

## 第六章 几何样条插值、逼近及平面点列光顺

在数控加工中, 刀具路径一般是由直线和圆弧构成的; 在数控绘图中, 曲线大都是用直线和圆弧来插补的; 所以几何设计系统所产生的自由曲线或细分曲线(即离散点列)往往还需要用圆弧样条, 即一系列彼此相切的直线和圆弧来插值或逼近. 它的特点是简单, 直观, 具有几何不变性. 对此, 早期研究者有 Kamad<sup>[1]</sup>, Bolton<sup>[2]</sup>, 孙家昶<sup>[3,4]</sup>, 董光昌<sup>[5]</sup>等; 近十年来, 研究用它逼近离散点列的有 Meek<sup>[6]</sup>等, 研究用它逼近二次 Bézier 或 NURBS 曲线的有 Ahn<sup>[7]</sup>, Walton<sup>[8]</sup>, Meek<sup>[9,10]</sup>等, 研究双圆弧逼近的有 Ong<sup>[11]</sup>, Parkinson<sup>[12]</sup>, Hoschek<sup>[13]</sup>等. 算法研究集中在圆弧或双圆弧的参数确定, 逼近阶估计, 段数优化等. 目前关于双圆弧拟合的切向还没有很好的确定办法, 我们用改进的能量最小原理得出了最优切向的计算公式, 进而给出双圆弧插值公式. 另一方面, 用圆弧拟合型值点列时对数据点的误差极其敏感<sup>[14]</sup>, 用它来光顺(Fairing)平面离散点列有实用价值<sup>[14,15]</sup>. 点列光顺也是曲面光顺的基础<sup>[16]</sup>. 董光昌教授<sup>[17]</sup>用回弹法光顺船体曲线曲面取得了显著成效. 除回弹法外, 目前点列光顺主要用离散曲率处理法<sup>[18,19]</sup>, 但效果欠佳. 我们利用凸分析原理给出平面折线上多余拐点的去除法, 进一步对圆弧样条拟合所产生的离散曲率进行平滑, 给出平面点列的自动精光顺算法. 以上内容安排在本章前 2 节.

圆弧样条是常曲率和零挠率的最简单的几何样条. 把它推广到常曲率和常挠率的几何样条便是圆柱螺线样条. 1974 年, E. Mehlum<sup>[20]</sup>在美国盐湖城(Salt Lake City)第一届 CAGD 国际会议上报告了挪威 AUTOKON 造船系统的数学模型, 其实质就是平面曲线的圆弧样条  $k$  (曲率)逼近(其中  $k(x)$  逼近和  $k(s)$  逼近分别称为 Kurgla I, II, 这里  $x$  为直角坐标而  $s$  为曲线弧长)和空间曲线的圆柱螺线样条  $k$  (曲率),  $\tau$  (挠率)逼近. 但逼近收敛性从未证明. 他提出这一公开问题, “真诚地希望别人将会解决”. 六年以后, 我们解决了 AUTOKON 系统业已应用十年之久的 Kurgla I 逼近的收敛性证明问题, 证明了 Kurgla II 的收敛性, 同时还得出了空间曲线  $k, \tau$  逼近的算法和收敛性证明, 这些工作被 Mehlum 称为 AUTOKON 系统的理论基础<sup>[21]</sup>. 鉴于圆柱螺线无法用 NURBS 精确表示<sup>[22]</sup>, 又鉴于它以弧长为参数, 在应用上不太方便, 张三元<sup>[23]</sup>等把其第二分量改为一个二次多项式, 提出用拟圆柱螺线插值空间型值点的算法. 我们从另一个角度来考虑, 构造双圆柱螺线样条来插值空间型值点位矢和单位切矢, 能适应主法矢逼近和曲线的光顺性要求. 以上内容安排在本章第 3, 4 节. 顺便指出, 几何样条的思想有许多应用, 张纪文<sup>[24-26]</sup>用  $\{\sin t, \cos t, t, 1 | 0 \leq t \leq \alpha\}$  代替三次参数曲线的幂基  $\{t^3, t^2, t, 1\}$ , 构造了能同时表示自由曲线和几何样条的 C-B 曲线, 而  $\alpha$  既是区间长度又是形状参数. Pottmann<sup>[27]</sup>按 Chebyshevian 空间的理论构造了螺线样条.

空间散乱点列的插值也是 CAGD 的一个重要内容, 我们在本章最后一节介绍了最有代表性的 Shepard 方法和平板样条法.

本章第 1, 2 节内容取材于[YXN, 98], [YXN, WGZ, 2000], [YXN, WGZ, 98]; 第 3 节内容取材于[WGJ, 81a], [JTG, 81], [WGJ, 81b]; 第 4 节内容取材于[CDR, WGJ, 2000]; 第 5 节内容取材于[WGJ, WGZ, 99].

### 6.1 平面点列的双圆弧样条插值

**定义 6.1.1** 已给平面上的一个有序点列  $\{P_i\}_{i=0}^n$  和单位矢量  $T_0, T_n$ , 若有一对相切的圆弧  $C_{i0}$  与  $C_{i1}$ , 始于点  $P_{i-1}$ , 终于点  $P_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; 又圆弧  $C_{i1}$  与  $C_{i+1,0}$  相切,  $i=1, 2, \dots, n-1$ ; 圆弧  $C_{10}, C_{n1}$  在点  $P_0, P_n$  处的切向分别是  $T_0, T_n$ ; 则称  $\{C_{i0}, C_{i1}\}_{i=0}^{n-1}$  是插值点列  $\{P_i\}_{i=0}^n$  和切矢  $T_0, T_n$  的双圆弧样条.

#### 6.1.1 最优切矢的确定

构造双圆弧样条的关键在于求出它在点  $P_i$  处的单位切矢  $T_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ . 许多文献以曲线能量极小, 即以曲线曲率的平方沿曲线积分极小为条件来确定  $T_i$ , 其实这样做误差大

且不稳定. 为导出确定最佳  $T_i$  的新方法, 我们首先考察一个简单的情形: 假定圆弧  $\tilde{C}_{i0}$  两端点为  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ; 圆弧  $\tilde{C}_{i1}$  两端点为  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ , 它们在点  $P_i$  有公切向  $T_i$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ . 见图 6.1.1. 显然此两圆弧由插值条件  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ ,  $T_i$  唯一确定. 记  $l_i = \|P_i - P_{i-1}\|$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ; 假定由矢量  $T_{i-1}$  到矢量  $P_{i-1}P_i$  以及由矢量  $P_{i-1}P_i$  到矢量  $T_i$  的有向转角分别是  $\alpha_i$  和  $\beta_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ; 再假定由矢量  $P_{i-1}P_i$  到矢量  $P_iP_{i+1}$  的有向转角是  $\Delta\theta_i$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ , 这里规定逆 (顺) 时针方向的角度取正 (负) 值, 则  $\alpha_1$  和  $\beta_n$  可由已知条件决定,

$$\beta_i + \alpha_{i+1} = \Delta\theta_i, \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad (6.1.1)$$

