



# 基于图像的三维模型重建

成像原理与图像特征



## ✓ 针孔相机模型

- ✓ 针孔相机模型
- ✓ 径向畸变

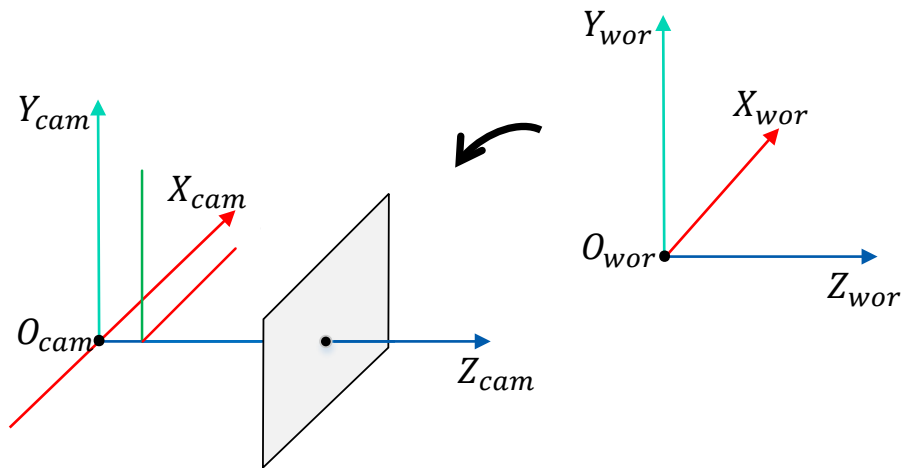
## ✓ 特征检测与匹配

- ✓ 常用的特征检测子与描述子
- ✓ 特征匹配策略
- ✓ 最新进展

## ✓ 2D-2D:对极几何

- ✓ 对极约束
- ✓ 本质/单应矩阵
- ✓ 直接线性变换法

## 1. 世界坐标系到相机坐标系



$$\mathbf{X}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

点的相机坐标

$$\mathbf{X}_w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

点的世界坐标

刚体变换

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{R}\mathbf{X}_w + \mathbf{t}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆变换

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{R}^T \mathbf{X}_c - \mathbf{R}^T \mathbf{t}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 1.1 相机中心在世界坐标系中的位置

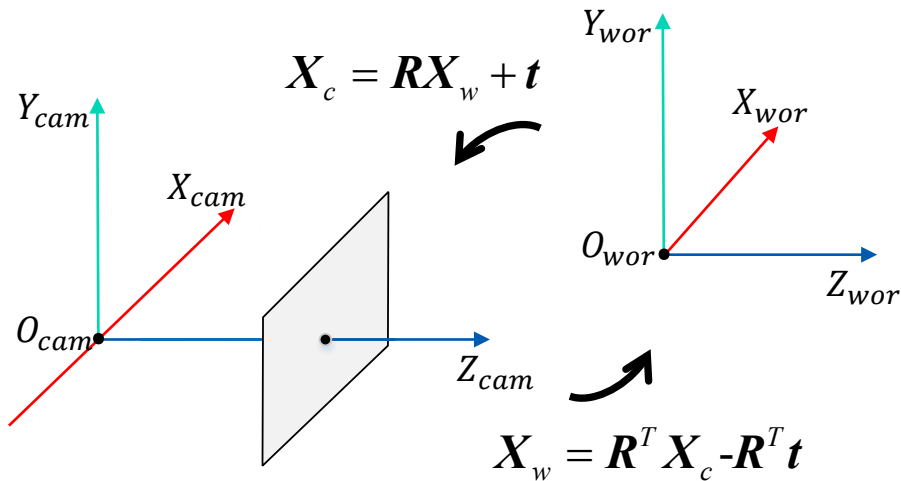
$$O_{cam}^c = 0$$



$$O_{cam}^w = R^T O_{cam}^c - R^T t = -R^T t$$

$O_{cam}^c$  --- 相机中心在相机坐标系中的坐标

$O_{cam}^w$  --- 相机中心在世界坐标系中的坐标



## 1.2 相机朝向（Z轴）在世界坐标系中的方向

$Z^c$  --- 相机坐标系中Z轴上的一点

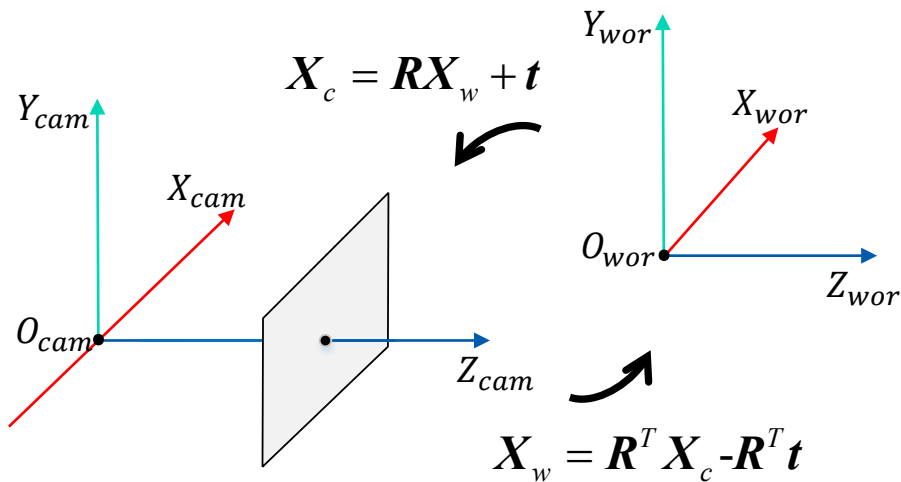
$$Z^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O_{cam}^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$r^c = Z^c - O_{cam}^c$$

$$r^w = (R^T Z^c - R^T t) - (R^T O_{cam}^c - R^T t)$$

$$= R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R(2,:) \quad \text{旋转矩阵的第3行?}$$

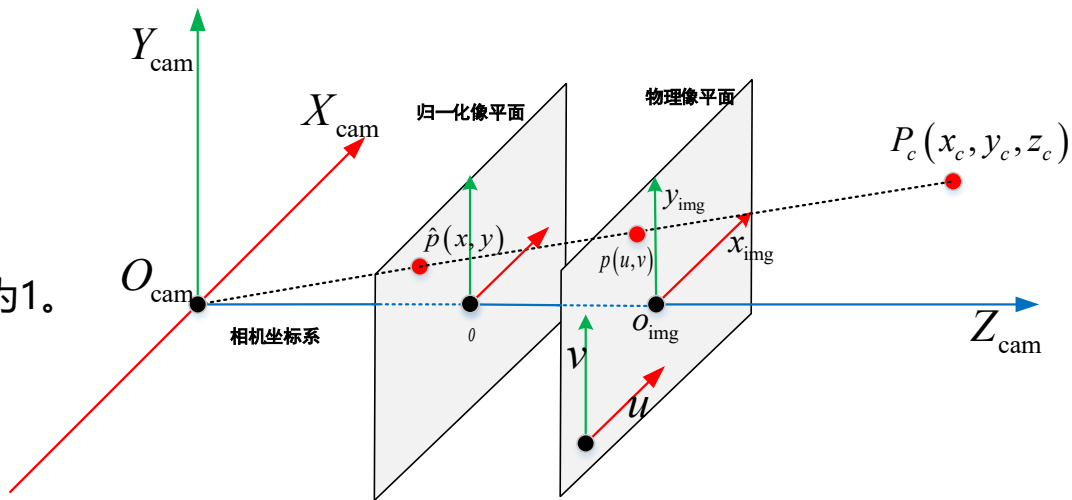
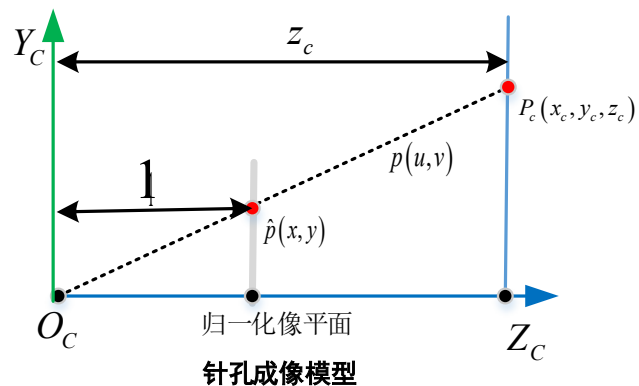


