第三章 有理 Bézier 曲线

Bézier 曲线不能精确表示除抛物线外的圆锥曲线，而有理 Bézier 曲线既能表示多项式曲线（如飞机机身上的纵向曲线），又能表示圆锥曲线（如飞机机身上的横截面线），可以把两者统一编程处理，所以它一出现就成为 CAGD 的一个研究热点．最早提出并研究应用有理参数曲线的是 Rowin[1], Coons[2], 继之有 Ball[3], Forrest[4], Farin[5], Pigel[6], 刘鼎元[7]和本书作者等．本章着重论述有理 Bézier 曲线的基本性质及算法，内容取材于[WGJ, WGZ, 99], [WGZ, 85], [XW, 92];更深入的研究成果将在以后各章中论述．

3.1 圆锥曲线的经典数学表示及其有理二次参数化

圆锥曲线（Conic Section），也叫二次曲线，在$\Re^2$的仿射坐标系下可表为二次隐式方程

$$S = S(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 . \qquad (3.1.1)$$

1944 年，Liming[8]改进上式使其几何意义鲜明．他以λ为族参数的二次隐式方程

$$(1-\lambda)S_1(x, y) + \lambda S_2(x, y) = (1-\lambda)S_1 + \lambda S_2 = 0 \qquad (3.1.2)$$

表示通过二次曲线$S_1(x, y) = 0,\ S_2(x, y) = 0$之交点的二次曲线束，$\lambda$之值由交点坐标决定；$\lambda = 0,1$时分别为$S_1 = 0, S_2 = 0$．再令$l = l(x, y) = 0$为直线方程，则$(1-\lambda)l_1 l_2 + \lambda l_3 l_4 = 0$表示通过直线偶$(l_1, l_2)$与$(l_3, l_4)$两两相交的四个交点的二次曲线束．这是因为直线偶可看作退化的圆锥曲线．特别地，让直线l_3合于直线l_4，则

$$(1-\lambda)l_1 l_2 + \lambda l_3^2 = 0 \qquad (3.1.3)$$

表示过点$\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_2$且与$l_1 = 0$，$l_2 = 0$分别切于点$\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_2$的二次曲线束，见图 3.1.1．设$l_1 = 0$与$l_2 = 0$交于点$\boldsymbol{R}_1$，在仿射坐标系$\{\boldsymbol{R}_1; \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\}$中，（3.1.3）可化为

$$S(x, y) = (1-\lambda)xy \pm \lambda(x + y - 1)^2 = 0 . \qquad (3.1.4)$$

只要给定曲线上一点$\boldsymbol{R}$，就可确定λ，且（3.1.4）中取负号时，点$\boldsymbol{R} \in \Delta\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$所对应的$\lambda \in (0,1)$．下面应用 Liming 的结果化二次曲线为参数形式．为此，注意到对曲线上任意的点$\boldsymbol{R}$，有$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x, y) = \boldsymbol{R}_1 + x(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_1) + y(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)$．过点$\boldsymbol{R}$作曲线的切线交$l_1 = 0$，$l_2 = 0$于点$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，则$(g_1, g_2) = (\|\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{A}\| / \|\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{A}\|, \|\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}\| / \|\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{B}\|)$可作为点$\boldsymbol{R}$的参数，又曲线在点$\boldsymbol{R}$的切线方程为$(Y - y)/(X - x) = -S'_x / S'_y$，由此就可以得出$\boldsymbol{A} = (-2\lambda(x + y - 1)/[(1-\lambda)y - 2\lambda(x + y - 1)], 0)$，所以$g_1 = X_A / (1 - X_A) = -2\lambda(x + y - 1)/[(1-\lambda)y]$，同理可以算出$g_2 = -2\lambda(x + y - 1)/[(1-\lambda)x]$，于是$g_1 g_2 = 4\lambda/(1-\lambda)$．这表明对曲线族（3.1.4）中任意一条曲线，$g_1 g_2 = \text{const} > 0$之值与动点$\boldsymbol{R}$无关．由$g_1, g_2$之表达式反解得$x = g_1/(g_1 + 2 + g_2)$，$y = g_2/(g_1 + 2 + g_2)$，代入$\boldsymbol{R}(x, y)$可得$\boldsymbol{R} = (g_1\boldsymbol{R}_0 + 2\boldsymbol{R}_1 + g_2\boldsymbol{R}_2)/(g_1 + 2 + g_2)$．因$g_1 g_2$为常数，可令$g_1 = \omega_0(1-t)/(\omega_1 t)$，$g_2 = \omega_2 t/[\omega_1(1-t)]$，$\omega_0, \omega_1, \omega_2$为常数，最后我们有

