GAMES 102 - 作业 7

彭博

December 10, 2020

1. 本次作业使用全局方法构造给定边界的极小曲面，同时实现曲面的参数化。核心方法在于构造曲面的 Laplace 方程并进行求解：

$$Lv = \delta \tag{1}$$

其中 L 为曲面对应的 Laplace 矩阵；v 为曲面各顶点坐标；δ 为各顶点变换后的坐标。

对于曲线内部顶点，离散 Laplace 算子可表示为 [1]：

$$\Delta f(v_i) = \sum_{v_j \in N_1(v_i)} w_{ij}(f(v_j) - f(v_i)) \tag{2}$$

其中 v_j 为顶点 v_i 对应 1-邻域所包含的顶点；w_{ij} 为顶点 v_j 对应的权重，这里取 $w_{ij} = \cot\alpha_{ij} + \cot\beta_{ij}$；$f(v)$ 为顶点所定义的任意函数，这里取 $f(v)$ 为顶点 v 在空间中的坐标。根据平均曲率流理论，采用上述所定义的 Laplace 算子相当于计算网格各顶点的离散平均曲率向量（实际平均曲率向量还需要对 Laplace 算子进行归一化，即除以顶点所对应的邻域面积 A_m，此处使用了未归一化的 Laplace 算子）。对于极小曲面，其内部顶点平均曲率处处为 0，因此可以构造线性方程组：

$$Lv = 0 \tag{3}$$

$$L_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & j \in N_1(v_i) \\ -\sum_j w_{ij} & j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

对于边界处顶点令其更新后位置不变即可：

$$Lv = v \tag{5}$$

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

求解线性方程组即可得到全部顶点更新后的坐标，此时曲面即为固定边界所对应的极小曲面。

对于参数化曲面，内部顶点与极小曲面的处理方式相同，而在边界处将边界顶点映射到单位圆上即可。此时再求解线性方程组即可获得参数化后的曲面。

一般情况下 Laplace 矩阵为稀疏矩阵，因此可以利用其稀疏性来加快求解过程。本次作业使用 Eigen 库下的 SparseMatrix 类来表示 Laplace 矩阵，并使用 SparseQR 求解器来求解线性方程组。求解计算给定曲面对应的极小曲面和参数化曲面可参见 Fig.1-Fig.15。

