

GAMES 102 - 作业 3

彭博

November 14, 2020

1. 本次作业使用 4 种不同曲线参数化方法拟合平面上任意有序点列。为便于对比，对不同参数化方法均采用 Lagrange 插值来绘制曲线，得到平面曲线如 Fig.1 所示。

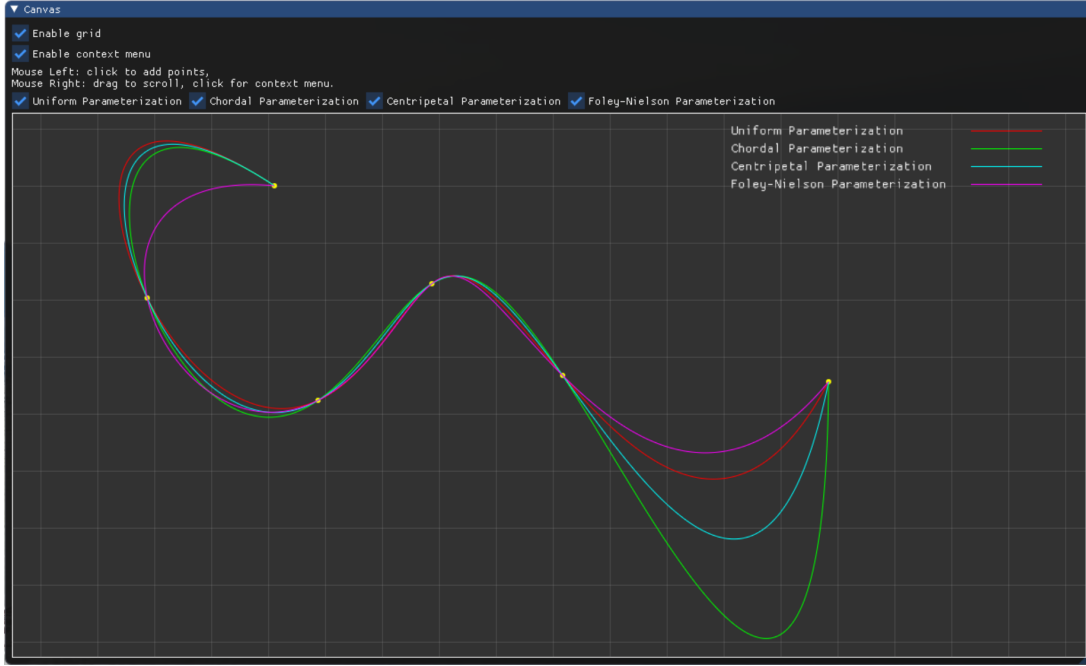


Figure 1: 绘制曲线

不同参数化方法实现原理如下：

- (a) Uniform Parameterization:

参数化曲线时取相邻控制点间隔为定值。对于包含 $n + 1$ 个控制点的曲线可令控制点间隔为：

$$t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n} \quad (1)$$

- (b) Chordal Parameterization:

参数化曲线时取相邻控制点间隔为控制点的欧式距离：

$$t_{i+1} - t_i = \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\| \quad (2)$$

其中 \mathbf{k}_i 为第 i 个控制点的坐标。

- (c) Centripetal Parameterization:

与 Chordal Parameterization 类似，但在计算间隔时对欧式距离开根号：

$$t_{i+1} - t_i = \sqrt{\|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|} \quad (3)$$

- (d) Foley-Nielson Parameterization:

该方法由 Thomas A. Foley 和 Gregory M. Nielson[1, 2] 提出，旨在对曲线进行参数化时保证参数化曲线在仿射变换下保持不变性。具体算法如下：

$$t_{i+1} - t_i = \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\| \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\hat{\alpha}_i \|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i-1}\|}{\|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i-1}\| + \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|} + \frac{3}{2} \frac{\hat{\alpha}_{i+1} \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|}{\|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\| + \|\mathbf{k}_{i+2} - \mathbf{k}_{i+1}\|} \right) \quad (4)$$

$$\hat{\alpha}_i = \min\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_i\right) \quad (5)$$

$$\alpha_i = \pi - \arccos\left(\frac{\|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i-1}\|^2 + \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|^2 - \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_{i-1}\|^2}{2 \cdot \|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i-1}\| \cdot \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|}\right) \quad (6)$$

对比 4 种不同方法可以发现：

- (a) 控制点分布较为均匀且无方向突变时 4 种曲线参数化方法均能获得较为理想的结果；
- (b) 控制点分布不均匀时 Uniform Parameterization 和 Chordal Parameterization 无法得到合适的曲线但 Centripetal Parameterization 和 Foley-Nielson Parameterization 仍然可以得到较为合理的解，如 Fig.2-Fig.5所示；