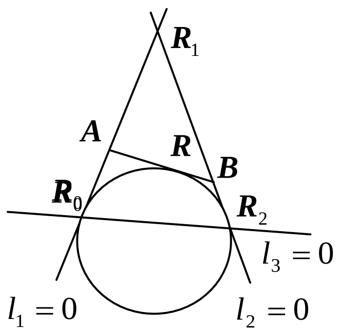

图 3.1.1 由三条直线决定的二次曲线束

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t) = \frac{(1-t)^2\omega_0\boldsymbol{R}_0 + 2(1-t)t\omega_1\boldsymbol{R}_1 + t^2\omega_2\boldsymbol{R}_2}{(1-t)^2\omega_0 + 2(1-t)t\omega_1 + t^2\omega_2}, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad (3.1.5)$$

上式就是由$\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$三点决定的圆锥曲线段的有理二次参数表示，它带有一个常量

$g_1 g_2 = \omega_0\omega_2 / \omega_1^2 > 0$．我们可以改变$\omega_i$的值来改变（3.1.5）的形式，但$\omega_0\omega_2 / \omega_1^2$的值不能改变．下一节引入一般的有理参数表示．

3.2 有理 Bézier 曲线的定义及其基本几何性质

定义 3.2.1 给定$\Re^3$空间中，齐次坐标（Homogeneous coordinates）下的$n+1$个点$\widetilde{\boldsymbol{R}}_i = (X_i, Y_i, Z_i, \omega_i) = (\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i, \omega_i)$，$i = 0,1,\cdots,n$，则$n$次有理参数曲线

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \omega(t)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\widetilde{\boldsymbol{R}}_i, \qquad 0 \le t \le 1 \tag{3.2.1}$$

称为n次有理 (Rational) Bézier 曲线，其中$B_i^n(t)$为n次 Bernstein 基，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_i$称为控制顶点，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_0\widetilde{\boldsymbol{R}}_1\cdots\widetilde{\boldsymbol{R}}_n$称为控制多边形或 B 网，$\omega_i$称为权因子或权(Weight)．

为保证曲线的凸包性质并避免$\omega(t) = 0$，常规定$\omega_i > 0$．试验表明，ω_i增大时曲线会向顶点$\boldsymbol{R}_i$靠近，这可用于曲线形状调整．易见（3.2.1）在仿射坐标系下的对应表示式是

$$\boldsymbol{R}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = \left(\frac{X(t)}{\omega(t)}, \frac{Y(t)}{\omega(t)}, \frac{Z(t)}{\omega(t)}\right) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\omega_i \boldsymbol{R}_i \Big/ \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\omega_i,$$
$$\boldsymbol{R}_i = (x_i, y_i, z_i), \qquad 0 \le t \le 1. \tag{3.2.2}$$

有理 Bézier 曲线具有类似于 Bézier 曲线的几何性质．

性质 3.2.1 几何不变性和仿射不变性．

性质 3.2.2 关于参数t和$(1-t)$的对称性．

性质 3.2.3 端点插值性：通过 B 网端点，切于 B 网端边．

当$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{R}_1 = \cdots = \boldsymbol{R}_{k-1} \ne \boldsymbol{R}_k$，$\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{R}_{n-1} = \cdots = \boldsymbol{R}_{n-h+1} \ne \boldsymbol{R}_{n-h}$，$k, h \ge 1$时，

$$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{R}_0,\ \boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{R}_n,\ \boldsymbol{R}^{(l)}(0) = \boldsymbol{R}^{(m)}(1) = \boldsymbol{0},\ l = 1,2,\cdots,k-1;\ m = 1,2,\cdots,h-1; \tag{3.2.3}$$

$$\boldsymbol{R}^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{\omega_k}{\omega_0}(\boldsymbol{R}_k - \boldsymbol{R}_0),\ \boldsymbol{R}^{(h)}(1) = \frac{n!}{(n-h)!}\frac{\omega_{n-h}}{\omega_n}(\boldsymbol{R}_n - \boldsymbol{R}_{n-h}). \tag{3.2.4}$$

