第四次作业讲解

主讲人 王一鸣

1. 图像去畸变

畸变模型

- 径向畸变（镜头形状造成）
- 切向畸变（透镜和成像非严格平行）

A B

$$x_{distirted} = \underbrace{x + (k_1 r^2 + k_2 r^4)x}_{A} + \underbrace{2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)}_{B} \quad (1)$$

$$y_{distorted} = \underbrace{y + (k_1 r^2 + k_2 r^4)y}_{A} + \underbrace{p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy}_{B} \quad (2)$$

其中，$r = sqrt(x^2 + y^2)$

1. 图像去畸变

图像去畸变的具体步骤如下：

- 计算归一化坐标
- 计算r
- 进行径向畸变和切向畸变纠正
- 将纠正后的点通过内参数矩阵投影到像素平面

2. 双目视差的使用

由双目视差恢复深度的步骤如下：

- 计算归一化坐标
- 计算当前点深度，z=fb/d
- 计算X，Y，

$$X = X_{P_c} * Z, Y = Y_{P_c} * Z,$$

3. 矩阵运算微分

注意，此题中，x应该是N*1的维度

1. 求d(Ax)/dx

答：令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. 矩阵运算微分

(4)

则$d(AX)/dX$为向量对向量，可得

$$d(Ax)/dx = \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_1 & \cdots & \partial y_n/\partial x_1 \\ \partial y_1/\partial x_2 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_n/\partial x_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial y_1/\partial x_n & \partial y_2/\partial x_n & \cdots & \partial y_n/\partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^T \tag{5}$$

3. 矩阵运算微分

2. **求d(x^T Ax)/dx**

答：

$$Y = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + an2x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

(7)

3. 矩阵运算微分

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + an1x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + annx_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

3. 矩阵运算微分

3. 证明:x^T Ax = tr(Axx^T).

证明:

$$Axx^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

则 $tr(Axx^T) == x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + an2x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = x^T Ax$

4. 高斯牛顿法的曲线拟合实验

高斯牛顿法步骤如下：

- 给定初始值x0
- 对于第k次迭代，求出当前的雅克比矩阵和误差
- 计算hessian矩阵和g
- 求解增量方程
- 迭代停止条件

5. 批量最大似然估计

1. 请给出此处 H 的具体形式

$$
H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(9)

(10)

5. 批量最大似然估计

2. 给出此问题下 W 的具体取值

答：构建误差变量：

$$\mathbf{e}_{v,k} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{y,k} = \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k \qquad (11)$$

最小二乘的目标函数为

$$min \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_{v,k}^T Q^{-1} \mathbf{e}_{v,k} + \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_{y,k}^T R_k^{-1} \mathbf{e}_{y,k} \qquad (12)$$

因此，

$$W = diag(Q, Q, Q, R, R, R) \qquad (13)$$

5. 批量最大似然估计

3. 假设所有噪声相互无关，该问题存在唯一的解吗?若有，唯一解是什么?若没有，说明理由。

答：rank(H)=4，问题存在唯一解。

目标函数

$$J(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{Hx})^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{Hx}) \qquad (14)$$

让目标函数相对于自变量的偏导数为零

$$\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\hat{\boldsymbol{x}}} = -\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \qquad (15)$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H}\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}$$

由 $x^*_{map} = (H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} z$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening