

# 深度和法向量的非线性优化

## 1 几何模型

假设参考视角为 $R$ ,  $k \in \mathbf{N}$ 为与参考视角相关的局部邻域视角,  $\mathbf{P}_k$ 为该视角的投影矩阵。

参考视角像素点 $(s, t)$ 的初始深度值为 $h(s, t)$ , 对应的三维空间中的射线的单位向量为 $\vec{\mathbf{r}}_R(s, t)$ , 则该像素对应的三维空间中的点为

$$\mathbf{X}_R(s, t) = \mathbf{O}_R + h(s, t)\vec{\mathbf{r}}_R(s, t),$$

为了对像素点 $(s, t)$ 处的深度和三维中的法向量进行优化, 我们以该像素为中心创建一个 $n \times n$ 大小的图像 patch, patch 对应三维空间中一个很小的平面。同时我们引入两个变量 $h_s(s, t)$ 和 $h_t(s, t)$ , 以便于表示 patch 中每个像素点的三维坐标, 则像素 $(s + i, t + j)$ 对应的深度为 $h(s + i, t + j) = h(s, t) + i * h_s(s, t) + j * h_t(s, t)$ 。

假设 $(s + i, t + j)$ 处的射线方向近似为 $\vec{\mathbf{r}}_R(s, t)$ , 则像素 $(s + i, t + j)$ 对应的三维坐标为

$$\mathbf{X}_R(s + i, t + j) = \mathbf{O}_R + \vec{\mathbf{r}}_R(s, t)(h(s, t) + i * h_s(s, t) + j * h_t(s, t)),$$

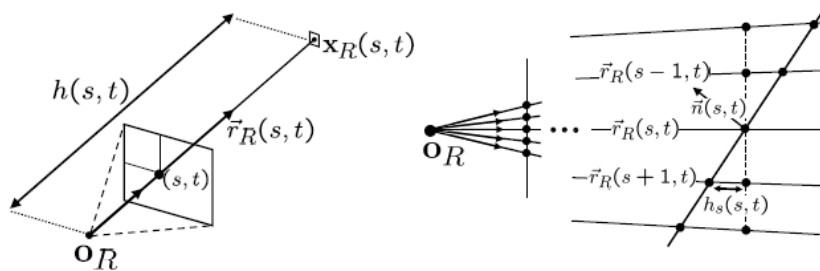


图 1 数学模型

## 2 光度模型 (Photometric model)

对朗伯反射进行简单的假设, 以提升颜色匹配的准确度。具体地, 为邻域中每个视角 $k$ 分配一个颜色尺度 $\mathbf{c}_k = [c_k^r, c_k^g, c_k^b]^T \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ , 如果 $h(s, t)$ 估计准确, 那么应该有

$$\mathbf{I}_R(s + i, t + j) = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(\mathbf{P}_k(\mathbf{X}_R(s + i, t + j))),$$

对所有的邻域视角和所有的 patch 中的三维点成立, 其中 $\mathbf{I}_R(\cdot)$ 表示取

参考视角对应像素处的颜色(3 通道, 所以为向量形式),  $\mathbf{I}_k(\cdot)$  表示取第  $k$  个视角中图像上对应像素处的颜色, 运算符号  $\cdot$  表示向量对应元素相乘。

结合几何模型和光度模型, 我们给出深度值和法向量优化的数学模型为

$$E = \sum_{k \in N} \sum_{i=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} (\mathbf{I}_R(s+i, t+j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(\mathbf{P}_k(\mathbf{X}_R(s+i, t+j))))^2,$$

为了书写方便, 我们对公式中的符号进行简化, 将  $\mathbf{I}_R(s+i, t+j)$  简化成  $\mathbf{I}_R(i, j)$ ; 将  $\mathbf{I}_k(\mathbf{P}_k(\mathbf{X}(s+i, t+j)))$  简化成  $\mathbf{I}_k(i, j)$ ; 将  $h_s(s, t)$  和  $h_t(s, t)$  分别简化成  $h_s$  和  $h_t$ , 于是上述能量函数可以简化为:

$$E = \sum_{ijk} (\mathbf{I}_R(i, j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i, j))^2$$

## 2.1 优化颜色尺度

可以通过最小二乘的方法对  $\mathbf{c}_k$  直接进行求解。  $E$  关于  $\mathbf{c}_k$  的导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_k^r} &= - \sum_{ij} \mathbf{I}_k^r(i, j) \mathbf{I}_R^r(i, j) + c_k^r \sum_{ij} (\mathbf{I}_k^r(i, j))^2 \\ \frac{\partial E}{\partial c_k^g} &= - \sum_{ij} \mathbf{I}_k^g(i, j) \mathbf{I}_R^g(i, j) + c_k^g \sum_{ij} (\mathbf{I}_k^g(i, j))^2 \\ \frac{\partial E}{\partial c_k^b} &= - \sum_{ij} \mathbf{I}_k^b(i, j) \mathbf{I}_R^b(i, j) + c_k^b \sum_{ij} (\mathbf{I}_k^b(i, j))^2 \end{aligned}$$