这是因为

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \left\{ t^k \left[\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}\omega_k(\boldsymbol{R}_k - \boldsymbol{R}_0) \right] + t^{k+1}\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^{i-k-1}\omega_i(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_0) \right\} \Big/ \omega(t).$$

性质 3.2.4 端点曲率κ和挠率τ：设控制顶点无重点，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_{i-1}$，$i = 1,2,\cdots,n$；则

$$\kappa(0) = \frac{n-1}{n}\frac{\omega_0\omega_2}{\omega_1^2}\frac{\|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\|}{\|\boldsymbol{a}_1\|^3},\quad \kappa(1) = \frac{n-1}{n}\frac{\omega_{n-2}\omega_n}{\omega_{n-1}^2}\frac{\|\boldsymbol{a}_{n-1} \times \boldsymbol{a}_n\|}{\|\boldsymbol{a}_n\|^3}; \tag{3.2.5}$$

$$\tau(0) = \frac{n-2}{n}\frac{\omega_0\omega_3}{\omega_1\omega_2}\frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\|^2},\quad \tau(1) = \frac{n-2}{n}\frac{\omega_{n-3}\omega_n}{\omega_{n-2}\omega_{n-1}}\frac{(\boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n)}{|\boldsymbol{a}_{n-1} \times \boldsymbol{a}_n|^2}. \tag{3.2.6}$$

证 置曲线为$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{P}(t)/\omega(t)$，记为$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}/\omega$，则$\boldsymbol{P} = \omega\boldsymbol{R}$．对上式三次求导分别解得

$$\boldsymbol{R}' = (\boldsymbol{P}' - \omega'\boldsymbol{R})/\omega,\quad \boldsymbol{R}'' = (\boldsymbol{P}'' - \omega''\boldsymbol{R} - 2\omega'\boldsymbol{R}')/\omega,$$

$\boldsymbol{R}''' = (\boldsymbol{P}''' - \omega'''\boldsymbol{R} - 3\omega''\boldsymbol{R}' - 3\omega'\boldsymbol{R}'')/\omega$，这样就得出端点导矢值$\boldsymbol{R}'(0) = n\omega_1\boldsymbol{a}_1/\omega_0$，$\boldsymbol{R}''(0) = n(n-1)\omega_2\boldsymbol{a}_2/\omega_0 + f_1\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{R}'''(0) = n(n-1)(n-2)\omega_3\boldsymbol{a}_3/\omega_0 + g_2\boldsymbol{a}_2 + g_1\boldsymbol{a}_1$．这里$f_1, g_2, g_1$由权因子和$n$确定．把以上三式代入参数曲线的曲率和挠率公式即得$\kappa(0), \tau(0)$．同理有$\kappa(1), \tau(1)$(按通常做法，曲率也写作$k$，本书中以后记曲率为$k$)．

性质 3.2.5 凸包性．这是因为$B_i^n(t)\omega_i/\omega(t) \ge 0,\ \sum_{i=0}^{n}[B_i^n(t)\omega_i/\omega(t)] = 1$．

性质 3.2.6 升阶公式：

$$\boldsymbol{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i\boldsymbol{R}_i\Big/\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_i=\sum_{i=0}^{n+1}B_i^{n+1}(t)\hat{\omega}_i\hat{\boldsymbol{R}}_i\Big/\sum_{i=0}^{n+1}B_i^{n+1}(t)\hat{\omega}_i\,, \tag{3.2.7}$$

$$\hat{\omega}_i=\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\omega_i+\frac{i}{n+1}\omega_{i-1}\,,\qquad i=0,1,\cdots,n+1;\quad \omega_{-1}=\omega_{n+1}=0\,, \tag{3.2.8}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_i=\frac{\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\omega_i}{\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\omega_i+\frac{i}{n+1}\omega_{i-1}}\boldsymbol{R}_i+\frac{\frac{i}{n+1}\omega_{i-1}}{\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\omega_i+\frac{i}{n+1}\omega_{i-1}}\boldsymbol{R}_{i-1}\,,$$

$$i=0,1,\cdots,n+1;\quad \boldsymbol{R}_{-1}=\boldsymbol{R}_{n+1}=\boldsymbol{0}\,. \tag{3.2.9}$$

这可用算子（1.3.9）分别作用于（3.2.2）的分子分母而得．上式的几何意义也为对 B 网的割角，只是比多项式 Bézier 曲线的升阶复杂，割角系数不仅依赖于割角边序号，且依赖于权 ω_i．同样，升阶可无限次进行下去，B 网的升阶序列收敛到 $\boldsymbol{R}(t)$.

