

# GAMES 301 Lab 3

Komeiji Green

November 28, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>算法原理介绍</b>	<b>2</b>
1.1	广义重心坐标 . . . . .	2
1.2	自由边界参数化 . . . . .	4
1.3	保证参数化结果 injective 的条件 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>实验</b>	<b>6</b>
2.1	非迭代的方法 . . . . .	6
2.2	迭代方法 . . . . .	6
2.3	多边界的情况 . . . . .	6

## 源码中的核心部分与 Demo

- conformal-natrue.m LSCM 自由边界参数化
- conformal-nature-multi.m 多边界的 LSCM 参数化
- mean-value-nature.m 均值坐标自由边界参数化
- demo.m 运行 LSCM + MeanValue 参数化
- demo-2.m 运行迭代的自由边界参数化方法
- demo-vest/develop.m 多边界曲面的自由边界参数化
- test-conformal.m 测试 LSCM 参数化方法
- test-mean-value.m 测试自由边界 mean-value 参数化方法

# 1 算法原理介绍

## 1.1 广义重心坐标

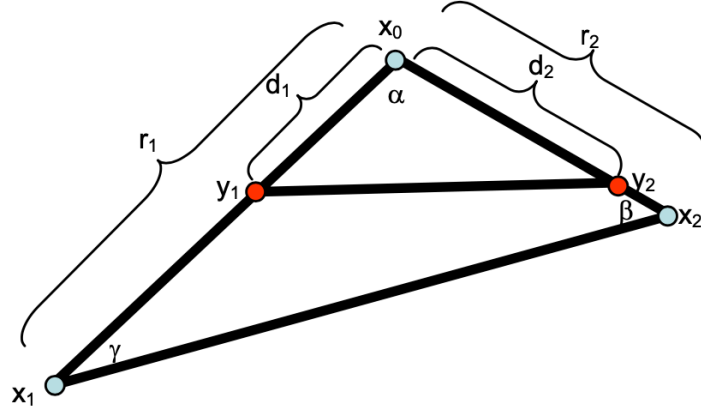


Figure 1: 曲面上与  $x_0$  相邻的一个三角形

在介绍自由边界参数化之前，我们先介绍广义重心坐标这一前置内容，更详细的介绍可以参考论文 [1].

在如图 1 的三角形上，以  $(x_1 - x_0)/r_1$  和  $(x_2 - x_0)/r_2$  为基，我们可以表示三角形上的任意向量，考虑  $R^{90}(y_2 - y_1)$ ，经计算：

$$R^{90}(y_2 - y_1) = \left(d_2 \cot \alpha - \frac{d_1}{\sin \alpha}\right) \cdot \frac{x_0 - x_2}{r_2} + \left(d_1 \cot \alpha - \frac{d_2}{\sin \alpha}\right) \cdot \frac{x_0 - x_1}{r_1},$$

又由定义：

$$R^{90}(y_2 - y_1) = R^{90}\left(d_2 \frac{x_2 - x_0}{r_2} - d_1 \frac{x_1 - x_0}{r_1}\right),$$

于是有：

$$\left(d_2 \cot \alpha - \frac{d_1}{\sin \alpha}\right) \cdot \frac{x_2 - x_0}{r_2} + \left(d_1 \cot \alpha - \frac{d_2}{\sin \alpha}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{r_1} = -R^{90}\left(d_2 \frac{x_2 - x_0}{r_2} - d_1 \frac{x_1 - x_0}{r_1}\right). \quad (1)$$

取  $d_i = r_i$ ，就得到了我们熟悉的 cotangent laplacian 坐标：

$$\cot \gamma \cdot (x_2 - x_0) + \cot \beta \cdot (x_1 - x_0) = -R^{90}(x_2 - x_1),$$

取  $d_i = 1$ , 就是 Mean-Value 坐标:

$$\frac{\tan(\alpha/2)}{r_2}(x_2 - x_0) + \frac{\tan(\alpha/2)}{r_1}(x_1 - x_0) = -R^{90}\left(\frac{x_2 - x_0}{r_2} - \frac{x_1 - x_0}{r_1}\right).$$

