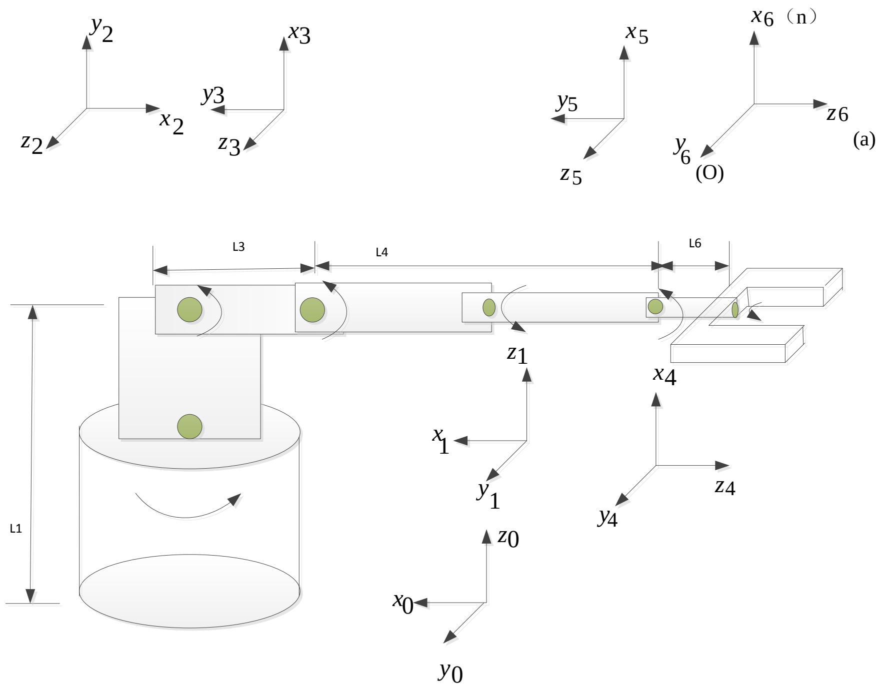
逆解计算书

一、模型



$X_i=\pm\ Z_i \times Z_{i+1}$

D-H方法中相邻两连杆i-1和i之间相对关系的确定：

1、绕X_{i-1}轴旋转α_{i-1}角度，使Z_{i-1}与Z_i方向相同;

2、沿X_{i-1}轴平移距离a_{i-1}，使Z_{i-1}与Z_i同一直线；

3、绕Z_i轴旋转θ_i角度，使x_{i-1}与X_i轴平行；

4、沿Z_i轴平移距离d，使X_{i-1}与X_i同一直线，且原点重合；

关节	绕 z_i 轴的 θ_i(关节变量)	沿 z_i 轴的偏移 d_i	绕 x_{i-1} 轴的关节扭角 α_i	沿 x_{i-1} 轴的平移 a_i	变量变化范围
1	θ_1(0°)	L1	0°	0	±180°
2	θ_2(180°)	0	-90°	0	±95°
3	θ_3(90°)	0	0°	L3	±95°
4	θ_4(0°)	L4	90°	0	±180°
5	θ_5(0°)	0	-90°	0	±95°
6	θ_6(0°)	L6	90°	0	±180°