性质 3.2.7 平面有理 Bézier 曲线的变差缩减性：曲线与此平面内的任一直线 $\boldsymbol{L}$ 的交点个数 $I(\boldsymbol{R},\boldsymbol{L})$不多于其相应 B 网与 $\boldsymbol{L}$ 的交点个数 $I(\boldsymbol{B},\boldsymbol{L})$，这里交点个数指跨越 $\boldsymbol{L}$ 的次数**.**

证 以 $\boldsymbol{L}$ 为 x 轴建立直角坐标系，由性质 3.2.1, 仅需在此坐标系下证明本性质．今以 $\underset{a<t<b}{Z}[f(t)]$表示 $f(t)$在(a,b)上根的个数，$V[a_i]$表示数列a_i中去除零元素后正负号排列的变化次数，引入变换$s=t/(1-t)$，并应用关于多项式正根个数的 Cartesian 定理[9]，有

$$I(\boldsymbol{R},\boldsymbol{L})\le\underset{0<t<1}{Z}\left[\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_iy_i\right]=\underset{0<t<1}{Z}\left[(1-t)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i\omega_iy_i\right]=\underset{0<s<+\infty}{Z}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\omega_iy_is^i\right]$$

$$\le V\left[\binom{n}{0}\omega_0y_0,\binom{n}{1}\omega_1y_1,\cdots,\binom{n}{n}\omega_ny_n\right]=V[y_0,y_1,\cdots,y_n]=I(\boldsymbol{B},\boldsymbol{L})\,.$$ 证毕.

性质 3.2.8 平面有理 Bézier 曲线的保凸性：应用（3.3.1）仿定理 1.4.2 的证明可证**.**

性质 3.2.9 平面有理 Bézier 曲线的顶点共面性(由性质 3.2.5 知逆命题也成立)**.**

证 不妨设此曲线(3.2.2)在 xy 平面上，于是 $Z(t)/\omega(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_iz_i/\omega(t)\equiv0$，即 $\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\omega_iz_i\equiv0$，$0\le t\le1$．由基的线性无关性有$\omega_iz_i=0$或$z_i=0$，$i=0,1,\cdots,n$，即$\boldsymbol{R}_i$在 xy 平面上，证毕**.**

性质 3.2.10 特定分式线性参数变换下的形状不变性：令

$$t=au/[au+b(1-u)],\qquad 0\le u\le1, \tag{3.2.10}$$

$$a=\sqrt[n]{\omega_n^*/\omega_n}\,,\quad b=\sqrt[n]{\omega_0^*/\omega_0}\,. \tag{3.2.11}$$

则只要

$$I_i=I_i^*\,,\quad I_i=\omega_i^2/(\omega_{i-1}\omega_{i+1})\,,\quad I_i^*=\omega_i^{*2}/(\omega_{i-1}^*\omega_{i+1}^*)\,,\quad i=1,2,\cdots,n-1\,, \tag{3.2.12}$$

就能把曲线（3.2.2）变换到参数为u，权因子为ω_i^*，但控制顶点和形状均不变的同次有理 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{R}^*(u)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(u)\omega_i^*\boldsymbol{R}_i\Big/\sum_{i=0}^{n}B_i^n(u)\omega_i^*\,,\quad 0\le u\le1\,. \tag{3.2.13}$$

证 把（3.2.10）代入（3.2.2）得

$$\boldsymbol{R}^*(u)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(u)a^ib^{n-i}\omega_i\boldsymbol{R}_i\Big/\sum_{i=0}^{n}B_i^n(u)a^ib^{n-i}\omega_i\,,\qquad 0\le u\le1, \tag{3.2.14}$$

不难看出，条件（3.2.12）等价于$\{\omega_0^*/\omega_0,\omega_1^*/\omega_1,\cdots,\omega_n^*/\omega_n\}$构成等比数列，即

$\omega_i^*/\omega_i=(\omega_0^*/\omega_0)q^i$，$i=1,2,\cdots,n$，$q$ 为公比．当 $i=n$ 时由（3.2.11）求得 $q=a/b$．于是 $a^ib^{n-i}\omega_i=\omega_i^*$，这表明（3.2.14）即(3.2.13)．证毕．