且圆弧  $\tilde{C}_{i0}$ ,  $\tilde{C}_{i1}$  之半径分别是

$$R_{i0} = l_i / (2\sin\beta_i), \quad R_{i1} = l_{i+1} / (2\sin\alpha_{i+1}), \quad (6.1.2)$$

从而它们的能量之和为  $E_i = 2(\beta_i / R_{i0} + \alpha_{i+1} / R_{i1}) = 4(\beta_i \sin\beta_i / l_i + \alpha_{i+1} \sin\alpha_{i+1} / l_{i+1})$ . 对于  $i=1,2,\dots,n-1$ , 按以上方法依次求作圆弧  $\tilde{C}_{i0}$  和  $\tilde{C}_{i1}$ ; 再作圆弧  $\tilde{\tilde{C}}_{10}$  以点  $P_0, P_1$  为两端点且在点  $P_0$  有切向  $T_0$ ; 作圆弧  $\tilde{\tilde{C}}_{n-1,1}$  以点  $P_{n-1}, P_n$  为两端点且在点  $P_n$  有切向  $T_n$ ; 这样, 有两条圆弧段同时插值位矢  $P_{i-1}$ ,  $P_i$  和切矢  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ , 它们的曲率差是  $\Delta k_i = 2|\sin\alpha_i - \sin\beta_i| / l_i$ , 而插值内部型值点列的所有这些圆弧的总能量是  $E_{arc} = \sum_{i=1}^{n-1} E_i$ .

为构造光顺的双圆弧插值, 必须这样选择单位切矢  $T_i$ , 即不但使得  $E_{arc}$  尽量小, 而且使得  $(\Delta k_i)^2$  沿曲线积分之和  $E_{crv} = \sum_{i=1}^n \int_{P_{i-1}}^{P_i} (\Delta k_i)^2 ds \approx \sum_{i=1}^n (\Delta k_i)^2 l_i$  尽量小. 因此, 我们取  $E_{arc} + \lambda E_{crv}$  为最优切矢的目标函数. 不妨称此方法为改进的最小能量法. 这里  $\lambda \in (1,2)$  为组合常数, 由试验可知  $\lambda=1.5$  较合适. 又因实际应用中  $\Delta\theta_i$  不大, 相应地  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  较小, 于是  $\sin\alpha_i \approx \alpha_i$ ,  $\sin\beta_i \approx \beta_i$ , 舍去常数因子可得条件方程

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i^2 / l_i + \alpha_{i+1}^2 / l_{i+1}) + \lambda \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 / l_i = \text{MIN}. \quad (6.1.3)$$

按照(6.1.1), 知道目标函数  $U$  是  $n-1$  个未知量  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  的二次函数. 令  $\partial U / \partial \alpha_i = 0$ ,  $i=2,3,\dots,n$ , 可得参数矩阵为三对角阵的线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{l_{i-1}} \alpha_{i-1} + \left( \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} + \frac{\lambda+1}{l_i} \right) \alpha_i + \frac{\lambda}{l_i} \alpha_{i+1} = \frac{\lambda+1}{l_{i-1}} \Delta\theta_{i-1} + \frac{\lambda}{l_i} \Delta\theta_i, & i=2,3,\dots,n-1; \\ \frac{\lambda}{l_{n-1}} \alpha_{n-1} + \left( \frac{\lambda+1}{l_{n-1}} + \frac{\lambda+1}{l_n} \right) \alpha_n = \frac{\lambda+1}{l_{n-1}} \Delta\theta_{n-1} + \frac{\lambda}{l_n} \beta_n. \end{cases} \quad (6.1.4)$$

由此可求出  $\alpha_i$ , 从而确定  $T_{i-1}$ ,  $i=2,3,\dots,n$ .

### 6.1.2 双圆弧插值的算法

在求得  $\{T_i\}_{i=1}^{n-1}$  以后, 就可构造满足定义 6.1.1 的双圆弧插值曲线, 即已知位矢  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ , 单位切矢  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ , 要求作插值这些条件的双圆弧使彼此相切, 所以约束条件共有五个; 但双圆弧有两个圆心  $O_i^{(1)}, O_i^{(2)}$ , 两个半径  $r_i^{(1)}, r_i^{(2)}$ , 共六个自由参数, 所以还需设定一个自由参数. 假定双圆弧在点  $P_{i-1}$  和  $P_i$  处的单位法矢分别是  $N_{i-1}$  和  $N_i$ , 公切点为  $P_{ic}$ , 它在点  $P_{ic}$  处的单位切矢和单位法矢分别是  $T_{ic}$  和  $N_{ic}$ , 再设由  $x$  轴正方向到  $T_{i-1}$  的有向转角是  $\varphi_i$ , 由  $T_{i-1}$  到  $T_{ic}$  的有向转角是  $\theta_i$ , 见图 6.1.2. 取定  $\theta_i$ , 容易求得

$$\begin{aligned} N_{i-1} &= (-\sin\varphi_i, \cos\varphi_i), \quad T_{ic} = (\cos(\varphi_i + \theta_i), \sin(\varphi_i + \theta_i)), \\ N_{ic} &= (-\sin(\varphi_i + \theta_i), \cos(\varphi_i + \theta_i)), \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

再由  $(P_i - P_{i-1}) - r_i^{(1)} N_{i-1} = (P_i - P_{ic}) - r_i^{(1)} N_{ic}$  和  $(P_i - P_{ic}) - r_i^{(2)} N_{ic} = r_i^{(2)} N_i$  可得

$$r_i^{(1)} = \frac{(P_i - P_{i-1})(T_i - T_{ic})}{(N_{i-1} - N_{ic})(T_i - T_{ic})}, \quad r_i^{(2)} = \frac{(P_i - P_{ic})^2}{2(P_i - P_{ic})N_{ic}}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (6.1.6)$$

$$\begin{aligned} O_i^{(1)} &= P_{i-1} + r_i^{(1)} N_{i-1}, \quad O_i^{(2)} = P_{ic} + r_i^{(2)} N_{ic}, \quad P_{ic} = P_{i-1} + r_i^{(1)} (N_{i-1} - N_{ic}), \\ & \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

最后要说明<sup>[14]</sup>，如果弦切角  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  同号，则可得到一条 C 型双圆弧曲线，这时选取自由参数  $\theta_i = \alpha_i$ ；否则可得一条 S 型双圆弧曲线，取  $\theta_i = (3\alpha_i - \beta_i)/2$ 。