## 2. 相机坐标系到归一化像平面坐标系

归一化像平面：

虚拟的平面，

与物理像平面平行，且距离相机光心距离为1。



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_c}{z_c} \\ \frac{y_c}{z_c} \end{pmatrix}$$

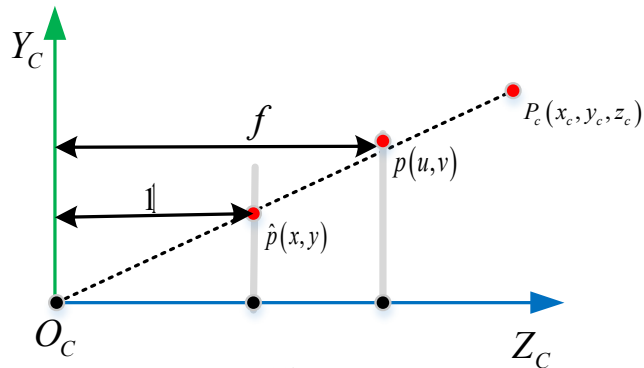
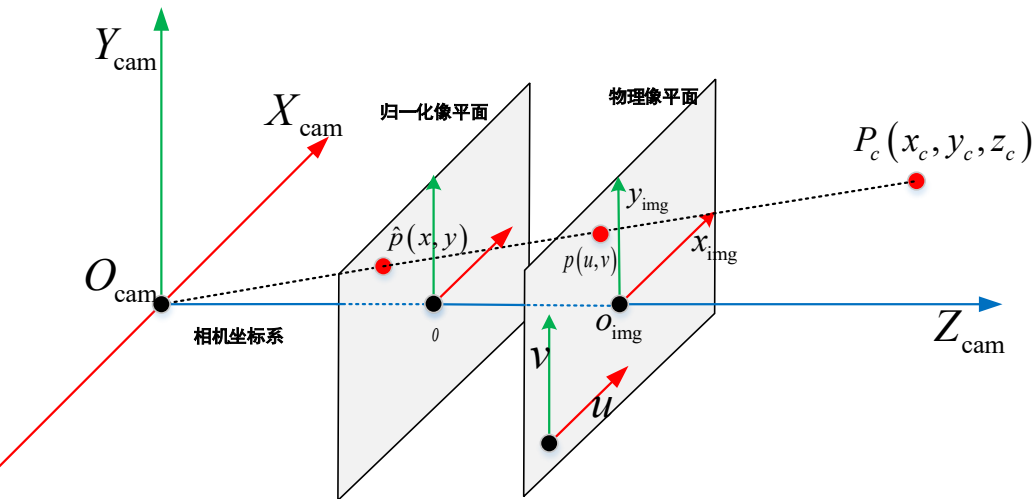
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

## 3. 归一化像平面标系到物理像平面坐标系

物理像平面：

实际存在的平面，

它是相机CCD阵列所在的平面。



针孔成像模型

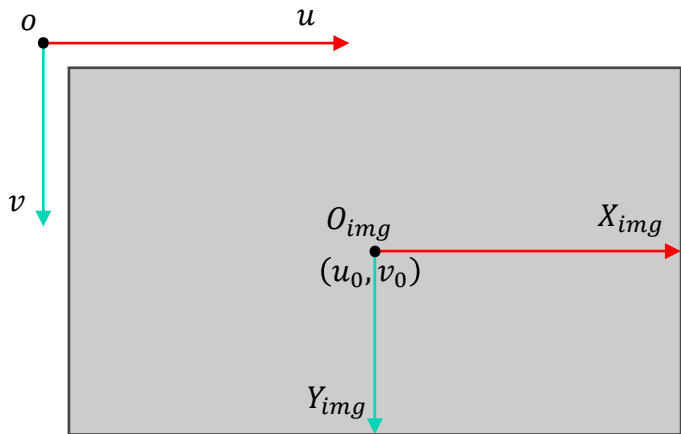
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha x \\ f\beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x \\ f_\beta y \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta$  ---单位是像素/毫米

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & f_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

## 3.1 物理像平面坐标系

一般以左上角为坐标原点，需要进行坐标系平移。

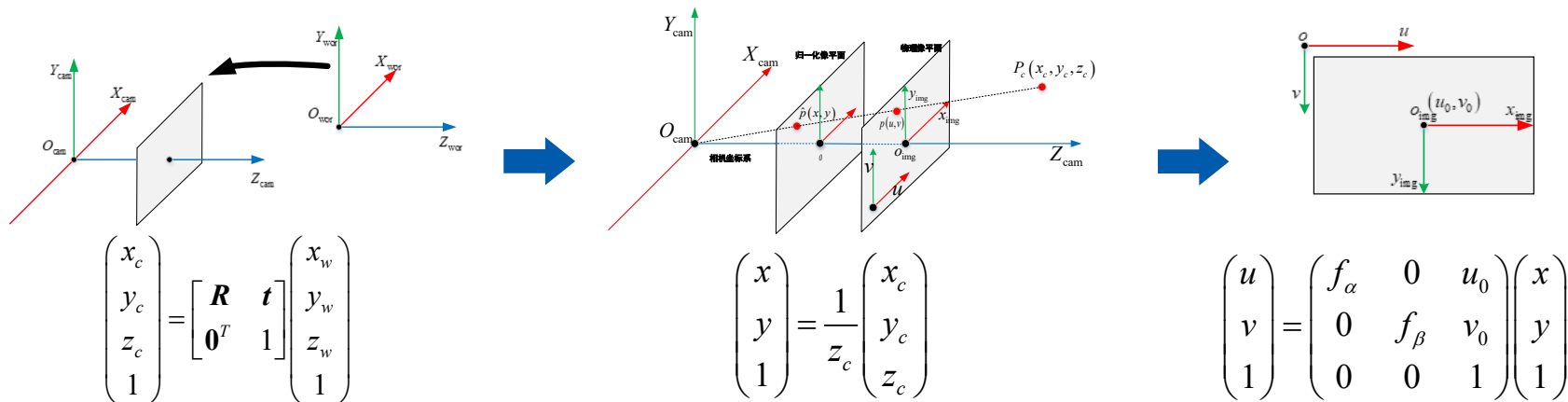


$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\alpha}x + u_0 \\ f_{\beta}y + v_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_{\alpha} & 0 & u_0 \\ 0 & f_{\beta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

