

# 激光 SLAM 理论与实践 - 作业 3

peng00bo00

December 19, 2020

1. 去除运动畸变的代码可参见./LaserUndistortion\_ws/src/LaserUndistortion/src 路径下 LidarMotionUndistortion.cpp 文件，核心代码可参见 Listing.1。主要流程包括：

- (a) 将当前初始位姿和终止位姿变换到 base 坐标系下；
- (b) 在 base 坐标系下对位姿进行插值，得到相应时刻激光束对应的机器人相对 base 系的位姿；
- (c) 计算每个激光数据在当前位姿下的坐标值；
- (d) 将激光数据坐标更新到 base 坐标系下。

矫正后的激光点云可参见 Fig.1，其中红色点云为矫正前点云，绿色点云为矫正后点云。

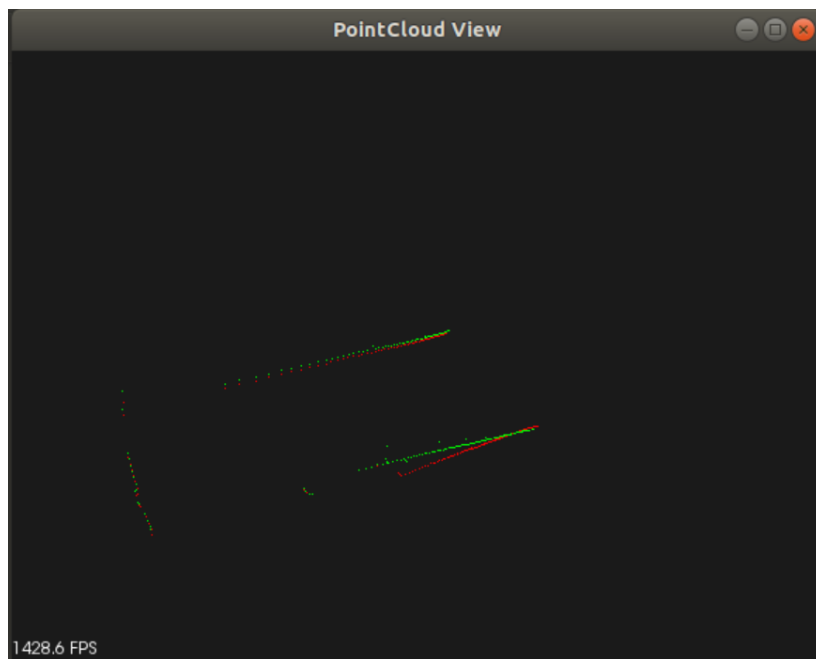


Figure 1: 运动畸变矫正

---

```

1 void Lidar_MotionCalibration(
2     tf::Stamped<tf::Pose> frame_base_pose,
3     tf::Stamped<tf::Pose> frame_start_pose,
4     tf::Stamped<tf::Pose> frame_end_pose,
5     std::vector<double>& ranges,
6     std::vector<double>& angles,
7     int startIndex,
8     int& beam_number)
9 {
10     //TODO
11     tf::Pose Twb = frame_base_pose.inverse();
12     // change to base frame
13     tf::Pose Ti = Twb * frame_start_pose;
14     tf::Pose Tj = Twb * frame_end_pose;
15
16     tf::Vector3 ti = Ti.getOrigin();
17     tf::Vector3 tj = Tj.getOrigin();
18
19     tf::Quaternion Ri = Ti.getRotation();
20     tf::Quaternion Rj = Tj.getRotation();
21
22     for (size_t i = 0; i < beam_number; i++)
23     {
24         // interpolation under base frame
25         tf::Vector3 t = ti.lerp(tj, 1.0/float(beam_number-1) * i);
26         tf::Quaternion R = Ri.slerp(Rj, 1.0/float(beam_number-1) * i);
27
28         // laser point in current frame
29         double px = ranges[startIndex+i] * cos(angles[startIndex+i]);
30         double py = ranges[startIndex+i] * sin(angles[startIndex+i]);
31
32         tf::Vector3 p(px, py, 0.0);
33
34         // transform to base frame
35         tf::Transform Tt;
36         Tt.setOrigin(t);
37         Tt.setRotation(R);
38
39         // pt: current frame -> base frame
40         tf::Vector3 pt = Tt * p;
41
42         // update ranges and angles
43         ranges[startIndex+i] = sqrt(pt[0] * pt[0] + pt[1] * pt[1]);
44         angles[startIndex+i] = atan2(pt[1], pt[0]);
45
46     }
47
48     //end of TODO
49 }

```

---

Listing 1: 运动畸变矫正代码

2. 已知两组一一对应的三维点云  $\{p_i\}$  和  $\{p'_i\}$ ，且两组点云之间相差一个刚体变换：

$$p'_i = Rp_i + T + N_i \quad (1)$$

其中，旋转  $R$  和平移  $T$  为常量， $N_i$  为随机噪声。目标是求解两组点云之间相差的旋转  $R$  和平移  $T$ ，即最小化距离误差：

$$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \|p'_i - (Rp_i + T)\|^2 \quad (2)$$

假设两组点云之间相差的实际旋转和平移分别为  $\hat{R}$  和平移  $\hat{T}$ ，两组点云的中心分别为：

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \quad (3)$$

$$p' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i = \hat{R}p + \hat{T} \quad (4)$$