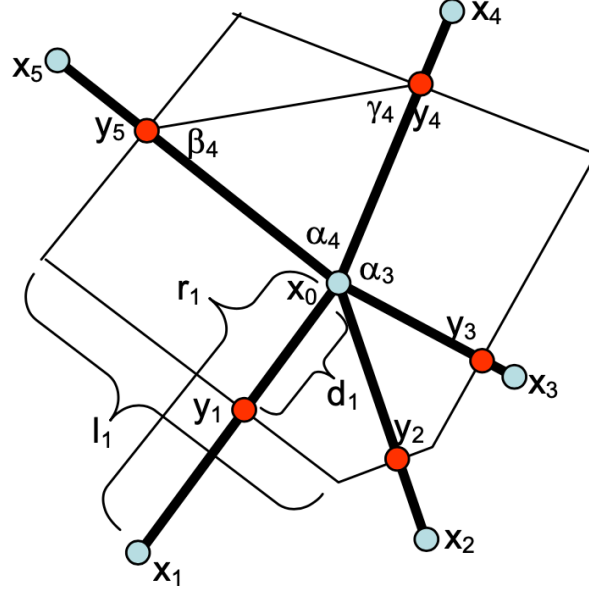


Figure 2: 点  $x_0$  的一邻域  $x_1, \dots, x_k$

考虑一个 2D 三角网格, 对于内部点, 我们可以将式 1 绕其 1-邻域求和 (如图 2) 我们会得到:

$$\sum_{i=1}^k w_i(x_i - x_0) = 0 \quad (2)$$

其中, 对于 cotangent laplacian 坐标:

$$w_i = \cot \beta_i + \cot \gamma_i,$$

对于 mean value 坐标:

$$w_i = \frac{\tan(\alpha_i/2) + \tan(\alpha_{i-1}/2)}{r_i}.$$

## 1.2 自由边界参数化

Tutte 参数化虽然能够保证 bijective 这一良好的数学性质，但是它具有极高的面积扭曲，其中，强制要求边界是一个凸多边形是 Tutte 参数化具有极高面积扭曲的原因之一。对于一些特殊的曲面，如可展曲面，可能它的边界十分崎岖，但是显然能够等距变换到平面中，对于这类曲面可以通过自由边界参数化来取得很好的效果。

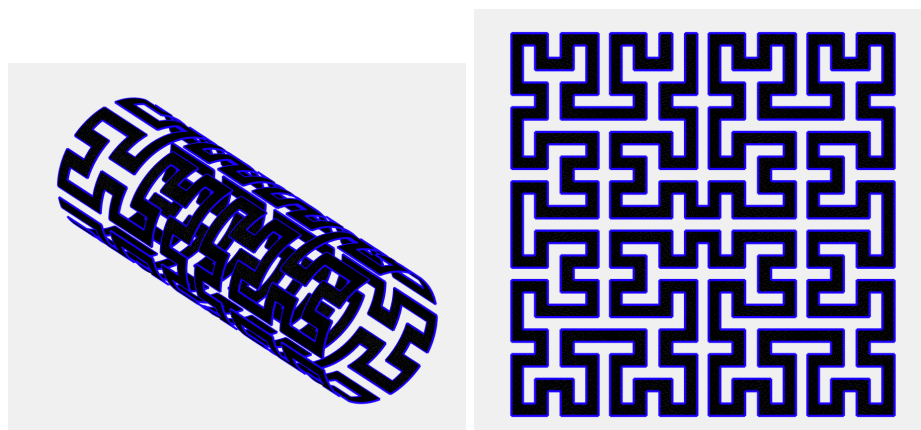


Figure 3: 对一个可展曲面利用 LSCM 自由边界参数化的结果，就是原曲面的一个等距展开

我们希望自由边界参数化具有 2d-reproducing 的性质，即：对于一个离散可展曲面（包括一个二维曲面），其自由边界参数化的结果就是本身的一个等距展开。

考虑如何通过一个线性方程组来来满足 2d-reproducing 的性质。既然要 2d-reproducing，就说明任意 2d mesh 的坐标会使得该线性方程组恒成立。

对于内部点  $x_0$ ，我们可以用广义重心坐标作为它与一邻域之间的约束关系，即约束公式 2 成立，这就自然符合了 2d-reproducing 的要求。

对于边界点  $x_0$ ，我们同样可以将式 1 求和，但这次等式右边并不能像之前一样抵消为 0，而是留下了边界部分：

$$\sum_{i=1} w_i(x_i - x_0) = -R^{90} \left( d_2 \frac{x_2 - x_0}{r_2} - d_1 \frac{x_1 - x_0}{r_1} \right), \quad (3)$$