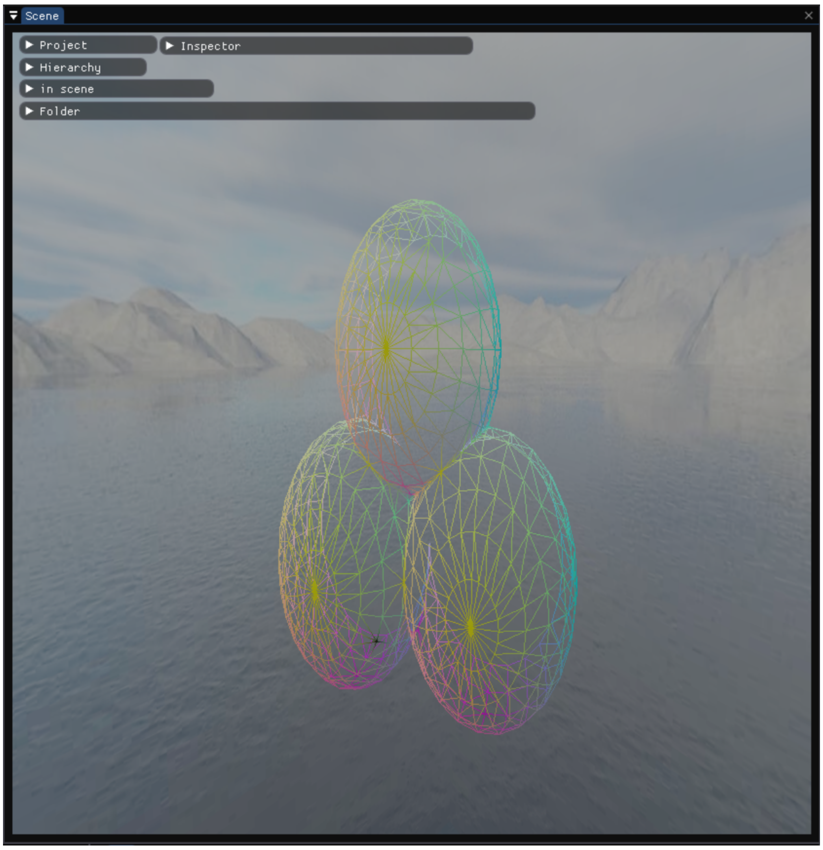

Figure 1: Balls

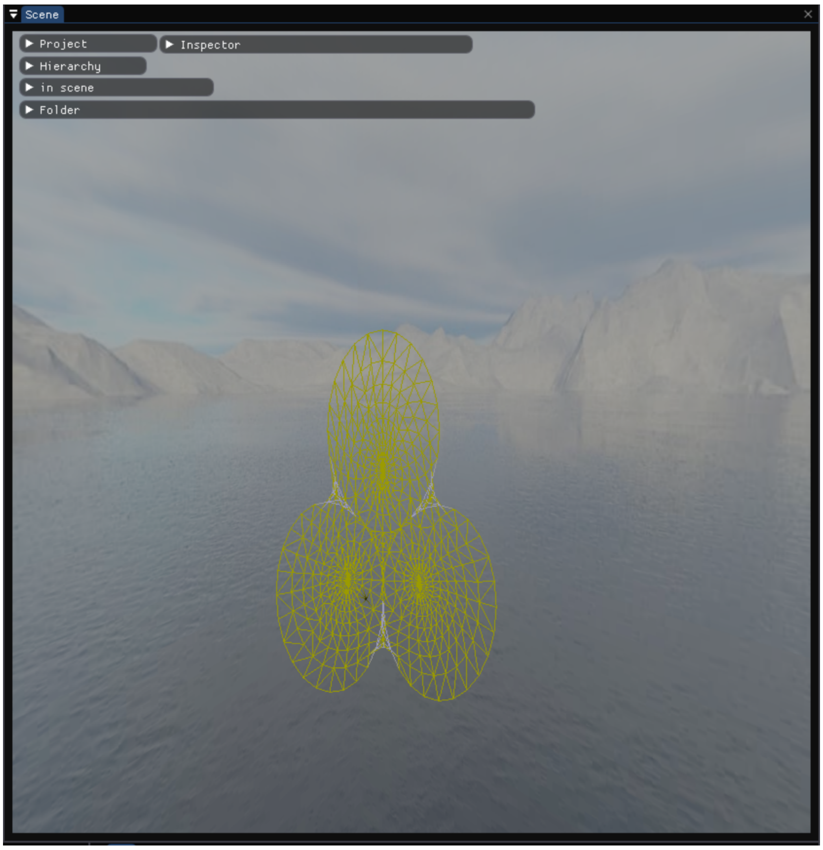

Figure 2: Balls 极小曲面

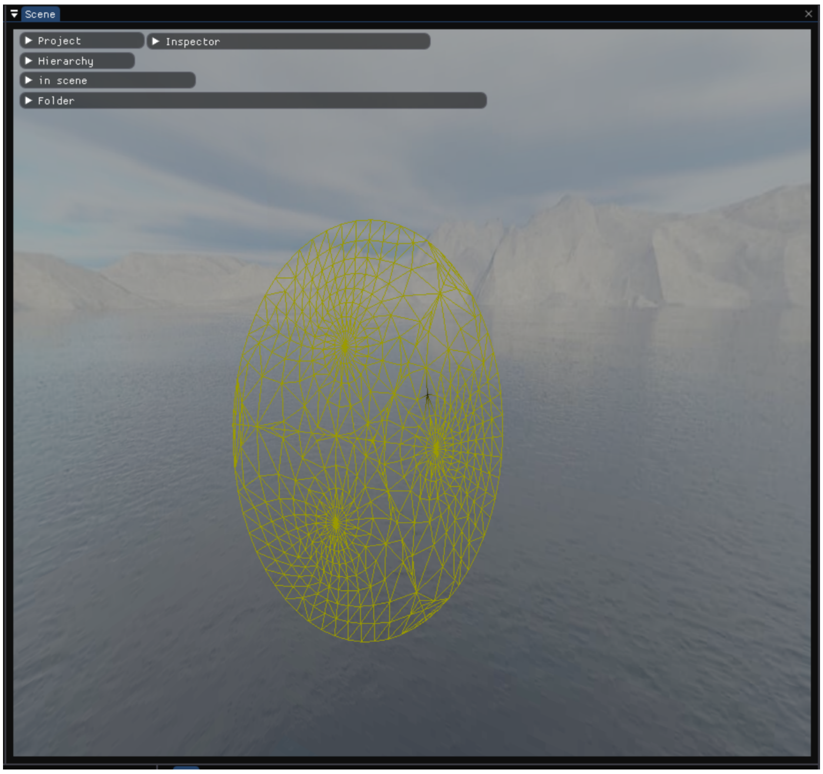