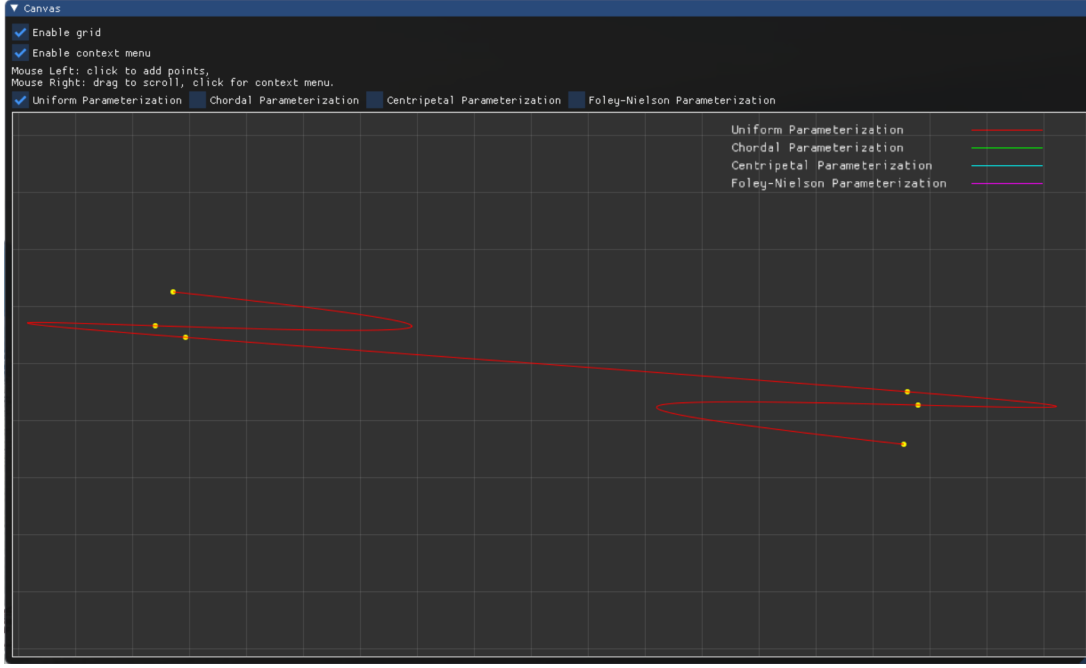


Figure 2: Uniform Parameterization

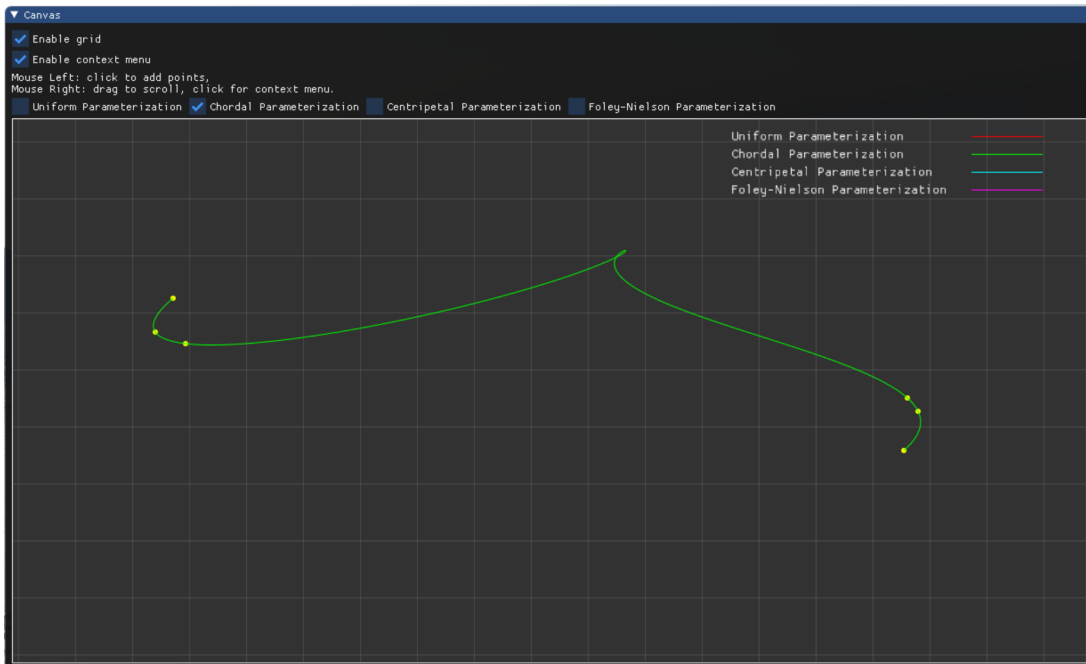


Figure 3: Chordal Parameterization

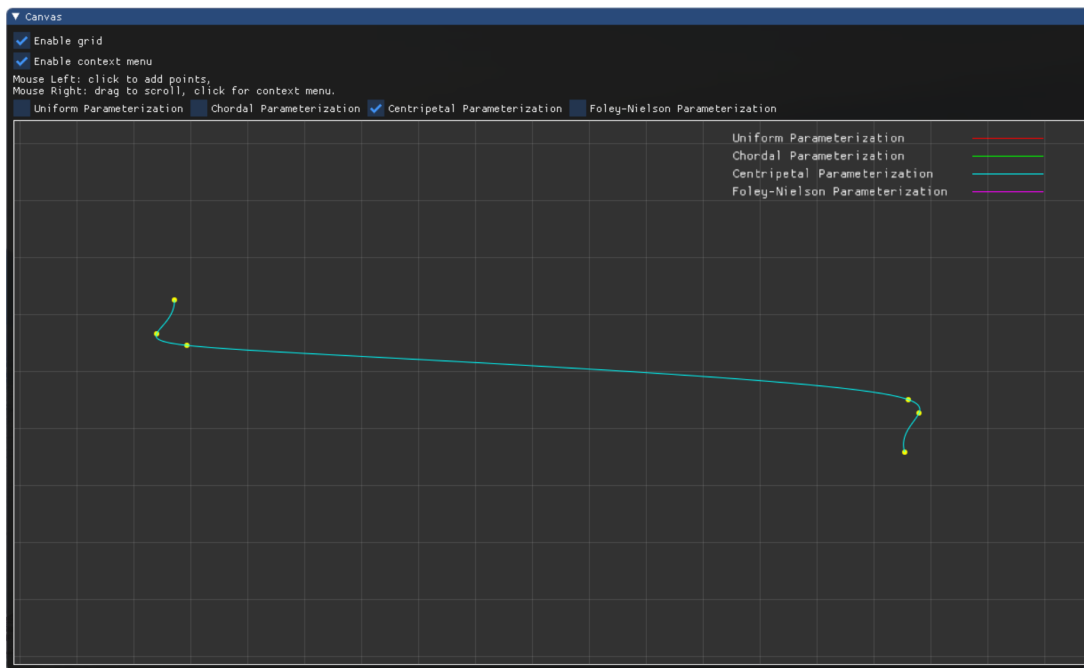


Figure 4: Centripetal Parameterization

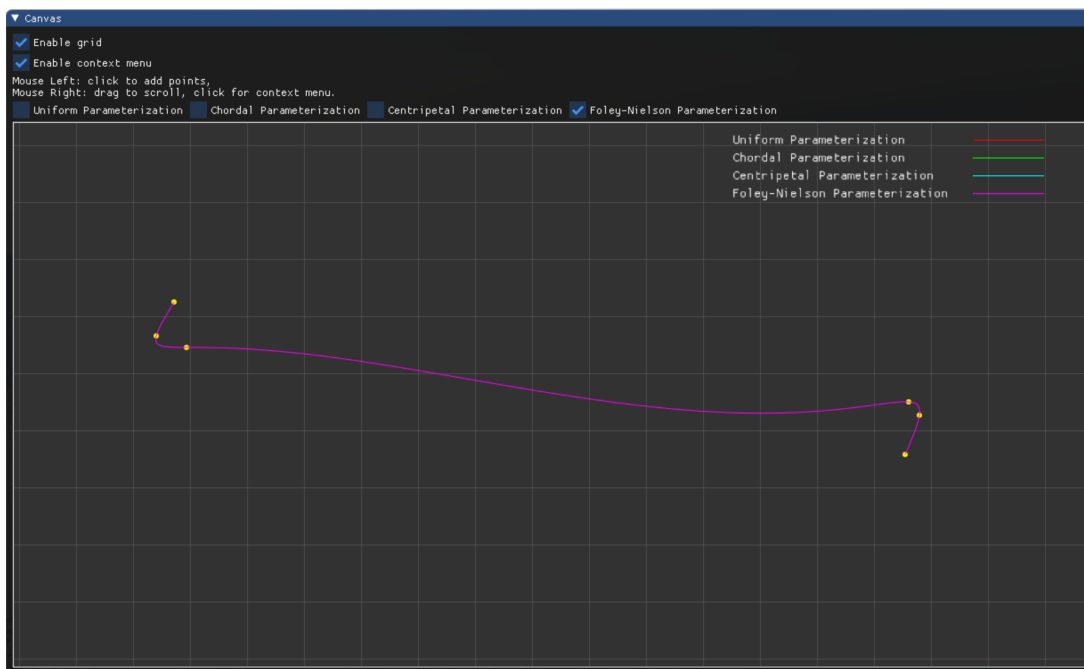


Figure 5: Foley-Nielson Parameterization

References

- [1] Thomas A Foley and Gregory M Nielson. Knot selection for parametric spline interpolation. In *Mathematical methods in computer aided geometric design*, pages 261–CP4. Elsevier, 1989.
- [2] Sıtkı ÖZTÜRK, Cengiz BALTA, and Melih KUNCAN. Comparison of parameterization methods used for b-spline curve interpolation. *European Journal of Technique*, 7(1):21–32, 2017.