视觉 SLAM 理论与实践 - 作业 3

peng00bo00

June 5, 2020

1. 仅需验证集合在加法运算下是否满足封闭性、结合律、幺元与逆即可。对于整数集 $\mathbb{Z}$:

   1) 满足封闭性：$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z},\ a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$

   2) 满足结合律：$\forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z},\ (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$

   3) 存在幺元：$0 \in \mathbb{Z},\ \text{s.t.} \forall a \in \mathbb{Z},\ 0 + a = a + 0 = a$

   4) 存在逆：$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z},\ -a + a = 0$

   因此整数集和加法构成群。类似地可以验证自然数集和加法满足封闭性、结合律以及幺元，但不存在逆，因此自然数集和加法不构成群。

2. 1) 封闭性：$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3,\ X \times Y \in \mathbb{R}^3$

2) 双线性：$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3, \forall a, b \in \mathbb{R},\ (aX + bY) \times Z = aX \times Z + bY \times Z,\ Z \times (aX + bY) = aZ \times X + bZ \times Y$

3) 自反性：$\forall X \in \mathbb{R}^3, X \times X = \mathbf{0}$

4) 雅可比等价：$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$

根据拉格朗日公式有:

$$X \times (Y \times Z) = Y(X \cdot Z) - Z(X \cdot Y) \tag{1}$$

$$Z \times (X \times Y) = X(Z \cdot Y) - Y(Z \cdot X) \tag{2}$$

$$Y \times (Z \times X) = Z(Y \cdot X) - X(Y \cdot Z) \tag{3}$$

因此,

$$\begin{aligned} & X \times (Y \times Z) + Z \times (X \times Y) + Y \times (Z \times X) \\ =& X[(Z \cdot Y) - (Y \cdot Z)] + Y[(X \cdot Z) - (Z \cdot X)] + Z[(Y \cdot X) - (X \cdot Y)] \\ =& \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

因此 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成李代数。

3. 令 $\phi = \theta a$，其中 $\theta = |\phi|$ 而 a 为单位向量。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = I + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 (a^\wedge)^2 + \dots \tag{5}$$

其中奇次项为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^3 (a^\wedge)^3 + \frac{1}{6!}\theta^5 (a^\wedge)^5 + \dots \\
=&\frac{1}{2!}\theta a^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^3 a^\wedge + \frac{1}{6!}\theta^5 a^\wedge + \dots \\
=&\frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge
\end{aligned} \tag{6}$$

偶次项为

$$\begin{aligned}
&I + \frac{1}{3!}\theta^2 (a^\wedge)^2 + \frac{1}{5!}\theta^4 (a^\wedge)^4 + \dots \\
=&I + \frac{1}{3!}\theta^2 (a^\wedge)^2 - \frac{1}{5!}\theta^4 (a^\wedge)^2 + \dots \\
=&I + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta} (a^\wedge)^2 \\
=&I + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta} (aa^T - I)
\end{aligned} \tag{7}$$

整理之后得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= I + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 (a^\wedge)^2 + \dots \\
&= I + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta}(aa^T - I) \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta} I + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta} aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge
\end{aligned} \tag{8}$$

4. 首先证明 $Ra^\wedge R^T = (Ra)^\wedge$. $\forall v \in \mathbb{R}^3$ 有

$$\begin{aligned}
(Ra)^\wedge v &= (Ra) \times v \\
&= (Ra) \times (RR^{-1}v) \\
&= R(a \times R^{-1}v) \\
&= Ra^\wedge R^T v
\end{aligned} \tag{9}$$

因此 $Ra^\wedge R^T = (Ra)^\wedge$. 对等式两边同时进行指数映射有 $\exp\{(Ra)^\wedge\} = \exp\{Ra^\wedge R^T\}$，其中

$$\begin{aligned}
\exp\{Ra^\wedge R^T\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(Ra^\wedge R^T)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R(a^\wedge)^n R^T \\
&= R[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a^\wedge)^n]R^T \\
&= R\exp\{a^\wedge\}R^T
\end{aligned} \tag{10}$$

5. 1) T_{WC} 表示机器人坐标系到世界坐标系的转换关系，记为

$$T_{WC} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

在机器人坐标系下任意点坐标可以通过 T_{WC} 转换为世界坐标系下的坐标

$$p_W = T_{WC} \cdot p_C \tag{12}$$

特别的，机器人坐标系下原点在世界坐标系下的坐标为

$$\begin{aligned} p_W &= T_{WC} \cdot p_C \\ &= \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