坐标系 i 到 i-1 的变换矩阵：

$$
{}_{i-1}^{i}T=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

二、计算

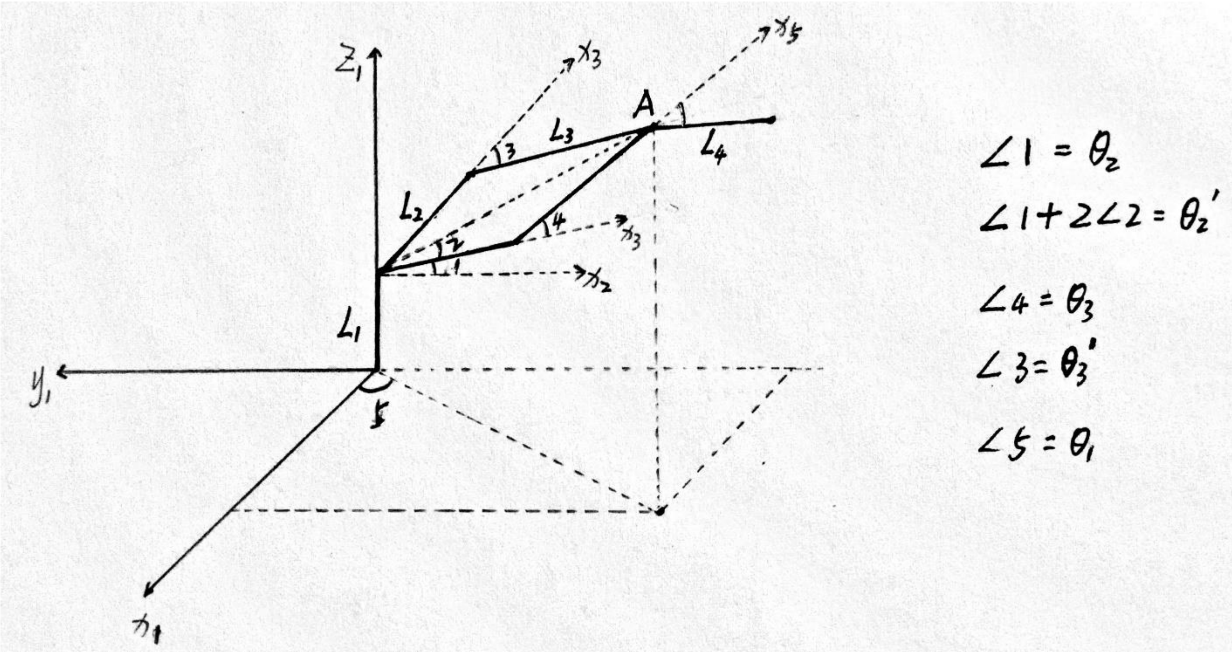


图 1

令末端对基坐标系的位姿矩阵为

$$
{}_0^6T=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}={}_0^1A\,{}_1^2A\,{}_2^3A\,{}_3^4A\,{}_4^5A\,{}_5^6A
$$

则手腕部 A 点位置为

$$
\begin{cases} x_4=P_x\text{-}a_xL_6 & (1) \\ y_4=P_y\text{-}a_yL_6 & (2) \\ z_4=P_z\text{-}a_zL_6 & (3) \end{cases}
$$

由机械臂构建方法知，臂 L1、L2、L3、在同一平面内。

如图 1 所示，当 A 点位置确定，θ_1可有 A 点坐标到坐标系 1 的投影取反正切求得，即：

$$\theta_1=atan2(y4,x4)$$

θ_2、θ_3可有两种组合。

一、（图 1 中角 1、角 4 组合）

由臂 L2、L3 及其末端连线组成的三角形中，边长分别为 L2、L3 及 t，其中$\text{t}=\sqrt{(x_4^2+y_4^2+(z_4-L_1)^2)}$

则由余弦定理可得$\theta_3 = \pi - \operatorname{acos}(\frac{L_2^2 + L_3^2 - t^2}{2L_2L_3})$

对于θ_2如图 2 所示，由图形关系可有

$$\alpha = \operatorname{atan}(\frac{L_3 * \sin\theta_3}{L_2 + L_3 * \cos\theta_3})$$