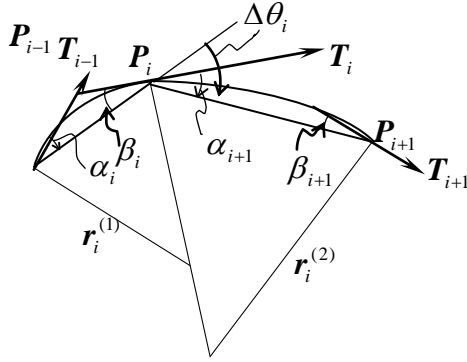


图 6.1.1 插值点  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$  和切向  $T_i$  的圆弧  $\tilde{C}_{i0}$ ,  $\tilde{C}_{i1}$

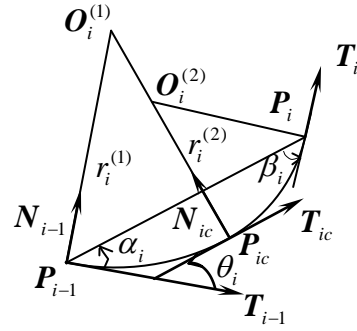


图 6.1.2 双圆弧插值算法的推导

## 6.2 平面点列光顺算法

在计算机辅助设计或几何造型中，常常需要由给定的一组离散点作为控制顶点或插值点来构造一条曲线。因此一条曲线质量的好坏不仅取决于逼近或插值方法本身，而且还与原离散点列的光顺度(Smoothness)即光滑与顺程程度密切相关。在实际造型中，这些数据点一般都不不可避免地存在测量误差或精度误差，所以在构造曲线前都需要进行光顺预处理。此外，光顺曲线也是构造光顺曲面的基础。

判断曲线是否光顺有着很多人为因素，有时也因具体的应用背景不同而有着不同的定义。目前能被普遍接受的一条标准是：一条曲线被认为是光顺的，是指曲线上的拐点尽量少，并且整条曲线的曲率变化均匀<sup>[14]</sup>。因此，对曲线进行光顺既要减少其拐点，又要使其曲率均匀变化。与此同时，一个点列被认为是光顺的，是指存在一条光顺曲线通过这些点<sup>[14]</sup>。本节研究在误差允许范围内找到一条拐点少，曲率变化均匀的曲线通过一个已知平面点列。光顺过程可分两步进行：多余拐点去除和离散曲率精光顺。光顺的结果不仅可以得到一个光顺点列，而且还可以得到一条光顺曲线(如双圆弧样条曲线)，这也正是工程实际中所需要的。

### 6.2.1 多余拐点的去除

简单地说，拐点是指曲线的凸凹发生改变的点。对一条平面折线而言，若折线段的有向转角变号，则认为该折线存在拐点。而多余拐点的去除也就是要在原折线角点的允许变动范围内构造一条新的折线，使新折线段的有向转角的符号改变尽量少。一条函数曲线的极大值和极小值之间一定存在拐点，本节将把这一结论推广到平面参数曲线，并利用极值方法去除拐点。

**定义 6.2.1** 已给平面上一条折线  $P_0P_1\cdots P_n$ ，以射线  $P_0P_1$  为  $x$  正半轴按右手系规则建立直角坐标系。矢量  $P_{i-1}P_{i+1}$  称为此折线在角点  $P_i = (x_i, y_i)$  处的拟切向， $i=1,2,\dots,n-1$ ；使得  $y_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq n-1} y_i$  (或  $\min_{1 \leq i \leq n-1} y_i$ ) 且拟切向与  $x$  轴正向呈锐(或钝)角的角点

$P_{i_0} = (x_{i_0}, y_{i_0}) (1 \leq i_0 \leq n-1)$  称为此折线的峰点(Peak point), 使得  $y_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq n-1} y_i$  (或  $\min_{1 \leq i \leq n-1} y_i$ ) 且拟切向与  $x$  轴正向呈钝(或锐)角的角点  $P_{i_0} = (x_{i_0}, y_{i_0}) (1 \leq i_0 \leq n-1)$  称为此折线的谷点(Valley point), 见图 6.2.1. 类似地可定义一条平面曲线的峰点和谷点. 峰点和谷点具有以下性质, 这些性质是去除拐点方法的依据.

- 一条折线若不为直线, 则至少存在一个峰点或谷点.
- 光滑曲线中峰点处曲率为负, 谷点处曲率为正.
- 某一点若被确定为峰点或谷点, 它一定位于该(局部)折线的角点点列的凸包上.
- 峰点和谷点都不可能为拐点.
- 两峰点或两谷点之间若有拐点只能有偶数个, 两峰点(或谷点)紧相邻时其间没有拐点.
- 一峰点和一谷点之间至少存在一个拐点, 一峰点和一谷点紧相邻时, 其间只存在一个拐点.

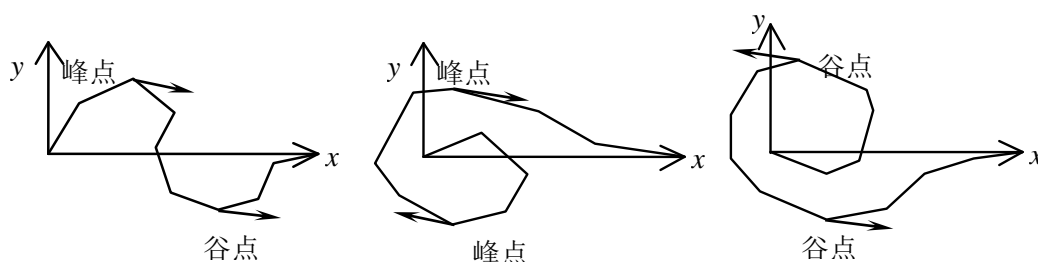


图 6.2.1 折线的峰点和谷点

峰点意味着折线在该点附近上凸或外凸; 而谷点则表示折线在该点附近下凸或内凸. 若折线上所有峰点和谷点已被确定, 我们就可确定整条折线的凹凸变化. 原始折线的两个端点可定为自由端点(Freeform point), 当然也可人为地指定其为峰点或谷点, 这要视具体应用背景而定. 若折线的所有角点与折线首末端点之连线的距离均小于允许误差, 我们可根据两端点的类型重构一条没有拐点或仅有一个拐点的折线以去除多余拐点. 否则, 以该折线的峰点和谷点为界, 将其分成若干条子折线后再用上述方法分别去除拐点. 当然若某折线段不存在多余拐点, 我们只需保留其原样而不必进行重建或分割. 这一过程可以用堆栈技术递归实现.

记  $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$  为由峰点、谷点以及端点构成的点列, 我们可以根据此点列每一点的类型来重构一条新折线以去除多余拐点: 若点列中两相邻点皆为自由端点, 则直接重构一直线段; 若两相邻点皆为峰点或皆为谷点, 则重构一段凸折线或凹折线; 若两相邻点一个为峰点一个为谷点, 则重建一段仅有一个拐点的折线. 若两端点中有一个为自由端点, 可人为指定重建折线的类型. 在重建折线时, 为保证新旧折线的误差精度, 必须使新折线的每个角点到两端点连线的距离小于给定误差. 另外, 为保证两相邻重建折线在连接点  $P_{i_j}$  处拼接后拐点不增加, 须事先根据点  $P_{i_j}$  的类型和其相邻点的信息, 给出折线在该点处的一个拟切向, 再使过点  $P_{i_j}$  的重建折线段夹在折线两端点连线与此切向之间.

