



式中 $D_{ijkl}^{ei}(\epsilon_{mn})$ 和 $C_{ijkl}^{ei}(\sigma_{mn})$ 分别为与应变或应力路径有关的切线刚度张量与切线柔度张量。最简单的次弹性模型可以通过将线弹性材料的刚度或柔度矩阵修改为与路径有关的切线刚度矩阵与切线柔度矩阵而得到。对于各向同性的线弹性体, 只要将弹性常数 E 、 μ 或 K 、 G 修改为切线弹性系数 E_t 、 μ_t 或 K_t 、 G_t 即可, 而 E_t 、 μ_t 或 K_t 、 G_t 都是随应力或应变路径而变化的。次弹性材料具有以下一些特性:

- ① 应力(或应变)状态取决于当前的应变(或应力)状态和达到这一状态的应变路径与应力路径, 即路径相关性;
- ② 应力和应变具有增量意义上的可逆性, 即在一定的初应力或应力水平下, 产生的无限小的变形具有弹性性质或可恢复性;
- ③ 不同的初始条件和应力或应变路径将得出不同的本构关系, 因此要得到唯一的解, 其初始条件与应力或应变路径必须事先确定;
- ④ 次弹性材料可能违背热力学定律, 因为在某些加载周期中, 可能产生能量;
- ⑤ 一般的次弹性模型的材料系数也比较多, 也缺乏一定的物理意义, 确定它们需要较多的试验资料。

从 20 世纪 70 年代以来, 随着计算技术和计算机技术的发展, 上述三种非线性弹性模型在岩土工程中都有应用, 其中以简单的变模量次弹性模型应用最广。以下要介绍的 D-C 模型就属于这一类。

第八节 非线性弹性本构关系—— 双曲线(邓肯-张)模型简介

双曲线模型为非线性弹性模型。它属于数学模型的范畴。也就是说, 它是以数学上的双曲线来模拟土的应力-应变关系曲线并以此进行应力和应变分析的。由于这种模型最初是由邓肯和张两人所提出, 所以也叫邓肯-张模型, 有时简称为 D-C 模型。

三十多年来, 邓肯-张模型在工程中得到广泛应用。非线性弹性模型的弹性系数 E 、 μ 随着应力水平的变化而变化, 只要能通过试验和计算合理地确定不同应力水平下的 E_t 、 μ_t 值, 就可以按照弹性本构关系来进行计算了。以下介绍的是经过邓肯等人于 1980 年改进后的双曲线模型。

一、切线弹性模量 E_t 的确定

1. 应力-应变的双曲线表达式

邓肯等人根据康纳(Kondner)的建议, 将三轴剪切试验中当 σ_3 等于常数时的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$ 关系近似的用双曲线来表示(见图 3-8-1a), 即

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1} \quad (3-8-1)$$

式(3-8-1)是变形的双曲线方程, 可以通过坐标变换将其变成标准形式的双曲线方程(可以自己证明)。式中 a 和 b 为双曲线参数, 由试验确定。其物理意义和具体确定方法如下。按照初始切线模量的定义, 双曲线方程式(3-8-1)的初始切线模量 E_t 为

