Casteljau 算法(见性质 7.2.9), 而是先转换到广义 Ball 曲面, 再按后者的递推算法求值. 为此, 先要根据基转换公式(8.4.8)和算法 8.4.3, 求得控制顶点的转换公式:

$$(D_{ij})_{(m+1) \times (n+1)} = (b_{ij}^S)^T_{(m+1) \times (m+1)} (P_{ij})_{(m+1) \times (n+1)} (b_{ij}^S)^T_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (8.5.3)$$

$$(G_{ij})_{(m+1) \times (n+1)} = (b_{ij}^W)^T_{(m+1) \times (m+1)} (P_{ij})_{(m+1) \times (n+1)} (b_{ij}^W)^T_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (8.5.4)$$

算法 8.5.1 (利用 Said-Ball 曲面对 Bézier 曲面求值)

Step 1. 按 (8.5.3), 由 Bézier 曲面 (7.2.1) 的控制顶点  $\{P_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$  计算相应的 Said-Ball 曲面 (8.5.1) 的控制顶点  $\{D_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ .

Step 2. 应用算法 8.4.1, 对给定的参数  $(u_0, v_0)$ , 求 Said-Ball 曲面 (8.5.1) 上的点向量  $S(u_0, v_0)$ , 则所得结果就是 Bézier 曲面 (7.2.1) 上的点向量  $P(u_0, v_0)$ .

算法 8.5.2 (利用 Wang-Ball 曲面对 Bézier 曲面求值)

把上述算法中的 (8.5.3), (8.5.1),  $\{D_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ , 算法 8.4.1,  $S(u_0, v_0)$  分别换作 (8.5.4), (8.5.2),  $\{G_{ij}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ , 算法 8.4.2,  $W(u_0, v_0)$ , 即得本算法.

下面进行 Bézier 曲面 de Casteljau 求值算法与二种广义 Ball 曲面求值算法的时间复杂度分析. 容易知道这三种算法中所需加法次数各为其乘法次数之半. 记已给参数曲面的次数是  $m \times n$ , 并假设利用这三种算法求曲面上一点之值共需执行的乘法次数分别为  $M(B)$ ,  $M(S)$ ,  $M(W)$ , 则  $M(B) = O(mn^2)$ ,  $M(S) = O(mn^2/2)$ ,  $M(W) = O(3mn)$ . 可见递

归求值的时间复杂度, 对 Said-Ball 曲面而言仅为 Bézier 曲面的一半, 而对 Wang-Ball 曲面而言是其次数的平方, 又小于 Said-Ball 曲面其次数的立方.

算法 8.5.1, 8.5.2 比 Bézier 曲面直接求值多一个曲面转换过程. 但曲面求值往往对  $k$  个 ( $k$  相当大) 点向量同时进行, 对所有这些点求值只需进行一次曲面转换; 又由于基转换矩阵均可预先算好以备调用, 这些矩阵中又有很多元素是零, 所以曲面控制顶点的换算所占时间的比重是不多的. 容易推算, Bézier 曲面求值和利用算法 8.5.1, 8.5.2 求曲面之值的时间复杂度分别是  $O(kmn^2)$ ,  $O(kmn^2/2) + O(mn(m+n)/4)$ ,  $O(3kmn) + O(mn(m+n)/2)$ .

综上所述, 如果在曲面显示、曲面绘制、曲面设计、曲面求交、曲面逼近和曲面等距计算中应用 Wang-Ball 曲面来进行大量而重复的曲面求值的编程运算, 可望取得明显的经济效益. 有关结果还可进一步推广到有理 Wang-Ball 曲面.

## 8.6 三角 Ball 曲面

Goodman T.N.T. 和 Said<sup>[7]</sup> 在研究 Said-Ball 曲线的基础上, 提出了三角域上的二元 Ball 基, 这种基函数在三角域的边界上退化为单元 Said-Ball 基. 从 §8.4 我们已经看到 Wang-Ball 曲线在许多方面优于 Bézier 曲线和 Said-Ball 曲线, 所以开发多元 Wang-Ball 基表示技术对自由曲面设计是有益的.