Figure 3: Balls 参数化曲面

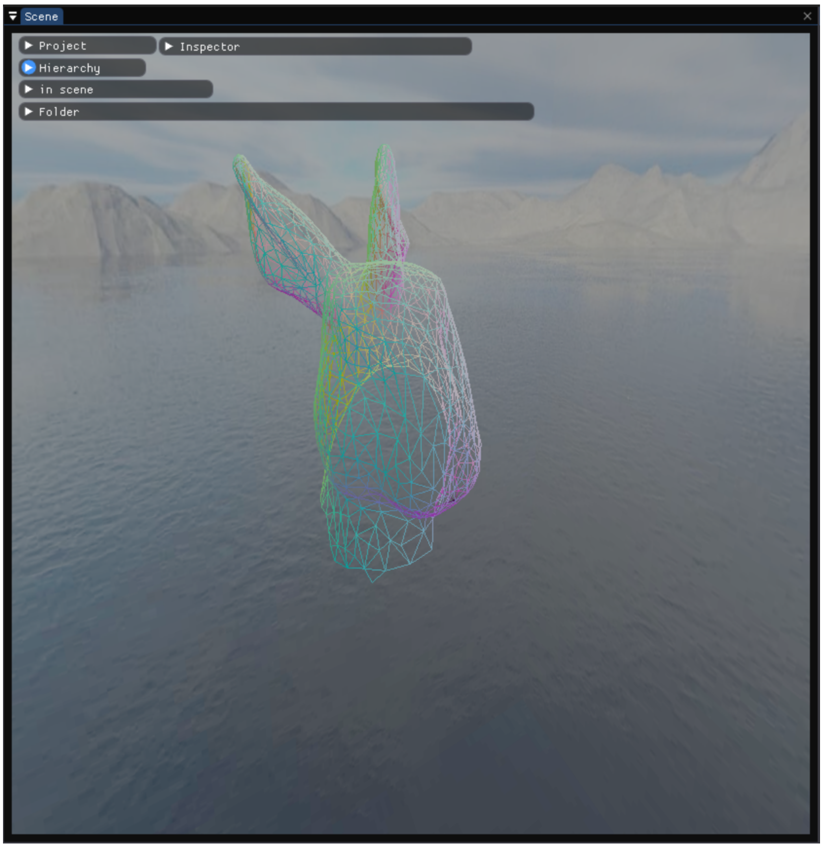

Figure 4: BunnyHead

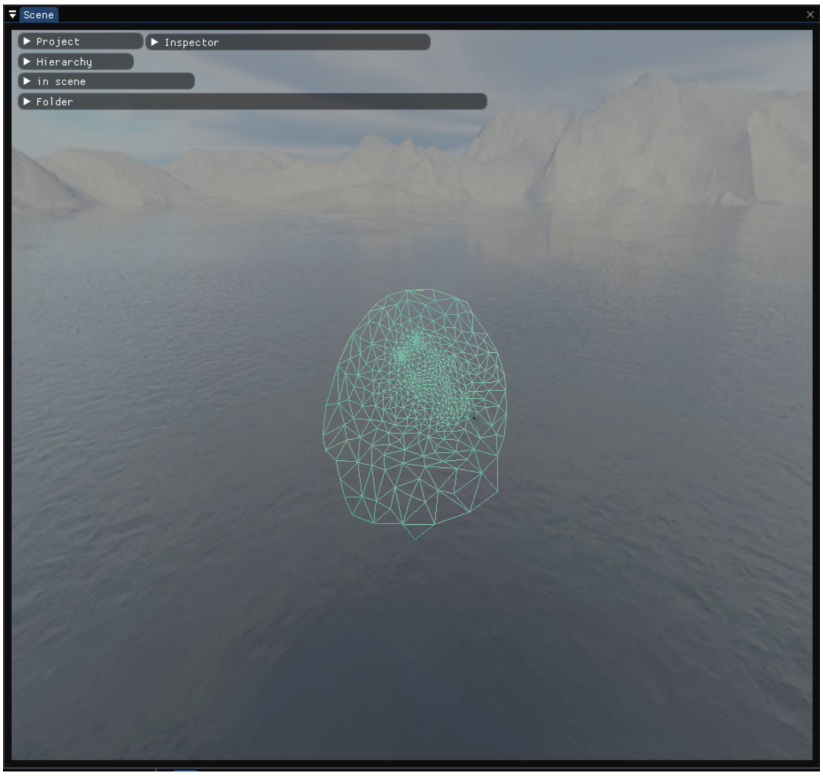

Figure 5: BunnyHead 极小曲面