## 6.2.2 基于改进最小能量法的离散曲率光顺方法

利用 §6.1 的方法可确定型值角点处的最优切向, 进而作双圆弧曲线插值. 由此可得到型值点处的离散曲率. 通过对离散曲率进行平滑再反求新的型值点可以达到光顺原点列的目的.

首先计算型值点  $P_i$  处的离散曲率, 它可由与点  $P_i$  相连的左右两段插值圆弧的曲率来求得. 若有向转角  $\alpha_i$  与  $\beta_i$  同号, 则插值型值点  $P_{i-1}, P_i$  和切向  $T_{i-1}, T_i$  的双圆弧为 C 型曲线. 由文献[14]知两段圆弧的半径分别为

$$r_1 = l_i \sin(\beta_i/2) / (2 \sin((\alpha_i + \beta_i)/2) \sin(\alpha_i/2)) \approx l_i \beta_i / ((\alpha_i + \beta_i) \alpha_i),$$

$$r_2 = l_i \sin(\alpha_i/2) / (2 \sin((\alpha_i + \beta_i)/2) \sin(\beta_i/2)) \approx l_i \alpha_i / ((\alpha_i + \beta_i) \beta_i).$$

所以点  $P_i$  处的左、右曲率分别为

$$k_i^- \approx (\alpha_i + \beta_i) \beta_i / (l_i \alpha_i), \quad k_i^+ \approx (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) \alpha_{i+1} / (l_{i+1} \beta_{i+1}). \quad (6.2.1)$$

若  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  异号或者  $\alpha_{i+1}$  和  $\beta_{i+1}$  异号, 则曲线在点  $P_i$  的两侧中存在拐点. 这时点  $P_i$  的左曲率或右曲率可由 §6.1.1 中圆  $\tilde{C}_{i0}, \tilde{C}_{i1}$  的曲率来近似. 由(6.1.2)知

$$k_i^- \approx 2\beta_i / l_i, \quad k_i^+ \approx 2\alpha_{i+1} / l_{i+1}. \quad (6.2.2)$$

端点  $P_0$  和  $P_n$  处的曲率可以取为  $k_0^+$  和  $k_n^-$ , 而点  $P_i$  处的离散曲率可取为  $k_i = (k_i^- + k_i^+) / 2$ , 也可取为  $k_i^+$  或  $k_i^-$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ; 其中取  $k_i$  时光顺效果最好.

下一步便是低通滤波, 设离散曲率序列为  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 应用离散 Fourier 变换<sup>[28]</sup> (DFT) 并截去高频项可以达到平滑的目的. 为提高计算效率, 另一有效方法是计算原信号序列在低频空间上的近似投影. 实际上, 若将给定信号序列理解成一温度场, 则数据滤波便可看成热传导的过程<sup>[28]</sup>. 因此, 依据热传导方程也可达到光顺数据的目的. 也就是说, 离散曲率可以按照下式得到平滑:

$$\bar{k}_i = k_i + \mu \Delta k_i, \quad \Delta k_i = (k_{i-1} - k_i) / 2 + (k_{i+1} - k_i) / 2. \quad (6.2.3)$$

这里  $\bar{k}_i$  为点  $P_i$  处新的离散曲率,  $\mu \in (0, 0.5)$  为平滑系数(一般取  $\mu = 0.2$ ), 由上式可以确定新的弦切角从而确定新的型值点. 为简单计, 不妨取所有曲率  $k_i = k_i^+$ ,  $\bar{k}_i = \bar{k}_i^+$ . 若  $\alpha_{i-1} \beta_{i-1} > 0, \alpha_i \beta_i > 0, \alpha_{i+1} \beta_{i+1} > 0$  三式同时成立, 则令  $k_j = (\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}) \alpha_{j+1} / (l_{j+1} \beta_{j+1})$ ,  $j = i-1, i, i+1$ ;  $\bar{k}_i \approx (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) \alpha_{i+1} / (l_{i+1} \beta_{i+1})$ , 并取

$$\omega_{i0} = (\alpha_{i-1} + \beta_{i-1}) \beta_{i-1} l_i / [(\alpha_i + \beta_i) \beta_{i-1} l_{i-1}], \omega_{i1} = (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) \beta_{i+1} l_i / [(\alpha_i + \beta_i) \beta_{i+1} l_{i+1}]; \quad (6.2.4)$$

否则令  $k_j = 2\alpha_{j+1} / l_{j+1}$ ,  $j = i-1, i, i+1$ ;  $\bar{k}_i = 2\alpha_{i+1} / l_{i+1}$ , 并取

$$\omega_{i0} = l_i / l_{i-1}, \quad \omega_{i1} = l_i / l_{i+1}. \quad (6.2.5)$$

于是由(6.2.3)得出新的弦切角

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + (\omega_{i0} \alpha_{i-1} + \omega_{i1} \alpha_{i+1} - 2\alpha_i) \mu / 2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2.6)$$

根据  $\bar{\alpha}_i$ , 我们可在型值点的切方向保持不变的条件下确定新的型值点. 如图 6.2.2, 设  $N_{i-1}$  是与  $T_{i-1}$  构成右手正交系的单位向量, 假定  $T_{i-1}$  不变, 把点  $P_{i-1}$  沿方向  $N_{i-1}$  移动一个距离

$$dH_0 = -l_i (\cos \alpha_i \cdot \tan \bar{\alpha}_i - \sin \alpha_i) \quad (6.2.7)$$

变为新点  $\bar{P}_{i-1}$ , 则新的弦切角恰为  $\bar{\alpha}_i$ . 离散曲率的光顺及新型值点的产生可递归进行. 为保证第  $m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 次光顺后所得型值点  $P_{i-1}^{(m)} = P_{i-1}^{(m-1)} + dHN_{i-1}$  还在初始点  $P_{i-1}^{(0)}$  的  $\tau$  邻域内, 必须满足  $(A + dHN_{i-1})^2 \leq \tau^2$ , 这里  $A = P_{i-1}^{(m-1)} - P_{i-1}^{(0)}$ . 由此可以推知  $dH \in [dH_1, dH_2]$ ,  $dH_{1,2} = -AN_{i-1} \mp \sqrt{(AN_{i-1})^2 - A^2 + \tau^2}$ . 所以当  $dH_0 < dH_1$  或  $dH_0 > dH_2$  时相应地必须取  $dH$  为  $dH_1$  或  $dH_2$ , 否则才可取  $dH = dH_0$ .