其中  $x_1, x_2$  分别是  $x_0$  在边界上按逆时针顺序的前、后邻点。

综上，我们将 2 作为内部点的约束，将 3 作为边界点的约束，就得到了一个 2d-reproducing 的线性方程组，通过它即可完成自由边界参数化。

对于离散可展曲面，该线性方程组的秩为  $2n - 4$ ，它存在一个非平凡解（即为等距展开本身），且存在着旋转、缩放、横纵平移这 4 个自由度，对于非离散可展曲面，该线性方程组的秩则为  $2n - 2$ ，只存在所有点都重合的非平凡解（于是自由度为 2），在实际求解的过程中，需要固定某两个边界点的取值，并舍弃对于这两个边界点的约束，来求解剩下的点。

值得一提的是，LSCM 的系数矩阵其实等价于对 cotangent laplacian 坐标利用上述方法推导出的自由边界参数化矩阵，论文 [2] 与 [3] 发表于同一年代，却从不同的角度出发得到了相同的结果。不过两篇论文最终的求解方法和对约束的处理方法可能是有所不同的。

### 1.3 保证参数化结果 *injective* 的条件

自由边界参数化会面临的问题是，可能不再满足 Tutte 参数化的 *bijective* 性质。当内部点是其一邻域的凸组合时，而 Tutte 参数化的 *bijective* 性质只基于边界为凸这一个条件，那么对于自由边界参数化而言，是否也可以只满足一些边界条件，就能够使整体的参数化结果是 *locally/globaly injective* 的呢？

论文 [4] 利用了调和 1-形式给出了这个边界条件，即其中的定理 4.15 与 4.16，可以把他们的结论概括为：对于一个 3-连通的平面图，若（0）每一个内部点都是其 1-邻域的凸组合，且（1）唯一的那个 unbounded 的边界的 turning number 为  $2\pi$ ，（2）其余 bounded 的边界的 turning number 为  $-2\pi$ ，（3）边界上任意 reflex 的结点（可以理解为内角  $> \pi$ ）都在其一邻域的凸包内，则该平面图中不存在任何翻转的三角形。

这个定理告诉我们，只需要约束边界点，就可以控制整个参数化结果就是无翻转的，进一步，如果边界是无自交的，那么参数化结果就是 *bijective* 的。

然而，这个边界条件并不像 Tutte 的边界条件那样易于控制，因为条件（3）同时对边界点以及与边界相邻的内部点作出了要求，而它本身又是一个非线性的约束。在论文 [1] 中，作者提出了一种基于迭代的方法来使得条件（3）尽可能被满足，我们也在后续的实验中实现了它。

## 2 实验

我通过两种方式实现了自由边界参数化，第一种方式是先用 LSCM 确定边界的参数化结果，再利用 mean-value coordinates 确定内部点的参数化结果。第二种方式是先用 LSCM 确定一个初始的参数化结果，再循环调用自由边界的 mean-value 参数化方法，每次调用的输入 mesh 都是前一步的参数化结果。

第二种方法参考的是论文 [1] 中第四节的算法，文中在附录部分证明了，如果这种迭代最终收敛，且边界的 turning number 为  $2\pi$  的话，则参数化结果是 locally injective 的。虽然实践中并不是一定能保证边界的 turning number 为  $2\pi$ ，但依然可以保证所有三角形没有发生任何翻转。

### 2.1 非迭代的方法

即先用 LSCM 确定边界，再利用 mean-value 确定内部的结点。由于 LSCM 方法对于限制点的选取比较敏感，我们这里选取在三维空间中距离最远的两个点作为限制点。

参数化的结果见图 4，通过检测我们发现，LSCM 的初始参数化结果存在几个三角形发生翻转，在利用 Mean-Value 方法之后，翻转的数量减少了。

### 2.2 迭代方法

由于在迭代方法中，Mean-Value 的参数化是在前一个参数化结果的基础上进行的，由于前一个参数化结果已经是一个平面 mesh，只不过可能在个别三角形上发生翻转，所以迭代后的结果与初始相差不大，但能够修正一些翻转的三角形。

我们在图 5 中展示迭代方法的运行结果。

### 2.3 多边界的情况

自由边界参数化在多边界的曲面上也可以正常运行，且根据论文 [4] 中的 4.16，如果它的边界无自交，且与边界相邻的三角面无翻转，则整体就是一个 bijective 的参数化，我们分别在一个离散可展曲面和 vest 曲面上进行了多边界参数化的实验，见图 6 和 7