### 8.6.1 三角 Wang-Ball 基及三角 Wang-Ball 曲面

利用与三角 Bézier 曲面片(7.3.5)的 Bézier 网相类似的控制网格  $\{G_{i,j,k}, i+j+k=n\}$ , 我们可以产生一张三角 Ball 曲面

$$W(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} W_{i,j,k}^n(u, v, w) G_{i,j,k}, \quad u, v, w \geq 0, \quad u+v+w=1. \quad (8.6.1)$$

这里  $W_{i,j,k}^n(u, v, w)$  是需要构造的三角 Wang-Ball 基. 构造的出发点是希望曲面形式具有和 Wang-Ball 曲线相类似的在求值与升降阶运算中的快速功能. 为此, 必须使得其次数分布在三角域上呈金字塔形, 塔尖为  $n$  次, 在三个角点上只有二次, 且  $0 \leq W_{i,j,k}^n(u, v, w) \leq 1$ ,

$\sum_{i+j+k=n} W_{i,j,k}^n(u, v, w) = 1$ , 而当参数  $u, v, w$  之一为 0 时,  $W_{i,j,k}^n(u, v, w)$  退化为单元 Wang-Ball 基.

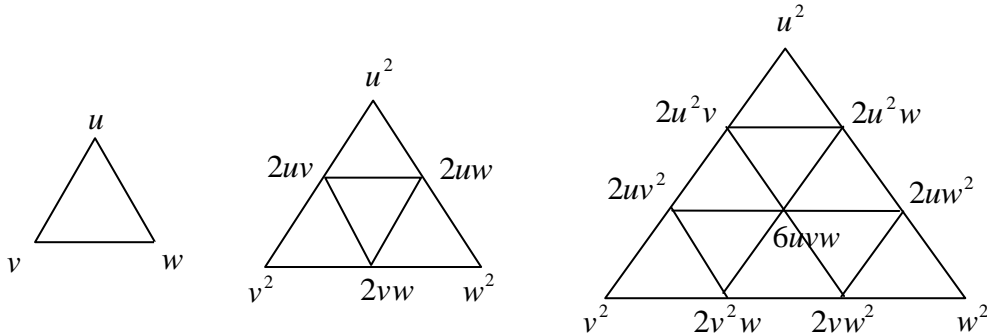


图 8.6.1 三角 Wang-Ball 基的构造 ( $n=1,2,3$ )

按照这些条件, 容易推知当  $n=1,2,3$  时基的形式如图 8.6.1 所示, 图中基函数的位置与控制顶点的位置相对应. 一般地, 我们有

**定义 8.6.1** 假设  $W_{100}^1(u, v, w) = u$ ,  $W_{010}^1(u, v, w) = v$ ,  $W_{001}^1(u, v, w) = w$ . 对于  $i+j+k=l+1$ ,  $L = [(l+1)/2]$ , 若  $i, j, k \leq L$ , 取  $W_{i,j,k}^{l+1}(u, v, w) = uW_{i-1,j,k}^l(u, v, w) + vW_{i,j-1,k}^l(u, v, w) + wW_{i,j,k-1}^l(u, v, w)$ . 否则, 当  $i = L+1$ , 或  $j = L+1$ , 或  $k = L+1$  时, 分别取  $W_{i,j,k}^{l+1}(u, v, w) = uW_{i-1,j,k}^l(u, v, w)$ ,  $vW_{i,j-1,k}^l(u, v, w)$ ,  $wW_{i,j,k-1}^l(u, v, w)$ ; 当  $i \geq L+2$ ,

或  $j \geq L+2$  , 或  $k \geq L+2$  , 分别取  $W_{i,j,k}^{l+1}(u,v,w) = W_{i-1,j,k}^l(u,v,w), W_{i,j-1,k}^l(u,v,w), W_{i,j,k-1}^l(u,v,w)$  . 则递归计算所得到的  $\{W_{i,j,k}^n(u,v,w), i+j+k=n\}$  , 称为三角 Wang-Ball 基, 而按(8.6.1)所示的曲面称为由控制网格  $\{G_{i,j,k}, i+j+k=n\}$  所决定的  $n$  次三角 Wang-Ball 曲面.