光顺点列可用上述方法逐点进行, 当型值点  $P_{i-1}$  被修正后, 弦切角  $\alpha_i$  相应地用  $\bar{\alpha}_i$  代替以便下一点使用, 若型值点为固定点, 则不作位置修正.

对于给定的平面点列, 通过最优切向计算和离散曲率平滑处理, 可得到一个光顺点列. 通常情况下, 一次光顺处理以后效果并不能令人满意, 迭代数次可得理想的结果. 一般情况下, 拟合圆弧的能量经几次迭代后便会呈下降趋势, 到某一最低点便徘徊起来. 试验表明, 较为

均匀的数据经二十次迭代，不均匀的数据经六十到八十次迭代可以得到满意的光顺效果。

#### 算法 6.2.1 (平面点列自动精光顺)

输入：一个有序点列和 tolerance  $\tau$ ；

Step 1. 用 §6.2.1 的方法去除多余拐点；

Step 2. 用 §6.1.1 的方法计算最优切向；

Step 3. 按 (6.2.1) 和 (6.2.2) 计算离散曲率；

Step 4. 按 (6.2.3) 进行曲率平滑，按 (6.2.4) — (6.2.7) 进行型值点调整；

Step 5. 当迭代次数为  $k_0$  ( $20 \leq k_0 \leq 80$ ) 时，则停止，否则返回 Step 1.

输出：光顺点列和型值点处的最优切向；

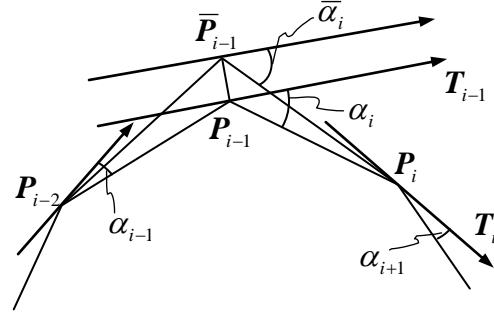


图 6.2.2 由新的弦切角决定新的型值点位置

### 6.3 平面曲线的圆弧样条逼近和空间曲线的圆柱螺线样条逼近

#### 6.3.1 平面曲线的圆弧样条逼近

设  $k$  为曲率， $s$  为弧长，E. Mehlum<sup>[29,30]</sup>按  $\int k^2 ds = \text{MIN}$  的曲线平滑准则求解变分问题，得到了所求分段曲线的曲率沿某一方向呈线性变化的结论。据此我们有

**定义 6.3.1** 已知区间  $[a, b]$  的分割  $\pi: a = x_0^{(0)} < x_0^{(1)} < \dots < x_0^{(m)} = b$ ，又已知曲线  $Y(x)$  在分割点上的曲率  $k(x_0^{(i)}) = k^{(i)}$ ， $i = 0, 1, \dots, m$ 。则由初始边界条件及曲率方程  $[k(x) - k^{(i)}]/[x - x_0^{(i)}] = [k^{(i+1)} - k^{(i)}]/[x_0^{(i+1)} - x_0^{(i)}]$ ， $x_0^{(i)} \leq x \leq x_0^{(i+1)}$ ， $i = 0, 1, \dots, m-1$  所决定的一阶连续曲线  $Y(x)$  称为 Mehlum 变分问题的精确解。

由以上定义所确定的函数  $Y(x)$  是一系列非线性二阶微分方程的解，为 Legendre 椭圆积分，不能表为有限形式。为此必须对  $k(x)$  作阶梯逼近，我们有

**定义 6.3.2** 对区间  $[a, b]$  的分割  $\pi$ ，再作分割  $\pi^{(i)}: x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \dots < x_{n^{(i)}}^{(i)} = x_0^{(i+1)}$ ，使得  $\Delta x^{(i)} = 2(x_1^{(i)} - x_0^{(i)}) = x_{r+1}^{(i)} - x_r^{(i)} = 2(x_{n^{(i)}}^{(i)} - x_{n^{(i)}-1}^{(i)})$ ， $r = 1, 2, \dots, n^{(i)} - 2$ ，则由初始边界条件及曲率方程  $k_r^{(i)}(x) \equiv k_r^{(i)} = r[k^{(i+1)} - k^{(i)}]/[n^{(i)} - 1] + k^{(i)}$ ， $x_r^{(i)} \leq x \leq x_{r+1}^{(i)}$ ； $r = 0, 1, \dots, n^{(i)} - 1$ ； $i = 0, 1, \dots, m-1$  所决定的一阶连续曲线  $y = y(x)$  即圆弧样条曲线称为对 Mehlum 变分问题精确解的 Kurgla I 逼近。

**定理 6.3.1** Kurgla I 逼近的余项  $R(x) = Y(x) - y(x)$  及其导数有估计式

$$\|R(x)\|_{\infty} \leq M x_0^{(m)} \cdot \Delta x^2, \quad \|R'(x)\|_{\infty} \leq M \Delta x^2, \quad x_0^{(0)} \leq x \leq x_0^{(m)}. \quad (6.3.1)$$

这里

$$\Delta x = \max_{0 \leq i \leq m-1} \Delta x^{(i)}, \quad M = \max_{0 \leq i \leq m-1} \left\{ |k^{(i+1)} - k^{(i)}| / \left\{ 8[x_0^{(i+1)} - x_0^{(i)}][1 - (M^{(i)})^2]^{3/2} \right\} \right\} \quad (6.3.2)$$

$M^{(i)}$  是  $(0, 1)$  内的常数。

类似地，我们可对平面曲线的曲率  $k(s)$  ( $s$ : 弧长) 作阶梯逼近，称为 Kurgla II。这可视作下一小节  $\tau = 0$  之特例。

#### 6.3.2 空间曲线的圆柱螺线样条逼近

**定义 6.3.3** 给定弧长区间  $[0, l]$  的分割  $\Delta: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = l$ ，若曲线  $\rho(s)$  在每一个子区间  $(s_i, s_{i+1})$  上均有常曲率  $k_i > 0$  和常挠率  $\tau_i$ ， $i = 0, 1, \dots, n-1$ ；又  $\rho(s)$ ， $\rho'(s)$ ，及  $\rho(s)$  的单位主法矢在  $[0, l]$  上连续，则称  $\rho(s)$  为对应于分划  $\Delta$  的圆柱螺线样条，并称其在  $[s_i, s_{i+1}]$  上的一段为第  $i$  段圆柱螺线  $\rho_i(s)$ ，记  $\rho_i(s)$  的 Frenet 标架为  $[T_i(\bar{s}), N_i(\bar{s}), B_i(\bar{s})]$ ， $0 \leq \bar{s} \leq \Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ 。

