Processus Stochastique

Notes de TD

Mohamed Slimane

31 janvier 2010

Sébastien Lacroix : sebastien.lacroix@etu.univ-tours.fr

Table des matières

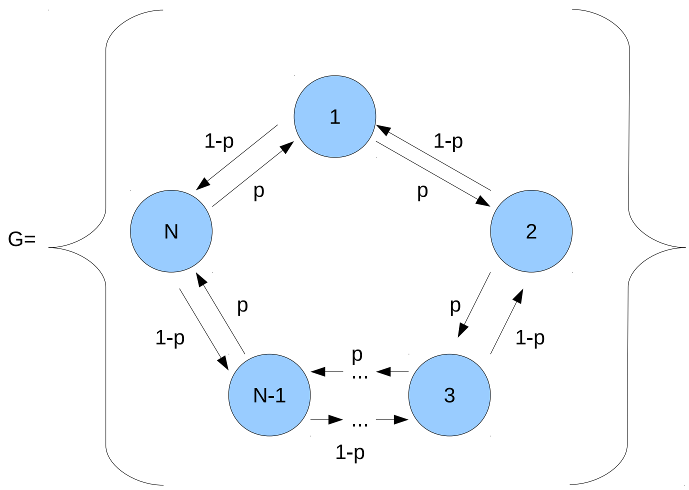
Chapitre 1

TD1 11/12

1.1 Exo 1

On considère un fort polygonale ayant N sommets. Une sentinelle se déplaced'un sommet d'un sommet à l'autre de telle sorte que, si elle quitte un sommet il y a une probabilité p qu'elle décide d'aller au sommet adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre et 1-p à l'autre sommet adjacent.

1/ Définir la chaine de Markov et écrire la matrice de transition



	1	2	3	...	N-1	N
1	0	p				1-p
2	1-p	0	p			
3						
...						
N-1				1-p	0	P
N	p				1-p	0

2/ Calculer les probabilités limlites pour N=5

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$lim_{n\to\infty}\underline{P^n} = \begin{pmatrix} \underline{\Pi'} \\ \underline{\Pi'} \\ ... \end{pmatrix}$$

$\underline{\Pi'}\ \underline{P} = \underline{\Pi'}$

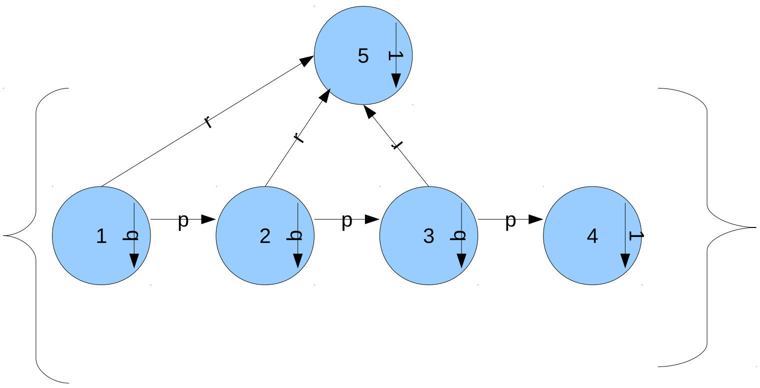
$\underline{\Pi} = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5]$

$$\begin{cases} p\underline{\Pi_2} + (1-p)\underline{\Pi_4} = \underline{\Pi'_1} \\ (1-p)\underline{\Pi_1} + p\underline{\Pi_3} = \underline{\Pi'_2} \\ (1-p)\underline{\Pi_2} + p\underline{\Pi_4} = \underline{\Pi'_3} \\ (1-p)\underline{\Pi_3} + p\underline{\Pi_5} = \underline{\Pi'_4} \\ p\underline{\Pi_1} + (1-p)\underline{\Pi_4} = \underline{\Pi'_5} \end{cases}$$

$$lim_{n\to\infty}\underline{P^n} = \begin{pmatrix} 1/5 & ... & 1/5 \\ ... & ... & ... \\ 1/5 & ... & 1/5 \end{pmatrix}$$

1.2 Exo 2

Les études dans une école d'ingénieurs durent 3 ans. A l'issue de chaque année chaque élève a une probabilité p de passer dans l'année superieur(ou d'obternie le diplôme si il est en 3ieme année), une probabilité q de redoubler, une probabilité r d'être renvoyer. Montrer que le cursus d'un élève peut être modélisé par une chaine de Markov.