$$E_i = \left. \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0}$$

对式(3-8-1)微分,当 $\varepsilon_1 = 0$ 时,可得

$$E_i = \frac{1}{a} \quad (3-8-2)$$

可见 a 为初始切线模量 E_i 的倒数,见图 3-8-1(a)。

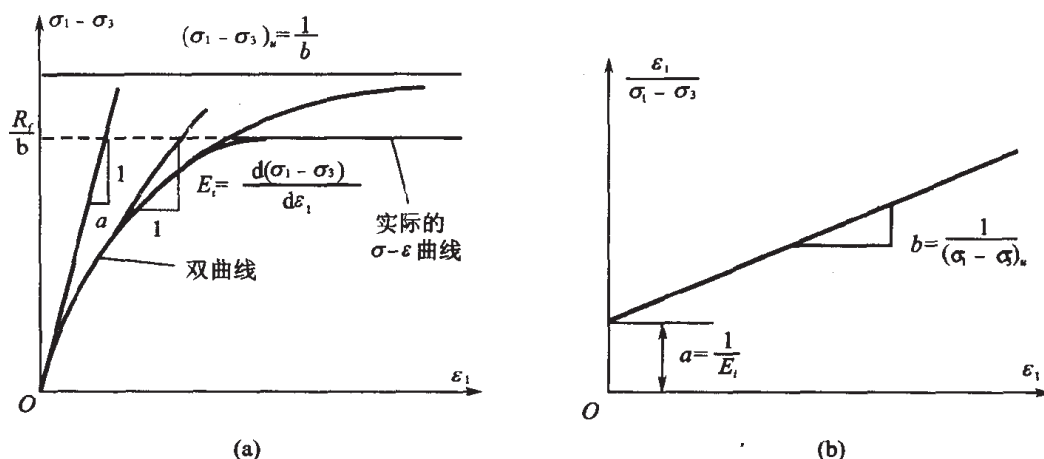


图 3-8-1 双曲线模型

当 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ 时,由式(3-8-1)可以求得强度的极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_u = \left. \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{b} \quad (3-8-3)$$

可见 b 为强度极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 的倒数。实际上,它是双曲线的一条渐近线,见图 3-8-1(a)。

为了根据试验资料确定常数 a 和 b ,可以将图 3-8-1a 绘在 $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_3} - \varepsilon_1$ 坐标系中,则双曲线就变为直线,见图 3-8-1(b)。从图上可以看出: a 为纵轴的截距,很容易由图 3-7-1(b)求得。由于强度的极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 理论上为 ε_1 趋于无穷大时的强度值,一般不易求得,而强度破坏条件可以人为的规定,因此为了求得强度的极限值,先通过破坏强度定义一个破坏比 R_f ,其值为

$$R_f = \frac{\text{破坏时的强度}}{\text{强度的极限值}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u} \quad (3-8-4)$$

根据试验,土的 R_f 一般变化不大,在 0.75~0.95 之间。由式(3-8-4)看出 R_f 必小于 1.0。这样,将式(3-8-2)~(3-8-4)代入式(3-8-5),就可以得出当 σ_3 等于常数时的双曲线表达式:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_1 R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}} \quad (3-8-5a)$$

或

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (3-8-5b)$$



2. 切线模量 E_t 的表达式

按照切线模量 (E_t) 的定义, 对式(3-8-5a)微分后并将式(3-8-5b)代入, 可得

$$E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1} = \left[1 - \frac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2 E_i \quad (3-8-6)$$

这就是切线模量 E_t 的表达式。式中 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 为现在的应力水平, R_f 因变化范围不大一般可事先假定给出, 其中尚有 E_i 和 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 待定。根据挪威学者詹布 (Janbu) 的研究, E_i 与固结压力 σ_3 的关系可用 Janbu 公式表示为

$$E_i = K_i p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3-8-7)$$

式中 K_i ——模量系数, 为无量纲系数;

n ——无量纲的模量指数;

p_a ——大气压力或称参考压力。

将 E_i 和 σ_3 的关系点绘在双对数纸上, 就可以求得 K_i 和 n 值, 见图 3-8-2。由图 3-8-2 可以看出, n 为双对数图上直线的斜率, K_i 与 $\frac{\sigma_3}{p_a}$ 等于 1 所对应的 E_i 相对应, 但尚须换算。

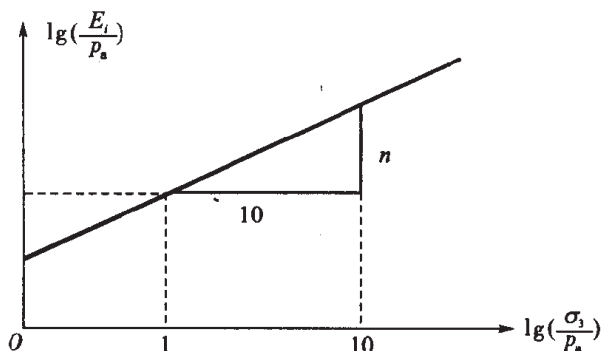


图 3-8-2 K_i, n 值的确定

$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 可以由 Coulomb-Mohr 破坏条件确定如下:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cdot \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3-8-8)$$