假设  $(i, j, k)$  为空间直角坐标系的三个单位矢量， $s$  为弧长，则一条圆柱螺线可表为

$\mathbf{r}(s) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})(a \cos \omega s, a \sin \omega s, b \omega s)^T$ ,  $a > 0$ ,  $\omega = (a^2 + b^2)^{-1/2}$ ,  $0 \leq s \leq l$ . (6.3.3)

记

$$G(k, \tau, s) = \begin{pmatrix} -\omega^{-1}k \sin \omega s & -\cos \omega s & \omega^{-1}\tau \sin \omega s \\ \omega^{-1}k \cos \omega s & -\sin \omega s & -\omega^{-1}\tau \cos \omega s \\ \omega^{-1}\tau & 0 & \omega^{-1}k \end{pmatrix}, \quad (6.3.4)$$

$$E(k, \tau, s) = G^T(k, \tau, 0) G(k, \tau, s), \quad (6.3.5)$$

$$H(k, \tau, s) = (\omega^{-3}(\tau^2 \omega s + k^2 \sin \omega s), \omega^{-2}k(1 - \cos \omega s), \omega^{-3}k\tau(\omega s - \sin \omega s))^T, \quad (6.3.6)$$

进一步可求得  $\mathbf{r}(s)$  的曲率  $k = \omega^2 a$ , 挠率  $\tau = \omega^2 b$ , Frenet 标架为

$$(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) G(k, \tau, s), \quad (6.3.7)$$

$$(\mathbf{T}(L), \mathbf{N}(L), \mathbf{B}(L)) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) G(k, \tau, L) = (\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)) E(k, \tau, L), \quad (6.3.8)$$

且  $\mathbf{r}(s)$  在固定坐标系  $\{\mathbf{r}(0); \mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)\}$  下, 可表为

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0) = (\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)) H(k, \tau, s). \quad (6.3.9)$$

由此, 可用数学归纳法证明用于样条逼近计算的

**定理 6.3.2** 圆柱螺线样条  $\rho(s)$  的第  $i$  段在固定坐标系  $\{\rho(0); \mathbf{T}_0(0), \mathbf{N}_0(0), \mathbf{B}_0(0)\}$  下可表为

$$\begin{aligned} \rho(s) = & (\mathbf{T}_0(0), \mathbf{N}_0(0), \mathbf{B}_0(0))(x(s), y(s), z(s))^T = (\mathbf{T}_0(0), \mathbf{N}_0(0), \mathbf{B}_0(0))(H_0 + E_0 H_1 + \\ & + E_0 E_1 H_2 + \cdots + E_0 E_1 E_2 \cdots E_{i-2} H_{i-1} + E_0 E_1 E_2 \cdots E_{i-1} \bar{H}_i). \quad s_0 \leq s \leq s_{i+1}, i = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

$$H_i = H(k_i, \tau_i, \Delta s_i), \quad E_i = E(k_i, \tau_i, \Delta s_i), \quad \bar{H}_i = H(k_i, \tau_i, \bar{s}), \quad \bar{s} = s - s_i. \quad (6.3.11)$$

**定义 6.3.4** 设区间  $[0, l]$  及其分割  $\Delta$  如定义 6.3.3 所示, 再设曲线  $\rho^*(s)$  由  $[0, l]$  上二阶连续可微的曲率函数  $k^*(s) > 0$ , 挠率函数  $\tau^*(s)$  所给定, 其 Frenet 标架是  $\{\rho^*(s); \mathbf{T}^*(s), \mathbf{N}^*(s), \mathbf{B}^*(s)\}$ ; 在  $[s_i, s_{i+1}]$  上任取点  $\xi_i$ , 令  $k_i = k^*(\xi_i) > 0$ ,  $\tau_i = \tau^*(\xi_i)$ , 作对应于  $\Delta$  的圆柱螺线样条  $\rho(s)$ , 则当  $\{\rho(0); \mathbf{T}_0(0), \mathbf{N}_0(0), \mathbf{B}_0(0)\} = \{\rho^*(0); \mathbf{T}^*(0), \mathbf{N}^*(0), \mathbf{B}^*(0)\}$  时, 称  $\rho(s)$  为对于  $\rho^*(s)$  的圆柱螺线样条逼近.

利用活动标架法和矩阵理论, 可以证明关于样条逼近收敛阶的

**定理 6.3.3** 圆柱螺线样条逼近的余项  $\mathbf{R}(s) = \rho^*(s) - \rho(s)$  及其导向量有估计式

$$\|\mathbf{R}(s)\|_2 \leq (3/2\sqrt{2})m's^2 \cdot e^{\sqrt{2}ms + o(\Delta s)}(\Delta s) + o(\Delta s), \quad (0 \leq s \leq l) \quad (6.3.12)$$

$$\|\mathbf{R}'(s)\|_2 \leq (3/\sqrt{2})m's \cdot e^{\sqrt{2}ms + o(\Delta s)}(\Delta s) + o(\Delta s), \quad (0 \leq s \leq l) \quad (6.3.13)$$

这里  $m, m'$  为常数, 满足

$$k^*(s) \leq m, \quad |\tau^*(s)| \leq m, \quad |(k^*)'(s)| \leq m', \quad |(\tau^*)'(s)| \leq m', \quad 0 \leq s \leq l; \quad \Delta s = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta s_i. \quad (6.3.14)$$

圆柱螺线样条逼近有许多应用. 例如, 微分几何学中, 由自然方程  $k = k(s) > 0$ ,  $\tau = \tau(s)$  ( $0 \leq s \leq l$ ) 去求相应的曲线  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , 必须求解常微分方程组

$$\begin{cases} d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}, \\ \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \frac{d\mathbf{B}}{ds} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) \begin{pmatrix} -k(s) & & \\ k(s) & & \\ & -\tau(s) & \\ & & \tau(s) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (6.3.15)$$

这个问题并非初等的, 常需借助数值积分. 然而利用定理 6.3.2 和 6.3.3, 我们可以用计算机输出圆柱螺线样条来近似(6.3.15)的解曲线.

