深蓝学院
shenlanxueyuan.com

第二次作业讲解

主讲人 王一鸣

1. 熟悉 Eigen 矩阵运算

1. 在什么条件下,x 有解且唯一?
答：当且仅当 A 满秩

方程组类型	表达式	有解且唯一的条件	无穷解条件
齐次线性方程组	Ax=0	R(A)=n时，有唯一解，零解	R(A)<n时，方程组有无穷非零解
非齐次线性方程组	Ax=b	**R(A)=R(B)=n**	R(A)=R(B)<n

2. 高斯消元法的原理是什么?
答：通过初等变换将A变成阶梯形求解。

3. QR 分解的原理是什么?
答：将A分解成正交矩阵和上三角矩阵的乘积A=QR，易解Ra=Q^Tb

1. 熟悉 Eigen 矩阵运算

4. Cholesky 分解的原理是什么?

答：将 A 分解成 A = LL^T ,其中 L 是下三角矩阵。然后,先求解 Lc = b， c 为中间结果；再求解L^T a = c,得到最终结果。此过程要求 A 实对称且正定。

5. 编程实现 A 为 100 × 100 随机矩阵时,用 QR 和 Cholesky 分解求 x 的程序。你可以参考本次课用到的 useEigen 例程。

2. 几何运算练习

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

下面我们来练习如何使用 Eigen/Geometry 计算一个具体的例子。

设有小萝卜[1]一号和小萝卜二号位于世界坐标系中。小萝卜一号的位姿为：$\boldsymbol{q}_1 = [0.55, 0.3, 0.2, 0.2], \boldsymbol{t}_1 = [0.7, 1.1, 0.2]^T$（$\boldsymbol{q}$ 的第一项为实部）。这里的 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 表达的是 $\boldsymbol{T}_{cw}$，也就是世界到相机的变换关系。小萝卜二号的位姿为 $\boldsymbol{q}_2 = [-0.1, 0.3, -0.7, 0.2], \boldsymbol{t}_2 = [-0.1, 0.4, 0.8]^T$。现在，小萝卜一号看到某个点在自身的坐标系下，坐标为 $\boldsymbol{p}_1 = [0.5, -0.1, 0.2]^T$，求该向量在小萝卜二号坐标系下的坐标。请编程实现此事，并提交你的程序。

提示：

1. 四元数在使用前需要归一化。
2. 请注意 Eigen 在使用四元数时的虚部和实部顺序。
3. 参考答案为 $\boldsymbol{p}_2 = [1.08228, 0.663509, 0.686957]^T$。你可以用它验证程序是否正确。

3. 旋转的表达

1. 设有旋转矩阵R，证明R^TR=I且det R=+1

答：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3' \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_3' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_3' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3' \end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

det R = 1 主要根据定义得到。由于 R 是正交阵,它的列向量是三个互为正交的向量,故 det R为 +1 或 −1。-1 的称为反射旋转,+1 的则是通常意义上的旋转。

2. 设有四元数q，请说明虚部和实部的维度。

答：虚部3维，实部1维

3. 旋转的表达

3. 定义运算 $^+$ 和 $^\oplus$ 为：

$$\boldsymbol{q}^+ = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{T} & \eta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}^\oplus = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{T} & \eta \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中运算 $^\times$ 含义与 $^\wedge$ 相同，即取 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的反对称矩阵（它们都成叉积的矩阵运算形式），$\mathbf{1}$ 为单位矩阵。请证明对任意单位四元数 $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$，四元数乘法可写成矩阵乘法：

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2 \tag{2}$$

或者

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_2^\oplus\boldsymbol{q}_1. \tag{3}$$

4. 罗德里格斯公式的证明

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

罗德里格斯公式描述了从旋转向量到旋转矩阵的转换关系。设旋转向量长度为 θ，方向为 $\boldsymbol{n}$，那么旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为：

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + \sin\theta \boldsymbol{n}^\wedge. \tag{4}$$

1. 我们在课程中仅指出了该式成立，但没有给出证明。请你证明此式。提示：参考https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula。
2. 请使用此式请明 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$。

5. 四元数运算性质的验证

使用第三题结果：

设用 $\boldsymbol{q}$ 对 $\boldsymbol{p}$ 进行旋转，那么旋转之后的点变为：

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{+}\left(\boldsymbol{q}^{-1}\right)^{\oplus}\boldsymbol{p}$$

因此

$$\boldsymbol{q}^{+}\left(\boldsymbol{q}^{-1}\right)^{\oplus} = \begin{bmatrix} \eta\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & -\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{2}\mathbf{1}+2\eta\boldsymbol{\varepsilon}^{\times}+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\times}\right)^{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

根据矩阵维度，取左上角块即可。此式亦说明旋转之后必得纯虚四元数。

6. 熟悉 C++11

使用第三题结果：

设用 $\boldsymbol{q}$ 对 $\boldsymbol{p}$ 进行旋转，那么旋转之后的点变为：

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{+}\left(\boldsymbol{q}^{-1}\right)^{\oplus}\boldsymbol{p}$$

因此

$$\boldsymbol{q}^{+}\left(\boldsymbol{q}^{-1}\right)^{\oplus} = \begin{bmatrix} \eta\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\times} & -\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{2}\boldsymbol{1} + 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}^{\times} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\times}\right)^{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

根据矩阵维度，取左上角块即可。此式亦说明旋转之后必得纯虚四元数。

6. 熟悉 C++11

1. lamda 表达式

```
std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;});
```

上边代码使用了 C++11 中的,有函数体,没有函数名,其定义方式如下;

[外部变量访问方式说明符] (参数表) -> 返回值类型

{

语句块

}

2.自动类型推导

auto& a: avec

从初始化表达式中推断出变量的数据类型, 使用 atuo 时,编译器在编译时会根据上下文情况,确定

auto 变量的真正类型,不会影响程序运行效率,且 auto 不能用来声明函数的返回值.

6. 熟悉 C++11

3. 序列 for 循环

for (auto& a: avec)

序列 for 循环语句允许重复遍历一组序列,而这组序列可以是任何可以重复遍历的序列,如由 begin() 和 end()函数定义的 STL 序列。所有的标准容器都可用作这种序列,同时它也同样可以是 std::string, 初始化列表(list),数组,以及任何由 begin()和 end()函数定义的序列.

5. 初始化列表

vector<A> avec{a1, a2, a3};

C++11 把初始化列表的概念绑定到了类型上,称之为 initializer_list,允许构造函数或其他函数像参数一样使用初始化列表,为类对象的初始化与普通数组和 POD 的初始化方法提供了统一的桥梁

6. 熟悉 C++11

5.非静态成员在类定义时初始化

int index = 0;

类型	是否可以在类定义时初始化	
	C++03	C++11
static const	是	是
const 非 static	否	是
static 非 const	否	否
非 static 非 const	否	是

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening