

Examen de Processus Stochastiques

Document autorisé : feuille (A4) manuscrite.

Exercice 1 :

Soit un processus markovien à trois états (notés 1, 2 et 3) dont la matrice de transition \underline{P} est :

$$\underline{P} = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1-p-q & p & q \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{vmatrix}$$

- 1) Donner le graphe de la chaîne de Markov associée.
- 2) On pose $q = 0$. En supposant qu'initialement le processus est dans l'état 1, calculer la probabilité de revenir dans l'état 1 : a) si $p=1$; b) si $p \neq 1$. Quelle est dans ce cas, la nature de l'état 1 ?
- 3) On suppose $q = 0$ et $p=1$. Calculer le nombre moyen de passages par l'état 3 en partant de l'état 1.

Exercice 2:

Soit un phénomène d'attente à plusieurs stations. Le taux moyen des arrivées par dizaines de minutes est $\lambda=8$. La durée moyenne du service est de 5 minutes.

Calculer, pour $S = 5$ et 6, le nombre moyen d'unités dans la file d'attente et le temps moyen d'attente dans la file.

Exercice 3:

Un hôpital dispose d'un service d'urgence tenu par un seul médecin. Les malades arrivent selon un processus de Poisson de taux 96 malades par jour (24 h) et les durées des soins sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de moyenne 12 mn pour chaque malade. Les malades sont soignés dans le cabinet du médecin suivant leur ordre d'arrivée et il n'y a pas de limitation de places dans le service d'urgence.

- 1) Déterminer L , L_q , W , W_q .
- 2) On souhaite que le nombre moyen de malades en attente dans la salle (d'attente) soit inférieur ou égal à $1/2$. A partir de quelle durée moyenne des soins, cette condition est vérifiée ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'un malade attende plus de 2 h dans la salle d'attente ?

Bon courage