## 6.4 空间型值点位矢和单位切矢的双圆柱螺线插值

从实际应用考虑, 构造插值空间两型值点位矢  $P_1, P_2$  和单位切矢  $T_1, T_2$  的  $G^1$  连续的圆柱螺线段是有意义的. 但这有十二个约束条件. 而一段圆柱螺线最多只有十一个形状参数: 绕轴旋转角  $\alpha$ , 轴线向量球坐标的后两个分量  $\theta, \varphi$ , 曲线整体平移量  $(x_0, y_0, z_0)$ , 左右螺旋参数  $\beta = \pm 1$ , 曲线表达式(6.3.3)中的  $a, b, l, s$ ; 所以这是不可能的. 为此, 考虑用  $G^1$  拼接于点  $P$  的双圆柱螺线  $CH_1, CH_2$  来插值  $P_1, P_2, T_1, T_2$ . 假设  $CH_1$  和  $CH_2$  的两端位矢、单位切矢、单位主法矢分别是  $P_1, P; T_1, T_p; N_1, N_p$  和  $P, P_2; T_p, T_2; N_p, N_2$ . 首先预设定  $CH_1, CH_2$  在点  $P_1, P, P_2$  处的参考单位主法矢  $N_1, N_p^{(1)}; N_p^{(2)}, N_2$ , 它们可在曲线关于点  $P_1, P, P_2$  处的法平面上任选. 这样, 构造  $CH_1$  和  $CH_2$  的关键是求得点  $P = (x, y, z)$ ,  $T_p$  的球坐标分量  $\theta, \varphi$ , 以及实际单位主法矢  $N_1^{(\alpha_1)}, N_p^{(\bar{\alpha}_1)}, N_p^{(\bar{\alpha}_2)}, N_2^{(\alpha_2)}$  与参考单位主法矢  $N_1, N_p^{(1)}; N_p^{(2)}, N_2$  的相应向偏移角  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_2$ . 这里有九个未知量. 根据曲线两端单位切矢分别等于  $T_1, T_p; T_p, T_2$ ; 以及曲线首末端点到轴线距离相等的条件, 可建立六个约束方程. 为了在这些条件下求出以上九个未知量, 我们有三种目标函数方案. 一是主法矢偏离为极小的准则, 让偏移角  $\alpha_1, \alpha_2$  以及  $|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2|$  均尽量小, 即让  $\sum_{i=1,2} \min(\alpha_i, 2\pi - \alpha_i) + \min(|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2|, 2\pi - |\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2|)$  = MIN; 二是曲线光顺性准则, 让  $\int_0^1 k^2 ds = \sum_{i=1,2} a_i^2 l_i / (a_i^2 + b_i^2)^2 = \text{MIN}$ , 这里  $a_i, b_i, l_i$  是(6.3.3)中的参数,  $i = 1, 2$ ; 三是把以上两方案加权组合. 按非线性规划方法求得这些未知量后, 就得到  $(P_1, P, T_1, T_p, N_1^{(\alpha_1)}, N_p^{(\bar{\alpha}_1)})$  和  $(P, P_2, T_p, T_2, N_p^{(\bar{\alpha}_2)}, N_2^{(\alpha_2)})$ . 由于插值两端点位矢和主法矢的单圆柱螺线可唯一确定, 我们最终可构造出  $CH_1, CH_2$ .

## 6.5 由散乱型值点构造插值曲面

所谓散乱数据插值(Scattered data interpolation), 系指由已知的不按特定规律分布的平面数据点  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  及实数集  $\{f_i\}_{i=1}^N$ , 求作函数曲面  $F(x, y)$ , 使得

$$F(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.5.1)$$

这一问题在地形测绘、勘探、气象、医学图象、可视化等方面有普遍应用. 为解决这一问题, 一种方法是采用反距离加权的 Shepard 公式<sup>[31]</sup>

$$F(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N f_i W_i^\mu}{\sum_{i=1}^N W_i^\mu}, \quad W_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{-1/2}. \quad (6.5.2)$$

当  $0 < \mu \leq 1$  时曲面上有尖点和角点;  $\mu > 1$  时曲面一阶光滑, 但  $\mu$  太大时曲面有以插值点为中心的“平坦”部分; 取  $\mu = 2$  可节省计算时间并减少曲面中出现的“平坦”和“陡峭”部分; 当  $N$  较大时, 取常数  $R > 0$ , 规定当  $\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} > R$  时  $W_i^\mu = 0$  可减少计算量. 这一方法有各种改进形式<sup>[32-35]</sup>.

另一种方法是把单元样条是一个极值问题极小化解的思想推广到二维, 把散乱数据插值看作平板样条<sup>[36]</sup>, 即在条件(6.5.1)下求平面区域  $\Omega$  上的二阶可微函数  $F(x, y)$ , 使平板的内能

$$\iint_{\Omega} (F_{xx}''^2 + 2F_{xy}''^2 + F_{yy}''^2) dx dy = \text{MIN}. \quad (6.5.3)$$

按微分方程理论, 二元重调和偏微分方程  $u_{xx}'' + u_{yy}'' = D(x, y)$  的基本解能表为  $C(x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}$ . 可以证明, 点  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, N)$  不共线时, (6.5.3)有唯一解

$$F(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + \sum_{i=1}^N d_i r_i^2 \log r_i. \quad (6.5.4)$$



这里  $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ ,  $d_i$  满足

$$\sum_{i=1}^N d_i = \sum_{i=1}^N d_i x_i = \sum_{i=1}^N d_i y_i = 0. \quad (6.5.5)$$

为了求(6.5.4)中的参数时计算稳定, 按齐东旭教授的建议, 我们取不共线且相距尽量远的三点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . 记

$$\begin{aligned} r_{ij} &= r_j(x_i, y_i) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ \begin{cases} \mathbf{Z}_1 = (c_1, c_2, c_3)^T, \mathbf{Z}_2 = (d_1, d_2, d_3)^T, \mathbf{Z}_3 = (d_4, d_5, \dots, d_N)^T, \\ \mathbf{G}_1 = (0, 0, 0)^T, \mathbf{G}_2 = (f_1, f_2, f_3)^T, \mathbf{G}_3 = (f_4, f_5, \dots, f_N)^T, \\ \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_4 & x_5 & \dots & x_N \\ y_4 & y_5 & \dots & y_N \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & r_{21}^2 \log r_{21} & r_{31}^2 \log r_{31} \\ r_{12}^2 \log r_{12} & 0 & r_{32}^2 \log r_{32} \\ r_{13}^2 \log r_{13} & r_{23}^2 \log r_{23} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} r_{41}^2 \log r_{41} & \dots & r_{N1}^2 \log r_{N1} \\ r_{42}^2 \log r_{42} & \dots & r_{N2}^2 \log r_{N2} \\ r_{43}^2 \log r_{43} & \dots & r_{N3}^2 \log r_{N3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & r_{54}^2 \log r_{54} & \dots & r_{N4}^2 \log r_{N4} \\ r_{45}^2 \log r_{45} & 0 & \dots & r_{N5}^2 \log r_{N5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{4N}^2 \log r_{4N} & r_{5N}^2 \log r_{5N} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (6.5.7) \end{aligned}$$

从而把条件式(6.5.5), (6.5.1)写成用分块矩阵表示的方程组

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix} \quad (6.5.8)$$

在上式两端左乘矩阵  $\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1$  可得系数矩阵为分块上三角阵的等价方程组

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix}. \quad (6.5.9)$$

这里

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-3} \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-3} \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{I}_{N-3} \end{pmatrix} \quad (6.5.10)$$

$$\mathbf{S} = -\mathbf{B}_2^T (\mathbf{B}_1^T)^{-1}, \mathbf{T} = -(\mathbf{A}_{12}^T - \mathbf{B}_2^T (\mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{A}_{11}) \mathbf{B}_1^{-1}, \quad (6.5.11)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2^T (\mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T (\mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{A}_{11} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2, \quad (6.5.12)$$

$\mathbf{I}_j$  为  $j$  阶单位阵. 由(6.5.9)依次求解  $\mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_1$  就可得出曲面  $F(x, y)$ .