因此 T_{WC} 的平移部分表达了机器人当前位置在世界坐标系下的坐标，画出平移部分就得到了机器人的轨迹。

2) 代码可参见./code/draw_trajectory.cpp
绘制得到轨迹如 Fig.1所示：

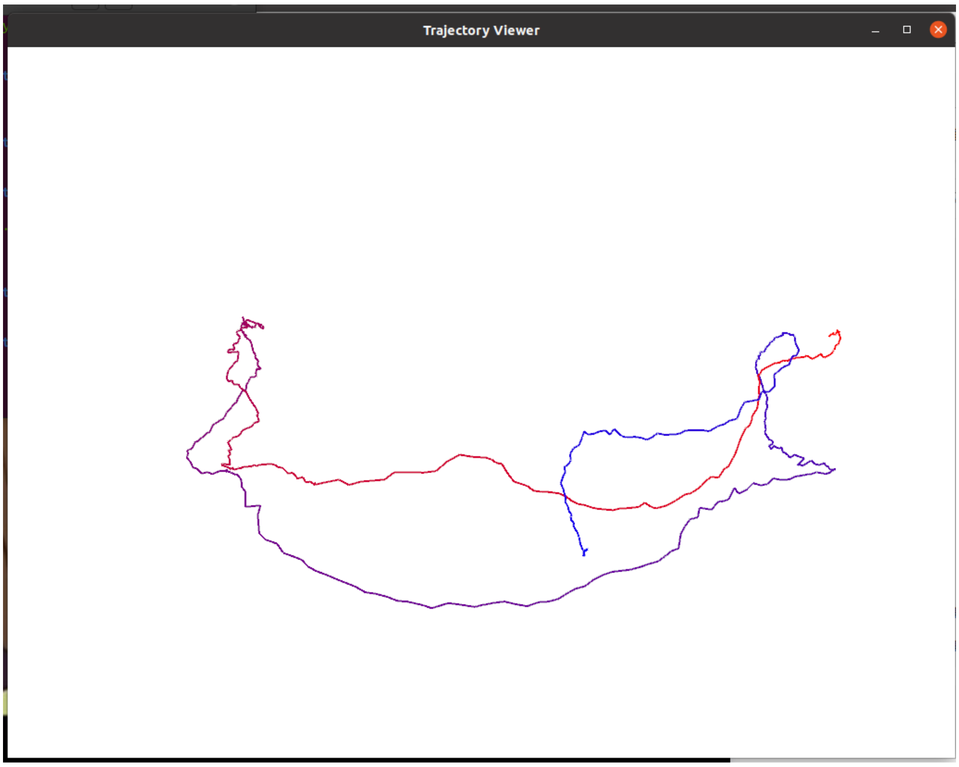

Figure 1: 轨迹

6. 代码可参见./code/cmp_trajectory.cpp
绘制得到轨迹如 Fig.2所示：

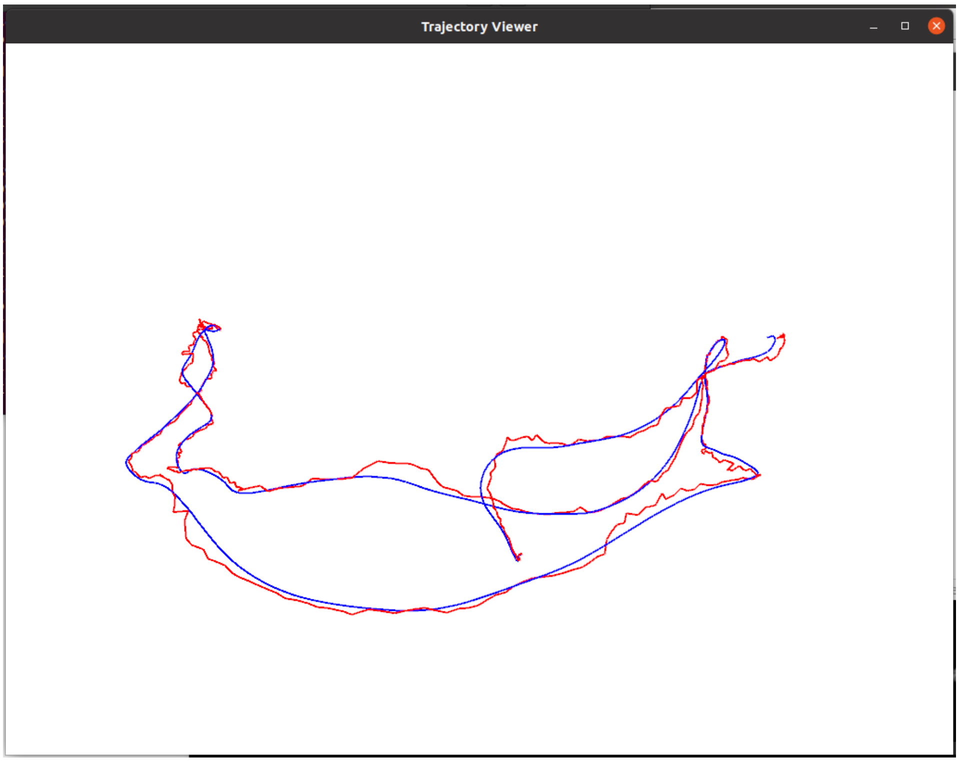

Figure 2: 轨迹对比