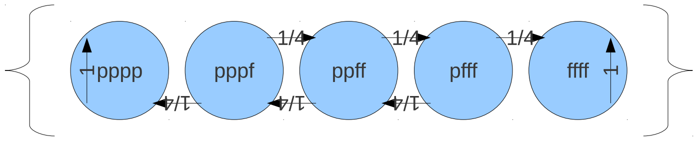
1 : 1ere année
2 : 2ieme année
3 : 3ieme année
4 : Diplome
5 : Renvoi

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & r \\ 0 & q & p & 0 & r \\ 0 & 0 & q & p & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Exo 3

4 pieces de monnaie son posées initialement avec le coté pile vers le haut chaque seconde une pièce est choisie au hazard et retournée. Ce processus s'arrête dès que toutes les pièces sont tournées soit coté pile soit coté face.

Montrer que ce processus peut être représenté par une chaine de Markov et donner sa matrice de transition.



Chapitre 2

TD2 14/01

2.1 Exo 1

La durée moyenne d'une consultation est de 15 minutes. Le médecin donne ses rendez-vous toutes les 20 minutes, mais les aléas de la circulation font que les clients arrivent au hazard.

1/ Quels est le nombre moyen de clients dans la salle d'attente ?

2/ Quelle est la durée moyenne d'attente ?

3/ Quelle est la probabilité d'attendre plus d'une heure ?

1/

M | M | 1 | ∞ | ∞ | PAPS
$\lambda = 60/20 = 3$
$\mu = 60/15 = 4$
Nombre moyen de clients dans le syst :
$L = \lambda/(\mu - \lambda) = 3$
Nombre moyen de clients dans la file : (question 1)
$L_q = \Lambda^2/(\mu(\mu - \lambda)) = 9/4 = 2.25$

2/

$W = 1/(\mu - \lambda) = 1h$
$W_q = \lambda/(\mu(\mu - \lambda) = 3/4$

3/

$P(\tau > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4(1-\rho)*1} = 0.368$
Avec $\rho = \lambda/\mu = 3/4$

Attention $\lambda/\mu < 1$.

2.2 Exo 2

I- Soit une pompe à essence où les clients arrivent suivant un processus de Poisson au rythme de 10 clients par h. La durée du service est en moyenne égale à 5 minutes et suit une loi exponentielle. 1 seule pompe à essence.

1/ Calculer en régime stationnaire le nombre moyen de clients en attente (dans la file).

2/ La durée moyenne de passage à la pompe.

3/ La probabilité qu'un client reste plus de 10 minutes dans la station (système).

4/ La proportion de clients perdus s'ils se découragent quand il y a déjà 2 personnes qui attendent dans le système.

II- Même chose avec 2 pompes à essence.

I-

1/

M | M | 1 | ∞ | ∞ PAPS
$\lambda = 10$
$\mu = 60/5 = 12$
$\rho = 0.83 < 1$
Nombre moyen de clients dans le syst :
$L = \lambda/(\mu - \lambda) = 5$
Nombre moyen de clients dans la file : (question 1)
$L_q = \Lambda^2/(\mu(\mu - \lambda)) = 25/6 = 4.167$

2/

Durée dans le système :
$W = 1/(\mu - \lambda) = 0.5$

3/

$P(\tau > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4(1-\rho)1/6} = 0.72$