分别令上述三个偏导数为零, 可以得到以下表达式

$$\begin{aligned} c_k^r &= \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^r(i, j) \mathbf{I}_R^r(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^r(i, j))^2} \\ c_k^g &= \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^g(i, j) \mathbf{I}_R^g(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^g(i, j))^2} \\ c_k^b &= \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^b(i, j) \mathbf{I}_R^b(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^b(i, j))^2} \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{c}_k = \left[ \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^r(i, j) \mathbf{I}_R^r(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^r(i, j))^2}, \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^g(i, j) \mathbf{I}_R^g(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^g(i, j))^2}, \frac{\sum_{ij} \mathbf{I}_k^b(i, j) \mathbf{I}_R^b(i, j)}{\sum_{ij} (\mathbf{I}_k^b(i, j))^2} \right]^T$$

其中  $\mathbf{I}_R^r(i, j), \mathbf{I}_R^g(i, j), \mathbf{I}_R^b(i, j)$  分别表示是 3 个颜色通道。

## 2.2 优化 $\mathbf{h}(s, t)$ , $\mathbf{h}_s$ 和 $\mathbf{h}_t$

通过梯度下降的方法可以快速进行求解。首先引入 $\mathbf{I}_R(i, j)$ 关于 $h(s, t)$ ,  $h_s$ 和 $h_t$ 的线性表达为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_R(i, j) &\approx \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k \left( \mathbf{P}_k(\mathbf{O}_R + \vec{\mathbf{r}}_R(s, t)(h(s, t) + i * h_s + j * h_t)) \right) + \mathbf{c}_k \\ &\quad \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i, j)}{\partial h(s, t)} (dh(s, t) + i * dh_s + j * dh_t) \\ &= \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i, j) + \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i, j)}{\partial h(s, t)} (dh(s, t) + i * dh_s + j * dh_t)\end{aligned}$$

由此，我们可以重新得到关于能量函数 $E$ 的表达如下

$$E = \sum_{ijk} (\mathbf{I}_R(i, j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i, j) + \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i, j)}{\partial h(s, t)} (dh(s, t) + i * dh_s + j * dh_t))^2,$$

$$\text{令 } \mathbf{b}_{ijk} = \mathbf{I}_R(i, j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i, j), \nabla \mathbf{x} = [dh(s, t), dh_s, dh_t]^T, \mathbf{A}_{ijk} = \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i, j)}{\partial h(s, t)} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix}^T,$$

则上式可以表达为

$$E = \sum_{ijk} (\mathbf{A}_{ijk} \nabla \mathbf{x} + \mathbf{b}_{ijk})^2$$

求 $E$ 关于 $\nabla \mathbf{x}$ 的梯度，可以得到

$$\frac{\partial E}{\partial \nabla \mathbf{x}} = \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T (\mathbf{A}_{ijk} \nabla \mathbf{x} + \mathbf{b}_{ijk})$$

令 $\frac{\partial E}{\partial \nabla \mathbf{x}} = 0$ 可以得到

$$\left( \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{A}_{ijk} \right) \nabla \mathbf{x} + \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{b}_{ijk} = \mathbf{0}$$

令 $\mathbf{A} = \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{A}_{ijk}$ ,  $\mathbf{b} = \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{b}_{ijk}$ , 则有

$$\nabla \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

梯度下降优化过程为：

- 给定初始值 $\mathbf{x} = [h(s, t), h_s, h_t]^T$ ;
- 求解梯度 $\nabla \mathbf{x}$ ;
- 更新 $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \nabla \mathbf{x}$ ;
- 重复 b) 和 c) 操作，直到收敛。

补充：

$$\mathbf{A}_{ijk} = \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{A}_{ijk} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix} \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right)^T \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix}^T = \left\| \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right\|^2 \begin{bmatrix} 1, & i, & j \\ i, & i^2, & ij \\ j, & ij, & j^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{b}_{ijk} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix} \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right)^T (\mathbf{I}_R(i,j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i,j)) = s_{ijk} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix},$$

其中  $s_{ijk} = \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right)^T (\mathbf{I}_R(i,j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i,j))$  是标量。

因此可以得到

$$\mathbf{A} = \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{A}_{ijk} = \sum_{ijk} \left\| \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right\|^2 \begin{bmatrix} 1, & i, & j \\ i, & i^2, & ij \\ j, & ij, & j^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}^T \mathbf{b}_{ijk} = \sum_{ijk} \left( \mathbf{c}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)} \right)^T (\mathbf{I}_R(i,j) - \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{I}_k(i,j)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \end{bmatrix}$$