视觉 SLAM 理论与实践 - 作业 2

peng00bo00

May 28, 2020

1. 1) 当矩阵 A 是满秩时 x 有唯一解。

   2) 高斯消元法的原理是对增广矩阵 $[A\ b]$ 进行初等行变换，当变换后的 A 化为单位阵时变换后的 b 即为方程 $Ax = b$ 的解。

   3) QR 分解是将矩阵 A 分解为一个正交阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积 $A = QR$，此时求解方程 $Ax = b$ 步骤为：
   $$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b \tag{1}$$
   由于 R 是一个上三角矩阵，方程 $Rx = Q^T b$ 可以自下而上递归地解出 x。

   4) 对于正定埃尔米特矩阵矩阵存在分解 $A = LL^T$，其中 L 为一个下三角矩阵。此时求解方程 $Ax = b$ 步骤为：
   $$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ld = b \tag{2}$$
   由于 L 是一个上三角矩阵，方程 $Ld = b$ 可以自上而下递归地解出 d。然后求解方程 $L^T x = d$，由于 L^T 是一个上三角矩阵故可以自下而上递归地求解出 x。

   5) 代码可参见 ex.cpp 文件

2. 代码可参见 ex.cpp 文件

3. 1) 设某个正交基 (e_1, e_2, e_3) 经过旋转后变为 (e_1', e_2', e_3')，则对于同一向量 $\mathbf{a}$ 在两组基下的坐标满足以下关系:

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{a}' \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $\mathbf{R}$ 即为旋转矩阵。类似地，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_1'^T \\ e_2'^T \\ e_3'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_2^T e_1' & e_3^T e_1' \\ e_1^T e_2' & e_2^T e_2' & e_3^T e_2' \\ e_1^T e_3' & e_2^T e_3' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}^T\mathbf{a}' \\ &= \mathbf{R}'\mathbf{a} \end{aligned} \tag{5}$$

根据定义，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}'$ 为互逆的运算。因此 $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$，即 $\mathbf{R}$ 为正交阵。
根据行列式的性质有:

$$\mid \mathbf{R}^T\mathbf{R} \mid = \mid \mathbf{R} \mid^2 = 1 \tag{6}$$

因此

$$\mid \mathbf{R} \mid = \pm 1 \tag{7}$$

根据定义不考虑坐标轴反射的情况，故 $|\mathbf{R}| = 1$

2) 实部 η 维度为 1，虚部 ϵ 维度为 3

3)

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= \begin{bmatrix} \eta_1\varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x1}\eta_2 + \varepsilon_{y1}\varepsilon_{z2} - \varepsilon_{z1}\varepsilon_{y2} \\ \eta_1\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{x1}\varepsilon_{z2} + \varepsilon_{y1}\eta_2 + \varepsilon_{z1}\varepsilon_{x2} \\ \eta_1\varepsilon_{z2} + \varepsilon_{x1}\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{y1}\varepsilon_{x2} + \varepsilon_{z1}\eta_2 \\ \eta_1\eta_2 - \varepsilon_{x1}\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{y1}\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{z1}\varepsilon_{z2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1 & -\varepsilon_{z1} & \varepsilon_{y1} & \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{z1} & \eta_1 & -\varepsilon_{x1} & \varepsilon_{y1} \\ -\varepsilon_{y1} & \varepsilon_{x1} & \eta_1 & \varepsilon_{z1} \\ -\varepsilon_{x1} & -\varepsilon_{y1} & -\varepsilon_{z1} & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{z2} \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ &= q_1^{+} q_2 \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1\varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x1}\eta_2 + \varepsilon_{y1}\varepsilon_{z2} - \varepsilon_{z1}\varepsilon_{y2} \\ \eta_1\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{x1}\varepsilon_{z2} + \varepsilon_{y1}\eta_2 + \varepsilon_{z1}\varepsilon_{x2} \\ \eta_1\varepsilon_{z2} + \varepsilon_{x1}\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{y1}\varepsilon_{x2} + \varepsilon_{z1}\eta_2 \\ \eta_1\eta_2 - \varepsilon_{x1}\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{y1}\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{z1}\varepsilon_{z2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_2 & \varepsilon_{z2} & -\varepsilon_{y2} & \varepsilon_{x2} \\ -\varepsilon_{z2} & \eta_2 & \varepsilon_{x2} & \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{y2} & -\varepsilon_{x2} & \eta_1 & \varepsilon_{z2} \\ -\varepsilon_{x2} & -\varepsilon_{y2} & -\varepsilon_{z2} & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y1} \\ \varepsilon_{z1} \\ \eta_1 \end{bmatrix} \\ &= q_2^{\oplus} q_1 \end{aligned} \tag{8}$$