将式(3-8-7)及(3-8-8)代入式(3-8-6), 可得

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cdot \cos \varphi + 2\sigma_3 \cdot \sin \varphi} \right]^2 K_i p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3-8-9)$$

从式中可以看出, 要确定切线模量 E_t , 需要通过试验确定 ϕ, C, K_i, n 及 R_f 五个常数。

上述 E_t 是对加载而言的, 当卸载与再加载时, $\sigma - \epsilon$ 关系接近直线, 这时弹性模量 E_w 取决于侧限压力 σ_3 , 其关系与 Janbu 公式形式相同, 即

$$E_w = K_w p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3-8-10)$$

式中 K_w 及 n 分别为卸载再加载时的模量系数与指数。其确定方法与式(3-8-7)的 K_i 及 n 的方法相同。

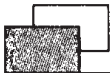
二、切线 Poisson 比 μ_t 的确定

最初, 邓肯 - 张假设 ϵ_3 与 ϵ_1 的关系亦为双曲线, 即

$$\epsilon_3 = \frac{h\epsilon_1}{1 - d\epsilon_1} \quad (3-8-11)$$

并假设

$$h = G - F \lg \sigma_3 \quad (3-8-12)$$



式中 d, G 和 F 都是试验常数, 可以通过试验求得。有了 ϵ_1 - ϵ_3 关系, 根据切线 Poisson 比 (μ_t) 的定义, 就可求得 μ_t 的表达式:

$$\mu_t = \frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} = \frac{G - F \lg(\sigma_3/p_a)}{1 - \frac{d \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{K_i p_a (\sigma_3/p_a)^n \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \sin \varphi)}{2C \cdot \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]}} \quad (3-8-13)$$

从上式可以看出, 要确定切线模量 μ_t , 需要通过试验求出 $\varphi, C, R_f, K_i, n, G, F$ 及 d 共 8 个参数, 是比较复杂的。

三、切线体积模量 K_t

最初, 邓肯-张模型采用 E_t 及 μ_t 弹性参数, 同时假设 ϵ_1 与 ϵ_3 关系亦为双曲线, 据此推导出 μ_t 的表达式。后来在实际应用中发现, 采用 ϵ_1 与 ϵ_3 双曲线关系计算出的 μ_t 值常常偏大, 与实验资料拟合得并不理想。因此, 邓肯又采用切线体积模量 K_t 作为计算参数, 并假设 K_t 与侧限压力 σ_3 关系亦采用 Janbu 公式的形式:

$$K_t = \frac{dp}{d\epsilon_v} = K_b p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (3-8-16)$$

式中 K_b 及 m 分别为切线体积模量系数与指数。由于 $\mu_t = 0.5$ 时为不可压缩材料, 故 μ_t 必须满足 $0 \leq \mu_t < 0.5$, 故要求 K_t 必需在下列数值范围以内变化: $K_t/3 \leq K_t \leq 17E_t$ 。确定 K_t 只需要 K_b 和 m 两个参数。

有了 E_t 及 K_t (或 μ_t), 就可以按前面的弹性本构关系进行应力与应变的分析计算了。

四、切线刚度矩阵与模型参数

确定弹性切线模量 E_t, K_t 之后, 就可以利用次弹性增量本构关系式 (3-7-8a) 进行应力与应变分析。这时以 E_t, K_t 表示的弹性切线刚度矩阵 D^e 为

$$D^e = \frac{3K_t}{9K_t - E_t} \begin{bmatrix} 3K_t - E_t & 3K_t - E_t & 0 \\ & 3K_t + E_t & 0 \\ \text{Sym} & & E_t \end{bmatrix} \quad (3-8-17)$$