一般情况下  $f_{\alpha} = f_{\beta}$



# 针孔相机模型-透视矩阵



$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 针孔相机模型-透视矩阵

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{3 \times 4} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

6个外参数  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$  姿态估计

5个内参数  $f_\alpha = f_\beta, k_1, k_2, u_0, v_0$  相机标定

$k_1, k_2$ 为径向畸变系数, 接下来介绍

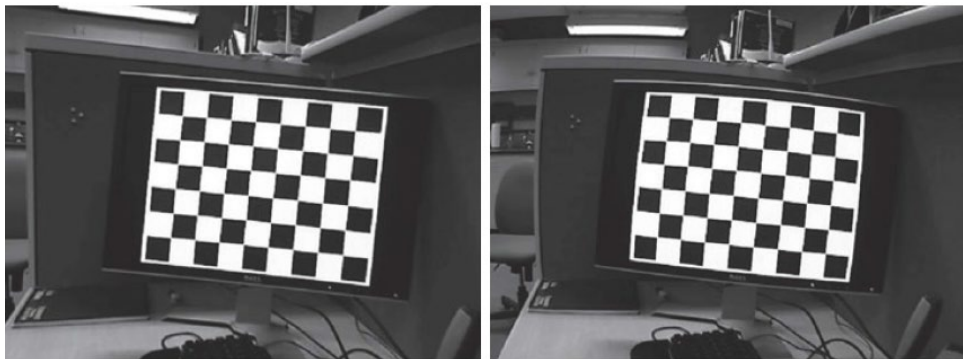
成因：透镜不能完全满足针孔模型假设

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, r^2 = x^2 + y^2$$

$k_1, k_2$ 为径向畸变系数



$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



直线变弯曲，由图像中心往外畸变程度越来越大

## 径向畸变系数的最小乘估计

理想情况下投影点的坐标：

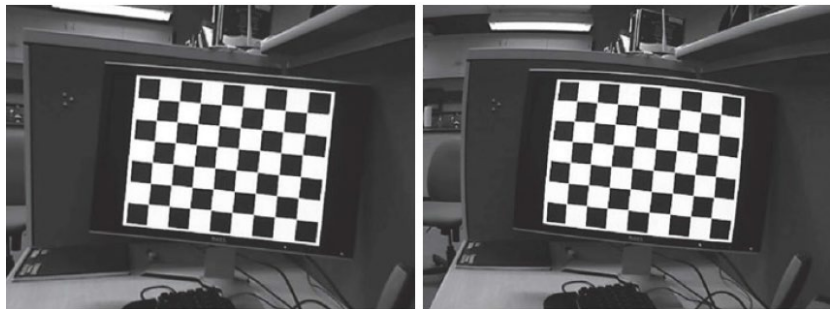
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}$$

畸变情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} - u_0 \\ \tilde{v} - v_0 \end{bmatrix}$$



$$f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

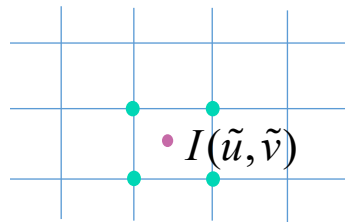
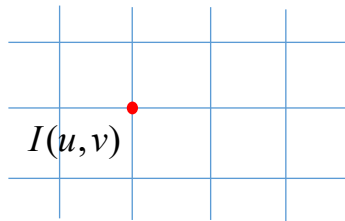


$$\begin{bmatrix} (u - u_0)r^2 & (u - u_0)r^4 \\ (v - v_0)r^2 & (v - v_0)r^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} - u \\ \tilde{v} - v \end{bmatrix}$$

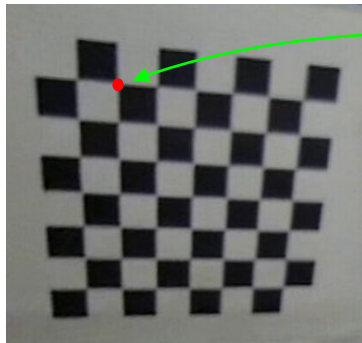
提供理想点  $[u \ v]^T$  与畸变点  $[\tilde{u} \ \tilde{v}]^T$  的对应关系，  
通过最小二乘进行估计。

## 径向畸变矫正

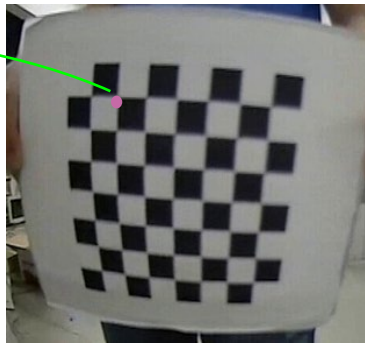
$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



双线性/三线性插值



矫正后的图像



矫正前的图像

## Coding

实现简单的相机C++类，完成相机投影过程的代码

## ✓ 针孔相机模型

- ✓ 针孔相机模型
- ✓ 径向畸变

## ✓ 特征检测与匹配

- ✓ 常用的特征检测子与描述子
- ✓ 特征匹配策略
- ✓ 最新进展

## ✓ 2D-2D:对极几何

- ✓ 对极约束
- ✓ 本质/单应矩阵
- ✓ 直接线性变换法

# 特征检测子 Feature Detector

## Harris 角点检测

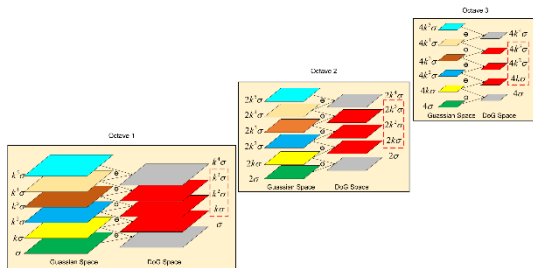
常用于跟踪不具有尺度不变性

$$H = \begin{bmatrix} \sum_{(x,y)} w(x,y) \left( \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) \right)^2 & \sum_{(x,y)} w(x,y) \left( \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \right) \\ \sum_{(x,y)} w(x,y) \left( \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \right) & \sum_{(x,y)} w(x,y) \left( \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \det(H) - k \text{trace}(H)^2 = \lambda_1 \lambda_2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)^2, k=0.04$$