分别对两组点云进行去中心化，得到：

$$q_i = p_i - p \quad (5)$$

$$q'_i = p'_i - p' \quad (6)$$

此时误差函数仅包含旋转项：

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \|p'_i - (Rp_i + T)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|q'_i - Rq_i\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

因此可以先求解旋转  $\hat{R}$  然后再根据旋转项来计算平移项  $\hat{T}$ 。接下来求解旋转部分，将距离误差展开得到：

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \|q'_i - Rq_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (q'_i - Rq_i)^T (q'_i - Rq_i) \\ &= \sum_{i=1}^N q_i'^T q'_i - q_i'^T Rq_i - q_i^T R^T q'_i + q_i^T R^T Rq_i \\ &= \sum_{i=1}^N q_i'^T q'_i + q_i^T q_i - 2q_i'^T Rq_i \end{aligned} \quad (8)$$

即最小化距离误差等价于最大化：

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^N q_i'^T Rq_i \\ &= \text{Trace} \left( \sum_{i=1}^N q_i'^T Rq_i \right) \\ &= \text{Trace} \left( \sum_{i=1}^N Rq_i q_i'^T \right) \\ &= \text{Trace}(RH) \end{aligned} \quad (9)$$

其中， $H = \sum_{i=1}^N q_i q_i'^T$ 。对矩阵  $H$  进行奇异值分解，得到：

$$H = U\Lambda V^T \quad (10)$$

可以证明当  $R = VU^T$  时  $F$  取最大值，此时对应的平移为  $T = p' - Rp$ 。

最后需要说明的是 ICP 算法可能会遇到退化的问题。当点云  $\{q_i\}$  共面但不共线时最小化  $F$  会得到旋转和反射两组解，其中旋转矩阵对应的行列式为 1 而反射矩阵对应的行列式为-1。因此为了获得正确的旋转矩阵需要考察  $R$  的行列式，若  $\det(R) = -1$  则需要对矩阵  $V$  进行变换，将其最后一列取负号：

$$V' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & -v_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

此时  $R = V'U^T$  即为正确的旋转矩阵。

3. 1) ToF 激光雷达是利用传感器发射和接收激光的时间差来进行测距。假设时间差为  $\Delta t$ ，则雷达与物体之间的距离为：

$$d = \frac{c\Delta t}{2} \quad (12)$$

其中  $c$  为光速。时间差  $\Delta t$  可以通过雷达内置的时钟来获取，也可以通过调幅的方式通过计算发射信号与接收信号之间的相位差来获取，此时时间差为：

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi f_m}{2\pi} \quad (13)$$

其中  $\varphi$  为相位差， $f_m$  为调制频率。

- 2) Fig.2表示光束模型中激光束在不同情况下距离测量值的概率密度函数，其中  $z_t^{k*}$  为距离的真实值， $z_{max}$  为雷达测量距离的最大值。

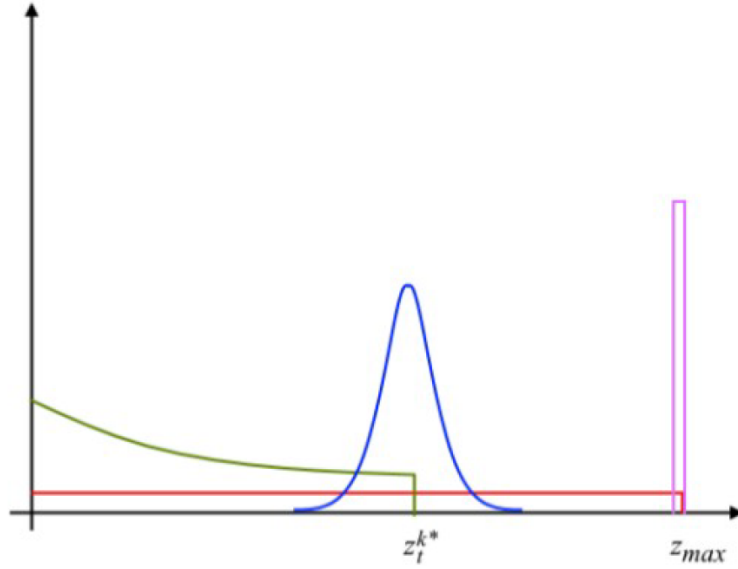


Figure 2: 光束模型概率密度

- (a) 蓝色曲线表示正常情况下测量距离的概率密度，此时为正态分布；
- (b) 绿色曲线表示雷达与目标之间存在遮挡时的概率密度，此时为指数分布；
- (c) 红色曲线表示均匀噪声干扰情况下的概率密度，此时为均匀分布；
- (d) 洋红色曲线表示没有观测到目标时的概率密度，此时观测值为最大测量距离。

4. 1) IMU 可以测量机器人运动时的角速度和线加速度，因此可以参考使用轮式里程计进行运动畸变矫正的方法利用 IMU 来去除激光雷达的运动畸变，即通过对 IMU 测量值进行积分来获取机器人在不同时刻的位姿从而对雷达观测数据进行矫正。但 IMU 自身的问题在于其加速度测量精度较差，对加速度积分两次获得的位移会具有较大的漂移。
- 2) 在仅有 IMU 和 Lidar 的情况下可以考虑假定机器人做匀加速运动或加速度导数为定值，然后通过最小化 IMU 积分与运动模型的残差来对激光雷达数据进行标定。