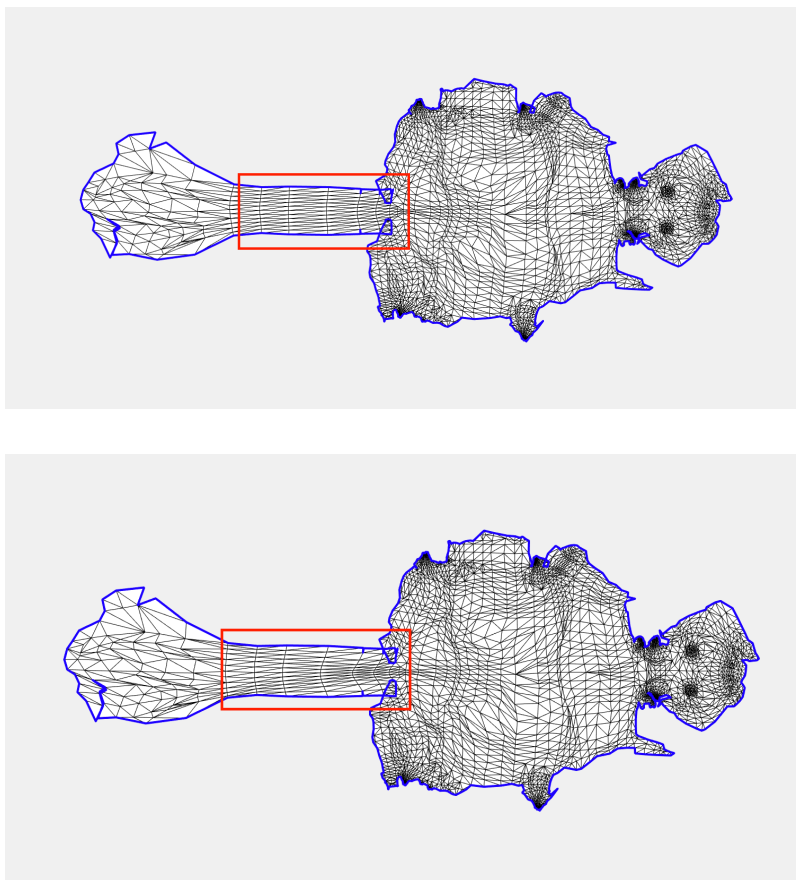


Figure 4: LSCM 方法的初始化 (a) 与 Mean-Value 处理后的 (b) 对比，可见内部点的位置稍有不同，但由于 Mean-Value 也是一种 2D-reproducing 的方法，故参数化结果的角度扭曲仍然是比较低的

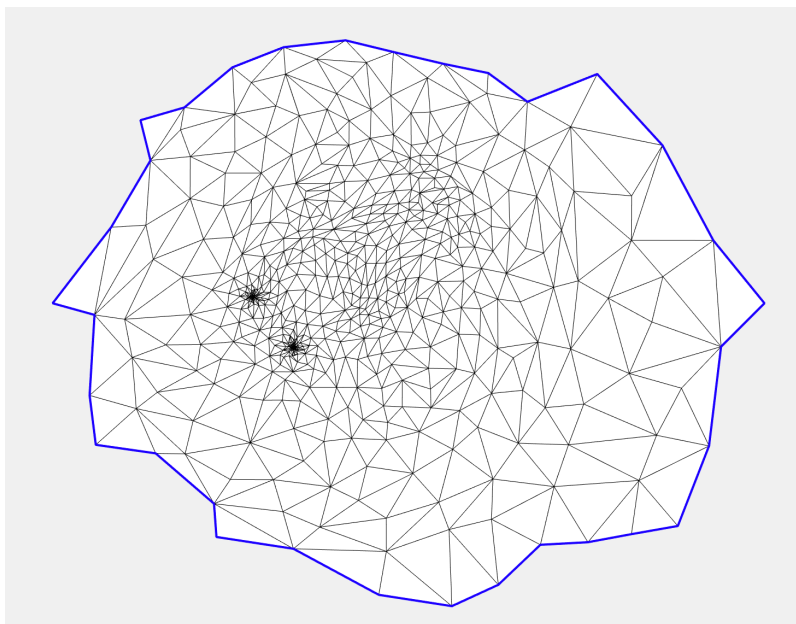


Figure 5: 迭代方法在 bunnyhead 中的运行结果，可见参数化的边界无自交，该参数化结果是 bijective 的，也印证了论文 [4] 中的定理 4.16