## SIFT特征点检测

具有尺度旋转光照不变性  
计算量大



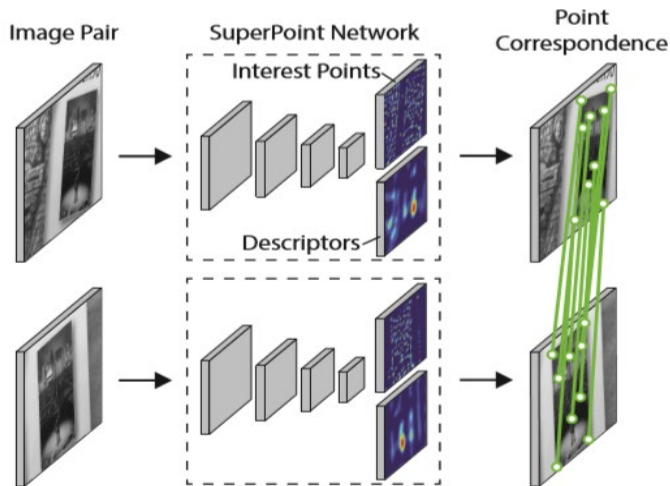
## ORB特征点检测

速度快、具有尺度旋转不变性





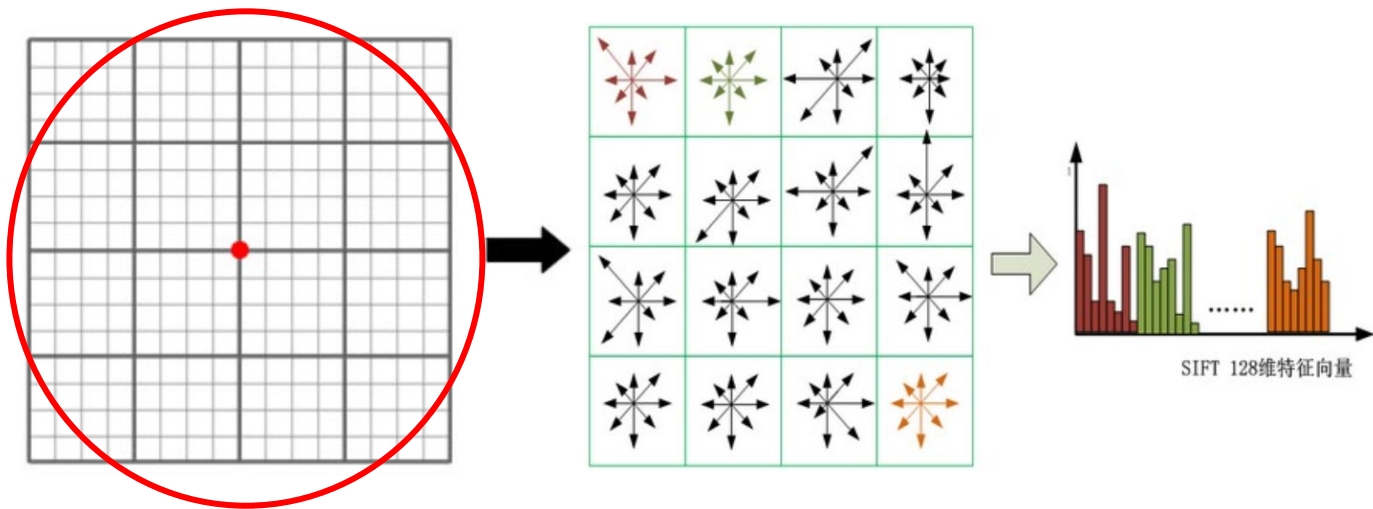
## SuperPoint: Self Supervised Interest Point Detection and Description



深度学习提供极端场景下关键点的提取方法，但需要大量的训练数据才能够得到较好的泛化性

## SIFT描述子-统计局部梯度信息

- 将区域划分成4x4的block
- 每个block内统计梯度方向的直方图(高斯加权梯度作为系数)



高斯加权保证距离特征点近的像素作用更大

梯度直方图计算8个方向

## 描述子形式

- 描述向量由 $N$ 个0或者1组成  $N=128,256,512$
- 生成速度快, 匹配效率高, 不具有旋转不变性

图像进行如高斯滤波预处理



在支持区域内随机采样 $N$ 对大小 $5 \times 5$ 的Patch



比较Patch内像素和的大小, 并保留结果构成特征向量

$$\tau(p; x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } p(x) < p(y) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$p(x)$ ,  $p(y)$  是建立在 $x, y$ 处的Patch

## Steer BRIEF

$N$ 对采样点  $S = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$

根据特征点的主方向计算旋转  $S_\theta = R_\theta S$

在新的采样点上进行BRIEF描述子生成。

**Oriented FAST**



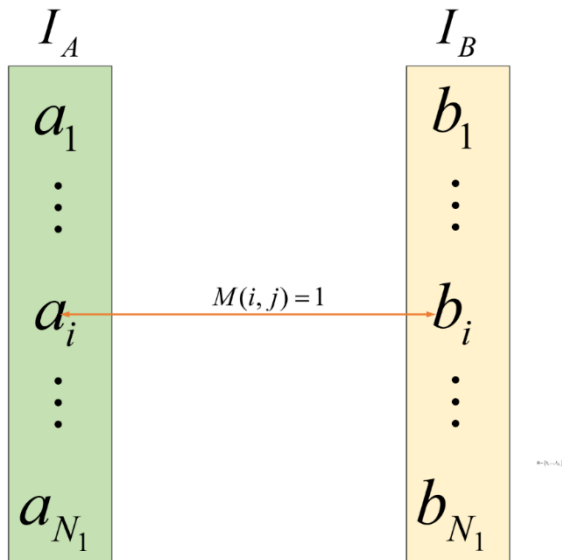
**Rotated BRIEF**



**ORB**

## 问题描述

特征匹配：计算两幅图像中特征描述子的匹配关系



欧氏距离	$D_{euc}(a, b) = \ a - b\ _2 = \left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
马氏距离	$D_{mahal}(a, b) = \left( (a - b)^T \Sigma^{-1} (a - b) \right)^{\frac{1}{2}}$
归一化互相关	$NCC(a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_a s_b} (a_i - u_a)(b_i - u_b)$
汉明距离	$D_{ham}(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i \oplus b_i$

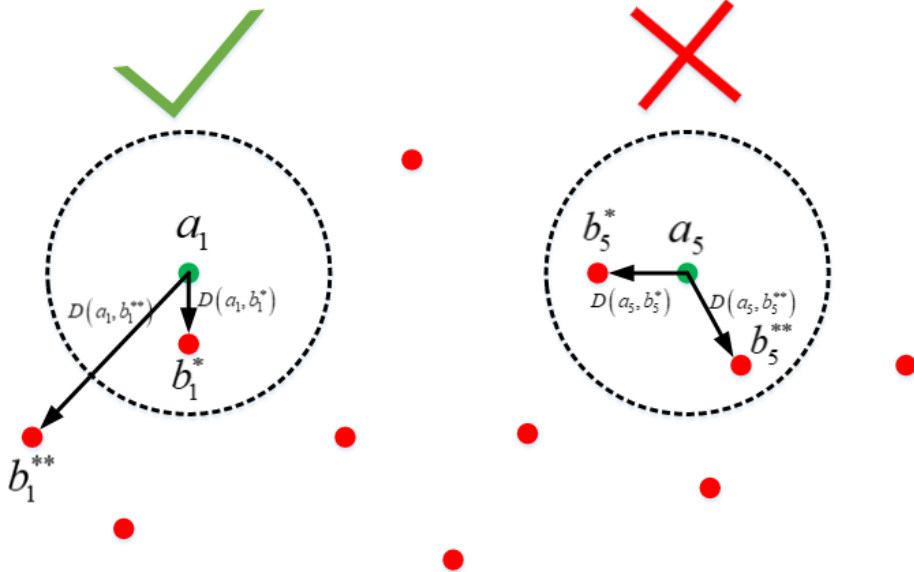
## 最近邻搜索

$$b^* = \arg \min_{b \in B} D(a, b), D(a, b^*) < \beta$$

## 最近邻距离比(low-ratio)

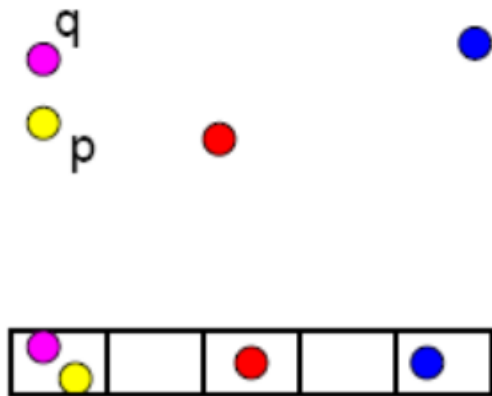
$$\frac{D(a, b^*)}{D(a, b^{**})} < \alpha$$