按照递归定义 8.6.1, 我们给出四次三角 Ball 基如图 8.6.2, 并容易证明  $n$  次三角 Wang-Ball

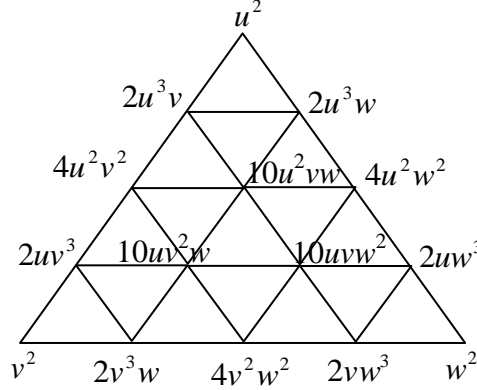


图 8.6.2 四次三角 Wang-Ball 基的构造

基具有线性无关性, 对称性:  $W_{i,j,k}^n(u,v,w) = W_{j,i,k}^n(v,u,w) = W_{k,j,i}^n(w,v,u) = W_{i,k,j}^n(u,w,v) = W_{j,k,i}^n(v,w,u) = W_{k,i,j}^n(w,u,v)$ ; 而曲面(8.6.1)具有规范性和凸包性.

### 8.6.2 三角 Wang-Ball 曲面的升阶和递归求值

**算法 8.6.1** (求三角升阶 Wang-Ball 曲面基函数的系数)

Step 1. 设  $A_{100}^{(1)} = A_{010}^{(1)} = A_{001}^{(1)} = 1$ .

Step 2. 对于  $m=1, 2, \dots, n+1$ ,  $i+j+k=m+1$ ,  $M = \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ , 若  $i, j, k \leq M$ , 取  $A_{i,j,k}^{(m+1)} = A_{i-1,j,k}^{(m)} + A_{i,j-1,k}^{(m)} + A_{i,j,k-1}^{(m)}$ . 否则, 对  $i \geq M+1$ , 或  $j \geq M+1$ , 或  $k \geq M+1$ , 分别取  $A_{i,j,k}^{(m+1)} = A_{i-1,j,k}^{(m)}, A_{i,j-1,k}^{(m)}, A_{i,j,k-1}^{(m)}$ .

**定理 8.6.1**  $n$  次三角 Wang-Ball 曲面(8.6.1)能被表成  $n+1$  次的三角 Wang-Ball 曲面, 升阶后的控制顶点  $\hat{G}_{i,j,k} (i+j+k=n+1)$  可按以下方式决定: 令  $N = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ ,

- 若  $i, j, k \leq N$ , 取

$$\hat{G}_{i,j,k} = A_{i-1,j,k}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)} G_{i-1,j,k} + A_{i,j-1,k}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)} G_{i,j-1,k} + A_{i,j,k-1}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)} G_{i,j,k-1}.$$

- 否则, 对  $i \geq N+1$ , 或  $j \geq N+1$ , 或  $k \geq N+1$ , 分别取

$$\hat{G}_{i,j,k} = (A_{i-1,j,k}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)}) G_{i-1,j,k}, (A_{i,j-1,k}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)}) G_{i,j-1,k}, (A_{i,j,k-1}^{(n)} / A_{i,j,k}^{(n+1)}) G_{i,j,k-1}.$$

**算法 8.6.2** (三角 Wang-Ball 曲面求值)

设  $G_{i,j,k}^{(n)} = G_{i,j,k}$ ; 对  $m=n-1, n-2, \dots, 1, 0$ , 及  $i+j+k=m$ ,  $M = \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ , 若  $i, j, k \leq M$ , 则  $G_{i,j,k}^{(m)} = uG_{i+1,j,k}^{(m+1)} + vG_{i,j+1,k}^{(m+1)} + wG_{i,j,k+1}^{(m+1)}$ ; 否则, 对  $i \geq M+1$ , 或  $j \geq M+1$ , 或  $k \geq M+1$ , 分别取  $G_{i,j,k}^{(m)} = G_{i+1,j,k}^{(m+1)}, G_{i,j+1,k}^{(m+1)}, G_{i,j,k+1}^{(m+1)}$ . 最后得  $W(u,v,w) = G_{000}^{(0)}$ .