定义 3.2.2 （3.2.12）所示的量 $I_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$ 称为 n 次有理 Bézier 曲线（3.2.2）在保形分式线性变换（3.2.10）下的不变量，是（3.2.2）的内在几何量．

当 $n=2$ 时，I_1 的几何意义已在§3.1 中论述．在 $I_i=I_i^*\,(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的条件下曲线（3.2.2）和（3.2.13）形状相同，只是沿曲线的参数分布有所不同．那么，上述结论之逆是否成立? 对于 $2\le n\le 5$， 我们有

定理 3.2.1 若 n 次 $(n=2,3,4,5)$ 有理 Bézier 曲线（3.2.2）与（3.2.13）的控制多边形首末三个顶点均不共线，首末三条边矢均不共面 $(n\ge 3)$，则它们形状相同当且仅当（3.2.12）成立．

证 充分性即性质 3.2.10；今仅就 $n=5$ 证明必要性．因曲线（3.2.2）与（3.2.13）形状相同，所以曲率或挠率恒等，特别在曲线始端的曲率或挠率相等．由性质 3.2.4 有

$$\frac{4}{5}\left(\frac{\omega_0\omega_2}{\omega_1^2}-\frac{\omega_0^*\omega_2^*}{\omega_1^{*2}}\right)\frac{\|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\|}{\|\boldsymbol{a}_1\|^3}=\frac{3}{5}\left(\frac{\omega_0\omega_3}{\omega_1\omega_2}-\frac{\omega_0^*\omega_3^*}{\omega_1^*\omega_2^*}\right)\frac{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3\|^2}=0\,.$$

因 $\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2$ 不共线，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 不共面，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{a}_2\ne\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\ne 0$，于是 $I_1=I_1^*$，$(\omega_0\omega_3)/(\omega_1\omega_2)=(\omega_0^*\omega_3^*)/(\omega_1^*\omega_2^*)$，两式相乘得 $I_2=I_2^*$．又由曲线的对称性可得 $I_4=I_4^*$，$I_3=I_3^*$， 证毕．

性质 3.2.11 可退化性：当权因子 $\omega_i=\omega, i=0,1,\cdots,n$ 时，曲线(3.2.2)退化为 Bézier 曲线(1.3.2)．

性质 3.2.12 被还原性，即若把 Bézier 曲线(1.3.2)看作曲线(3.2.2)的退化情形，则它也能还原为(3.2.2)：引入参数变换 $t=\alpha u/(1-u+\alpha u)\,(0\le u\le 1)$，(1.3.2)可变成以 $\boldsymbol{P_i}$ 为控制顶点，以 $\omega_i=\alpha^i$ 为权的有理 Bézier 曲线 $\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n(u)\alpha^i\boldsymbol{P_i}\Big/\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n(u)\alpha^i$.

3.3 有理 Bézier 曲线的离散构造及包络性

对曲线（3.2.2）的分子分母分别应用定理 1.4.1，就得到有理 Bézier 曲线离散生成的

定理 3.3.1 对任一点 $c\in(a,b)$, $\lambda=(c-a)/(b-a)$，必有

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)\omega_i\boldsymbol{R}_i}{\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)\omega_i}=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-a}{c-a}\right)\omega_i^i(c)\boldsymbol{R}_i^i(c)\Big/\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-a}{c-a}\right)\omega_i^i(c), & a\le t\le c,\\[2ex] \sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-c}{b-c}\right)\omega_n^{n-i}(c)\boldsymbol{R}_n^{n-i}(c)\Big/\sum\limits_{i=0}^{n}B_i^n\left(\dfrac{t-c}{b-c}\right)\omega_n^{n-i}(c), & c\le t\le b.\end{cases}\tag{3.3.1}$$

$$\omega_i^r(c)=\begin{cases}\omega_i\,, & r=0;\ i=0,1,\cdots,n,\\ (1-\lambda)\omega_{i-1}^{r-1}(c)+\lambda\omega_i^{r-1}(c)\,, & r=1,2,\cdots,n;\ i=r,r+1,\cdots,n,\end{cases}\tag{3.3.2}$$

$$\boldsymbol{R}_i^r(c)=\begin{cases}\boldsymbol{R}_i, & r=0;\ i=0,1,\cdots,n,\\ \dfrac{(1-\lambda)\omega_{i-1}^{r-1}(c)}{(1-\lambda)\omega_{i-1}^{r-1}(c)+\lambda\omega_i^{r-1}(c)}\boldsymbol{R}_{i-1}^{r-1}(c)+\dfrac{\lambda\omega_i^{r-1}(c)}{(1-\lambda)\omega_{i-1}^{r-1}(c)+\lambda\omega_i^{r-1}(c)}\boldsymbol{R}_i^{r-1}(c), & \\ & r=1,2,\cdots,n;\ \ i=r,r+1,\cdots,n.\end{cases}\tag{3.3.3}$$