最近邻距离和次近邻距离的比值小于一个设定的阈值。

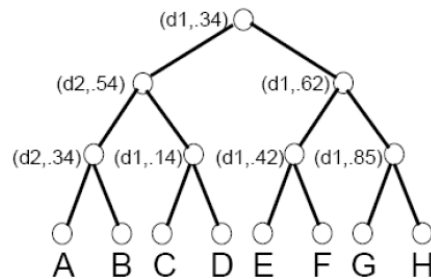
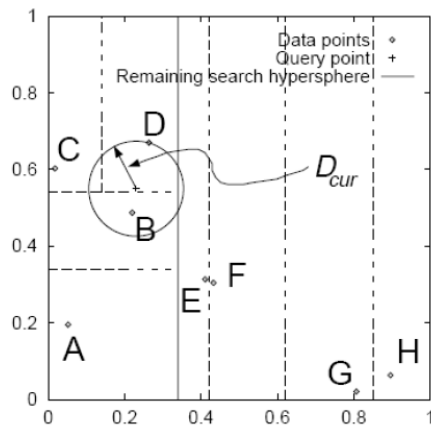


## 快速最近邻搜索

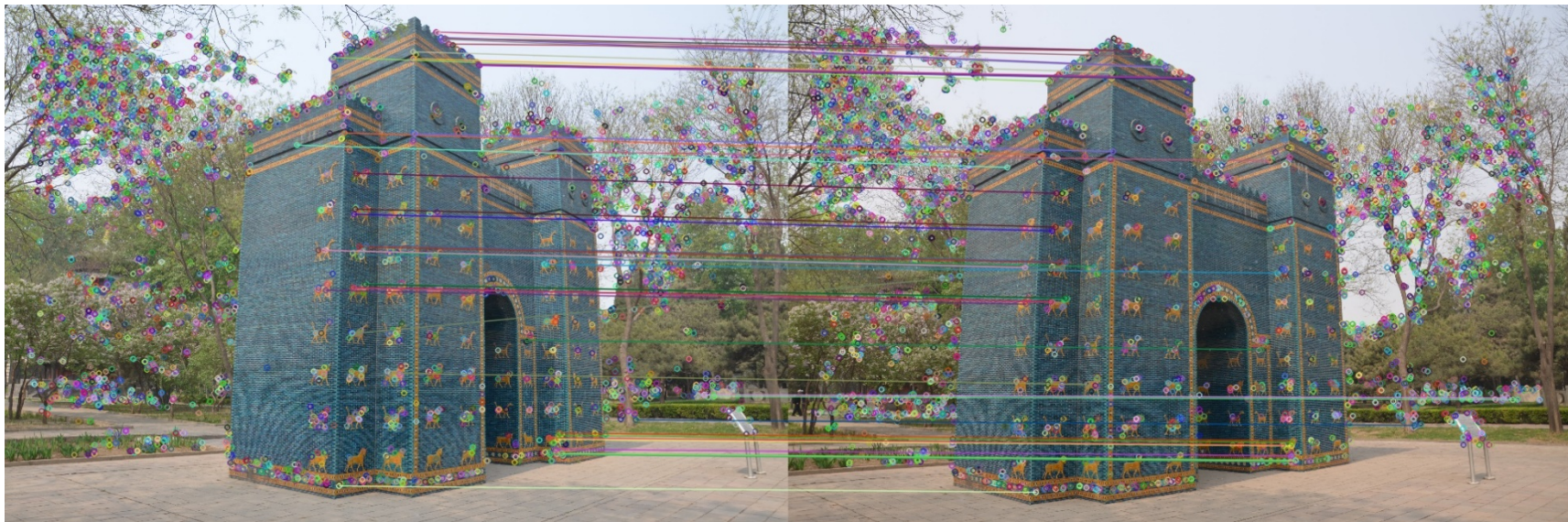
哈希表



多维Kd-tree



## BFM(Bruce Force Mather)匹配ORB的结果



选择最好的50个匹配结果进行显示



## 2D-2D: 对极几何-对极约束

对极约束  $\mathbf{x}_2^T \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0$        $\hat{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_1 = 0$

其中  $\mathbf{E} = \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{F} \mathbf{K}_1$      $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{x}_1$      $\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{x}_2$

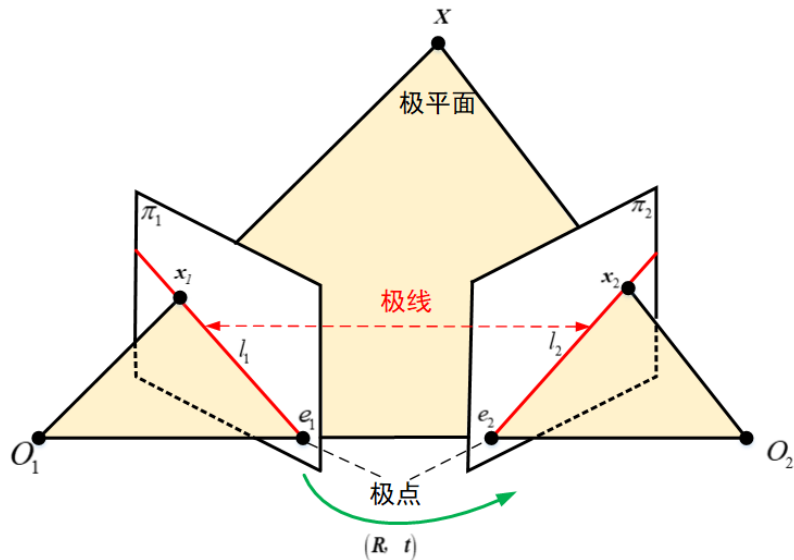
公式推导

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{K}_1 [\mathbf{I}, \mathbf{0}] \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{K}_2 [\mathbf{R}, \mathbf{t}]$$

$$\begin{aligned} d_1 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{K}_1 \mathbf{X} && \Rightarrow && d_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{X} = d_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \\ d_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{K}_2 (\mathbf{R} \mathbf{X} + \mathbf{t}) && \Rightarrow && d_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{x}_2 = \mathbf{R} \mathbf{X} + \mathbf{t} = d_1 \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{t} \\ &&& \Rightarrow && d_2 [\mathbf{t}]_{\times} \hat{\mathbf{x}}_2 = d_1 [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_1 + [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{t} \\ &&& \Rightarrow && d_2 \hat{\mathbf{x}}_2^T [\mathbf{t}]_{\times} \hat{\mathbf{x}}_2 = d_1 \hat{\mathbf{x}}_2^T [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2^T [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_1 = 0 \quad \mathbf{x}_2^T \mathbf{K}_2^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}_1^{-1}$$



本质矩阵:  $\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$

基础矩阵:  $\mathbf{F} = \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}_1^{-1}$

### 基础矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵, 秩为2
- ✓ 具有7个自由度
- ✓ 奇异值为  $[\sigma_1, \sigma_2, 0]^T$
- ✓ 极线约束  $l_1 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}$ ,  $l_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1$   $\mathbf{x}_2^T \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0$