4/

$P(X_t > 2) = 1 - P(X_t \leq 2) = 1 - (P(X_t = 0) + P(X_t = 1) + P(X_t = 2)) = 1 - (q_0 + q_1 + q_2) = 58$
Ou $q_j = p^j(1 - \rho)$

II-

1/

M | M | 2 | ∞ | ∞ PAPS
$\lambda = 10$
$\mu = 60/2.5 = 12$
$S = 2$
$\rho = \lambda/S\mu = 0.4167$
Nombre moyen de clients dans la file : (question 1)
$L_q = q_0 * (\rho S)^S \rho/S!(1 - \rho)^2 = 0.175$ Où $q_0 = 1/(1 + \rho S + (\rho S)^3/(S!(1 - \rho))) = 7/17$

2/

Durée dans le système :
$W = 0.1$

3/

$P(\tau > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4(1-\rho)1/6} = 0.72$

4/ $P(\zeta > 1/6)$

Chapitre 3

TD3 18/01

3.1 Exo 1

Une compagnie de transport maritime possède un quai. Ses bateaux arrivent à un taux moyen de un par jour. Lorsqu'un bateau est dans les eaux portuaires la majorité de l'équipage est inoccupée et on doit payer des taxes. On estime le cout total à 2500 euros par jour. Le salaire des dockaire est de 50 euros par heures. Mais un dockaire peut décharger un bateau en 50 heures en moyenne.

1/ Combien la compagnie doit elle engager de dockaires ?

1/

M | M | 1 | ∞ | ∞ | PAPS
Processus d'arrivée $= \lambda = \frac{1bateau}{24h}$
Processus de service $= \frac{1}{\mu} = \frac{50h}{xdockers} \Leftrightarrow \mu = \frac{xdockers}{50}$
L = Nombre de bateaux dans le système $= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{50}{24x-50}$
Coût = C
$C = \frac{2500}{24} * L + 50x$
Comme on veut minimiser le cout on cherche le minimum de C, on prend la fonction C(x) et on la dérive.
$\frac{dc}{dx} = 50 + \frac{2500*50}{24} \frac{-24}{(24x-50)^2}) = 0$
$\Leftrightarrow 50[1 - \frac{2500}{(24x-50)^2}] = 0$
$\Leftrightarrow (24x-50)^2 = 2500$
$\Leftrightarrow$ 2 solutions : $x_1 = 0$ ou $x_2 = \frac{25}{6}$
$25/6 = 4,16$ Donc soit 4 soit 5.
$L = \frac{50}{24x-50}$
$x = 4$ $L \simeq 1,08$
$C = 313$ $x = 5$ $L \simeq 0,71$
$C = 324$
Avec x=5 le coup sera moins élevé.

3.2 Exo 2

Une compagnie aérienne emploi des mécaniciens et des ouvriers. Déterminer le nombre d'ouvriers qui devraient être utilisé au comptoir à outils pour fournir aux mécaniciens des outils nécessaires sachant que le temps moyen entre 2 arrivées est de 50 secondes, le temps moyen de service est de 60 secondes, le salaire des ouvriers est de 45 euros par heure, le salaire des mécaniciens est de 60 euros de l'heure.

M | M | 1 | ∞ | ∞ | PAPS
Processus d'arrivée $= \lambda = \frac{3600}{50} = 72$
Processus de service $= \frac{1}{\mu} = \frac{1/60}{xouvriers} \Leftrightarrow \mu = 60x$
L = Nombre de mécaniciens dans le système $= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{72}{60x-72} = \frac{12}{10x-12} = \frac{6}{5x-6}$

Coût = C
$C = 45x + 60 * L = 45x + \frac{360}{5x-6}$
$f(x) = 45x + 60 * L = 45x + \frac{360}{5x-6}$
$f'(x) = 45 - \frac{360*5}{(5x-6)^2}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1800}{(5x-6)^2} = 45$
$\Leftrightarrow 45(5x-6)^2 = 1800$
$1125x^2 - 2700x - 180 = 0$

λ = nb moyen de clients arriavnt par unitant de temps.
μ = service par unité de temps en moyenne.
$\frac{1}{\mu}$ = Durée moyenne de service.