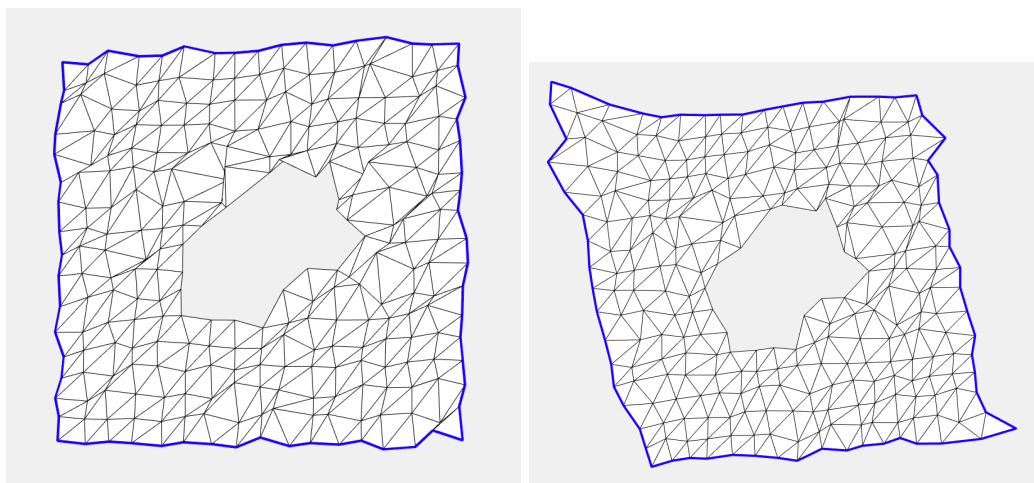


Figure 6: 图 a 为一个带洞的可展曲面 (3d)，图 b 为一个其参数化 (展平) 后的结果



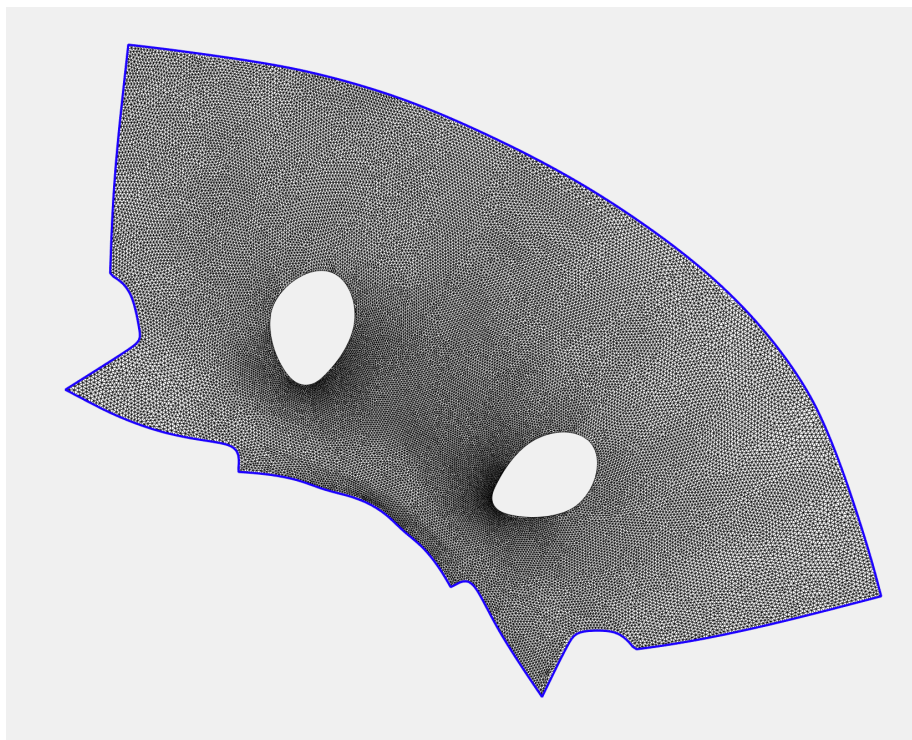


Figure 7: 多边界曲面 vest 的参数化结果

## References

- [1] Z. Kami, C. Gotsman, and S.J. Gortler. Free-boundary linear parameterization of 3d meshes in the presence of constraints. In *International Conference on Shape Modeling and Applications 2005 (SMI' 05)*, pages 266–275, 2005.
- [2] Bruno Lévy, Sylvain Petitjean, Nicolas Ray, and Jérôme Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):362–371, jul 2002.
- [3] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, and Pierre Alliez. Intrinsic Parameterizations of Surface Meshes. *Computer Graphics Forum*, 2002.
- [4] Steven J. Gortler, Craig Gotsman, and Dylan Thurston. Discrete one-forms on meshes and applications to 3d mesh parameterization. *Computer Aided Geometric Design*, 23(2):83–112, 2006.