### 基础矩阵求解方法

直接线性变换法

- 8点法
- 最小二乘法

基于RANSAC的鲁棒方法

### 直接线性变换法

对于一对匹配点  $\mathbf{x}_1=[u_1, v_1, 1]^T$ ,  $\mathbf{x}_2=[u_2, v_2, 1]^T$

根据对极约束  $\mathbf{x}_2^T F \mathbf{x}_1 = 0$ ,

$$(u_2 \quad v_2 \quad 1) \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

令  $\mathbf{f}=[F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}]^T$ , 则有,

$$[u_1 u_2, u_2 v_1, u_2, u_1 v_2, v_1 v_2, v_2, u_1, v_1, 1] \mathbf{f} = 0$$

每一对匹配点提供一个约束

### 直接线性变换法

每对匹配点提供一个约束  $[u_1u_2, u_2v_1, u_2, u_1v_2, v_1v_2, v_2, u_1, v_1, 1]f = 0$

当有 $n$ 对匹配点时  $A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}u_2^{(1)}, & u_2^{(1)}v_2^{(1)}, & u_2^{(1)}, & v_2^{(1)}u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}v_2^{(1)}, & v_2^{(1)}, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1 \\ u_1^{(2)}u_2^{(2)}, & u_2^{(2)}v_2^{(2)}, & u_2^{(2)}, & v_2^{(2)}u_1^{(2)}, & v_1^{(2)}v_2^{(2)}, & v_2^{(2)}, & u_1^{(2)}, & v_1^{(2)}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n)}u_2^{(n)}, & u_2^{(n)}v_2^{(n)}, & u_2^{(n)}, & v_2^{(n)}u_1^{(n)}, & v_1^{(n)}v_2^{(n)}, & v_2^{(n)}, & u_1^{(n)}, & v_1^{(n)}, & 1 \end{pmatrix} \quad Af = 0$

- 要保证有唯一解至少需要8对匹配点;
- $n = 8$  时, 若 $A$ 非奇异, 则有唯一解, 称为8点法;  $A^T A$  的最小特征值对应的特征向量即为最优解。
- $n \geq 8$  时, 可用最小二乘法求解。

### 奇异值约束

直接线性变化法无法保证基础矩阵的奇异值约束—有两个非0奇异值

根据奇异值约束对矩阵进行重构:

$$\min \|F - \hat{F}\|, \text{ wrt. } \text{svd}(F) = [\sigma_1, \sigma_2, 0]$$

对得到的基础矩阵 $\hat{F}$ 进行奇异值分解, 即

$$\hat{F} = USV^T \text{ with } S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

利用奇异值约束对基础矩阵进行重构



$$F = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) V^T$$

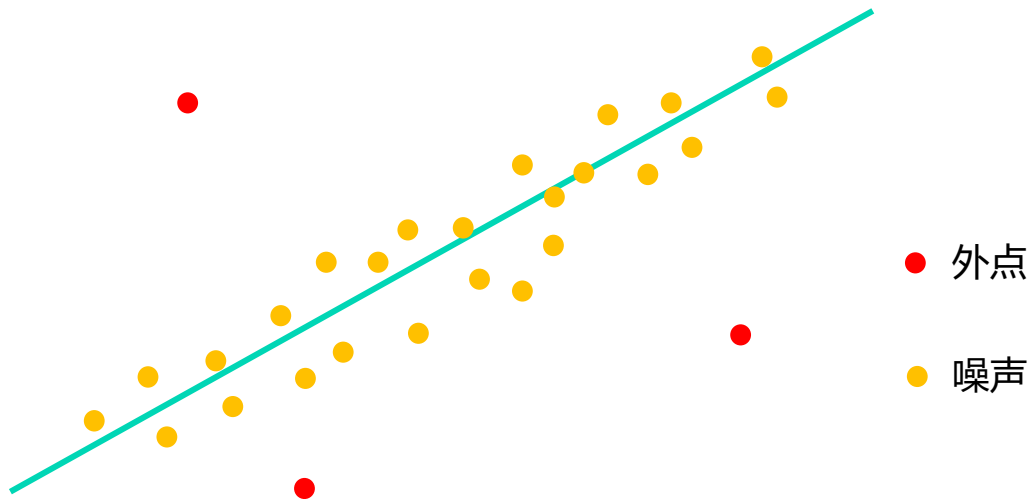
### Coding

实现基础矩阵的求解过程:

- 1) 直接线性变换法;
- 2) 奇异值约束。

### RANSAC-随机一致性采样

解决样本中的外点问题，最多可处理50%的外点情况。



噪声可建模而外点不可建模，  
外点对最小二乘影响巨大。

## RANSAC-随机一致性采样

$N$ : 样本点个数;

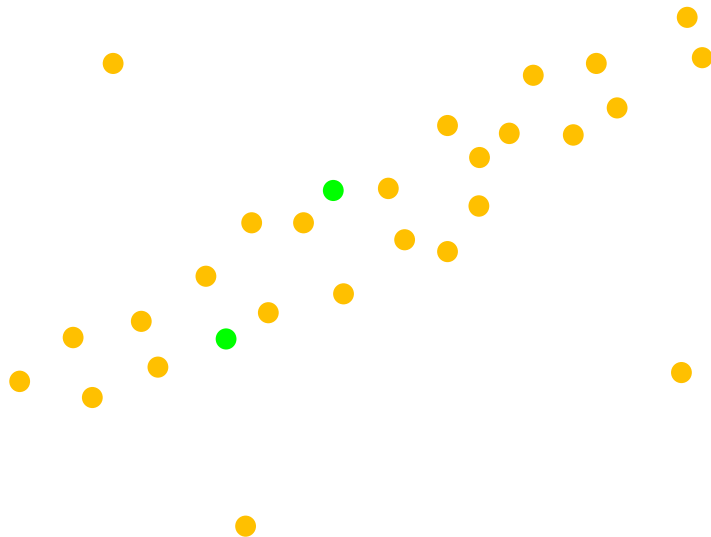
$K$ : 求解模型需要最少的点的个数。

1. 随机采样 $K$ 个点;
2. 对该 $K$ 个点拟合模型;
3. 计算其它点到拟合模型的距离, 小于一定阈值, 当作内点, 统计内点个数;
4. 重复 $M$ 次, 选择内点数最多的模型;
5. 利用所有的内点重新估计模型 (可选)。