Chapitre 4

TD4 19/01

4.1 Exo 1

Un organisme publique est ouvert chaque jour ouvrable de 9h à 17h sans interruptions. Il accueil en moyenne 64 usagers par jours. Un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager ceci en un temps moyen de 2m30. Les usagers si nécessaires font la queue dans l'ordre de leurs arrivées. Même si la queue est importante on ne refuse aucun usager. Une étude statistique a permit de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que les arrivées des usagers forment un processus de Poisson. On suppose que le régime permanent est rapidement atteint.

1/ Donner la notation de Kendal de cette file d'attente ; le temps moyen à attendre ; le temps moyen passé par chaque usager dans l'organisme ?

2 / Quelle est la probabilité qu'il n'arrive aucun clients entre 14h et 15h ; que 6 clients arrivent entre 16h et 17h ?

3/ Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers derrière celui en cours de service ; qu'un usager passe plus d'un quart d'h dans l'organisme ; en moyenne et par heure la durée pendant laquelle pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?

1/

M | M | 1 | ∞ | ∞ | PAPS
Processus d'arrivée $= \lambda = \frac{64}{17-9} = \frac{64}{8} = 8$
Processus de service $= \mu = \frac{60}{2,5} = 24$ servcies par h
$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda} = \frac{8}{24(24-8)} = \frac{8}{16*24} = \frac{1}{48} = 0,0208$
$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{24-8} = \frac{1}{16} = 0,0625$

2/

Processus d'arrivée qui suit une Loi de Poisson
$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} * e^{-\lambda t}$
$P_0(t) = \frac{(\lambda*1)^0}{0!} * e^{-\lambda*1} = 1 * e^{-\lambda} = e^{-8} = 3,35.10^{-4}$
$P_6(t) = \frac{(\lambda*1)^6}{6!} * e^{-\lambda*1} = \frac{\lambda^6}{720} * e^{-\lambda} = \frac{8^6}{720} * e^{-8} = 0,12$

3/ $P(X_t = 5) = q_5 = \rho^5(1-\rho) = (\frac{1}{3})^5(1-\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^5 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3^6}$
$\rho = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

4/ $P(\tau > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-24(1-0.333)*\frac{1}{4}} = 0,018$
$q_0 = 1-\rho = 1-1/3 = 2/3 = 0,06$

4.2 Exo 2

Soit un service administratif où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ 4 arrivées par minutes et sont tous accueillis dans l'ordre de leurs arrivés. Il y a S guichet differents et les durée de service pour chaque guichet sont independants et suivent une loi exponentielle de moyenne 1m15s.

1/ Quels est le nombre minimum de guichet à ouvrir pour éviter l'engorgement ?

2/ Quel est le temps moyen de séjour d'un client dans le système et dans la file ?

3/ Déterminer le nombre moyen de guichets inoccupés.

4/ Quels est le nombre de guichet à ouvrir pour que le temps moyen d'attente dans la file ne dépassent pas une minute ?

1/

M | M | S | ∞ | ∞ | PAPS
λ=4 arrivées par minutes
$\mu = \frac{1}{1,25} = \frac{4}{5} = 0.8$ services par heures
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{4}{0.8S} < 1 \Rightarrow 4 < 0.8S$
$\Rightarrow S > 4/0.8 = 5$
Il faut ouvrir au moins 6 guichets.

2/

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$
$q_0 = 0.0045$
$L_q = 2,93$
$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0,73$
$W = 0,73 + \frac{1}{0.8} = 1,98$
$L = \lambda * W = 7,92$

3/ Tout les guichets sont occupés car 7 clients en moyenne et 6 guichets donc tous prit.