$$\beta = \operatorname{asin}(\frac{z_4 - L_1}{t})$$

由此可有$\theta_2 = \beta - \alpha$

由图 1 可有另一组解：

$$\theta_3' = -\theta_3$$

同理可计算得：

$$\theta_2' = \beta + \alpha$$

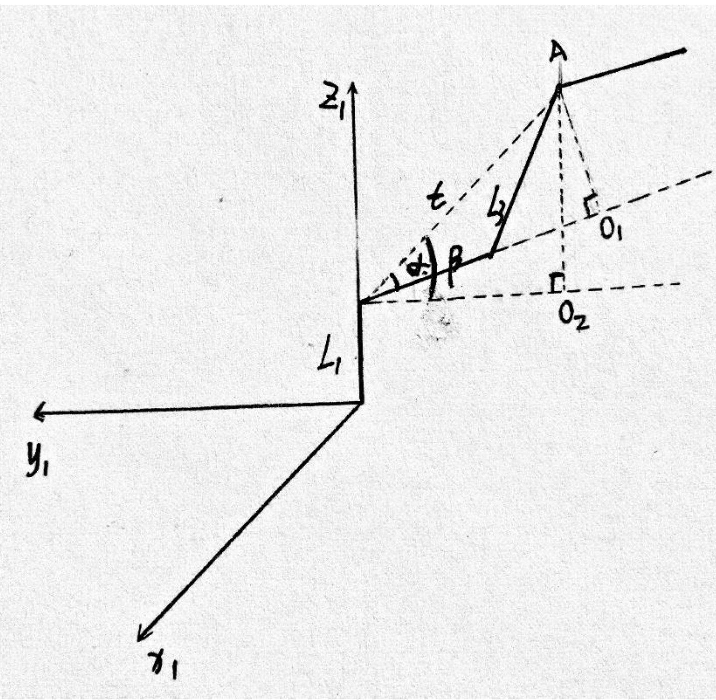


图 2

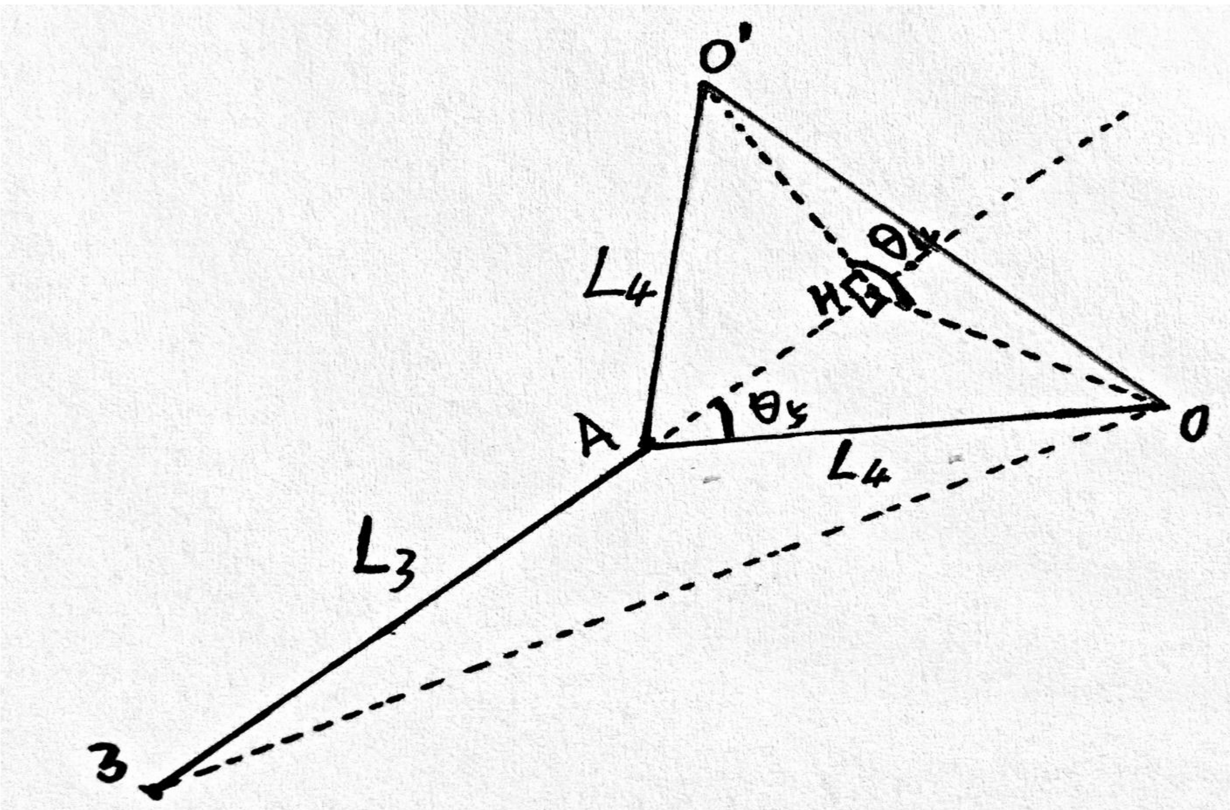


图 3

将计算得到的θ_1、θ_2、θ_3 代入运动学正解可得机械臂 L3 与 L2 的交点坐标，则：

如图 3 所示，由输入的末端坐标及 3 点坐标可求三角形 3OA 第三边边长

$$t_2 = \sqrt{}((p_x - x_3)^2 + \left(p_y - y_3\right)^2 + (p_z - z_3)^2)$$

由图示几何关系可得

$$\theta_5 = \pi - \mathrm{acos}(\frac{L_3^2 + L_4^2 - t_2^2}{2 * L_3 L_4})$$

将求得的θ_1、θ_2、θ_3、0、θ_5代入运动学正解即可求得轴 4 未转动时状态，此时，末端为O',对应输入的末端坐标O，同向臂 L3 的延长线做垂线交于 H，可有两垂线夹角即为θ_4。

有O、O'坐标可求得OO'距离：

$$t_3 = \sqrt{}((O_x - O'_x)^2 + \left(O_y - O'_y\right)^2 + (O_z - O'_z)^2)$$

腰长：

$$\mathrm{OH} = O'H = L_4 * \sin\theta_5$$

则通过余弦定理可得：

$$\theta_4 = \mathrm{acos}(\frac{OH^2 + O'H^2 - {t_3}^2}{2 * OH * O'H})$$

将求得的θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、θ_5、0 代入运动学正解即可求得轴 6 未转动时末端夹手之间的方向坐标n_x、n_y、n_z，对应输入的末端姿态中夹手之间的方向坐标n'_x、n'_y、n'_z，可有三角形$n'On$，三角形三边长分别为$|n|$、$|n'|$、t_4，其中

$$t_4 = \sqrt{}((n_x - n'_x)^2 + \left(n_y - n'_y\right)^2 + (n_z - n'_z)^2)$$

则由余弦定理可求得：

$$\theta_6 = \mathrm{acos}\frac{|n|^2 |n'|^2 {t_4}^2}{2 * |n| * |n'|}$$

至此，几何法求解运动学逆解结束。