这一定理是定理 1.4.1 的推广，我们也可由此推得有理 Bézier 曲线的递归求值公式和作图定理；又由（3.3.3）知 $\boldsymbol{R}_i^r(c)$ 是 $\boldsymbol{R}_{i-1}^{r-1}(c)$ 和 $\boldsymbol{R}_i^{r-1}(c)$ 的凸线性组合，因而定理的几何意义也是递归割角． 同样，我们也可证明有理 Bézier 曲线的离散割角多边形序列一致收敛到原曲

线．但应该注意，这里的割角系数不仅依赖于曲线分割点参数λ，而且依赖于多边形割角层数，割角边序号i和权因子ω_i．为描述离散割角中间过程的顶点的几何意义，我们有

定理 3.3.2 如（3.3.1）左端所示的n次$(n\geq 2)$有理 Bézier 曲线$\boldsymbol{R}(t)$是由（3.3.2），(3.3.3) 所决定的$n-r$次$(r=1,2,\cdots,n-1)$ 有理 Bézier 曲线族的包络，即

$$\boldsymbol{R}(t)=\operatorname{env}\left\{\boldsymbol{R}^{[n-r]}(t,c)=\frac{\sum_{i=0}^{n-r}B_i^{n-r}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\omega_{i+r}^r(c)\boldsymbol{R}_{i+r}^r(c)}{\sum_{i=0}^{n-r}B_i^{n-r}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\omega_{i+r}^r(c)},\ a\leq t\leq b\,\middle|\,a\leq c\leq b\right\},\tag{3.3.4}$$

且曲线$\boldsymbol{R}(t)$与上述族曲线在接触点$c=t$处有$n-r$阶切触.

3.4 平面有理 Bézier 曲线的隐式化

3.4.1 隐式方程的导出

定理 3.4.1 （3.3.1）左端所示的n次有理 Bézier 曲线$(a\leq t\leq b)$当$\boldsymbol{R}_i=(x_i,y_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$共面时可化为隐式方程

$$F(x,y)=\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n &
\end{vmatrix}_{(2n)\times(2n)}=0.\tag{3.4.1}$$

$$a_i=\binom{n}{i}\omega_i(x_i-x),\quad b_i=\binom{n}{i}\omega_i(y_i-y),\quad i=0,1,\cdots,n.\tag{3.4.2}$$

证 引入参数变换

$$t=(au+b)/(u+1),\ 0\leq u\leq+\infty;\quad u=(b-t)/(t-a),\ a\leq t\leq b,\tag{3.4.3}$$

得到

$$\boldsymbol{R}(t)=(x,y)=\left(\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\omega_ix_iu^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\omega_iu^{n-i}},\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\omega_iy_iu^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\omega_iu^{n-i}}\right),\ 0\leq u\leq+\infty.\tag{3.4.4}$$

即

$$\sum_{i=0}^{n}a_iu^{n-i}=0,\ \sum_{i=0}^{n}b_iu^{n-i}=0.\tag{3.4.5}$$

因为(x,y)是曲线（3.3.1）上的点，当且仅当（3.4.5）中两式有公根或$a_0=b_0=0$ $(x\equiv x_0,y\equiv y_0)$，所以由多项式的结式理论（见引理 16.1.1）知（3.4.5）的结式$F(x,y)$必为 0，证毕.

定理 3.4.2 （3.4.1）中的$F(x,y)$是次数不高于n的二元多项式.