4. 1) 对任意向量 v 分解将其分解为 v 和 n 确定平面内垂直于轴 n 和平行于轴 n 的两个向量:

$$v_{||} = (v \cdot n)n \tag{9}$$

$$v_{\perp} = -n \times (n \times v) \tag{10}$$

$$v = v_{||} + v_{\perp} \tag{11}$$

记向量 w 为:

$$w = n \times v_{\perp} \tag{12}$$

因此向量 $n, v_{\perp}, w$ 构成了一个直角坐标系. 在该坐标系下对向量 v 绕轴 n 进行旋转，此时 $v_{||}$ 保持不变而 $v_{\perp}$ 旋转角度为 θ，其旋转后的向量为:

$$\begin{aligned} v'_{\perp} &= \cos\theta v_{\perp} + \sin\theta w \\ &= \cos\theta v_{\perp} + \sin\theta n \times v_{\perp} \\ &= \cos\theta v_{\perp} + \sin\theta n \times v \end{aligned} \tag{13}$$

因此 v 经过旋转后变为:

$$\begin{aligned} v' &= v_{||} + v'_{\perp} \\ &= v_{||} + \cos\theta v_{\perp} + \sin\theta n \times v \\ &= v_{||} + \cos\theta(v - v_{||}) + \sin\theta n \times v \\ &= v + (1-\cos\theta)v_{||} + \sin\theta n \times v \\ &= \cos\theta v + (1-\cos\theta)(v \cdot n)n + \sin\theta n \times v \\ &= \cos\theta v + (1-\cos\theta)n(n^T v) + \sin\theta n \times v \\ &= \cos\theta v + (1-\cos\theta)nn^T v + \sin\theta n \times v \\ &= [\cos\theta + (1-\cos\theta)nn^T + \sin\theta n^{\wedge}]v \end{aligned} \tag{14}$$

得证.

2)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{R}^T &= [\cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\mathbf{n}^{\wedge}][\cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\mathbf{n}^{\wedge}]^T \\ &= \cos^2\theta\mathbf{I} + \cos\theta(1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta\cos\theta\mathbf{n}^{\wedge} \\ &+ \cos\theta(1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + (1-\cos\theta)^2\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta(1-\cos\theta)\mathbf{n}^{\wedge}\mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ &- \sin\theta\cos\theta\mathbf{n}^{\wedge} - \sin\theta(1-\cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{n}^{\wedge} - \sin^2\theta\mathbf{n}^{\wedge}\mathbf{n}^{\wedge} \\ &= \cos^2\theta\mathbf{I} + \sin^2\theta\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \sin^2\theta\mathbf{n}^{\wedge}\mathbf{n}^{\wedge} \end{aligned} \tag{15}$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{\wedge}\mathbf{n}^{\wedge} &= \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -n_2^2 - n_3^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I} \end{aligned} \tag{16}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{R}^T &= \cos^2\theta\mathbf{I} + \sin^2\theta\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \sin^2\theta\mathbf{n}^{\wedge}\mathbf{n}^{\wedge} \\ &= \cos^2\theta\mathbf{I} + \sin^2\theta\mathbf{I} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{17}$$

即

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \tag{18}$$

5. 设

$$p = \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix},\ q = \begin{bmatrix} \varepsilon_q \\ \eta_q \end{bmatrix} \tag{19}$$

由于 q 为单位四元数，有

$$q^{-1} = q^* = \begin{bmatrix} -\varepsilon_q \\ \eta_q \end{bmatrix} \tag{20}$$

根据之前习题的结论有:

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} \\ &= q^+ q^{-1\oplus} p \\ &= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & -\varepsilon_q \\ \varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 + \varepsilon_q \varepsilon_q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

显然 q' 为虚四元数，对应的四元数到旋转矩阵的关系式为:

$$\begin{aligned} R &= (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \\ &= \eta_q^2 I + 2\eta_q \varepsilon_q^\wedge + (\varepsilon_q^\wedge)^2 + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \end{aligned} \tag{22}$$

6.
```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

class A {
public:
    A(const int& i ) : index(i) {}
    // 初始化非静态成员
    int index = 0;
};

int main() {
    A a1(3), a2(5), a3(9);
    // 列表初始化
    vector<A> avec{a1, a2, a3};
    // lambda 表达式 [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;}
    std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;});
    // 基于范围的 for 循环, auto 自动类型判断
    for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
    cout<<endl;
    return 0;
}
```