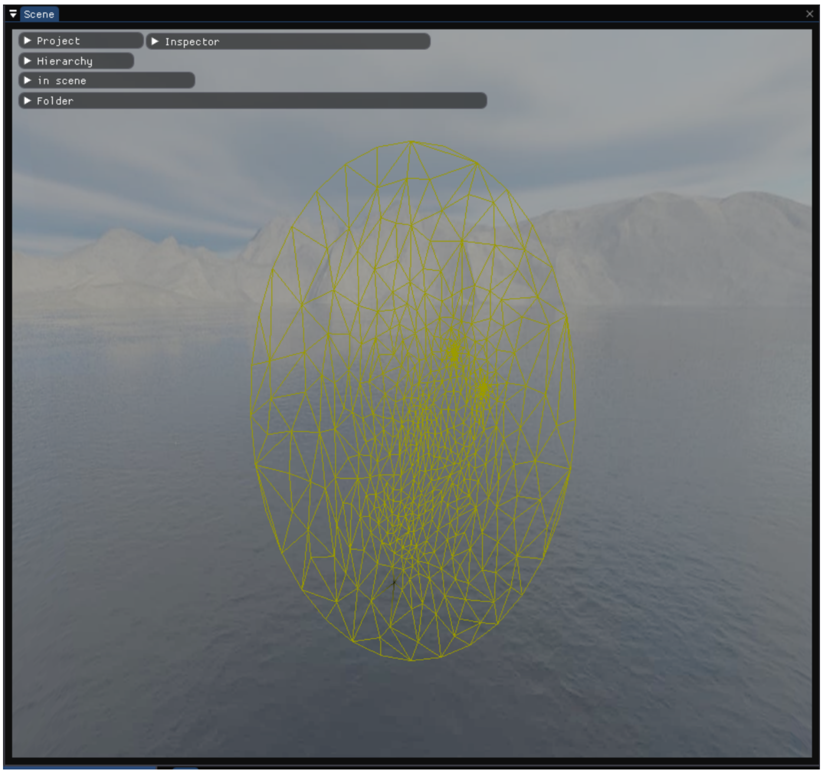

Figure 6: BunnyHead 参数化曲面

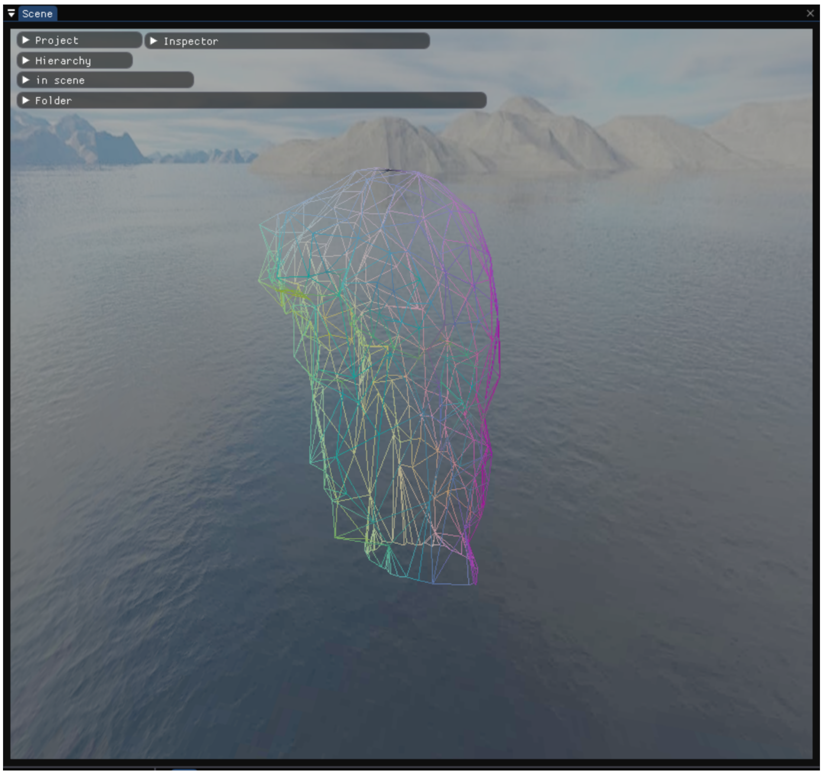

Figure 7: David

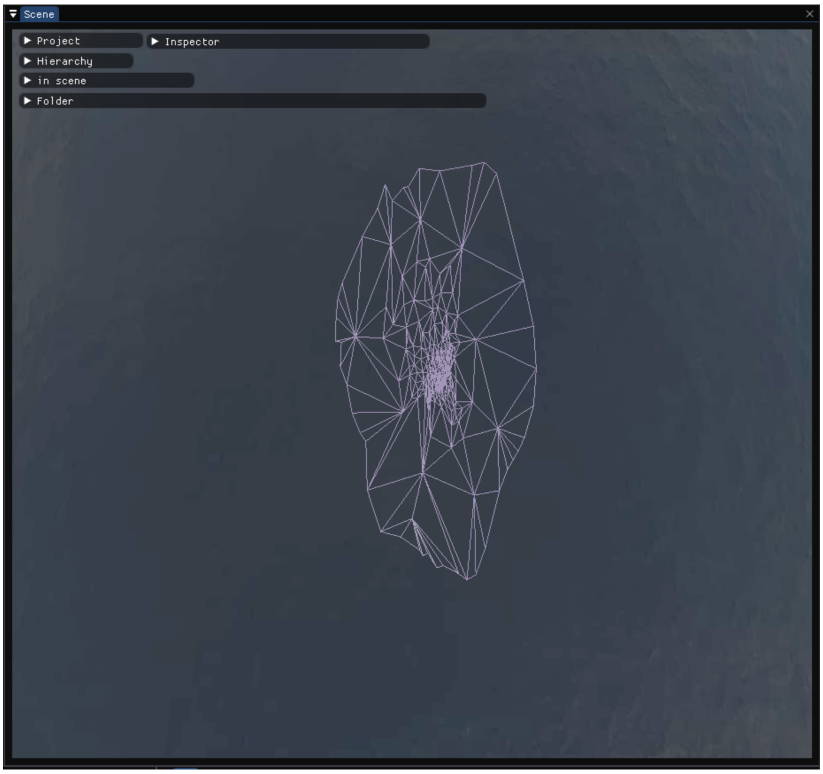

Figure 8: David 极小曲面

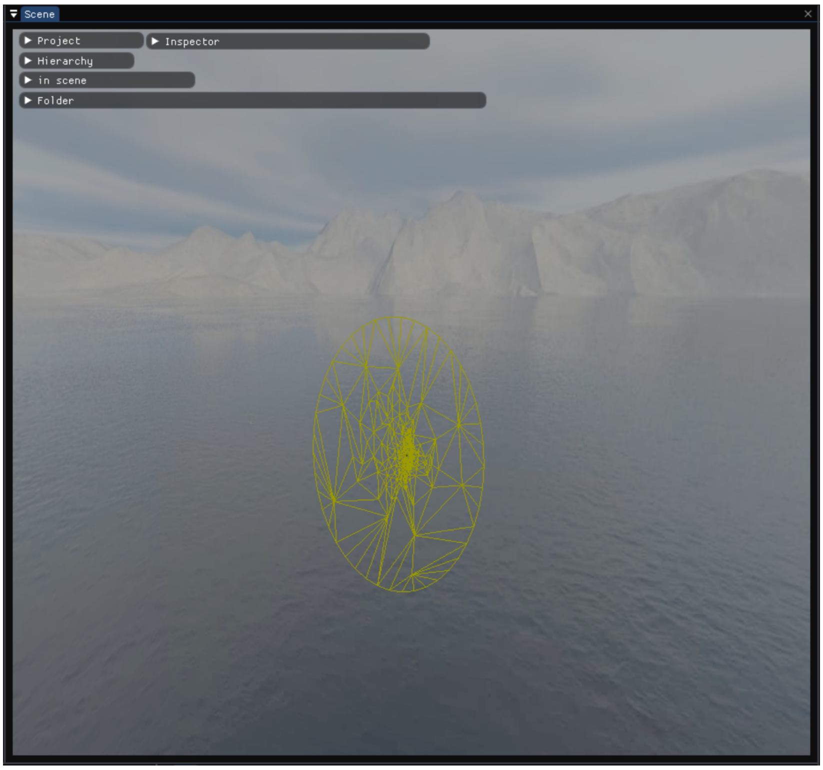

Figure 9: David 参数化曲面

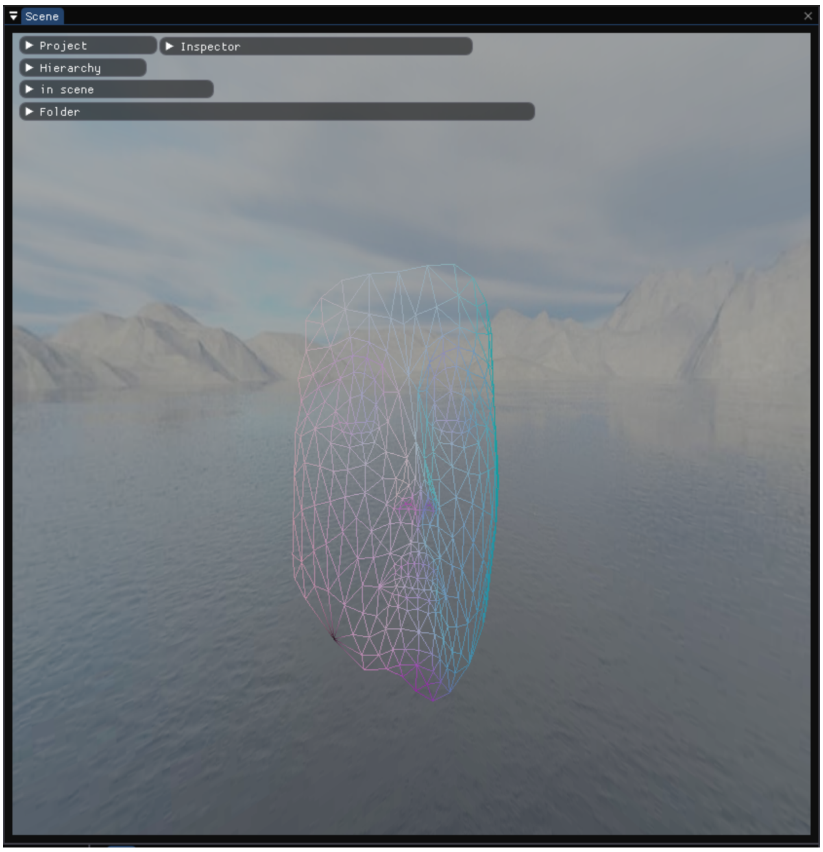