证 用f来表示（3.4.2）中的a或b；当$r=1,2,\cdots,n$时记

$$f_i^{[0]}=\begin{cases} f_i, & i=0,1,\cdots,n, \\ 0, & i\ge n+1, \end{cases} \tag{3.4.6}$$

$$f_i^{[r]}=\begin{cases} f_i^{[r-1]}-\Omega_i f_{r-1}^{[r-1]}, \quad \Omega_i=\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\dfrac{\omega_i}{\omega_0}, & i=r,r+1,\cdots,r+n-1, \\ f_i^{[r-1]}, & i\ge r+n. \end{cases} \tag{3.4.7}$$

对(3.4.1)中的行列式施行列初等变换．从第$i+1$列减去第1列的Ω_i倍，$i=1,2,\cdots,n;$ 再从第$i+2$列减去第2列的Ω_i倍，$i=1,2,\cdots,n;$ 最后从第$i+n$列减去第n列的Ω_i倍，$i=1,2,\cdots,n$；可得

$$F(x,y)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1^{[1]} & \cdots & a_{n-1}^{[1]} & a_n^{[1]} & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\ b_0 & b_1^{[1]} & \cdots & b_{n-1}^{[1]} & b_n^{[1]} & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & a_1^{[1]} & a_2^{[2]} & \cdots & a_n^{[2]} & a_{n+1}^{[2]} & & & \\ & a_0 & a_1^{[1]} & \cdots & \cdots & a_n^{[1]} & & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1^{[1]} & b_2^{[2]} & \cdots & b_n^{[2]} & b_{n+1}^{[2]} & & & \\ & b_0 & b_1^{[1]} & \cdots & \cdots & b_n^{[1]} & & & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} a_0 & a_1^{[1]} & a_2^{[2]} & \cdots & a_n^{[n]} & a_{n+1}^{[n]} & \cdots & a_{2n-1}^{[n]} \\ & a_0 & a_1^{[1]} & \cdots & a_{n-1}^{[n-1]} & a_n^{[n-1]} & \cdots & a_{2n-2}^{[n-1]} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a_0 & a_1^{[1]} & a_2^{[1]} & \cdots & a_n^{[1]} \\ b_0 & b_1^{[1]} & b_2^{[2]} & \cdots & b_n^{[n]} & b_{n+1}^{[n]} & \cdots & b_{2n-1}^{[n]} \\ & b_0 & b_1^{[1]} & \cdots & b_{n-1}^{[n-1]} & b_n^{[n-1]} & \cdots & b_{2n-2}^{[n-1]} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & b_0 & b_1^{[1]} & b_2^{[1]} & \cdots & b_n^{[1]} \end{vmatrix}, \tag{3.4.8}$$

由（3.4.7）知$a_i^{\lceil r\rceil},b_i^{\lceil r\rceil}(r=1,2,\cdots,n;\ i\ge r)$均是常数，因而行列式（3.4.8）中只有$a_0$含$x$，$b_0$含$y$；又因$a_0$，$b_0$所在列相同，所以定理结论成立，证毕.

定义 3.4.1 设α_{ij}为常数，点坐标(x,y)满足n次代数方程$F(x,y)=\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\le n}}^{n}\alpha_{ij}x^i y^j=0$的平面曲线称为平面$n$次代数曲线.

3.4.2 平面n次代数曲线有理参数化的条件

定理 3.4.2 表明，平面n次有理 Bézier 曲线是平面n次代数曲线．但反之未必成立．那么何时定理 3.4.2 之逆成立呢？依据代数几何理论，有[10]

定理 3.4.3 平面n次代数曲线能表为有理 Bézier 曲线的充要条件是此曲线的亏格(Genus) $g=(n-1)(n-2)/2-d-s$ 为零，这里d，s分别表示其包含虚点在内二重点和尖点个数.

3.5 有理二次 Bézier 曲线的分类

应用定理 3.4.1，我们可把曲线（3.1.5）隐式化并确定其分类．为简化行列式计算，取特殊坐标系使得$\boldsymbol{R}_0=(-l,0)$，$\boldsymbol{R}_1=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{R}_2=(l,0)$，根据几何不变性，只要在这一坐标系下确定分类即可．为进一步简化计算，再引入参数变换

$$t=\sqrt{\omega_0}u\big/[\sqrt{\omega_0}u+\sqrt{\omega_2}(1-u)],\qquad 0\le u\le 1,\tag{3.5.1}$$

则曲线化作控制顶点相同而权因子为

$$(\omega_0^*,\omega_1^*,\omega_2^*)=\left(1,\omega=\omega_1\big/\sqrt{\omega_0\omega_2},1\right)\tag{3.5.2}$$