为了确定 E_t 和 K_t , 需要通过常规三轴试验确定 φ, c (或 $\varphi_1, \Delta\varphi$)、 K_i, n, K_b, m 和 R_f 共七个参数, 如果包括卸载, 尚需增加一个 K_{ur} 。由于邓肯-张模型在我国应用较多较广, 对各类岩土类材料积累了较丰富的经验, 表 3-8-1 给出了各类土邓肯-张模型参数的大致变化范围, 可供初步计算时参考选用。

表 3-8-1 模型参数表

土类 参数	软黏土	硬黏土	砂	砂卵石	石料
C	0~0.1	0.1~0.5	—	—	—
φ	20°~30°	2.0°~30°	30°~40°	30°~40°	40°~50°
$\Delta\varphi$	0	0	5°	5°	5°
R_f	0.7~0.9	0.7~0.9	0.6~0.85	0.6~0.85	0.6~1.0
K	50~200	200~500	300~1 000	500~2 000	30~1 000

续表

参数 \ 土类	软黏土	硬黏土	砂	砂卵石	石料
K_{ur}	3.0 K	1.5 ~ 2.0 K			
n	0.5 ~ 0.8	0.3 ~ 0.6	0.3 ~ 0.6	0.40 ~ 0.7	0.1 ~ 0.5
K_b	20 ~ 100	100 ~ 500	50 ~ 1 000	100 ~ 2 000	50 ~ 1 000
m	0.4 ~ 0.7	0.2 ~ 0.5	0 ~ 0.5	0 ~ 0.5	-0.2 ~ 0.4

五、模型评价

下面按照岩土类材料的本构特性,根据实验与计算等方面的要求,对邓肯-张模型进行评价。

(1)模型数学上比较简单,概念清楚。试验常数只有八个,每一个参数都有一定的物理与几何意义,而且可以通过常规三轴试验求出。弹性切线模量矩阵对称,有利于实现数值计算。因此,我国水利水电、交通、建筑工程等部门在岩土工程中对其应用广泛,积累了丰富的经验与资料。

(2)模型反映了岩土材料的非线性弹性及一定程度上的路径相关特性(σ_3 为常数时)。当考虑卸载时,还考虑了岩土材料的非弹性变形性质。模型适用于正常固结及弱超固结黏土及砂石料等应变硬化型材料,不适于严重超固结黏土、密实砂及具有应变软化性质的岩土类材料,而且当应力接近破坏水平时,计算不易稳定,偏差较大。

(3)模型没有反映岩土类材料的剪胀性与压硬型。

(4)由于采用了修正的各向同性广义胡克定律,本构关系是增量线性的和各向同性的。因此,应力与应变增量的主方向相同。这对于低应力水平来说,比较符合实际;但是,当应力水平较高或接近破坏时,就不够准确了。在高应力水平特别是接近破坏时,应变增量方向常常与应力主方向一致而不是与应力增量方向一致。

(5)由于模型采用了 Coulomb-Mohr 破坏条件及 $\sigma_2 = \sigma_3$ 的常规三轴试验方法,因此,没有计及中主应力 σ_2 对强度与变形的影响。

六、邓肯-张模型的修正与改进

针对邓肯-张模型的上述缺点,国内外学者都进行了大量的试验与工程验证,提出了许多改进措施,除将原模型的 $E_t - \mu_t$ 改为 $E_t - K_t$ 及对粗粒料土的 φ 角修正外,主要还有以下几点。

1. 考虑中主应力 σ_2 的修正

工程中常见的变形条件是平面应变,而常规三轴的应变条件是轴对称。因此,根据两种应力比可得到两种条件下的摩擦角之关系为

$$\frac{1}{\sin \varphi_c} - \frac{1}{\sin \varphi_p} = \frac{1}{3} b_p \quad (3-8-18)$$

式中 φ_c ——轴对称应力条件下的摩擦角;

φ_p ——平面应变条件下的摩擦角,由平面应变仪试验而得;

b_p ——二者的相关系数。



按照 Bishop 的试验研究, b_p 由下式决定:

$$b_p = \frac{1 - \sin \varphi_p}{2} \quad (3-8-19)$$

将 b_p 代入式(3-8-18)后可得

$$\sin \varphi_p + 6 \left(\frac{1}{\sin \varphi_c} - \frac{1}{\sin \varphi_p} \right) = 1 \quad (3-8-20)$$