Figure 10: Face

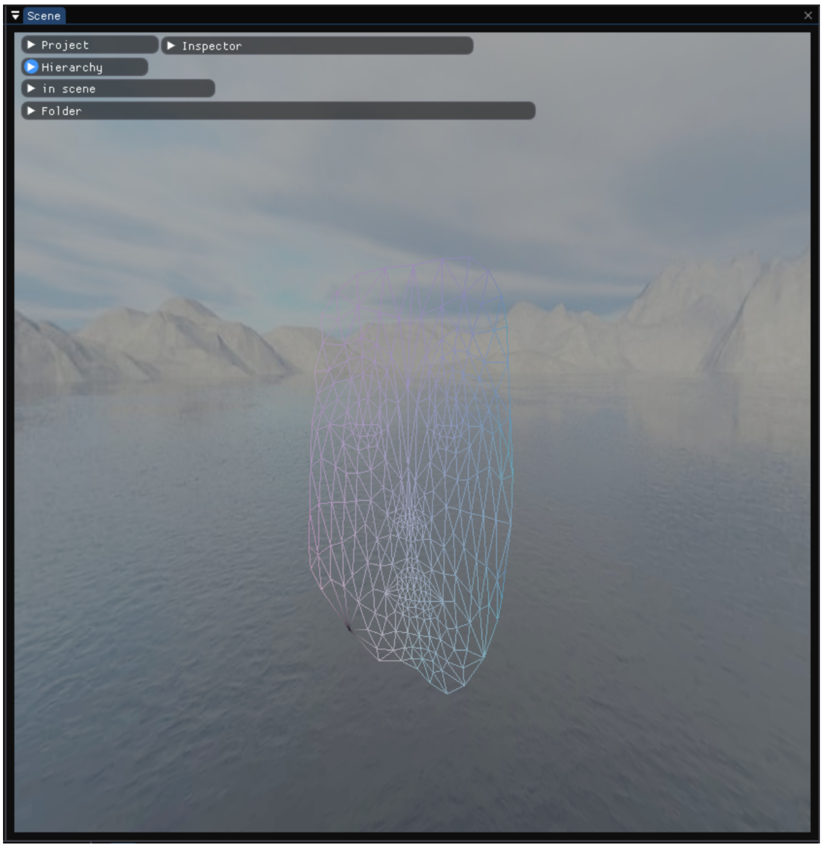

Figure 11: Face 极小曲面

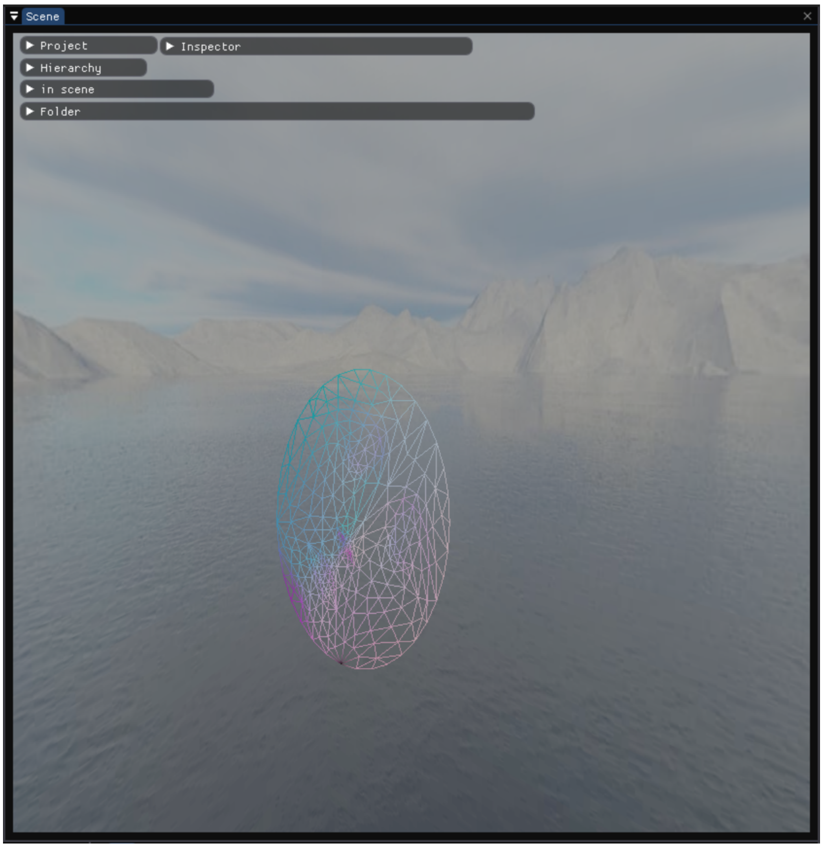

Figure 12: Face 参数化曲面