的有理 Bézier 曲线$\boldsymbol{R}^*(u)$．按定理 3.2.1，此曲线形状与（3.1.5）相同．这时（3.4.1）化为

$$\begin{vmatrix}-l-x & 2\omega(x_1-x) & l-x & \\ & -l-x & 2\omega(x_1-x) & l-x\\ -y & 2\omega(y_1-y) & -y & \\ & -y & 2\omega(y_1-y) & -y\end{vmatrix}=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\tag{3.5.3}$$

$$(A,B,C,D,E,F)=(\omega^2y_1^2,-\omega^2x_1y_1,\omega^2(x_1^2-l^2)+l^2,0,\omega^2l^2y_1,-\omega^2l^2y_1^2).\tag{3.5.4}$$

因为 $\Delta=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=-\omega^4l^4y_1^4<0$，又因为 $\omega<1$ 时 $(A+C)\Delta<0$，同时 $AC-B^2=\omega^2l^2y_1^2(1-\omega^2)$，由解析几何知识可知，当$\omega<1,\omega=1,\ \omega>1$时曲线（3.1.5）分别为椭圆，抛物线，双曲线．这样我们就得到

定理 3.5.1 有理二次 Bézier 曲线（3.1.5）的分类取决于定义 3.2.2 中的不变量I_1，即$I_1=\omega_1^2/(\omega_0\omega_2)<1,=1,>1$时分别为椭圆，抛物线，双曲线.

由定理 3.5.1 的证明可知，$\boldsymbol{R}_s=\boldsymbol{R}^*(u)\big|_{u=1/2}=\left(1/(1+\omega)\right)\left(\boldsymbol{R}_0/2+\boldsymbol{R}_2/2\right)+\left(\omega/(1+\omega)\right)\boldsymbol{R}_1$.

这表明点$\boldsymbol{R}_s$恰在$\Delta\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_2$底边的中线上，且此中线被曲线分割成$1:\omega$的两部分．于是我们得到对外形设计特别有用的

推论 3.5.1 设有理二次 Bézier 曲线(3.1.5)与$\Delta\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_2$底边$\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_2$上的中线$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{M}$交于被称为肩点(Shoulder point)的点$\boldsymbol{R}_s$，若$\|\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{M}\|/\|\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_s\|=\omega$，则当$\omega<1,\omega=1,\omega>1$时，曲线(3.1.5)分别为椭圆，抛物线，双曲线.

应用定理 3.5.1，当$I_1<1$时，易见曲线(3.1.5)为圆心角是2θ的圆弧，当且仅当$B=0,A=C$，这等价于$x_1=0$，$\omega^2=l^2/(l^2+y_1^2)=\cos^2\theta$，于是有

定理 3.5.2 有理二次 Bézier 曲线（3.1.5）构成圆心角为2θ $(0<\theta<\pi/2)$，半径为$l\csc\theta$之圆弧的充要条件是下列三式同时成立：

$$\left\| \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{R}_1 \right\| = \left\| \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 \right\|, \quad \left\| \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{R}_2 \right\| = 2l, \tag{3.5.5}$$

$$\omega_1^2 / (\omega_0 \omega_2) = \cos^2 \theta . \tag{3.5.6}$$

主要文献

[WGJ, WGZ, 99] 王国瑾，汪国昭，计算几何，浙江大学数学系研究生学位课程讲义，1999

[WGZ, 85] 汪国昭，沈金福，有理 Bézier 曲线的离散和几何性质，浙江大学学报，1985, 19(3): 123-130

[XW, 92] 许伟，有理 Bézier 曲线面中权因子的性质研究，计算数学，1992, 14(1): 79-88

参考文献

1 Rowin, M.S., Conic, cubic and T-conic segments, D2-23252, The Beoing Company, Seattle, WA98124, 1964

2 Coons, S.A., Surfaces for computer-aided design of space figures, AD663504, 1967

3 Ball, A.A., CONSURF Part1: Introduction to the conic lofting title, Computer Aided Design, 1974, 6(4): 243-249

4 Forrest, A.R., The twisted cubic curve: A computer aided geometric design approach, Computer Aided Design, 1980, 12(2): 165-172

5 Farin, G., Algorithms for rational Bézier curves, Computer Aided Design,1983, 15(2): 73-77

6 Pigel, L., Representation of quadric primitives by rational polynomials, Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(1-3): 151-155

7 刘鼎元，有理 Bézier 曲线，应用数学学报，1985, 8(1): 70 -82

8 Faux, I.D., Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK, 1979

9 库洛什，高等代数教程， 柯召译，高等教育出版社，第二版，1956 年 10 月，北京

10 苏步青，刘鼎元，计算几何，上海科学技术出版社，上海，1981