## 主要文献

[YXN, 98] 杨勋年, 基于几何逼近的曲线曲面造型技术研究, 浙江大学博士学位论文, 1998

年 5 月, 杭州

- [YXN, WGZ, 2000] Yang Xunnian, Wang Guozhao, Planar point set fairing and fitting by arc splines, *Computer Aided Design*, 2001, 33(1): 35-43
- [YXN, WGZ, 98] 杨勋年, 汪国昭, 平面点列的自动光顺算法, *高校应用数学学报*, 1998, 13A(增刊): 57-63
- [WGJ, 81a] 王国瑾, “KURGLA I” 逼近的收敛性, *浙江大学学报*, 1981, 15(3): 92-99
- [JTG, 81] 金通洸, K 逼近曲线及其收敛性, *浙江大学学报*, 1981, 15(3): 51-57
- [WGJ, 81b] 王国瑾, 圆柱螺线逼近及其收敛性定理, *浙江大学学报*, 1981, 15(3): 123-140
- [CDR, WGJ, 2000] 陈动人, 王国瑾, 基于非线性规划解的双圆柱螺线样条的局部构造, *工程图学学报*, 2000, 21(3): 76-82
- [WGJ, WGZ, 99] 王国瑾, 汪国昭, 计算几何, 浙江大学数学系研究生学位课程讲义, 1999

## 参考文献

- 1 Kamad, T.H., Kosngi, M., An Approximation of a curve with circular arcs, *Information Processing in Japan*, 1972, 12
- 2 Bolton K. M., Biarc Curve, *Computer Aided Design*, 1975, 7(2): 89-92
- 3 孙家昶, 局部坐标下的样条函数与圆弧样条曲线, *数学学报*, 1977, 20(1): 28-40
- 4 孙家昶, 郑全琳, 曲线的圆弧逼近与双圆弧逼近, *计算数学*, 1981, 3(2): 97-112
- 5 董光昌, 梁友栋, 何援军, 样条曲线拟合与双圆弧逼近, *应用数学学报*, 1978, 1(4): 330-340
- 6 Meek D. S., Walton D. J., Approximation of discrete data by  $G^1$  arc splines, *Computer Aided Design*, 1992, 24(6): 301-306
- 7 Ahn, Y.J., Kim, H.O., Lee, K.Y.,  $G^1$  arc spline approximation of quadratic Bézier curves, *Computer Aided Design*, 1998, 30(8): 615-620
- 8 Walton D. J., Meek D. S., Approximation of quadratic Bézier curves by arc splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1994, 54(1): 107-120
- 9 Meek D. S., Walton D. J., Approximating quadratic NURBS curves by arc splines, *Computer Aided Design*, 1993, 25(6): 371-376
- 10 Meek D. S., Walton D. J., Approximating smooth planar curves by arc splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1995, 59(2): 221-231
- 11 Ong C.J., Wong, Y.S., Loh, H.T., Hong, X.G., An optimization approach for biarc curve-fitting of B-spline curves, *Computer Aided Design*, 1996, 28(12): 951-959
- 12 Parkinson, D.B., Moreton, D.N., Optimal biarc-curve fitting, *Computer Aided Design*, 1991, 23(6): 411-419
- 13 Hoschek, J., Circular splines, *Computer Aided Design*, 1992, 24(11): 611-618
- 14 苏步青, 刘鼎元, 计算几何, 上海科学技术出版社, 上海, 1981
- 15 Farin, G., Sapidis, N., Curvature and the fairness of curves and surfaces, *IEEE Computer Graphics and Application*, 1989, 9(2): 52-57
- 16 Bedi, S., Vickers, G. W., Surface lofting and smoothing with skeletal-lines, *Computer Aided Geometric Design*, 1989, 6(2): 87-96
- 17 董光昌等(船体数学放样编写组), 船体数学放样——回弹法, 科学出版社, 北京, 1978
- 18 Feldman, M., Tight string method to fair piecewise linear curves, in: Sapidis, N.S., ed., *Designing Fair Curves and Surfaces*, SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1994
- 19 Eck, M., Jaspert, R., Automatic fairing of point sets, in: Sapidis, N.S., ed., *Designing Fair Curves and Surfaces*, SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1994
- 20 Mehlum, E., Nonlinear splines, in: Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R.F., eds., *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York, 1974, 173-207
- 21 Mehlum, E., Appell and the apple (Nonlinear splines in space), in: Dahlen, M., Lyche, T. and Schumaker, L. L., eds., *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Vanderbilt University Press, 1995: 365-384
- 22 孙克豪, 空间圆柱螺线的 NURBS 表示, *计算数学*, 1998, 20(4): 393-402
- 23 张三元, 鲍虎军, 三维数据点列的拟圆柱螺线样条插值, *计算机辅助设计与图形学学报*, 1999, 11(6): 490-492
- 24 Zhang, J.W., C-curves: An extension of cubic curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(3): 199-217
- 25 Zhang, J.W., Two different forms of C-B-splines, *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(1): 31-41
- 26 Zhang, J.W., C-Bézier curves and surfaces, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 1999, 61(1): 2-15
- 27 Pottmann, H., Wagner, M.G., Helix splines as example of affine Tchebycheffian splines, *Advances in Computational Mathematics*, 1999, 2: 123-142
- 28 Lindeberg, T., Scale-space for discrete signals, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(3): 234-254
- 29 Mehlum, E., Curve and surface fitting based on variational criteria for smoothness, Central Institute for Industrial Research (CIIR), Oslo, Norway, Dec, 1969
- 30 Adams J. A., Geometric concepts for computer graphics, AD-750743, 1972

- 
- 31 Shepard D., A two dimensional interpolation function for irregularity spaces data, Proceedings of 23<sup>rd</sup> National Conference, ACM, 1968: 517-524; also see: Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1984, 14(1)
  - 32 Barnhill R. E., Dube R. P., Little F. F., Properties of Shepard's surfaces, Rocky Mountain, Journal of Mathematics, 1983, 13(2): 365-382
  - 33 Hardy, R.L., Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of Geophys. Res., 1971, 76: 1901-1915
  - 34 Franke, R., Scattered data interpolation: tests of some methods, Mathematics of computation, 1982, 38: 181-200
  - 35 Pottmann, H., Eck, M., Modified multiquadric methods for scattered data interpolation over a sphere, Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1-4): 313-321
  - 36 Bookstein, Fred, L., Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(6): 567-585