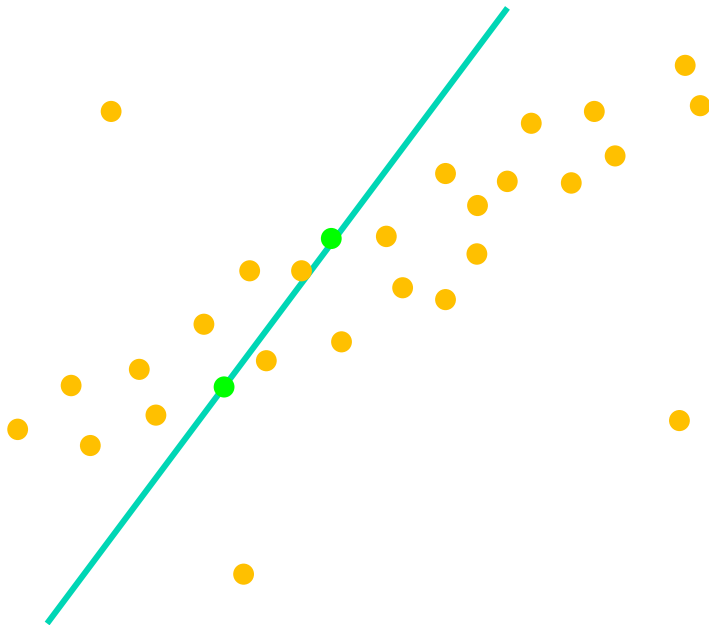
## RANSAC-拟合直线

1. 随机选取 $K = 2$ 个点



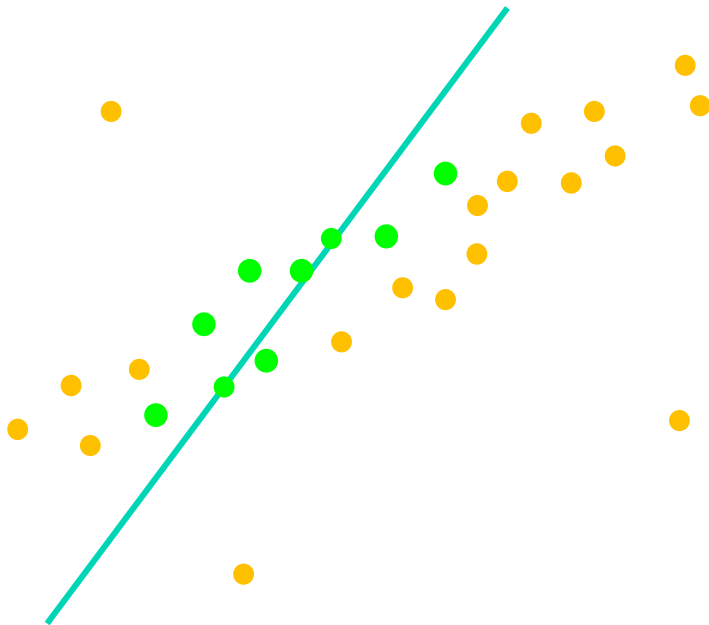
## RANSAC-拟合直线

### 2. 拟合一类直线



### RANSAC-拟合直线

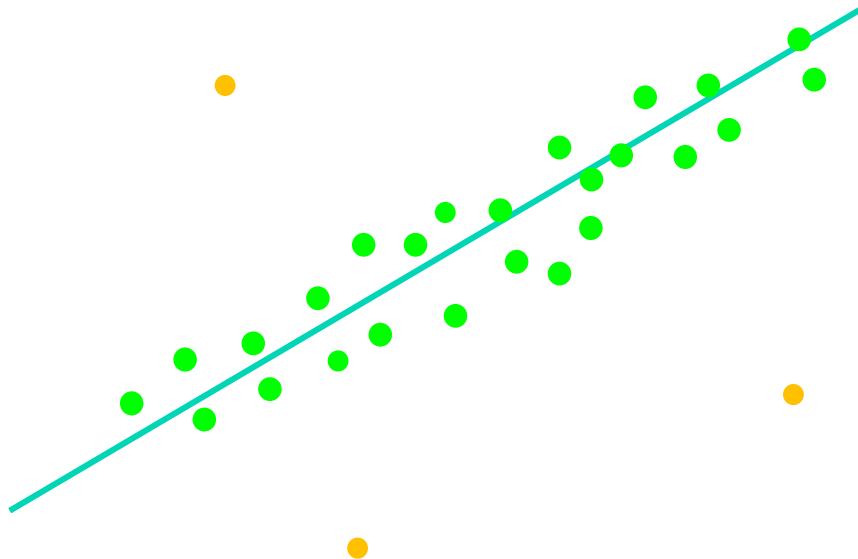
#### 3. 统计内点个数



内点个数为9

### RANSAC-拟合直线

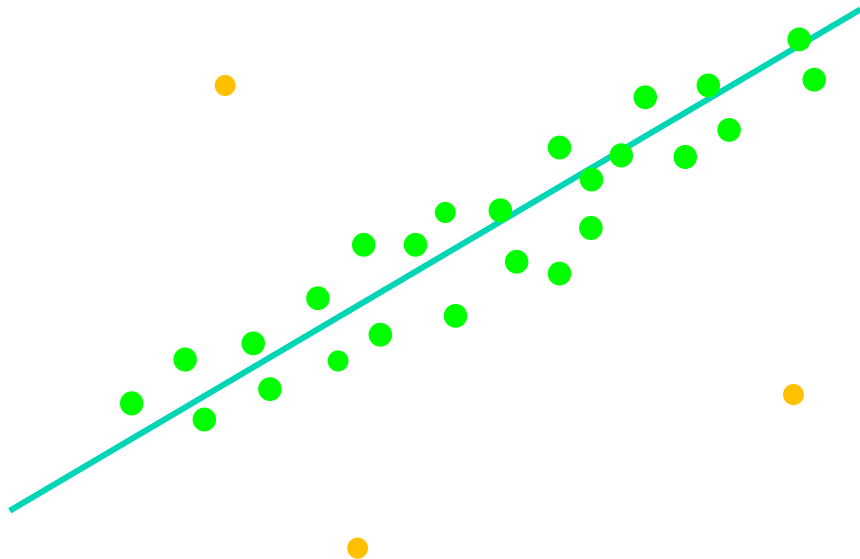
4. 重复上述过程 $M$ 次，找到内点数最大的模型



内点个数为25

### RANSAC-拟合直线

#### 5. 利用所有的内点重新估计直线



### RANSAC-采样次数的计算

$N$ : 样本点个数;

$K$ : 求解模型需要最少的点的个数;

$p$ : 内点的概率

$p^K$ :  $K$ 个点都是内点的概率

$1 - p^K$ :  $K$ 个点至少有一个外点的概率

$(1 - p^K)^M$ :  $M$ 次采样全部失败的概率

$z = 1 - (1 - p^K)^M$ :  $M$ 次采样至少有1次成功的概率

$$M = \frac{\log(1-z)}{\log(1-p^K)}$$

计算 $p = 0.9, K = 8$ 时, 想要采样成功率达到  
 $z \geq 0.99$ , 所需要的采样次数 $M$

### RANSAC-估计基础矩阵

#### 算法流程

1. 随机采样8对匹配点 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ ;
2. 8点法求解基础矩阵 $\hat{F}$ ;
3. 奇异值约束获取基础矩阵 $F$ ;
4. 计算误差, 并统计内点个数;
5. 重复上述过程, 选择内点数最多的结果;
6. 对所有内点执行2,3, 重新计算 $F$ 。

#### 内点判断标准-Sampson Distance

$$d(x_1, x_2) = \frac{(x_2^T F x_1)^2}{(F x_1)_x^2 + (F x_1)_y^2 + (x_2^T F)_x^2 + (x_2^T F)_y^2}$$

$$d(x_1, x_2) < \tau$$

### Coding

RANSAC 估计基础矩阵 $F$



### 本征矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵, 秩为2
- ✓ 具有5个自由度
- ✓ 奇异值为 $[\sigma, \sigma, 0]^T$

求解基础矩阵 $F$



$$\hat{E} = K_2^T F K_1$$

$$\hat{E} = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) V^T$$



$$E = U \text{diag}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right) V^T$$