由常规三轴试验求出 φ_c 后, 代入上式即可求得平面应变条件下的 φ_p , 再将 φ_p 代入邓肯-张模型中代替 φ , 就相当于考虑了 σ_2 对强度与变形的影响。

另一种简单的经验办法就是将邓肯-张模型中凡是出现 σ_3 为变量的地方, 一律用 $\sigma_3 \sqrt[3]{\sigma_3/\sigma_2}$ 代替, 这时 Goulomb-Mohr 强度条件变为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\sigma_3 \sqrt[3]{\frac{\sigma_3}{\sigma_2}} + c \cos \varphi \right) \quad (3-8-21)$$

由上述两种方法计算出的模量比用式(3-8-9)计算的模量要大一些, 这正好说明 $\sigma_2 > \sigma_3$ 对本构关系的影响。

2. 加载函数的选择

当应力点出现卸载情况时, 需要使用加卸载条件, 即需要确定加载函数。邓肯等人经过多年研究, 于 1984 年提出加载函数

$$f_l = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_l} \sqrt[4]{\sigma_3} \quad (3-8-22)$$

当 f_l 大于历史上最大的 $(f_l)_{\max}$ 时, 判为加载; 否则判为卸载或再加载。由于卸载模量 E_w 与加载模量 E_l 可相差两个数量级以上, 因此常常引起迭代过程的不稳定。具体计算时可采用以下处理办法: 当 $f_l < 0.75(f_l)_{\max}$ 时, 判为完全卸载; 当 f_l 介于 $0.75(f_l)_{\max} \sim 1.0(f_l)_{\max}$ 时, 计算所用的模量 E_l 按下式计算内插:

$$E_l = E_u + (E_w - E_u) \frac{1 - f_l / (f_l)_{\max}}{1 - 0.75} \quad (3-8-23)$$

式中 E_u 为与加载函数 f_l 相对应的 E_l 。显然, 这些公式都是实用的经验公式, 有待进一步的研究与改进。

3. 剪胀性与应变软化的考虑

为了克服 D-C 模型没有考虑岩土材料的剪胀性与应变软化的特性, 沈珠江提出了将剪胀引起的体应变按初应变处理, 将双曲线 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$ 曲线改为有驼峰的应变软化型曲线, 提出了 M_t 、 E_t 、 ρ 三参数的非线性模式, M_t 为切线压缩模量, ρ 为剪胀系数。实际上, 它已经变为一种新的非线性弹性模型。

习 题

1. 在岩土塑性理论中, 为什么喜欢使用各种不同形式 K-G 型的弹性本构关系?
2. 广义胡克定律是否考虑了材料的剪胀性与压硬性? 如何在弹性理论中考虑材料的剪

胀性与压硬性?

3. 证明 K-G 型式的广义胡克定律及 K-G 型式弹性矩阵 D 。

4. Cauchy 弹性、Green 超弹性及次弹性本构关系各有什么特征?

5. 将 D-C 模型的双曲线方程 $(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon_1}{a + b\epsilon_1}$ 改写为标准型式的双曲线方程。

6. 天津塘沽某软黏土试样的三轴固结不排水试验数据如附表所示。试根据上述试验数据,按 D-C 模型计算。要求出下:

题 6

ϵ_1 (%)		1	2	4	6	8	10	12	14	16	u_f
σ_3											
200 kPa	$\sigma_1 - \sigma_3$	100	125	150	166	175	179	180	186	187	124
300 kPa	$\sigma_1 - \sigma_3$	150	179	210	230	237	247	253	253	253	200

注: u_f 为破坏时的孔隙水压力。

- ① 绘出 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$ 及 $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1 + \sigma_3} - \epsilon_1$ 关系曲线,求初始切线模量 E_i 及极限强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$;
- ② 求初始切线模量 E_i 的模量系数 K_i 及幂次 n ;
- ③ 求破坏比 R_f 及试样的 φ', c' ;
- ④ 写出试样切线弹性模量 E_i 的具体表达式。