把三角 Bézier 曲面的 de Casteljau 算法, 三角 Said-Ball 曲面的 Goodman<sup>[8]</sup>算法和三角 Wang-Ball 曲面的递归求值算法 8.6.2 进行比较, 可知后者的时间复杂度仅分别是前两种算法的四分之一或五分之二.

### 主要文献

- 
- [WGJ, 97] 王国瑾, CONSURF 系统中机身造型曲线的若干几何性质, 高校应用数学学报, 1997, 12A(1): 1-8
- [WGJ, 89] 王国瑾, Ball 曲线曲面的离散求交, 工程数学学报, 1989, 6(3): 56-62
- [WGJ, 87] 王国瑾, 高次 Ball 曲线及其几何性质, 高校应用数学学报, 1987, 2(1): 126-140
- [HSM, WGZ, JTG, 96] Hu Shimin, Wang Guozhao, Jin Tongguang, Properties of two types of generalized Ball curves, Computer Aided Design, 1996, 28(2): 125-133
- [WGJ, CM, 2000] Wang Guojin, Cheng Min, New algorithms for evaluating parametric surface, to appear in Progress in Natural Science
- [HSM, WGJ, SJG, 98] Hu Shimin, Wang Guojin, Sun Jianguang, A type of triangular Ball surface and its properties, Journal of Computer Science and Technology, 1998, 13(1): 63-72

### 参考文献

- 1 Ball, A.A., CONSURF, Part 1: Introduction to the conic lofting title, Computer Aided Design, 1974, 6(4): 243-249
- 2 Ball, A.A., CONSURF, Part 2: Description of the algorithms, Computer Aided Design, 1975, 7(4): 237-242
- 3 Ball, A.A., CONSURF, Part 3: How the program is used, Computer Aided Design, 1977, 9(1): 9-12
- 4 李建新, 计算几何学中的有理函数法及其应用, 南航学报, 1985, (1): 18-31
- 5 Said, H.B., Generalized Ball curve and its recursive algorithm, ACM Transaction on Graphics, 1989, 8(4): 360-371
- 6 Goodman, T.N.T., Said, H.B., Shape preserving properties of the generalized Ball basis, Technical Report M6/88, School of Mathematical and Computer Sciences, Universiti Sains Malaysia, Penang, Malasia, Sept, 1998
- 7 Goodman, T.N.T., Said, H.B., Properties of generalized Ball curves and surfaces, Computer Aided Design, 1991, 23(8): 554-560
- 8 Goodman, T.N.T., Said, H.B., Shape preserving properties of the generalized Ball basis, Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(2): 115-121
- 9 刘松涛, 刘根洪, 广义 Ball 样条曲线及三角域上曲面的升阶公式和转换算法, 应用数学学报, 1996, 19(2): 243-253
- 10 奚梅成, Ball 基函数的对偶基及其应用, 计算数学, 1997, 19(2): 147-153
- 11 Phien, H.N., Dejdumrong, N., Efficient algorithms for Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(3): 247-250
- 12 Foley, J.D., Van Dam, A., *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1982
- 13 Lathrop, O., Virtual Reality, SIGGRAPH'99 Course 18, 1999
- 14 Davis, P.J., *Interpolation and approximation*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1963
- 15 Schoenberg, I.J., On spline function, in: Shisha, O., eds., *Inequalities*, Academic Press, New York, 1967
- 16 刘鼎元, 有理 Bézier 曲线, 应用数学学报, 1985, 8(1): 70-83
- 17 Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, 3rd ed., Reading, Addison-Wesley, MA, 1988