## 相机姿态的恢复

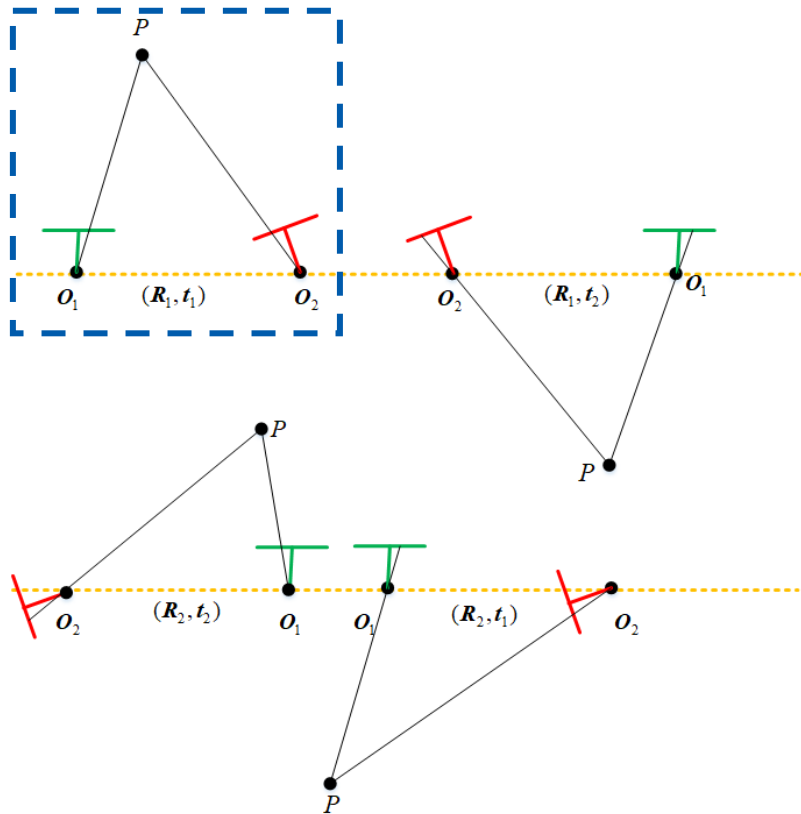
$$E = U \Sigma V^T, \Sigma = \text{diag}(\sigma, \sigma, 0)$$

$$t_1 = U(:, 2) \quad R_1 = UR_z\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$t_2 = -U(:, 2) \quad R_2 = UR_z^T\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_z^T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

共有4种情况  $(R_1, t_1), (R_1, t_2), (R_2, t_1), (R_2, t_2)$



### 相机姿态的恢复-选择正确的相机姿态

相机的世界坐标 $O_1, O_2$

$$O_1 = -R^T t = \mathbf{0}, \quad O_2 = -R^T t$$

利用相机姿态 $R, t$ 和匹配点 $p_1, p_2$ 进行三角量测得到三维点 $P$

相机的世界坐标中的朝向 $d_1, d_2$

$$d_1 = [0, 0, 1]^T$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & -R^T t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = r_3^T$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad R^T = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T \end{bmatrix}$$

$P$ 需满足同时位于两个相机的前方:

方法1:

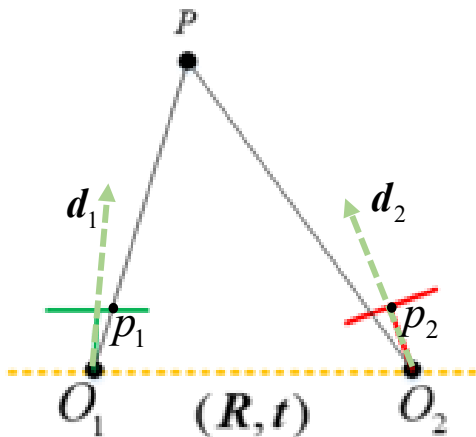
$$(P - O_1)^T d_1 > 0$$

$$(P - O_2)^T d_1 > 0$$

方法2:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = RP + t, \quad z_c > 0$$

对两个相机成立



## Coding

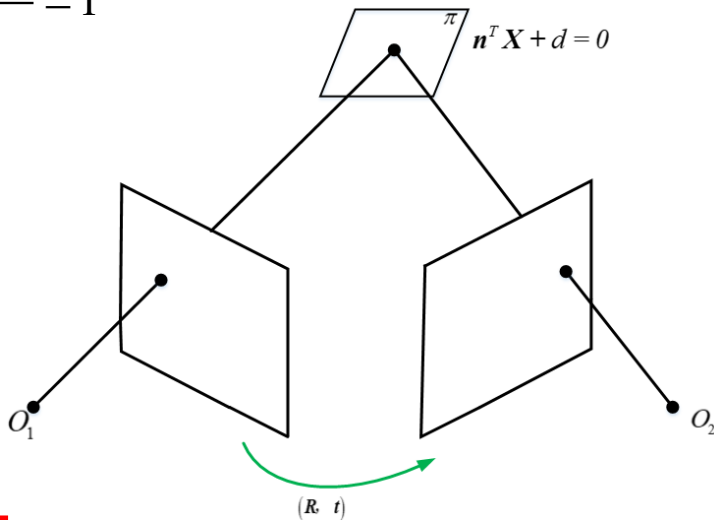
实现本征矩阵中恢复相机参数

空间中特征点位于一平面上

$$\mathbf{n}^T \mathbf{X} + d = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{X}}{d} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{K}_2 (\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}) \\ &= \mathbf{K}_2 \left( \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} \cdot \left( -\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{X}}{d} \right) \right) \\ &= \mathbf{K}_2 \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^T}{d} \right) \mathbf{X} \\ &= \mathbf{K}_2 \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^T}{d} \right) \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{H}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K}_2 \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^T}{d} \right) \mathbf{K}_1^{-1}$$



单应矩阵是满秩的

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{x}_2$$

$t = 0$ 时, 对应纯旋转

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}_2 \mathbf{R} \mathbf{K}_1^{-1}$$

即单应矩阵有两种情况:

1. 空间点位于平面
2. 相机纯旋转

### 直接线性变换法

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$u_2 = \frac{H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$
$$v_2 = \frac{H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$



8个自由度，每对点有两个约束

$$H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13} - H_{31}u_1u_2 - H_{32}u_2v_1 - H_{33}u_2 = 0$$

$$H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23} - H_{31}u_1v_2 - H_{32}v_1v_2 - H_{33}v_2 = 0$$

令  $H_{33} = 1$  总共需要4对特征点

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^{(1)}u_2^{(1)} & -u_2^{(1)}v_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(1)} & v_1^{(1)} & 1 & -u_1^{(1)}v_2^{(1)} & -v_1^{(1)}v_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(4)} & v_1^{(4)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^{(4)}u_2^{(4)} & -u_2^{(4)}v_1^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(4)} & v_1^{(4)} & 1 & -u_1^{(4)}v_2^{(4)} & -v_1^{(4)}v_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_2^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ u_2^{(4)} \\ v_2^{(4)} \end{pmatrix}$$

### RANSAC-估计单应矩阵

#### 算法流程

1. 随机采样4对匹配点 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ ;
2. 4点法求解单应矩阵 $H$ ;
3. 计算误差, 并统计内点个数;
4. 重复上述过程, 选择内点数最多的结果;
5. 对所有内点执行3,4, 重新计算 $H$ 。

#### 内点判断标准-Sampson Distance

$$E(x_1, x_2, H) < \tau$$

$$E(x_1, x_2, H) = d(x_1, H^{-1}x_2)^2 + d(x_2, Hx_1)^2$$



深蓝学院  
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！  
Thanks for Listening