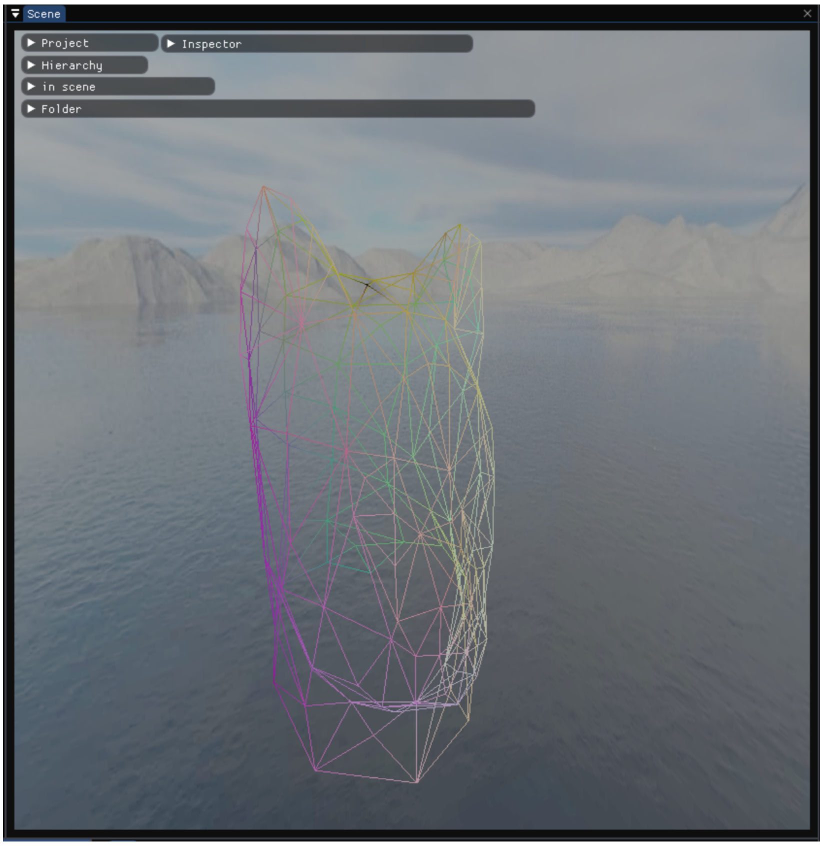

Figure 13: CatHead

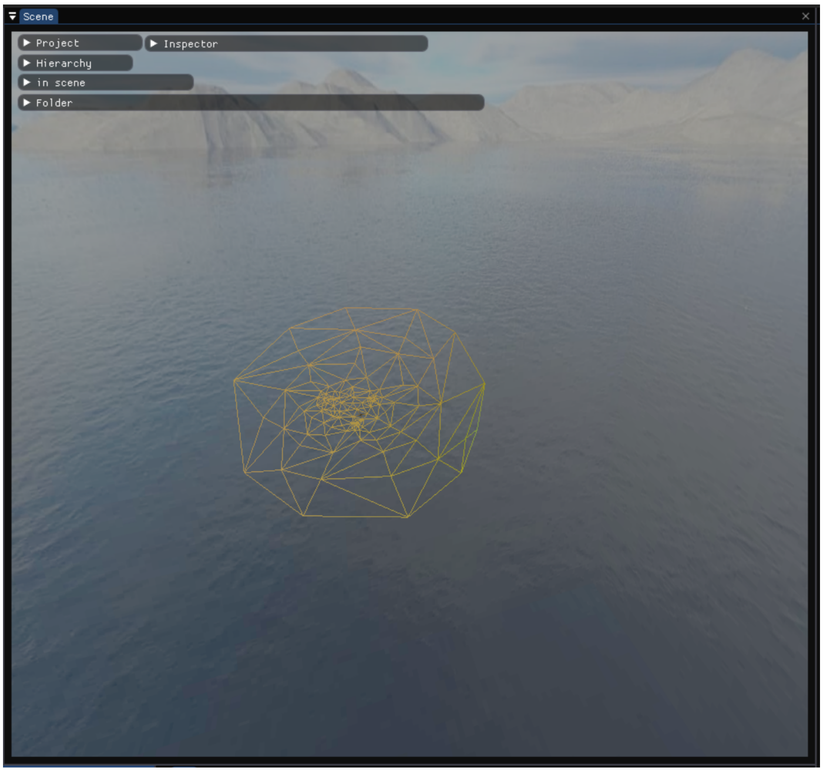

Figure 14: CatHead 极小曲面

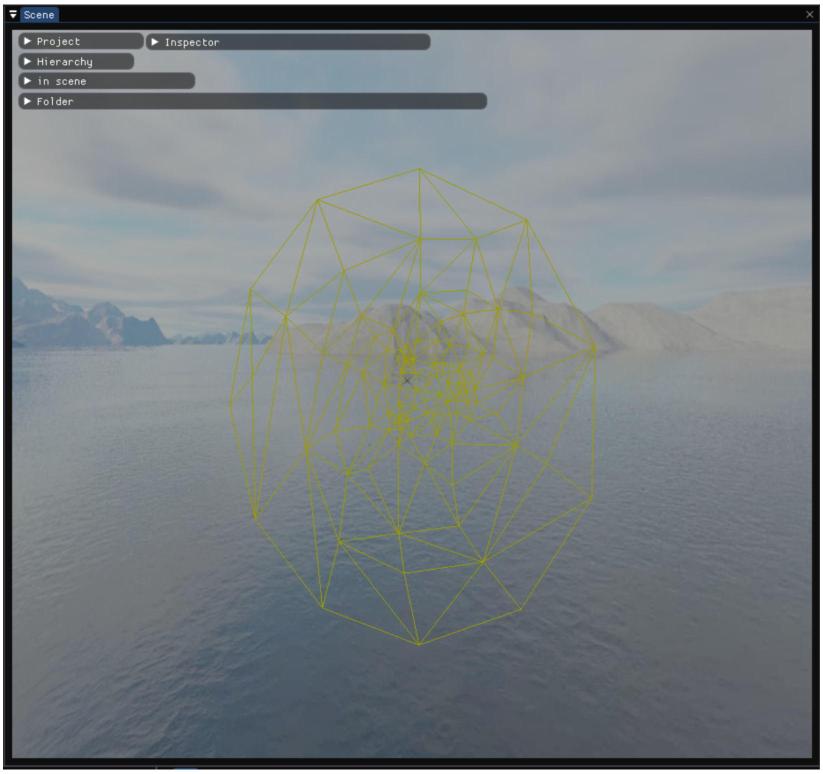

Figure 15: CatHead 参数化曲面

References

[1] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Levy. *Polygon Mesh Processing*. CRC Press, 2010.